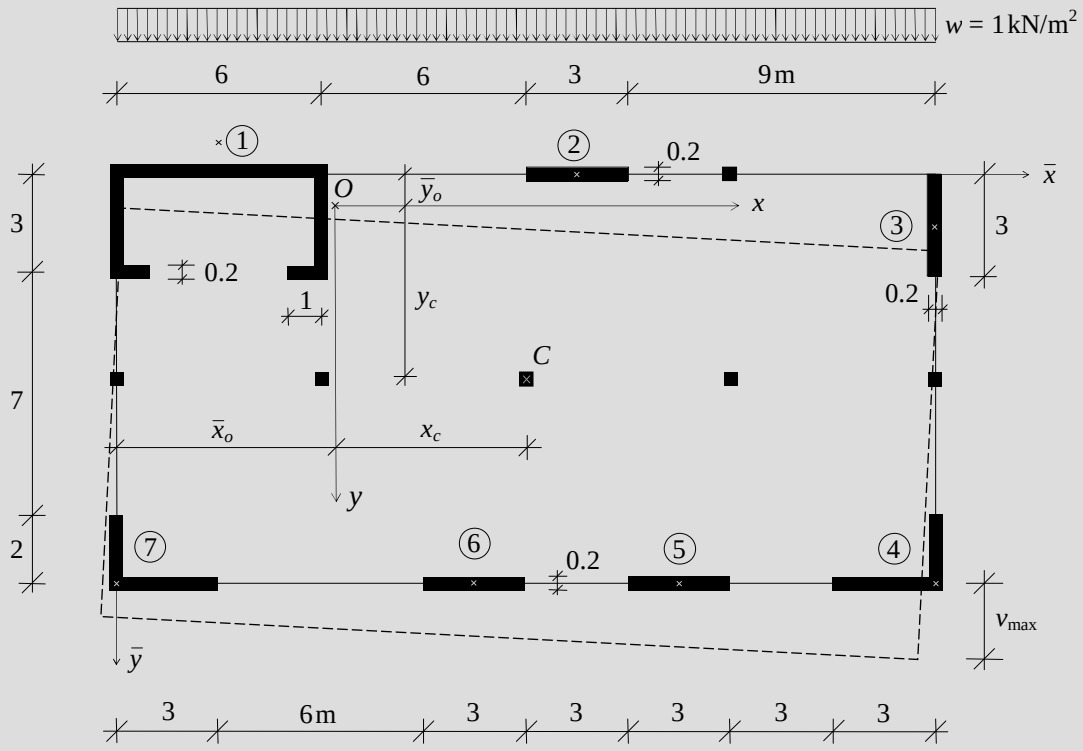
Épületek komplex statikai vizsgálata

Zalka Károly



$E = 25\,\mathrm{kN/mm^2}$, $\gamma = 2.5\,\mathrm{kN/m^3}$, $h = 3$, $n = 10$ $\rightarrow$ $v_{max} = 29\,\mathrm{mm}$, $f = 0.67\,\mathrm{Hz}$, $N_{kr} = 765\,\mathrm{MN}$

Budapest, e-kiadás

© Zalka Károly, 2008-2025, e-kiadás

Szabad ezen kiadványt sokszorosítani, terjeszteni és elektronikus
vagy bármely formában tárolni.
Tilos viszont a kiadványt bármely formában megváltoztatni és bármely formában értékesíteni.

Lektorok:

Lőrincz György PhD
okl. építőmérnök

Horváth Lászlóné Fazakas Margit
okl. építőmérnök

2. kiadás, v6.15: 2025 február 4

Tartalomjegyzék

Előszó 1

1. Épületek globális viselkedése 2
1.1 Bevezetés 2
1.2 A merevítőrendszer elemei 4
1.3 Vízszintes terhek 11
1.3.1 Szél 11
1.3.1.1 Szélteher az MSZ szerint 11
1.3.1.2 Szélteher az Eurocode szerint 13
1.3.2 Földrengés 17
1.3.3 Építési pontatlanság 20
1.3.4 Összehasonlítás 21
1.4 Alakváltozások 22
1.5 Számpélda 25

2. A helyettesítő tartó 32
2.1 A helyettesítő tartó helye 32
2.2 A helyettesítő tartó jellemző tulajdonságai 33
2.3 Az épület térbeli viselkedésének vizsgálata a helyettesítő tartó segítségével 36
2.4 Számpélda 37

3. Merevítőrendszerek szilárdsági vizsgálata vízszintes terhek hatására 40
3.1 Alakváltozások 40
3.2 A merevítőrendszer elemeire jutó terhek 45
3.3 A merevítőrendszer viselkedése vízszintes terhek hatására 48
3.4 Számpélda 49

4. Stabilitás – összegzési tételek 52
4.1 Bevezetés 52
4.2 A Southwell-tétel 54
4.3 A Dunkerley-tétel 56
4.4 A Föppl-Papkovics tétel 58

5. Merevítőrendszerek stabilitásvizsgálata 62
5.1 Síkbeli kihajlás 62
5.2 Elcsavarodó kihajlás – koncentrált tetőteher 68
5.2.1 A feladat differenciálegyenlet-rendszere 68
5.2.2 Kétszeresen szimmetrikus merevítőrendszer 71
5.2.3 Egyszeresen szimmetrikus merevítőrendszer 72
5.2.4 Általános helyzetű merevítőrendszer 73
5.3 Elcsavarodó kihajlás – födémeken egyenletesen megoszló teher 75

5.3.1 A feladat differenciálegyenlet-rendszere 75
5.3.2 Síkbeli kihajlás 76
5.3.3 Tiszta elcsavarodó kihajlás 77
5.3.4 Az alapesetek kombinálódása 82
5.3.5 Összefoglalás 83
5.3.6 Az r_s redukciós tényező 84
5.4 Számpélda 88

6. Merevítőrendszerek legkisebb sajátfrekvenciájának meghatározása 91
6.1 Alapfogalmak 91
6.2 A feladat differenciálegyenlet-rendszere 92
6.3 Az alapfrekvenciák (alap rezgésszámok) 93
6.4 Az alapfrekvenciák kombinálódása 96
6.5 Összefoglalás 97
6.6 Számpélda 98
6.7 Szerkesztési szabályok földrengésveszélyes zónában épülő szerkezetekhez 100

7. Globális biztonsági tényező 101
7.1 Számpéldák 102
7.1.1 „A” elrendezés: egy elfogadhatatlan merevítőrendszer 103
7.1.2 „B” elrendezés: egy jobb szerkezeti megoldás 108
7.1.3 „C” elrendezés: egy optimális merevítőrendszer 113
7.2 Hatékonyságmutató 116

8. Függelék: Merevítőmagok keresztmetszeti jellemzői 118
8.1 Néhány gyakran alkalmazott egyszerű keresztmetszetű mag csavarási jellemzői 118
8.2 L-keresztmetszetű merevítőmag keresztmetszeti jellemzői 119
8.3 ┼-keresztmetszetű merevítőmag keresztmetszeti jellemzői 120
8.4 TT-keresztmetszetű merevítőmag keresztmetszeti jellemzői 122
8.5 □-keresztmetszetű merevítőmag keresztmetszeti jellemzői 123
8.6 Részlegesen zárt Π-mag csavarási jellemzői 124
8.7 Számpélda 126

9. Irodalomjegyzék 128

Előszó

Az „Épületek komplex statikai vizsgálata” című tárgy falakkal és magokkal merevített épületek globális viselkedésével foglalkozik. Igen fontos – különösen nagyobb szerkezeteink esetében – hogy a szerkezetnek ne csak egyes elemeit, hanem a teljes szerkezetet is vizsgáljuk a tartószerkezet tervezési/ellenőrzési folyamata során. Ezt a „globális” megközelítést a számítástechnika területén az utóbbi évtizedekben bekövetkezett hatalmas fejlődés és az elméleti kutatások új eredményei teszik lehetővé. A téma fontosságát és aktualitását az is mutatja, hogy a szerkezetek vizsgálatának globális koncepciója és az itt alkalmazott módszerek az új Eurocode szabványsorozat egyes elemeibe is bekerültek. Ezen túlmenően, az itt közölt méretezési képletek közül több – bár minden magyarázat nélkül – megtalálható a szabvány megfelelő füzeteiben. A jegyzet célja az, hogy az elméleti háttér megvilágításával és a globális vizsgálat néhány analitikus módszerének bemutatásával olyan ismereteket adjon, amelyek a gyakorlati szerkezettervezés során közvetlenül is alkalmazhatók.

A bemutatott számítási eljárások egyszerűségüknél fogva alkalmasak kézi számítások elvégzésére. Táblázatkezelő és matematikai programok (pl. Excel, Mathcad, stb.) alkalmazásával a már így is egyszerű kismértékű munka tovább csökkenthető és komplex épületek globális (szilárdsági, stabilitási és dinamikai) vizsgálata percek alatt elvégezhető. Lehetőség nyílik így – önálló vizsgálatok végrehajtása és a viselkedés jellegének gyors megismerése mellett – részletes számítógépes vizsgálatok eredményeinek gyors ellenőrzésére is. Ez igen fontos, mert bár napjainkban számítógéppel mindent kiszámolhatunk, a viszonylag nagy számú adat bevitele jelentős hibalehetőséggel jár és a komplex viselkedés miatt esetenként nehéz a gépi számítás eredményeinek megbízhatóságát megítélni.

A tantárgy a statika olyan fejezeteit tárgyalja, amelyek elmélete az átlagosnál elmélyültebb tanulmányozást igényel és a szokásosnál komolyabb matematikai apparátust használ. Az anyag sok képletet tartalmaz. Közöl néhány levezetést is, amelyek elsősorban a magyarázat céljait szolgálják. Megtanulni a számítási módszereket, az alapelveket és a gazdaságos és biztonságos szerkezetek kialakításának legfontosabb szempontjait kell.

A tárgyalt anyag túlnyomó része elveket mutat be és így szabványfüggetlen. Ahol viszont a szabvány előírásaitól függő információkat közlünk – például az 1.3 alfejezetben – ott az alkalmazást megelőzően minden esetben ellenőrizni kell, hogy az alkalmazás pillanatában érvényes szabvány nem rendelkezik-e a bemutatottaktól eltérően. Minden esetben az éppen érvényes szabvány előírásai szerint kell eljárni.

Budapest, 2008 augusztus

Előszó a 2. kiadáshoz

Néhány kisebb módosítás mellett az anyag kiegészült a más forrásokból igen nehezen összeszedhető merevítőmagok csavarási és egyéb keresztmetszeti jellemzőit tartalmazó 8. fejezettel.

Az eredeti kéziratokat Farkas Dániel és Rákóczy Katalin nézte át és a jegyzetet Lőrincz György és Horváth Lászlóné Fazakas Margit lektorálta. Gondos munkájukat ezúton is szeretném megköszönni.

Budapest, 2012 január Zalka Károly

Jelen (v6.15) e-kiadás csak néhány apróbb módosítást tartalmaz.
2014-ben elkészült a jelen jegyzet folytatásának is tekinthető „Keretekkel, falakkal és magokkal merevített épületek globális statikai vizsgálata” c. jegyzet.

Budapest, 2025 február Z. K.

1

Épületek globális viselkedése

A hagyományos tervezési eljárás általában az egyes szerkezeti elemek (oszlopok, gerendák, födémlemezek, falak, stb.) vizsgálatára épül; ez az elemenként történő, vagy más néven „lokális” tervezés. Ez természetes, hiszen a szerkezeti rendszer elemekből áll. Elméleti vizsgálatok, kísérletek és szerkezetek tönkremenetele (esetenként a várható tönkremenetel elmaradása) azonban azt mutatják, hogy a komplex szerkezetek nem tekinthetők egyszerűen az alkotó elemek együttesének. A teljes szerkezet teherbírása gyakran nagyobb, mint az egyes elemek teherbírásának „összege”, mert a jól megtervezett szerkezet térbeli merevsége biztosítja, hogy az elemek együttdolgoznak és a rendszer az elemek komplex egymásrahatása következtében „globális” módon reagál a külső terhekre.

A lokális, illetve globális megközelítés a szerkezet biztonságának szintjét is befolyásolhatja és jelentős mértékű alul- illetve túlméretezéshez is vezethet, valamint különböző gazdaságosságú szerkezeteket eredményezhet. Egy szerkezet, amelyet az egyes elemeinek optimális megtervezésével alakítottunk ki, gazdaságtalannak bizonyulhat, ha a szerkezet egészét tekintjük. A biztonság és gazdaságosság vizsgálatánál kiderülhet, hogy bár a rendszer egyes elemei esetleg nem rendelkeznek megfelelő biztonsággal, a teljes rendszer mégis állékony marad, mert az erősebb elemek megsegítik a kevésbé erős elemeket. De az is előfordulhat, hogy a szerkezet elemeinek egymásrahatása kedvezőtlenebb helyzetet teremt.

Optimális esetben a lokális és globális vizsgálatok párhuzamosan történnek és kiegészítik egymást. Míg kisméretű szerkezeteknél általában csak lokális vizsgálat végrehajtására kerül sor, a szerkezet méretének növekedésével egyre inkább előtérbe kerül a globális viselkedés és ennek következtében a globális vizsgálat szükségessége. (Ki gondolna például egy családi ház esetében globális vizsgálatra – bár a körbemenő koszorú éppen a globális viselkedés létrejöttét teszi lehetővé.) A globális vizsgálat szükségessége sok esetben együtt jár a vízszintes terhek jelentőségének növekedésével. Ahogy egy földszintes családi ház esetében fel sem merül az, hogy a vízszintes szélteher veszélyes lehet, egy tízszintes irodaház statikai tervezése során a vízszintes szélteher – és ezzel együtt a globális viselkedés – figyelembevétele elengedhetetlen.

Hangsúlyozni szeretnénk, hogy a jegyzet tárgya a globális vizsgálat – illetve az épület vízszintes merevségének vizsgálata – és magával a méretezéssel és az egyes szerkezeti elemek részletes szilárdsági vizsgálatával ez az anyag nem foglalkozik.

1.1 Bevezetés

Az épületek elsőrendű szerkezeti elemei a vízszintes és függőleges teherhordó szerkezetek. A vízszintes és függőleges teherhordó szerkezetek segítségével az épület függőleges és vízszintes terheket hord. A függőleges terhek (állandó és esetleges terhek) a vízszintes teherviselő elemek (gerendák, födémlemezek) segítségével adódnak át függőleges teherviselő elemekre (oszlopokra, keretekre, falakra, magokra). A szerkezet erőjátéka a függőleges terhek hatására viszonylag egyszerű. A mértékadó födémteher megoszlása a függőleges teherviselő elemek között általában minden nehézség nélkül (terhelő mezők kijelölésével) megállapítható.

A vízszintes szélteher az épületet határoló homlokzati szerkezetek közvetítésével először a

födémekre adódik át, majd a födémek a vízszintes terheket továbbítják azokra a függőleges teherhordó szerkezetekre, amelyek képesek azokat az alapokra átadni. (Hasonlóan viselkedik az épület a földrengés és az építési pontatlanság okozta vízszintes terhek esetében.) A vízszintes terhek továbbítására képes függőleges teherhordó elemek a keretek, merevítőfalak és merevítőmagok. A keretek, merevítőfalak és magok által alkotott rendszer az épület merevítőrendszere. A merevítőrendszer erőjátéka a közreműködő (rendszerint) nagy számú szerkezeti elem, a közöttük létrejövő kölcsönhatások és a térbeli viselkedés miatt általában igen bonyolult.

A feladat komplex volta miatt a globális vizsgálatot rendszerint a merevítőrendszeren hajtjuk végre és elhanyagoljuk a „másodlagos" (nem-teherviselő) szerkezeteket, mint például a homlokzati elemeket és a válaszfalakat. Egy átfogó vizsgálat három vizsgálattípus végrehajtását jelenti. A vizsgálatok közül a szilárdsági vizsgálat a legfontosabb, amelyet minden esetben el kell végezni. A vizsgálatnak bizonyítania kell, hogy a vízszintes és függőleges terhekből számított mértékadó jellemzők minden esetben kisebbek a határjellemzőknél. A stabilitásvizsgálat során azt kell kimutatni, hogy a függőleges teherrel terhelt épület stabil marad. Ezt a vizsgálatot a gyakorlati szerkezettervezés során általában nem szokták elvégezni, pedig amint azt a következő fejezetekben látni fogjuk, a szilárdsági vizsgálat során amúgy is meghatározandó merevségi és geometriai jellemzők segítségével a globális stabilitásvizsgálat viszonylag könnyen elvégezhető. A nemzeti szabványaink korábban csak korlátozottan tartalmaztak földrengésre vonatkozó előírásokat és így dinamikai vizsgálat elvégzésére csak esetenként került sor. Az 1998-ban életbe lépett építési törvény viszont kötelezően előírja az épületek földrengés elleni méretezését, ami dinamikai vizsgálat végrehajtását teszi szükségessé. A vizsgálat során ki kell mutatni, hogy az épület rezgései nem okoznak a megengedettnél nagyobb feszültségeket, valamint nagy és maradó alakváltozásokat. Egyszerűbb esetekben a dinamikai vizsgálat – a helyettesítő statikai módszer alkalmazásával – visszavezethető szilárdsági vizsgálatra.

Épületek egészének vizsgálata során alapvetően két utat választhatunk. Vagy valamely „pontos" módszert (pl. erőmódszert, mozgásmódszert, végeselem módszert) alkalmazunk, vagy pedig közelítő számítást hajtunk végre. Az épületet alkotó elemek nagy száma miatt a pontos módszerek alkalmazása rendszerint igen nagy méretű feladathoz vezet, amely számítógép használatát igényli. Ekkor a vizsgálathoz szükséges hatalmas adatmennyiség kezelése és az eredmények korrekt értékelése igen nagy figyelmet követel meg. A közelítő módszerek rendszerint analitikus megoldásokra épülnek és zárt képleteket és táblázatokat/grafikonokat alkalmaznak, ami jelentősen lerövidíti a számítási munkát. Ekkor a szemléletes (és gyakran zárt alakú, egyszerű) képletek alkalmazhatósági határainak és a közelítések mértékének megállapítása fontos feladatot jelent. Optimális esetben mindkét megközelítést alkalmazzuk: az előtervezés során közelítő módszert alkalmazunk (az optimális szerkezeti megoldás kialakítása érdekében esetleg ismételten, több szerkezeti variációt is megvizsgálva), majd a pontos számítás végrehajtása után véglegesítjük a szerkezetet. A véglegesítés során ismét tanácsos a kulcsfontosságú szerkezeti elemeket közelítő módszerrel is ellenőrizni. Mivel a pontos és a közelítő módszerek rendszerint eltérő elméleti alapokra épülnek, párhuzamos alkalmazásuk (és a megfelelő mértékben közelálló eredmények) komoly biztosítékot nyújthatnak az eredmények megbízhatóságára.

A következő fejezetekben közelítő módszereket mutatunk be a globális vizsgálat végrehajtásához, amelyekhez szükséges néhány egyszerűsítő feltételt bevezetni. A merevítőrendszerre vonatkozó feltételrendszer felállítása kompromisszum eredménye: legyen a számítás egyszerűbb, de az eredmények még maradjanak az építőmérnöki számításoknál elfogadott pontossági határok között. Így a következő fejezetekben az alábbi feltételezésekkel élünk:

1) a merevítőrendszer elemei homogén anyagúak, rugalmasan viselkednek és kis alakváltozásokat végeznek,

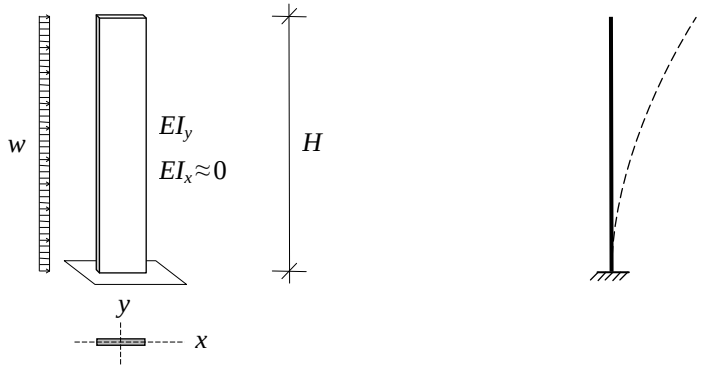
2) a merevítőrendszer elemei alul befogottak,
3) a merevítőrendszer elemeinek alaprajzi elrendezése minden szinten azonos,
4) az épületek födémei saját síkjukban merev tárcsát alkotnak, síkjukra merőlegesen viszont hajlékonyak.

1.2 A merevítőrendszer elemei

Az épület merevítőrendszere azon függőleges teherviselő elemek rendszere (falak, keretek, nyílásokkal áttört falak és magok), amelyek elsőrendű feladata az épületre ható vízszintes terhek felvétele és továbbítása az alapozásra. Az önálló oszlopokat – a falakhoz/keretekhez/ magokhoz képest lényegesen kisebb merevségük miatt – nem szoktuk figyelembe venni a merevítőrendszer vizsgálatánál.

Falak

Talán a legáltalánosabban alkalmazott merevítő elemek. A munkaigényes kivitelezés miatt a kivitelezők nem kedvelik. Igen egyszerű erőjátékú szerkezetek. Egy fal a saját síkjában igen hatékony lehet (1.1/a ábra), EI_y merevséggel (ahol y a hajlítás síkjára merőleges tengely), de síkjára merőlegesen nem rendelkezik számottevő merevséggel ($EI_y >> EI_x \approx 0$). A H épület-magasságú falak általában hajlítási alakváltozást végző hajlított konzolként működnek (1.1/b ábra). Nyírási alakváltozásuk (a hajlítási alakváltozáshoz képest) kicsi, amelyet így el szoktunk hanyagolni. – Lásd az (1.41) képletet és a hozzá tartozó megjegyzéseket.



a) fal síkjában vízszintes teherrel b) alakváltozás

1.1 ábra. Merevítőfal és hajlítási alakváltozása.

Keretek

Gyakran alkalmazott, de merevítési szempontból nem túl hatékony szerkezetek. Acélból jól (gyorsan) kivitelezhetők. Erőjátékuk bonyolult, mert hajlítási és nyírási alakváltozást is végeznek. Az erőjáték mégis viszonylag egyszerűen követhető, mert a komplex alakváltozás (1.2/a ábra) három igen egyszerű alakváltozási típusra bontható, amelyek külön-külön a hozzájuk tartozó merevségekkel jellemezhetők.

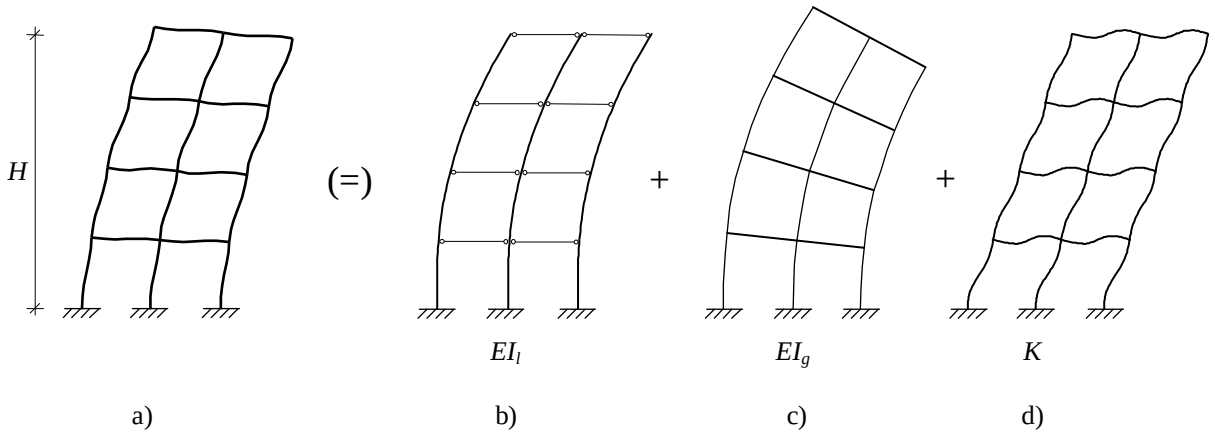
A keret a teljes H épületmagasságra kiterjedő *lokális hajlítási alakváltozás* során úgy működik, mintha csak az oszlopai állnának ellen a külső tehernek (1.2/b ábra). A gerendák szerepe ekkor csak arra szorítkozik, hogy csuklós végű rudakként együttdolgoztatják az oszlopokat.

A *lokális hajlítási merevség* az

$$EI_l = E\sum_{i=1}^{n} I_{c,i} = E(I_{c,1} + I_{c,2} + ... + I_{c,n}) \tag{1.1}$$

képlet segítségével határozható meg, ahol

E a szerkezet rugalmassági tényezője,
$I_{c,i}$ az i-edik keretoszlop tehetetlenségi nyomatéka,
n a keretoszlopok száma.



1.2 ábra. a) Keret alakváltozása, b) lokális hajlítási alakváltozás, c) globális hajlítási alakváltozás, d) nyírási alakváltozás.

A keret teljes magasságára kiterjedő *globális hajlítási alakváltozás* során a keret úgy viselkedik, mintha az oszlopok egy képzeletbeli tömör rúd hosszanti szálai volnának, amelyek az alakváltozás során összenyomódást, illetve megnyúlást szenvednek (1.2/c ábra). A gerendák szerepe ekkor az, hogy – végtelen merev rudakként – együttdolgoztatják az oszlopokat. A *globális hajlítási merevség* az

$$EI_g = E\sum_{i=1}^{n} A_{c,i}t_i^2 = E(A_{c,1}t_1^2 + A_{c,2}t_2^2 + ... + A_{c,n}t_n^2) \tag{1.2}$$

képlet segítségével határozható meg, ahol az $A_{c,i}t_i^2$ tagok a tehetetlenségi nyomaték számításánál szokásos Steiner-tagok és

$A_{c,i}$ az i-edik keretoszlop keresztmetszeti területe,
t_i a keretoszlopok távolsága az oszlopkeresztmetszetek súlypontjától.

A globális hajlítási merevség nagyságrend(ekk)el nagyobb szokott lenni a lokális hajlítási merevségnél.

A *keret nyírási alakváltozása* azzal a ténnyel kapcsolatos, hogy a keret oszlopai és gerendái a csomópontok között még külön is meggörbülnek (1.2/d ábra). A *nyírási merevség* értéke az

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_b} + \frac{1}{K_c} \qquad \rightarrow \qquad K = K_b \frac{K_c}{K_b + K_c} \tag{1.3}$$

képlet segítségével határozható meg. A képletben

$$K_b = 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{6EI_{b,i}}{l_i h} \tag{1.4}$$

a keretgerendákhoz tartozó nyírási merevség, ahol

$I_{b,i}$ az i-edik gerenda tehetetlenségi nyomatéka,
l_i az i-edik keretállás fesztávja,
h az emeletmagasság.

A keretoszlopokhoz tartozó K_c nyírási merevséget a szilárdsági és dinamikai vizsgálathoz a

$$K_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{12EI_{c,i}}{h^2} \tag{1.5}$$

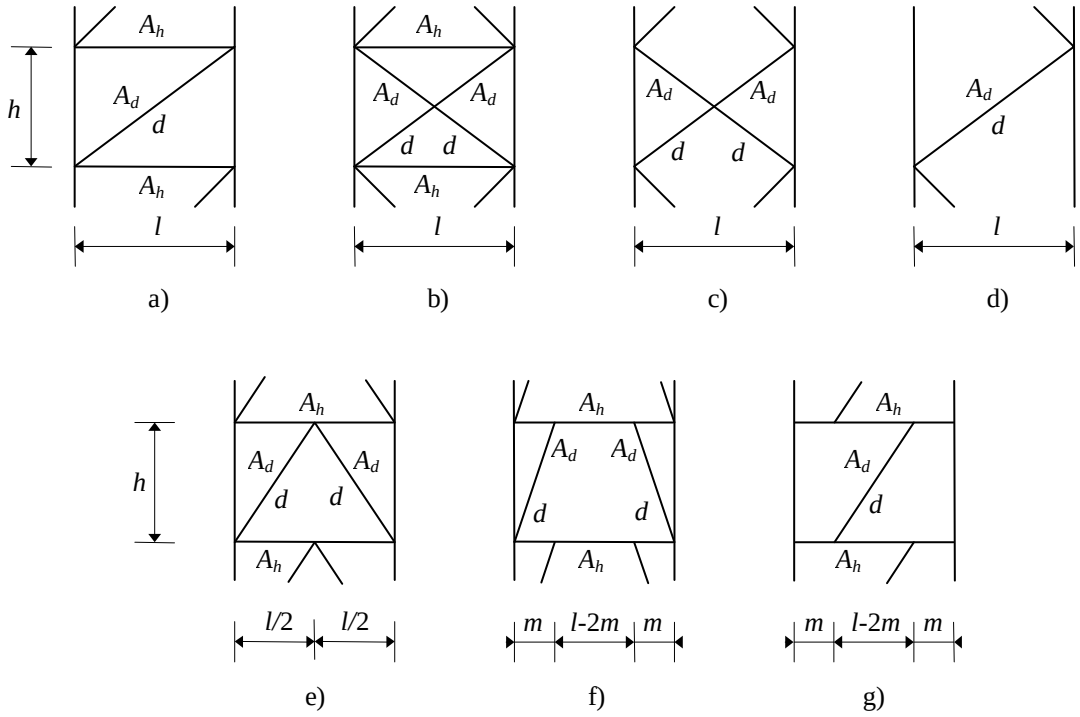
képletből, a stabilitási vizsgálathoz pedig a

$$K_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi^2 EI_{c,i}}{h^2} \tag{1.6}$$

képletből kell kiszámítani.

Alacsony, zömök (többnyílású) keretekre a nyírási alakváltozás, míg magas, karcsú keretekre a hajlítási alakváltozás a jellemző, de általában a hajlítási és nyírási alakváltozások kombinációjára kell számítani.

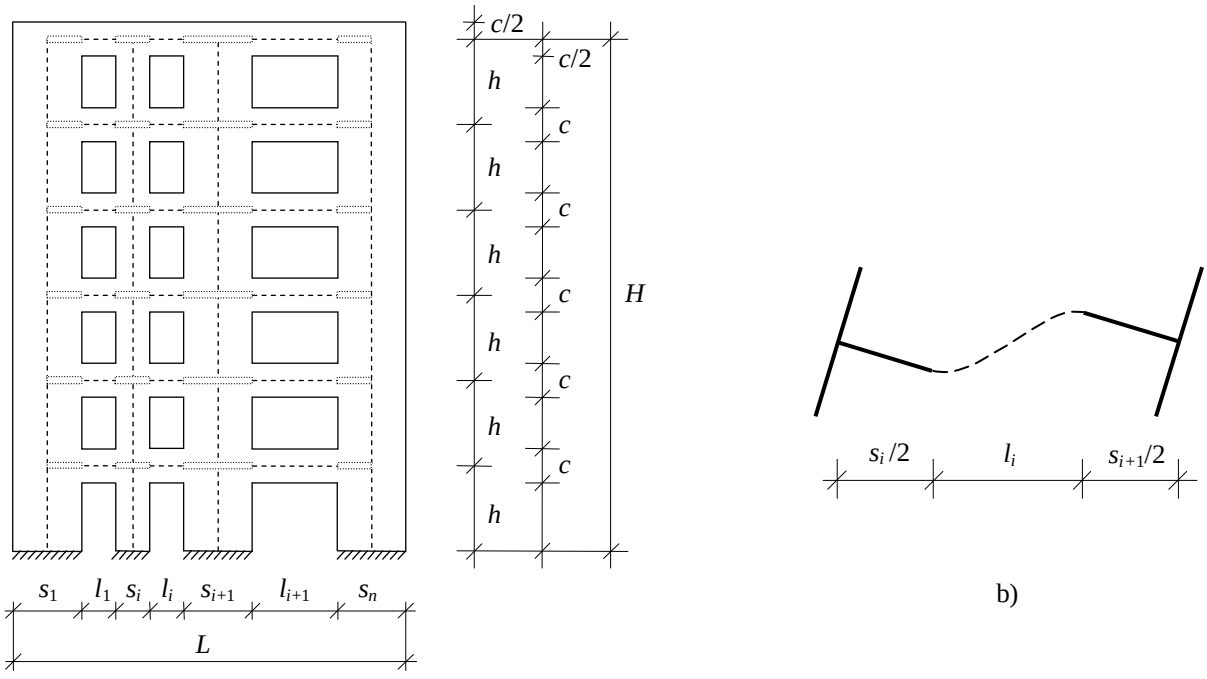
A keretek hatékonysága jelentősen növelhető keresztmerevítés beépítésével. Ekkor viszont tekintettel kell lenni a keresztmerevítés helyigényére, ami funkcionális okokból nem mindig kielégíthető. Különböző geometriai kialakítású keresztmerevítések terjedtek el (1.3 ábra); ezek esetében a lokális és globális hajlítási merevség meghatározása a fent ismertetett képletek segítségével, változatlanul történik, míg a nyírási merevség képletei különböző mérnöki kézikönyvekben megtalálhatók. A „Keretekkel, falakkal és magokkal merevített épületek globális statikai vizsgálata” c. jegyzet is tartalmazza ezeket a képleteket.



1.3 ábra. Keretek keresztmerevítéssel. a) Szimpla, b)–c) dupla, d) folyamatos, e)–f) K-merevítés, g) térd-merevítés.

Nyílásokkal áttört falak

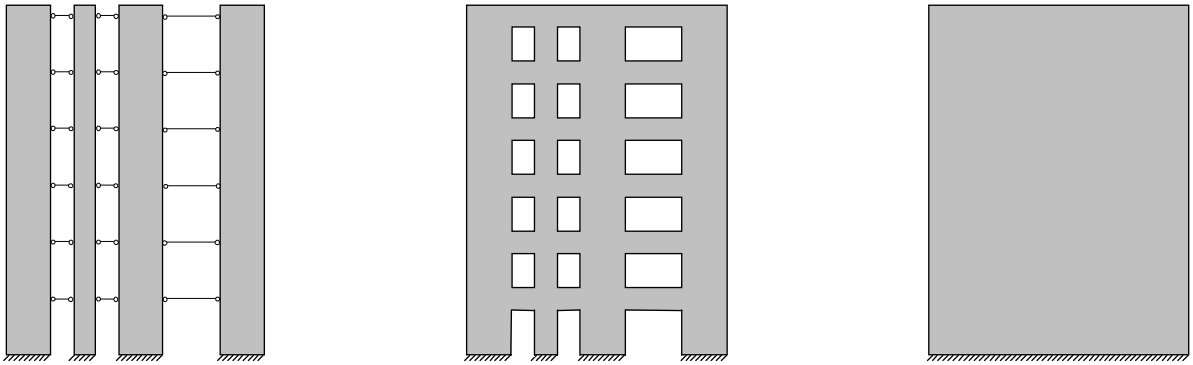
Egy nyílásokkal áttört fal (1.4/a ábra) pontos vizsgálata igen bonyolult, mert nem rúdszerkezetként, hanem tárcsaként működik, amely ráadásul lyukakkal gyengítve van. Modellezhető rúdszerkezetként is, de a számítás még így is bonyolult. A rúdszerkezeti modell keretszerkezethez vezet, amikor két dolgot kell figyelembe venni a keretszerkezetnél szokásos modell kialakításához: az átkötő gerendák nyírási alakváltozását és a csomópontok környezetében a csatlakozó szakaszok megnövekedett merevségét (1.4/b ábra).



1.4 ábra. a) Nyílásokkal áttört fal, b) végtelen merev gerendaszakaszok.

A lokális és globális hajlítási merevség (EI_l és EI_g) valamint a nyírási merevség (K) egyaránt számottevő hatást gyakorolhat a nyílásokkal áttört fal viselkedésére.

Esetenként szükség lehet arra, hogy legalább gyors becslést tudjunk adni egy nyílásokkal áttört fal teljesítményére. Ilyenkor igen egyszerűen adhatunk alsó és felső korlátot. Ha teljesen lemondunk az átkötő gerendák merevségéről és csak a falsávokat vesszük figyelembe (amelyeket a gerendák csuklós rudanként csak együttdolgoztatnak, 1.5/a ábra), akkor a biztonság javára közelítünk és a falsávok tehetetlenségi nyomatékainak összegzésével alsó korláthoz jutunk. Ha viszont magukat a nyílásokat tekintjük nemlétezőnek és a nyílásokkal áttört falat egy teljes szélességű tömör falnak tekintjük (1.5/c ábra), akkor felső korlátot kapunk. A nyílásokkal áttört falunk (1.5/b ábra) minden bizonnyal a két határ között teljesít.

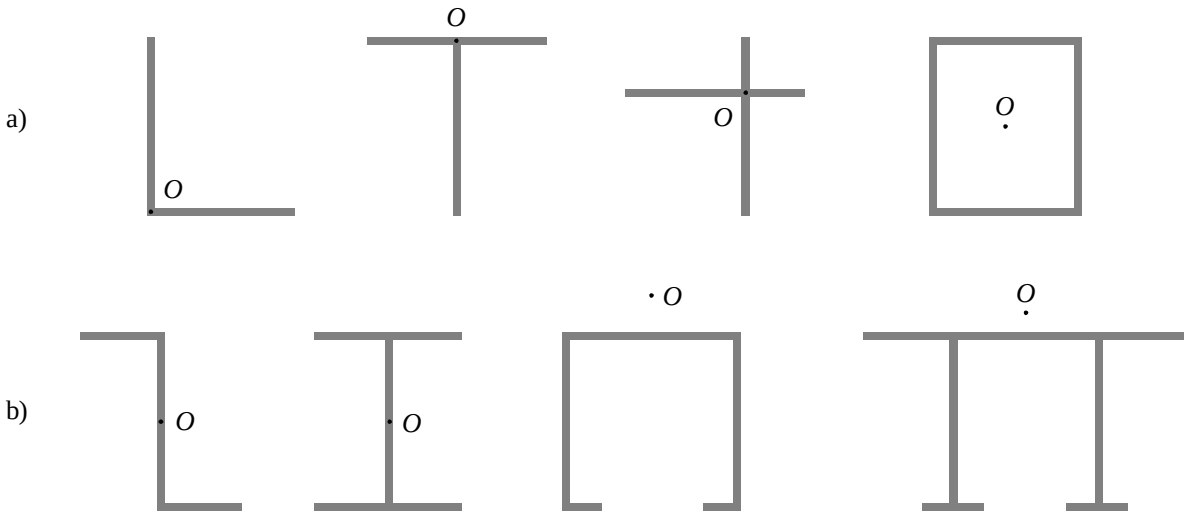


a) b) c)

1.5 ábra. Nyílásokkal áttört fal szélső esetei. a) Csuklós rudakkal összekapcsolt falsávok, b) nyílásokkal áttört fal, c) tömör fal.

Merevítőmagok

Bizonyos szintszám elérése után az épületen belüli függőleges közlekedés lehetőségének biztosítása és a gépészeti vezetékek elhelyezése külön, erre a célra kialakított, úgynevezett magok betervezését teszi szükségessé (1.6 ábra). A merevítőmagok térbeli elemek és a hajlítási merevségeik (EI_x, EI_y és EI_{xy}) mellett általában jelentős csavarási merevségük is van.



1.6 ábra. Merevítőmagok. a) $I_\omega \approx 0$, b) $I_\omega > 0$. *O*: nyírásközéppont.

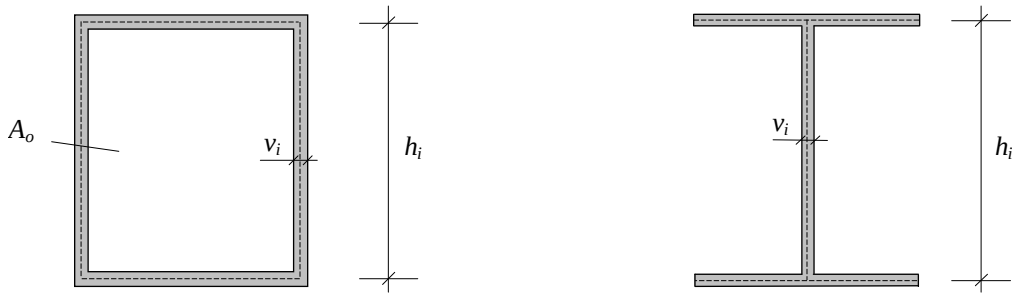
A tiszta (Saint-Venant-féle) csavarási merevség (*GJ*) zárt szelvények esetében általában jelentős értékű lehet. A tiszta csavarási tehetetlenségi nyomaték zárt szelvényeknél a Bredt-féle képletből

$$J = \frac{4A_o^2}{\sum_{i=1}^{m} \frac{h_i}{v_i}} \tag{1.7}$$

határozható meg, ahol h_i és v_i a szelvényt alkotó falszakaszok hossza és vastagsága, m a falszakaszok száma és A_o a falak tengelyei által közbezárt terület (1.7/a ábra). A nyírási rugalmassági tényező értékét a

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.8}$$

képlet szolgáltatja, ahol ν a Poisson-féle tényező. A Poisson-féle tényező értéke – anyagminőségtől függően – általában $\nu = 0.2 \ldots 0.3$.



a) zárt szelvény b) nyitott szelvény

1.7 ábra. Jelölések a csavarási tehetetlenségi nyomaték számításához.

Nyitott szelvények (1.7/b ábra) tiszta csavarási tehetetlenségi nyomatéka általában jóval kisebb. Értékét a

$$J = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{m} h_i v_i^3 \tag{1.9}$$

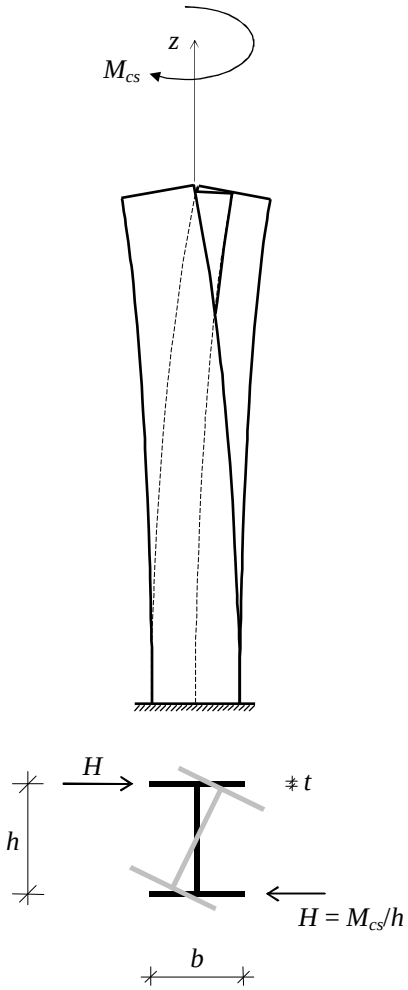
képletből határozhatjuk meg.

A merevítőmagok – térbeli viselkedésüknek köszönhetően – a csavarásnak egyes falszakaszaik hajlítása révén is ellenállhatnak. A jelenség egy alul mereven befogott, felül szabad végű és M_{cs} csavarónyomatékkal terhelt I-szelvény esetén szemléletesen is bemutatható (1.8 ábra).

A csavarás során az I-szelvény övei az M_{cs} csavarónyomatékból származó H erők hatására hajlítást szenvednek és hajlítási merevségüket ($tb^3/12$) a csavarás tengelyétől mért karjukkal ($h/2$) – Steiner-tag-szerűen – „aktivizálják”. Az így meghatározott csavarási ellenállást az I-szelvény övhajlítási csavarási tehetetlenségi nyomatékának is nevezik:

$$I_\omega = \frac{tb^3}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2 2 = \frac{tb^3h^2}{24} \qquad [\mathrm{m}^6] \tag{1.10}$$

Általános esetben a jelenséget a szelvények falsávjainak öblösödése miatt öblösödési csavarásnak és az I_ω keresztmetszeti jellemzőt öblösödési tehetetlenségi nyomatéknak is nevezik. Az öblösödési tehetetlenségi nyomaték meghatározása általában komplex feladat, melynek tárgyalása túlmutat e jegyzet keretein. A nyitott szelvények (1.6/b ábra) öblösödési tehetetlenségi nyomatéka általában nagy érték, a zárt szelvényeké – és néhány speciális geometriával rendelkező nyitott szelvényé (1.6/a ábra) – viszont rendkívül kicsi és így elhanyagolható. A leggyakrabban előforduló merevítőmagok öblösödési tehetetlenségi nyomatékai – más keresztmetszeti jellemzőkkel együtt – a Függelékben találhatók.



1.8 ábra. I-tartó öblösödési csavarása.

A merevítő elemek egymáshoz való viszonya (az alakváltozások szempontjából)

A merevítőrendszer vizsgálata szempontjából kulcskérdés, hogy a rendszert alkotó elemek milyen alakváltozást végeznek. A globális vizsgálat viszonylag egyszerűen elvégezhető, ha a rendszer elemei csak tisztán nyírási alakváltozást vagy csak tisztán hajlítási alakváltozást végeznek. Tisztán nyírási alakváltozást végző merevítőrendszer (amikor például a rendszert alacsony soklábú keretek alkotják) a gyakorlatban nem nagyon fordul elő, így ez az eset inkább elméleti jelentőségű. Amikor a merevítőrendszer csak merevítőfalakat és magokat tartalmaz, akkor az alakváltozás hajlítási alakváltozásnak tekinthető és viszonylag egyszerűen kezelhető. Bonyolítja a helyzetet, amikor a hajlítási alakváltozást végző falak és magok mellett megjelennek keretek és nyílásokkal áttört falak is, mert ezek nyírási alakváltozás „komponense” nem hagyható figyelmen kívül és a vizsgálat ilyenkor viszonylag nehezen kezelhető differenciálegyenletekre vezet, amelyeknek általában nincs zárt alakú megoldása. Ilyen esetekben – ha a feladatot viszonylag egyszerű szinten akarjuk tartani – két közelítő eljárás javasolható: a) a nyírási alakváltozást végző elemeket elhanyagoljuk a (náluk általában amúgy is merevebb) falakhoz/magokhoz képest, b) a nyírási alakváltozást végző elemeket tömör falakkal helyettesítjük (például azonos tetőponti eltolódás vagy azonos kritikus teher megkövetelése alapján).

Jelen jegyzet a csak hajítási alakváltozást végző, tömör merevítőelemekből (falakból és magokból) álló merevítőrendszerekkel foglalkozik. A vegyes (hajlítási és nyírási alakváltozást is végző merevítőelemekből álló) merevítőrendszerek tárgyalása a „Keretekkel, falakkal és magokkal merevített épületek globális statikai vizsgálata” című jegyzetben található.

A merevítőrendszer térbeli viselkedése

Néhány esettől eltekintve a merevítőrendszer komplex módon viselkedik. Ez a viselkedés általában térbeli, amikor a külső terhek hatására az épület (kétirányú) eltolódásokat és elcsavarodást is végez. Bizonyos speciális esetekben ez a térbeli viselkedés viszonylag egyszerű módon, elemi egyensúlyi és alakváltozási egyenletek segítségével vizsgálható – erre mutatott be példákat korábbi tanulmányaink során a „Tartók statikája II" című tárgy. Általános esetben azonban elkerülhetetlen a merevítőrendszer „tényleges", háromdimenziós vizsgálata. Ekkor a helyettesítő tartó (2. fejezet) bevezetése teszi lehetővé a merevítőrendszer szemléletes kezelését. Fontos szerepet játszik a térbeli viselkedés során a nyírásközéppont (v. csavarási középpont, v. merevségi középpont). A nyírásközéppont az a pont (rendszerint az épület alaprajzában), amelyen áthaladó vízszintes erő hatására az épület eltolódik, de nem csavarodik el.

1.3 Vízszintes terhek

A vízszintes terhek meghatározása általában szabványok által szabályozott feladat. A szabványelőírások időről időre változhatnak és a tervező felelőssége, hogy ezeket a változásokat figyelemmel kísérje és figyelembe vegye a napi tervezés során, és a terhek meghatározásánál minden esetben a pillanatnyilag érvényes szabványok előírásainak megfelelően járjon el. A következőkben bemutatunk egy-egy módszert a jellegzetes vízszintes terhek meghatározására. Ezzel az a célunk, hogy megmutassuk a három legfontosabb vízszintes teherfajta (szél, földrengés és az építési pontatlanságból keletkező vízszintes teher) jellegzetességeit, illetve képet alkossunk ezen terhek nagyságrendjéről és összehasonlíthassuk várható hatásaikat.

A merevítőrendszer vizsgálatánál természetesen a függőleges terhek hatását is figyelembe kell venni, de ezzel a feladattal ez a fejezet (és a jegyzet) nem foglalkozik.

1.3.1 Szél

Többszintes épületek vízszintes terhei közül talán a szél a legfontosabb. A szélteher meghatározásával korábban nemzeti szabványok foglalkoztak, melyek szerepét fokozatosan átvették az európai szabványok. Itt először összefoglaljuk a 2011 december 31.-ig érvényes magyar szabvány [MSZ, 1986], majd az azt követően életbe lépett és 2012-től érvényes Eurocode legfontosabb előírásait. A „régi" MSZ bemutatását rendkívüli egyszerűsége, megbízhatósága és szemléletessége indokolja. Az MSZ ismerete azért is hasznos, mert létesítményeink jelentős részét az MSZ előírásai szerint tervezték.

1.3.1.1 Szélteher az MSZ szerint

Az MSZ 15021/1 [1986] szabvány szerint a szélteher általános esetben helyettesítő statikus szélnyomással vehető figyelembe. A szélnyomás alapértékét a

$$p_w = cw_o \qquad [\mathrm{kN/m^2}] \tag{1.11}$$

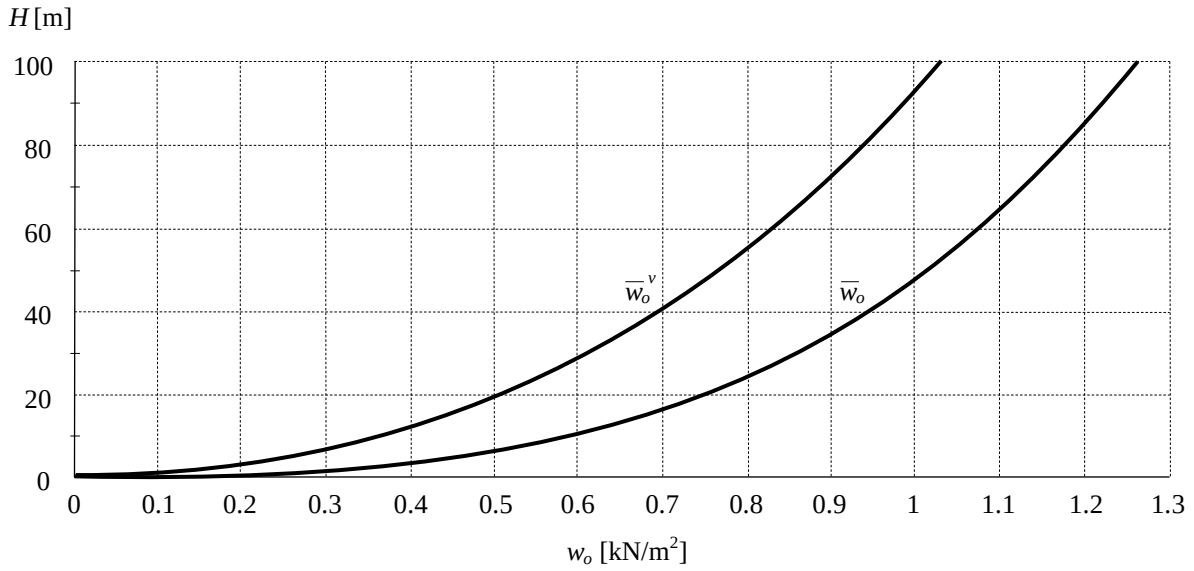
összefüggésből kell meghatározni, ahol c az alaki tényező és w_o az átlagos torlónyomás. Az átlagos torlónyomás értékét a beépítettség függvényében kétféleképpen határozzuk meg. Az átlagos torlónyomás értékét nyitott térségben, szabadon álló, 100 m-nél nem magasabb, állandó szélességű építmények esetében a

$$w_o = \overline{w}_o = 0.603\left(\frac{H}{10}\right)^{0.32} \qquad [\mathrm{kN/m^2}] \tag{1.12}$$

összefüggésből számíthatjuk ki, ahol H [m] az épület magassága. Az átlagos torlónyomás a

$$w_o = \overline{w}_o^{\,v} = 0.373\left(\frac{H}{10}\right)^{0.44} \qquad [\mathrm{kN/m^2}] \tag{1.13}$$

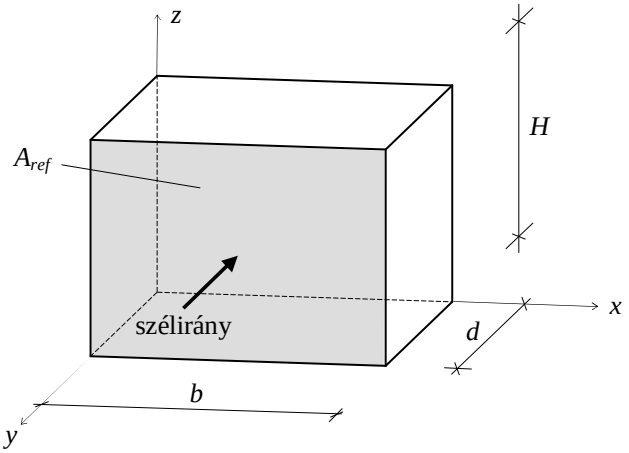
csökkentett értékkel vehető számításba akkor, ha az építmény környéke 10 méternél magasabb épületekkel egyenletesen beépített városi belterület vagy ipartelep. A könnyebb kezelhetőség érdekében a $\overline{w}_o$ és $\overline{w}_o^{\,v}$ értékeket az 1.9 ábrán is feltüntettük.



1.9 ábra. Az átlagos torlónyomás értékei; $\overline{w}_o$: nyitott térségben, $\overline{w}_o^{\,v}$: beépített környezetben.

A c alaki tényező értéke a szél által támadott oldalon (ahol szélnyomás lép fel) $c^+ = 0.8$. A szélárnyékos oldalon (ahol szélszívás lép fel) az alaki tényezőt a $0.4 \le c^- \le 0.6$ összefüggés alapján határozzuk meg. Az alaki tényező értéke c^- = 0.4, ha $H/d \le 2$, és c^- = 0.6, ha $H/d \ge 3$. A $2 < H/d < 3$ tartományban az alaki tényezőt lineáris interpolációval számítjuk ki. A fenti összefüggésekben d az épület szélirányban mért mélysége (1.10 ábra).

Figyelemmel kell lenni arra, hogy az épület egészének vizsgálatakor mind a széltámadta oldalon, mind pedig a szélárnyékos oldalon számolni kell alaki tényezővel és a nyomási és szívási tényezőket a globális vizsgálathoz előjelektől függetlenül össze kell adni: $c = \left|c^+\right| + \left|c^-\right|$.



1.10 ábra. Épület befoglaló méreteivel az y irányú szélteher megállapításához.

A szélteher szélsőértékét a

$$p_w = \gamma c w_o \tag{1.14}$$

képletből határozzuk meg, ahol $\gamma = 1.2$ a szél biztonsági tényezője.

Az Eurocode szabványsorozat elemei közül az Eurocode 1: „Actions on structures – General actions – Part 1-4: Wind actions" foglalkozik a szélterhekkel [prEN 1991-1-4, 2004]. Épületek vizsgálatánál az Eurocode a *h* épületmagasság, *b* szélirányra merőleges épületszélesség és *d* szélirányban mért épületmélység jelöléseket alkalmazza, de mi az épületmagasságot *H*-val jelöljük (1.10 ábra).

1.3.1.2 Szélteher az Eurocode szerint

Az Eurocode szerint a szélteher legtöbb esetben figyelembe vehető egy az épület homlokzatán működtetett helyettesítő statikus szélnyomással. A szélnyomás értéke a

$$w_e = c_{pe} q_p(z_e) \qquad [\mathrm{kN/m^2}] \tag{1.15}$$

képletből határozható meg, ahol

$$q_p(z_e) = c_e(z_e) q_b \qquad [\mathrm{kN/m^2}] \tag{1.16}$$

a felületegységre vonatkoztatott átlagos torlónyomás csúcsértéke. A fenti képletekben

c_{pe} a külső nyomási tényező (1.2 táblázat),
$c_e(z_e)$ a helyszíntényező (1.11 ábra),
z_e referenciamagasság [m],
q_b a felületegységre vonatkoztatott átlagos torlónyomás alapértéke [kN/m^2].

Az átlagos torlónyomás alapértéke a

$$q_b = \frac{\rho}{2} v_b^2 \tag{1.17}$$

összefüggésből számítható ki, ahol

ρ a levegő sűrűsége (ha a szabvány másképp nem rendelkezik, $\rho = 1.25$ kg/m^3),
v_b a szélsebesség referenciaértéke [m/s].

A szélsebesség referenciaértékét a

$$v_b = c_{dir} c_{season} v_{b,0} \tag{1.18}$$

összefüggés adja meg, ahol

c_{dir} az iránytényező (ha a szabvány másképp nem rendelkezik, c_{dir}=1),
c_{season} a szezonális tényező (ha a szabvány másképp nem rendelkezik, c_{season}=1),
$v_{b,0}$ a referencia-szélsebesség kiindulási értéke (a szabvány melléklete, illetve a Nemzeti Alkalmazási Dokumentum => NAD szerint).

Az Eurocode Nemzeti Alkalmazási Dokumentuma [MSZ EN 1991-1-4:2007] szerint Magyarországon az iránytényező $c_{dir} = 0.85$ és a referencia-szélsebesség kiindulási értéke $v_{b,0} = 23.6$ m/s, így a szélsebesség referenciaértéke $v_b = 0.85 \cdot 1.0 \cdot 23.6 = 20.0$ m/s.

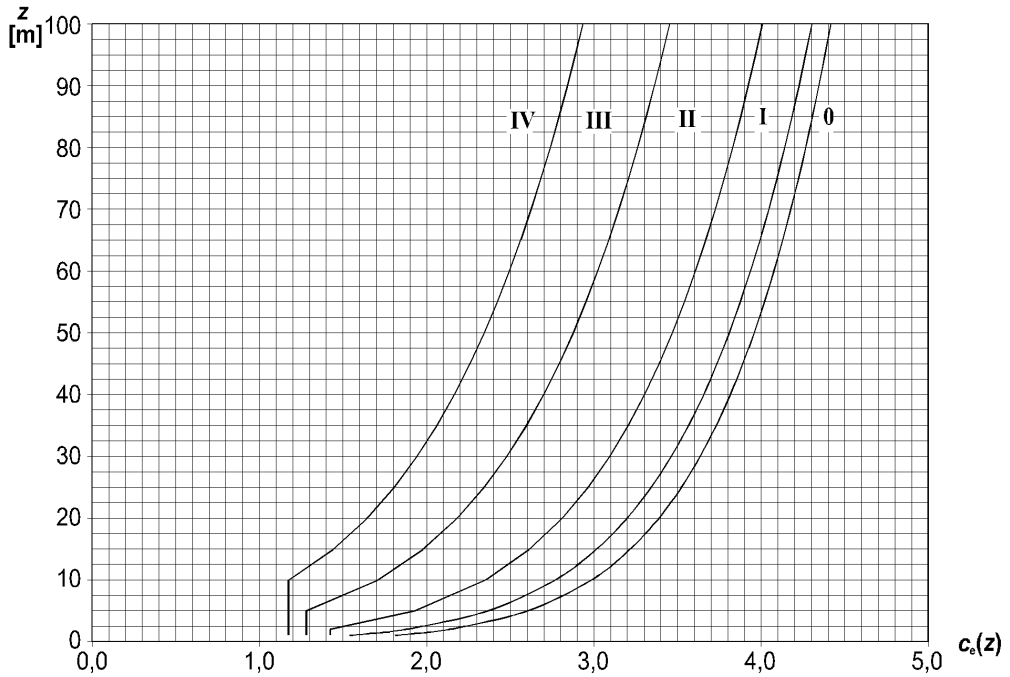
A felületegységre vonatkoztatott átlagos torlónyomás alapértéke Magyarországon így

$$q_b = \frac{1.25}{2} 20^2 = 250 \text{ N/m}^2 = 0.25 \text{ kN/m}^2 \tag{1.19}$$

A c_e helyszíntényező függ a terepszint feletti magasságtól (z), az 1.1 táblázat szerinti beépítettségi kategóriáktól, a topográfiai tényezőtől (c_o) és a turbolencia tényezőtől (k_l). A helyszíntényező értéke sík terep ($c_o = 1$) és a szabvány által javasolt $k_l = 1$ turbolencia tényező esetében az 1.11 ábráról olvasható le.

1.1 táblázat. Beépítettségi kategóriák.

Beépítettségi kategóriák {Részletesebb, rajzokkal illusztrált útmutatót a szabvány „A” melléklete tartalmaz}	
0	Nyílt tenger vagy nyílt tengerre néző parti terület
I	Tavak vagy sík szárazföldi terület elhanyagolható növényzettel, akadályok nélkül
II	Alacsony növényzettel (pl. fűvel) takart terület, elszórtan tárgyakkal (fákkal, épületekkel); a tárgyak távolsága > magasság×20
III	Növényzettel vagy épületekkel takart terület; vagy elszórt tárgyakkal; a tárgyak távolsága < magasság×20. (pl. falvak, külvárosi övezet, erdők)
IV	Városi övezet, ahol a földterület legalább 15 %-án az épületek átlagos magassága meghaladja a 15 métert



1.11 ábra. A $c_e(z)$ helyszíntényező értékei z [m] és a beépítettségi kategóriák (0, I, II, II és IV) függvényében.

A téglalap keresztmetszetű tárgyak $c_{pe}(z_e)$ külső nyomási tényezője elméletileg függvénye a széltámadta felület nagyságának is, és a szabvány ennek megfelelően $c_{pe,1}$ és $c_{pe,10}$ értékeket ad meg (az 1 illetve 10 m^2 nagyságú felülethez; közöttük interpolálni lehet), de épületek globális vizsgálatánál csak a $c_{pe,10}$ tényező értékei jönnek szóba.

A téglalap alaprajzú épületek z_e referenciamagassága a H/b viszonyszám függvénye, ahol H az épület magassága és b a szélirányra merőleges szélesség. A H/b viszonyszám függvényében a vizsgált épület három kategóriába osztható:

- Azokat az épületeket amelyeknél a magasság nem nagyobb a (szélirányra merőleges) szélességnél ($H \leq b$), egyetlen egységként kell kezelni és $z_e = H$.
- Azokat az épületeket amelyek H magassága b-nél nagyobb, de $2b$-nél kisebb ($b < H \leq 2b$), két egységként kell kezelni. Az alsó rész a terepszinttől b-ig terjed és itt $z_e = b$, a felső rész az épület maradék része és itt $z_e = H$.
- Azokat az épületeket amelyek H magassága $2b$-nél nagyobb, több egységként kell kezelni. Az alsó rész a terepszinttől a b magasságig terjed és itt $z_e = b$; a felső rész az épület legfelső pontjától lefelé mért b távolságig tart és itt $z_e = H$; a felső és alsó rész között pedig tetszőleges számú, legfeljebb b magasságú egységet („csíkot”) lehet elképzelni, ahol $z_e = z_{csík}$.

A referenciamagasság megállapítása után az 1.2 táblázatból a H/d (H: épületmagasság és d: az épület szélirányban mért mélysége) aránynak megfelelően kikereshető a külső nyomási tényező c_{pe} értéke, amellyel már kiszámítható az épületre működő szélnyomás értéke. A táblázatban megadott értékek között lineáris interpolációval lehet közbenső értékeket meghatározni. Figyelemmel kell lenni arra, hogy az épület egészének vizsgálatakor mind a széltámadta oldalon, mind pedig a szélárnyékos oldalon számolni kell nyomási tényezővel, és ezek értéke a globális vizsgálathoz összeadódik.

1.2 táblázat: A külső nyomási tényező c_{pe} értékei.

H/d	a széltámadta oldalon	a szélárnyékos oldalon
5	+0.8	-0.7
1	+0.8	-0.5
≤ 0.25	+0.7	-0.3

A szélnyomás értékének ismeretében az épületre ható teljes szélerő az

$$F_w = c_s c_d \sum_{felszinek} w_e A_{ref} \quad [\text{kN}] \tag{1.20}$$

képletből határozható meg, ahol $c_s c_d$ a szerkezeti tényező és A_{ref} a referenciafelület.

A szerkezeti tényező értéke $c_s c_d = 1.0$, ha az épület

- 15 méternél alacsonyabb,
- keretszerkezetű és falakkal merevített, 100 méternél alacsonyabb és a magassága nem haladja meg a szélirányú épületmélység négyszeresét.

Egyéb esetekben a szerkezeti tényező értéke a vasbeton és acélszerkezetű épületekre megadott diagramokról (1.12 ábra) olvasható le, az épületmagasság és épületszélesség függvényében. A diagramokon a folytonos vonalak a II. beépítési kategóriát, a szaggatott vonalak pedig a III. beépítési kategóriát jelölik. (A szaggatott vonalak a folytonos vonalaknál 0.05-el kisebb értékeket jelölnek.)

A $H/d > 5$ aránnyal rendelkező (magas) épületek esetében a fenti módszer nem alkalmazható, mert az 1.2 táblázat nem ad értéket a külső nyomási tényezőre. Az ilyen épületek esetében az Eurocode a „globális erő” módszerének alkalmazását javasolja. Eszerint a globális erő az

$$F_w = c_s c_d c_f q_p(z_e) A_{ref} \qquad \text{[kN]} \tag{1.21}$$

összefüggésből határozható meg, ahol $q_p(z_e)$ a már ismert, felületegységre vonatkozó átlagos torlónyomás csúcsértéke, $c_s c_d$ a szerkezeti tényező és c_f az erőtényező. Az erőtényezőt a

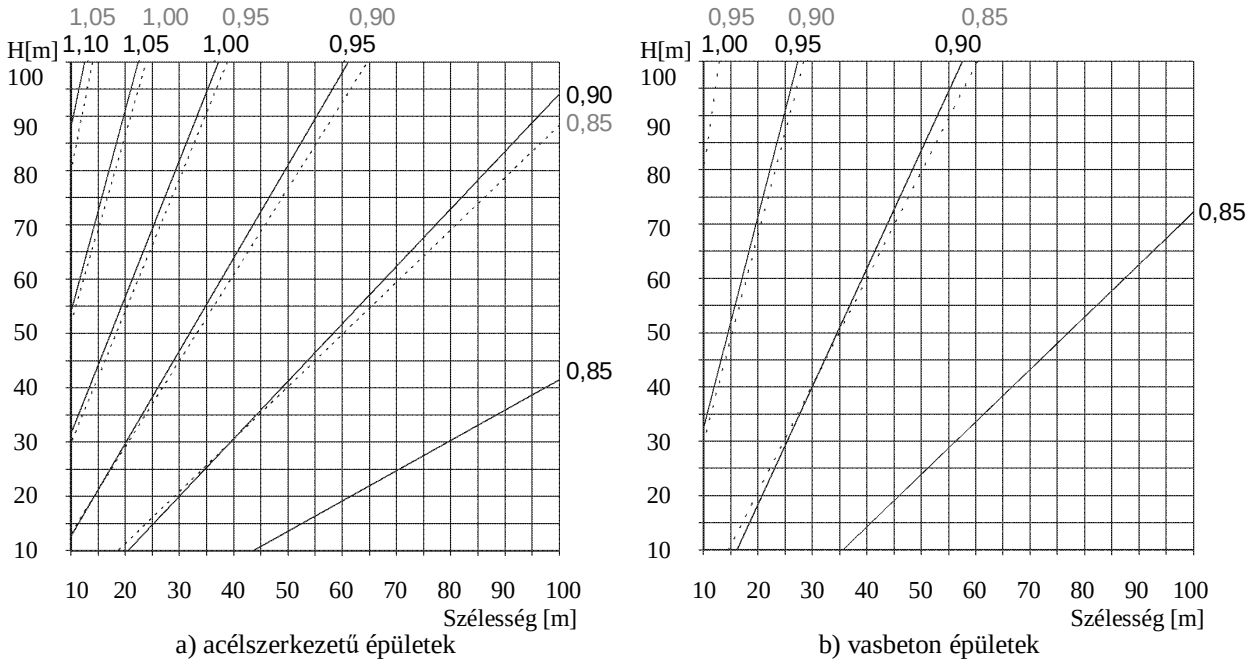
$$c_f = c_{f,0} \Psi_r \Psi_\lambda \tag{1.22}$$

képlet adja meg, ahol

$c_{f,0}$ az erőtényező alapértéke. Értéke az 1.13 ábra diagramjáról az épület mélységének és szélességének arányában (d/b) leolvasható.

Ψ_r sarokélességi redukciós tényező. Lekerekítés nélküli épületeknél $\Psi_r = 1.0$.

A Ψ_λ karcsúsági csökkentő tényező értéke a tömörségtől (φ) és a helyettesítő karcsúságtól (λ) függ. Zárt épületek esetén a tömörség $\varphi = 1$. A helyettesítő karcsúság $\lambda = 0.7H/b$ a $H \geq 50$ esetben és $\lambda = H/b$ a $H < 15$ esetben, ahol H az épület magassága és b az épület szélirányra merőleges mérete. A $15 \leq H < 50$ esetben értékét lineáris interpolációval kell meghatározni. A helyettesítő karcsúság értéke korlátozva van: $\lambda_{min} = 70$. Ekkor a szabvány vonatkozó diagramja szerint $\Psi_\lambda(\lambda=70) = 0.91$. A $\lambda = 200$-nál a diagram $\Psi_\lambda(\lambda=200) = 1.0$ értéket ad. A két érték között a Ψ_λ tényező értéke lineáris interpolációval határozható meg.

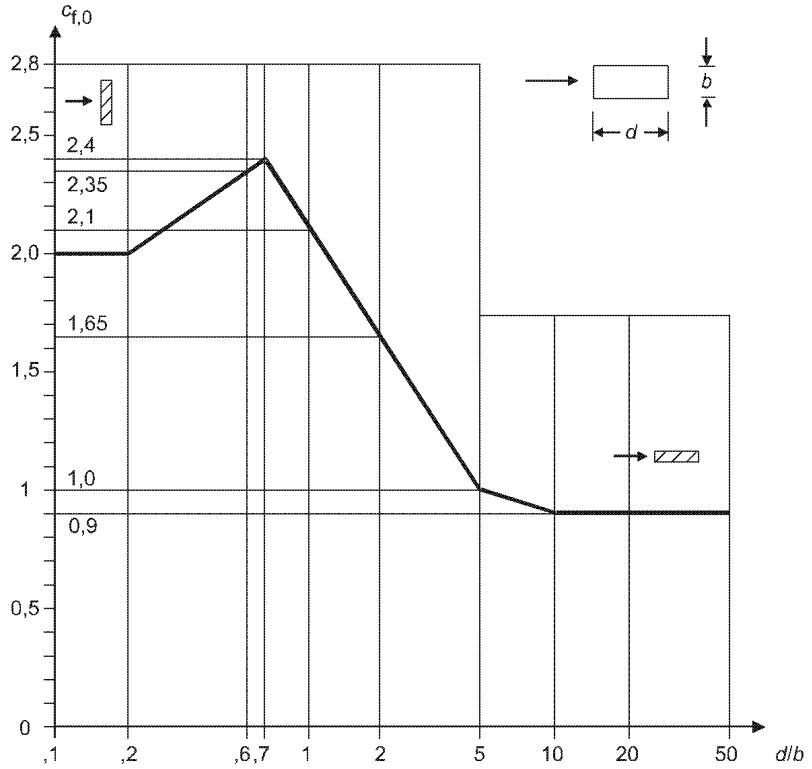


1.12 ábra. A $c_s c_d$ szerkezeti tényező értékei.

Az épületre ható teljes szélteher tervezési értékét végül az

$$F_d = \gamma_Q F_w \tag{1.23}$$

összefüggés szolgáltatja, ahol a teherbírási határállapot „A” és „B” esetéhez tartozóan megadott parciális (biztonsági) tényező értéke $\gamma_Q = 1.50$.



1.13 ábra. A $c_{f,0}$ erőtényező alapértéke.

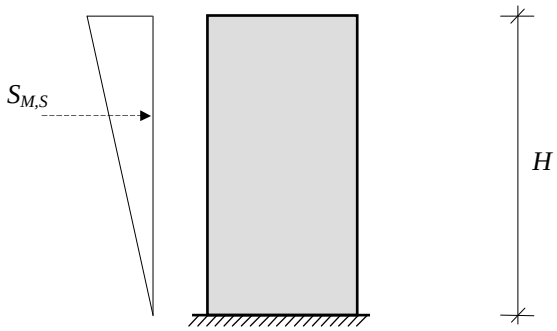
1.3.2 Földrengés

Az Építési Törvény (1998 január 1) kötelezően előírja Magyarország területén az épületek földrengés elleni méretezését. A méretezéshez az európai szabványelőírásokat, pontosabban az Eurocode 8 előírásait vehetjük figyelembe. Az Eurocode 8 meglehetősen részletes és komplikált előírás és a „pontos” dinamikai vizsgálat végrehajtása elég bonyolult. Ráadásul a vizsgálatok „pontossága” is gyakran megkérdőjelezhető, ezért itt most – az Eurocode 8 előírásaival összhangban, Dulácska-Kollár alapján – egy egyszerűsített eljárást ismertetünk, amely bizonyos feltételek teljesülése esetén közvetlenül alkalmazható a tervezéshez, a feltételeket nem kielégítő esetekben pedig támpontokat adhat a hatékony szerkezeti rendszer kialakításához. Ez a módszer a helyettesítő statikai módszer (HSM). (Pontosabb módszerek ismertetése található például a Dulácska-Joó-Kollár: Tartószerkezetek tervezése földrengési hatásokra az Eurocode alapján című könyvben.)

A helyettesítő statikai módszer a szélesség ötszörösénél nem magasabb, maximum fszt.+4 emeletes, szabályos épületekre alkalmazható, amelyeknél a tömegközéppont és a nyírásközéppont (csavarási középpont) közötti távolság nem nagyobb az épület vízszintes méretének 10 százalékánál. A dinamikus erőhatást ekkor helyettesíthetjük egy statikus $S_{M,S}$ vízszintes erővel (1.14 ábra), amelyre az egész épületet méretezzük, vagyis kielégítjük az

$$S_{M,S} \leq S_{H,S} \tag{1.24}$$

feltételt, ahol $S_{H,S}$ a határteher.



1.14 ábra. Szeizmikus erő.

Ellentétben a szélerővel, a fenti $S_{M,S}$ szeizmikus erő bármely irányban ugyanazzal az értékkel működhet. Ha a szélteher nagyobb mint a földrengés-teher, akkor nem kell földrengésre méretezni. (A vízszintes erővel egyidejűleg fellépő szeizmikus függőleges erő számításához figyelembeveendő gyorsulás a vízszintes gyorsulás fele, amely felfelé és lefelé is működhet.)

A helyettesítő vízszintes erő értéke az

$$S_{M,S} = \beta Q k_g k_s k_t / q \tag{1.25}$$

összefüggésből határozható meg, ahol

- β dinamikus szorzó,
- Q épületteher (az épület súlya és a hasznos teher tartós részének összege biztonsági tényezők nélkül [kN]),
- k_g relatív tervezési gyorsulás,
- k_s épületfontossági tényező,
- k_t talajminőségi szorzó,
- q viselkedési tényező.

A Q épületterhet pontos súlyelemzés segítségével kell meghatározni. Igen gyors közelítő eredményt és – a legtöbb épület esetében – jó becslést kaphatunk, ha a födémszintre vonatkoztatott 8-12 kN/m^2 közötti átlagos födémteherrel számolunk.

A k_g relatív tervezési gyorsulás meghatározásánál két lehetőség áll rendelkezésre. A Magyarország Földrengési Információs Rendszere (FIR) településenként megadja a csúcsgyorsulást; ennek 70%-a a relatív tervezési gyorsulás. A másik lehetőség az, hogy vesszük az Eurocode 8 1. füzet NAD megyénkénti zónabeosztási értékét (1.3 táblázat). (Az 1. zónában nincs megye; Budapest a 3. zónában van.)

1.3 táblázat. A k_g relatív tervezési gyorsulás értékei.

Zónák	Megyék	k_g
1. zóna	–	0.04
2. zóna	Nógrád, Szabolcs-Szatmár-Bereg, Tolna, Békés, Borsod-Abaúj-Zemplén, Csongrád, Hajdú-Bihar, Jász-nagykun, Szolnok	0.06
3. zóna	Baranya, Bács-Kiskun, Fejér, Győr-Sopron, Heves, Somogy, Vas, Veszprém, Zala, Pest, és Budapest	0.08
4. zóna	Komárom	0.10

A k_s épületfontossági tényező értékeit az 1.4 táblázat tartalmazza.

1.4 táblázat. A k_s épületfontossági tényező értékei.

Fontossági kategória	k_s
1. Igen fontos létesítmény (pl. kórház, tűzoltóság)	1.4
2. Nagy forgalmú létesítmény (pl. pályaudvar, irodaház, színház)	1.2
3. Normál lakó- és középület	1.0
4. Alárendeltebb épületek (pl. mezőgazdasági és ideiglenes épületek)	0.8

A k_t talajminőségi szorzó értékeit az 1.5 táblázat adja meg.

1.5 táblázat. A k_t talajminőségi szorzó értékei.

Talaj	k_t
Szikla, tömör és száraz kavics	1.0
Száraz, szemcsés és kötött talajok	1.2
Víz alatti szemcsés és kötött talajok	1.4

A q viselkedési tényező az épületszerkezetek képlékeny viselkedését veszi figyelembe (1.6 táblázat).

1.6 táblázat. A q viselkedési tényező értékei.

Szerkezettípus	q	
	vízszintes irányban	függőleges irányban
Falazott épületek	1.5	1.5
Vasbeton épületek	2.0	
Faszerkezetek	1.5	
Hagyományos hengerelt acél szerkezetek	2.5	
Vékonyfalú acél szerkezetek	1.5	

Az (1.25) képlet „lelke” a β dinamikus tényező. A β dinamikus tényező valójában az épület legkisebb sajátfrekvenciája, az első rezgésalak figyelembevételével meghatározott T_S periódusidő függvényében. A legkisebb sajátfrekvencia pontos meghatározása gyakorlatilag lehetetlen. Sokszintes épületeken végzett frekvencia-mérések tapasztalatai alapján megállapítást nyert, hogy a rendelkezésre álló közelítő módszerek eredményei sok esetben igen nagy – akár 50-100%-os – szórást mutatnak, de a „pontos” (számítógépes) módszerek sem sokkal megbízhatóbbak. Pontosabb számítás híján a dinamikus tényező a

$$\beta = \frac{1}{T_S} \leq 2.5 \tag{1.26}$$

képletből számítható a vízszintes irányú vizsgálathoz, ahol

$$T_S = \frac{n(1 \pm 0.5)}{25} \tag{1.27a}$$

falazott épületeknél, és

$$T_S = \frac{n(1 \pm 0.5)}{8} \tag{1.27b}$$

vasbeton vázas épületeknél. A képletekben *n* a szintek száma.

A T_S periódusidő fenti képleteivel számolva gyakorlati esetekben, többszintes vasbeton vázas épületeknél általában az $1.5 \leq \beta \leq 2.5$, míg falazott épületeknél a β = 2.5 értékekhez jutunk. Ezek szerint a β = 2.5 érték mindig biztonságosan alkalmazható. (A 6. fejezetben egy viszonylag egyszerű közelítő módszert mutatunk be a legkisebb sajátfrekvencia meghatározására, amely a számítás során jóval több tényezőt vesz figyelembe.)

Az igen egyszerű és az Eurocode 8 szabványba is bekerült

$$\beta = \frac{46}{H} \tag{1.28}$$

tapasztalati képlet azonnali ellenőrzési lehetőséget nyújt síkbeli rezgéseket végző épületek legkisebb sajátfrekvenciájának meghatározásánál. Alkalmazásával bizonyos esetekben meglepően jó értékeket kaphatunk. Nyomatékosan felhívjuk azonban a figyelmet arra, hogy ez a közelítő képlet síkbeli rezgések felléptét tételezi fel! Amennyiben az épület csavarási rezgéseket is végezhet, a képlet gyakran használhatatlan eredményeket ad.

Befejezésül ismét hangsúlyozzuk, hogy a fent bemutatott módszer közelítő. Egy a számtalan közelítő módszer közül. Olyan közelítő módszer, amely jól bemutatja a földrengésteher lényeges jellegzetességeit, de amelynek a „pontossága” nem ismert. Nem is lehet ismert, hiszen nincs két egyforma földrengés (két azonos tulajdonságokkal rendelkező épülettel) és nincsenek megbízható mérési adatok a földrengésnek kitett épületekre ható tényleges terhelésről. Vannak viszont mérési adatok épületek legkisebb sajátfrekvenciájáról. Az angliai Building Research Establishment dinamikai szakemberei számtalan esetben végeztek méréseket meglévő többszintes épületeken és a mért sajátfrekvenciákat összehasonlították különböző közelítő és „pontosnak” kikiáltott számítógépes eljárások által szolgáltatott eredményekkel. A vizsgálatok tanúsága szerint a tényleges (=mért) sajátfrekvenciák és a számított értékek gyakran jelentős mértékben eltértek egymástól. Az eltérések nagysága nemritkán az 50-100%-os tartományban volt.

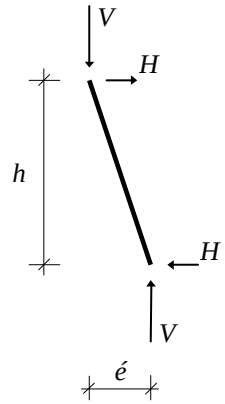
1.3.3 Építési pontatlanság

A függőleges teherviselő elemek pontatlan elhelyezése miatt ferdén álló oszlopok és falak vízszintes „póterőket” (*H*) adnak át a födémekre. (A jelenség főleg előregyártott rendszereknél eredményezhet számottevő vízszintes terhet.) Az alábbiakban vázolt eljárás alapján a keletkező vízszintes erő értékét egy egyszerű közelítő képletből határozhatjuk meg.

Egy fal esetében (1.15 ábra) ez az erő

$$H = V \frac{é}{h} \tag{1.29}$$

nagyságú, ahol *V* a fal függőleges terhe [kN/m], *h* az emeletmagasság [m] és *é* az építési pontatlanság [m].



1.15. ábra. A pontatlan elhelyezés miatt keletkező vízszintes erő.

A ferde elhelyezésből származó teljes oldalerő függ az egy szinten a vizsgált irányra merőlegesen található falak számától (n_h) és az egymás felett lévő falak számától, vagyis a szintek számától (n) is. A hibák halmozódása azonban n_h-val és n-nel nem egyenesen arányos, hiszen bizonyos mennyiségben ellentétes előjelű hibák is előfordulhatnak. Statisztikai valószínűség szerint ezt a $0.5(n_h n)^{1/2}$ tényező bevezetésével vehetjük közelítően figyelembe. Így a teljes szintenkénti vízszintes erőre az

$$F_m = V \frac{é}{h} \frac{1}{2} \sqrt{n_h n} \qquad \text{[kN/m]} \tag{1.30}$$

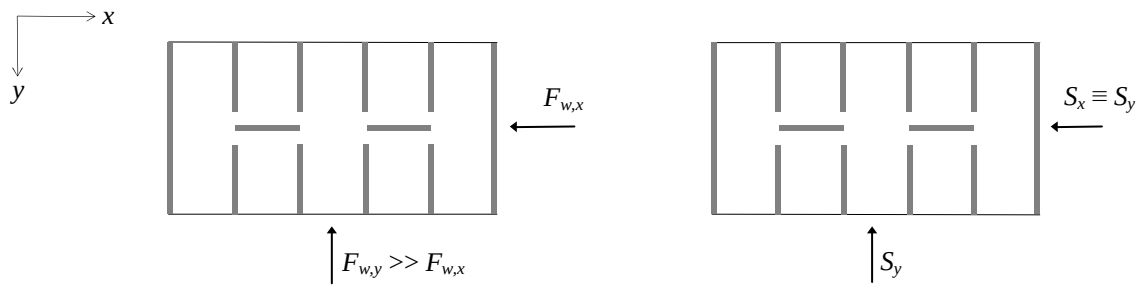
összefüggést kapjuk. A magasság mentén elosztott vízszintes többletteher:

$$p_m = \frac{Vé}{2h^2} \sqrt{n_h n} \qquad \text{[kN/m}^2\text{]} \tag{1.31}$$

ahol V [kN/m] a vizsgált irányra merőleges falak átlagos szintenkénti mértékadó függőleges terhe. Ezt a terhet pontos súlyelemzés eredményeként kapjuk meg.

1.3.4 Összehasonlítás

Az előző pontokban tárgyalt három vízszintes teher jellegében jelentősen eltér egymástól. A leggyakrabban figyelembe vett szélteher nagysága legérzékenyebben az épület homlokzati felületének nagyságától függ; azzal egyenes arányban nő. Ez kedvező jelenség, hiszen a nagyobb homlokzati felületek mögött általában több merevítőfal, vagyis erősebb merevítőrendszer található. Ez a tény a gyakran alkalmazott harántfalas merevítő-rendszereknél jól látható (1.16/a ábra).



a) F_w szélerők b) S szeizmikus erők

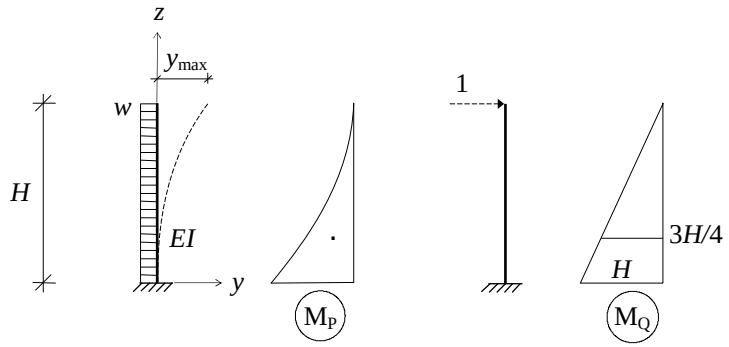
1.16 ábra. Harántfalas rendszer.

Egészen más a helyzet a földrengés vízszintes terhénél. A szeizmikus erő nagyságát legérzékenyebben az befolyásolja, hogy az épület milyen földrengési zónában van, mekkora a tömege és mekkora a sajátfrekvenciája. Ebből az is következik, hogy a szeizmikus erő értéke az épület homlokzatainak nagyságától függetlenül minden irányban azonos (1.16/b ábra). Ezt a tényt földrengésveszélyes területen építendő szerkezetek merevítőrendszerének kialakításakor nem szabad figyelmen kívül hagyni.

A különböző vízszintes terhek nagyságának összehasonlítása tanulságos eredményeket szolgáltat. Egy 4. földrengési zónában lévő épület esetében a szeizmikus erő és a nagyobbik szélerő hányadosa akár 10 is lehet. A két erő a 2. zónában általában azonos nagyságrendű. Az építési pontatlanságból származó vízszintes erő a szélerőnél általában kisebb; $é = 0.015$ m feltételezett építési hiba esetében a szélerő mintegy 5-40 százaléka.

1.4 Alakváltozások

Mint ahogyan arról már volt szó, és a későbbiekben részletesebben is foglalkozunk vele, az épületek alakváltozása hajlítási és nyírási alakváltozási részből állhat; általában a kettő kombinációja. Ebben a pontban megadjuk a vonatkozó összefüggéseket az egyenletesen megoszló vízszintes erővel terhelt konzoltartóra és keretre.



1.17 ábra. Konzoltartó hajlítási alakváltozása.

Az *EI* hajlítási merevséggel rendelkező konzoltartó maximális vízszintes tetőponti eltolódását legegyszerűbben munkatétellel határozhatjuk meg (1.17 ábra):

$$y_{max} = \frac{1}{EI}\frac{wH^2}{2}\frac{H}{3}\frac{3H}{4} = \frac{wH^4}{8EI} \tag{1.32}$$

A *GA* nyírási merevséggel rendelkező konzoltartó (1.18/a ábra) alakváltozásait a tartó differenciálegyenletének felhasználásával írjuk fel. A szögtorzulás értékének geometriai (1.18/b ábra)

$$\gamma = \frac{dy}{dz} \tag{1.33}$$

és fizikai (1.18/c ábra)

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \tag{1.34}$$

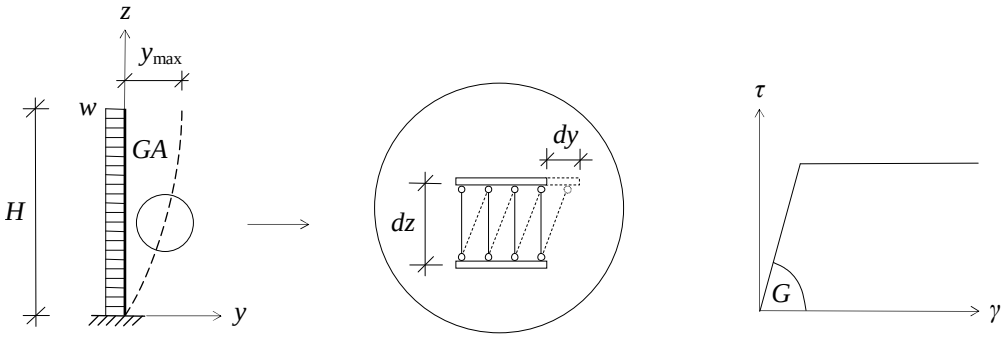
összefüggései, valamint a nyírófeszültség

$$\tau = \frac{T}{A} \tag{1.35}$$

összefüggése felhasználásával az

$$y'(z) = \frac{T(z)}{GA} \tag{1.36}$$

differenciálegyenlethez jutunk, ahol *GA* a tartó nyírási merevsége.



a) konzoltartó b) tartó elemi szakasza c) τ–γ diagram

1.18 ábra. Konzoltartó nyírási alakváltozása.

A nyíróerő és a teher között érvényes

$$T(z) = -\int p(z)dz$$

általános összefüggés szerint a nyíróerő-függvény esetünkben:

$$T(z) = -\int w dz = -wz + c_1$$

A c_1 integrálási állandó értéke abból a feltételből határozható meg, hogy a nyíróerő a tartó tetején zérus:

$$T(H) = -wH + c_1 = 0$$

Innen

$$c_1 = wH$$

és így a nyíróerő:

$$T(z) = -wz + wH \tag{1.37}$$

A nyíróerő-függvényt az (1.36) egyenletbe behelyettesítve és bevezetve a $GA = K$ jelölést a nyírási merevségre, a tartó differenciálegyenlete az

$$y'(z) + \frac{w}{K}z - \frac{wH}{K} = 0$$

alakot ölti. A differenciálegyenlethez az

$$y(0) = 0 \tag{1.38}$$

peremfeltétel tartozik. Egyszeri integrálás után az

$$y(z) + \frac{wz^2}{2K} - \frac{wH}{K} z + c_2 = 0$$

egyenletet kapjuk, ahol az $y(0) = 0$ peremfeltétel értelmében $c_2 = 0$.

A nyírási alakváltozást végző rúd alakváltozását leíró egyenlet így:

$$y(z) = \frac{w}{K}\left(Hz - \frac{z^2}{2} \right) \tag{1.39}$$

Innen a maximális tetőponti eltolódás értéke $z = H$-nál:

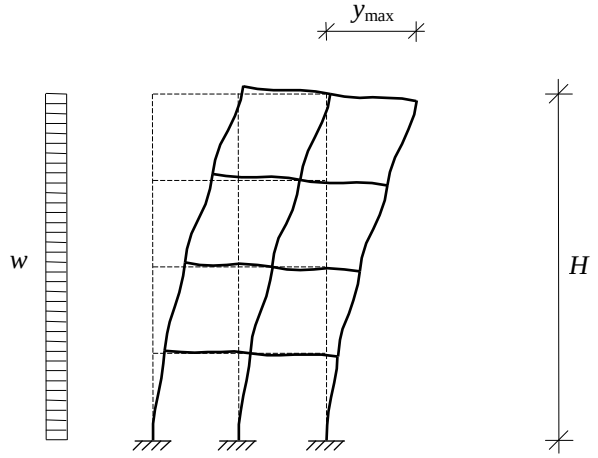
$$y_{\max} = y(H) = \frac{wH^2}{2K} \tag{1.40}$$

A konzoltartó maximális tetőponti eltolódása a hajlítási és nyírási alakváltozás figyelembevételével így

$$y_{\max} = y(H) = \frac{wH^4}{8EI} + \frac{wH^2}{2K} \tag{1.41}$$

Szokványos geometriai kialakítású *rudak* esetben a második tag az elsőhöz képest nagyon kicsi (általában 5% alatt van) és ezért a második tagot el szokták hanyagolni. (Négyszög keresztmetszetű rudaknál a második tag körülbelül 3%.) Alacsony és széles merevítő*falak* esetében viszont a nyírási alakváltozás jelentős lehet és ilyen esetekben a második tagot is figyelembe kell venni.

Keretek (1.19 ábra) esetében a helyzet bonyolultabb. Itt most csak a pontos megoldás végeredményét közöljük, és megadunk egy közelítő képletet is. A tanulságos részletek a „Keretekkel, falakkal és magokkal merevített épületek globális statikai vizsgálata” c. jegyzetben találhatók.



1.19 ábra. Keretszerkezet alakváltozása vízszintes teher hatására.

A keret kontinuum modelljéhez tartozó differenciálegyenlet felírása és megoldása után a legnagyobb tetőponti eltolódásra az

$$y_{\max} = y(H) = \frac{wH^4}{8E(I_l + I_g)} + \frac{wH^2}{2Ks^2} - \frac{wEI_l}{K^2 s^3}\left(\frac{1 + \kappa H \sinh \kappa H}{\cosh \kappa H} - 1\right) \tag{1.42}$$

összefüggést kapjuk. A képlet első tagja a keret teljes (lokális és globális) hajlítási alakváltozása és a második tag a keret nyírási alakváltozása. A harmadik tag a két alakváltozás egymásrahatását fejezi ki. Ez az egymásrahatás minden esetben csökkenti a keret eltolódását, hiszen a harmadik tag előjele mindig negatív. A képletben szereplő s és κ tényezők a keret három jellemző (lokális és globális hajlítási és nyírási) merevségétől függenek:

$$s = 1 + \frac{I_l}{I_g} \qquad \text{és} \qquad \kappa^2 = \frac{K}{EI_l} + \frac{K}{EI_g} \tag{1.43}$$

A gyakorlati esetekben az s tényező egy egyhez közelálló, de egynél mindig nagyobb szám. Ha a biztonság javára történő közelítéssel az s értékét egynek vesszük és elhanyagoljuk az eltolódást mindig csökkentő harmadik tagot, akkor a keret alakváltozására az (1.41) képletnek megfelelő

$$y_{\max} = y(H) = \frac{wH^4}{8EI} + \frac{wH^2}{2K} \tag{1.44}$$

közelítő összefüggést kapjuk, ahol

$$EI = E(I_l + I_g) \tag{1.45}$$

a keret teljes (lokális és globális) hajlítási merevsége.

Alacsony, zömök keretek esetében a hajlítási és nyírási alakváltozások egymásrahatása jelentős lehet; ilyenkor szükségessé válhat a pontosabb (1.42) képlet alkalmazása.

1.5 Számpélda

Határozzuk meg az 1.20 ábrán befoglaló méreteivel megadott 10 szintes lakóépület szélterhét a „régi” MSZ és az Eurocode előírásai szerint. Az épület beépített városi területen van. Az emeletmagasság h = 3 m, így az épület teljes magassága H = 30 m.

Szélteher az MSZ szerint

Először a c alaki tényezőt határozzuk meg, melynek értéke két részből áll. A szél által támadott oldalon $c^+ = 0.8$. A szélárnyékos oldalon viszont a c^- tényező értéke függ az épületmagasság és épületmélység hányadosától, vagyis a H/d aránytól. Az esetünkben különböző d méret (10.8 m és 38.4 m) miatt a két szélirányt külön kell kezelni.

Y irány:

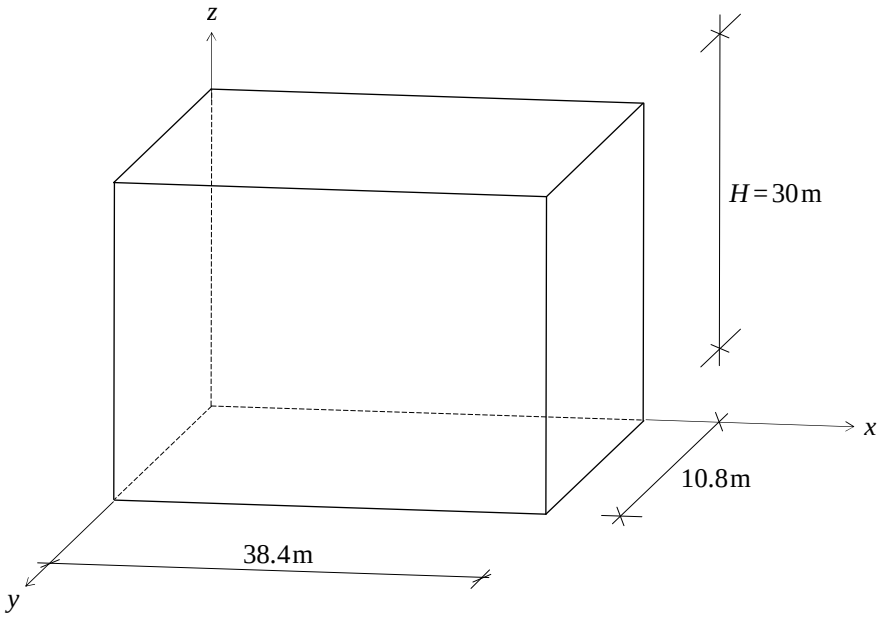
$$\frac{H}{d} = \frac{30}{10.8} = 2.78 < 3 \quad \rightarrow \quad \text{interpolálni kell:}$$

$$c_y = c_y^+ + c_y^- = 0.8 + \left(0.4 + 0.2\frac{2.78 - 2}{3 - 2}\right) = 0.8 + 0.556 = 1.356$$

X irány:

$$\frac{H}{d} = \frac{30}{38.4} = 0.78 < 2\,, \quad \text{tehát}$$

$$c_x = c_x^+ + c_x^- = 0.8 + 0.4 = 1.2$$



1.20 ábra. Tízszintes épület a befoglaló méreteivel.

Az átlagos torlónyomás értékét az 1.9 ábra diagramjáról olvassuk le. *H* = 30-nál:

$$\overline{w}_o^{\,v} \cong 0.6$$

A szélteher értéke így az (1.14) képletből

$$p_{w,y} = 1.2 \cdot 1.356 \cdot 0.6 = 0.976 \text{ kN/m}^2$$

az *y* irányban, és

$$p_{w,x} = 1.2 \cdot 1.2 \cdot 0.6 = 0.864 \text{ kN/m}^2$$

az *x* irányban. A teljes szélerő értéke

$$F_y = 38.4 \cdot 30 \cdot 0.976 = 1124 \text{ kN}$$

az *y* irányban, és

$$F_x = 10.8 \cdot 30 \cdot 0.864 = 279.9 \text{ kN}$$

az *x* irányban.

Szélteher az Eurocode szerint

Az átlagos torlónyomás alapértéke az (1.19) képlet szerint:

$$q_b = \frac{1.25}{2} 20^2 = 250 \text{ N/m}^2 = 0.25 \text{ kN/m}^2$$

Az épület geometriai arányai olyanok, hogy a számítást az *y* és *x* irányban különböző módon kell végrehajtani.

Y irány

Az épület magassága (H = 30 m) nem nagyobb az épület széliránra merőleges szélességénél (b = 38.4 m), így az épületet az *y* irányban egy egységként kell kezelni $z_e = H$ = 30 m referenciamagassággal.

A helyszíntényező értékét IV. beépítettségi kategória és $z_e = H$ = 30 m épületmagasság figyelembevételével az 1.11 ábráról olvashatjuk le:

$$c_e(30) \cong 1.94$$

A felületegységre vonatkoztatott átlagos torlónyomás csúcsértékét az (1.16) képlet adja meg:

$$q_p(z_e) = c_e(z_e) q_b = 1.94 \cdot 0.25 = 0.485 \text{ kN/m}^2$$

A külső nyomási tényező értékét az 1.2 táblázat segítségével az épületmagasság és az épület szélirányban mért mélysége arányában kapjuk meg. Ez az arány

$$\frac{H}{d} = \frac{30}{10.8} = 2.78$$

Ennek megfelelően a széltámadta oldalon a külső nyomási tényező az 1.2 táblázatból azonnal kivehető

$$c_{pe}^{+} = 0.8$$

a szélárnyékos oldalon pedig, interpolálás után

$$c_{pe}^{-} = 0.5 + 0.2 \frac{2.78 - 1}{5 - 1} = 0.589$$

A teljes külső nyomási tényező így

$$c_{pe} = c_{pe}^{+} + c_{pe}^{-} = 0.8 + 0.589 = 1.389$$

A szélnyomás értéke az *y* irányban ezzel az (1.15) képletből

$$w_e = c_{pe} q_p(z_e) = 1.389 \cdot 0.485 = 0.6737 \text{ kN/m}^2$$

A szélnyomás tervezési értéke a teherbírási határállapot „A” és „B” esetéhez tartozó γ_Q = 1.50 parciális (biztonsági) tényezővel

$$w_d = \gamma_Q w_e = 1.5 \cdot 0.6737 = 1.01 \text{kN/m}^2$$

Az épületre ható teljes szélerő értéke $c_s c_d$ = 1.0 szerkezeti tényezővel számolva az (1.20) képlet szerint

$$F_w = c_s c_d \sum_{felszinek} w_e A_{ref} = 1.0 \cdot 0.6737 \cdot 38.4 \cdot 30 = 776 \text{ kN}$$

Az épületre ható teljes szélerő tervezési értéke a teherbírási határállapot „A" és „B" esetéhez tartozó γ_Q = 1.50 parciális (biztonsági) tényezővel az (1.23) képletből:

$$F_d = \gamma_Q F_w = 1.5 \cdot 776 = 1164 \text{ kN}$$

X irány
Az épület magassága és az épület szélirányra merőleges szélességének aránya

$$\frac{H}{b} = \frac{30}{10.8} = 2.78 > 2$$

Ez azt jelenti, hogy az épületet *x* irányban három egységként kell kezelni.

1. egység:
Az első egységnél a referenciamagasság z_e = 10.8 m. A helyszíntényező értékét IV. beépítettségi kategória és 10.8 m épületmagasság figyelembevételével az 1.11 ábráról olvashatjuk le:

$$c_e(10.8) \cong 1.18$$

A felületegységre vonatkoztatott átlagos torlónyomás csúcsértékét az (1.16) képlet adja meg:

$$q_p(z_e) = c_e(z_e) q_b = 1.18 \cdot 0.25 = 0.295 \text{ kN/m}^2$$

A külső nyomási tényező értékét az 1.2 táblázat segítségével az épületmagasság és az épület szélirányban mért mélysége arányában kapjuk meg. Ez az arány

$$\frac{H}{d} = \frac{10.8}{38.4} = 0.28$$

Ennek megfelelően a széltámadta oldalon a külső nyomási tényező az 1.2 táblázatból interpolálás után

$$c_{pe}^{+} = 0.7 + 0.03 \frac{0.8 - 0.7}{1 - 0.25} = 0.704$$

a szélárnyékos oldalon pedig

$$c_{pe}^{-} = 0.3 + 0.03 \frac{0.5 - 0.3}{1 - 0.25} = 0.308$$

A teljes külső nyomási tényező így

$$c_{pe} = c_{pe}^{+} + c_{pe}^{-} = 0.704 + 0.308 = 1.012$$

A szélteher értéke az *x* irányban az 1. egységen az (1.15) képletből

$$w_e = c_{pe} q_p(z_e) = 1.012 \cdot 0.295 = 0.299 \text{ kN/m}^2$$

A szélteher tervezési értéke a teherbírási határállapot „A” és „B” esetéhez tartozó $\gamma_Q = 1.50$ parciális (biztonsági) tényezővel

$$w_d = \gamma_Q w_e = 1.5 \cdot 0.299 = 0.448 \text{ kN/m}^2$$

2. egység:
A második egységnél a referenciamagasság z_e = 30-10.8 = 19.2 m. A helyszíntényező értékét IV. beépítettségi kategória és 19.2 m magasság figyelembevételével az 1.11 ábráról olvashatjuk le:

$$c_e(19.2) \cong 1.65$$

A felületegységre vonatkoztatott átlagos torlónyomás csúcsértékét az (1.16) képlet adja meg:

$$q_p(z_e) = c_e(z_e) q_b = 1.65 \cdot 0.25 = 0.4125 \text{ kN/m}^2$$

A külső nyomási tényező értékét az 1.2 táblázat segítségével az épületmagasság és az épület szélirányban mért mélysége arányában kapjuk meg. Ez az arány

$$\frac{H}{d} = \frac{19.2}{38.4} = 0.50$$

Ennek megfelelően a széltámadta oldalon a külső nyomási tényező az 1.2 táblázatból interpolálás után

$$c_{pe}^{+} = 0.7 + 0.25 \frac{0.8 - 0.7}{1 - 0.25} = 0.733$$

a szélárnyékos oldalon pedig

$$c_{pe}^{-} = 0.3 + 0.25 \frac{0.5 - 0.3}{1 - 0.25} = 0.367$$

A teljes külső nyomási tényező így

$$c_{pe} = c_{pe}^{+} + c_{pe}^{-} = 0.733 + 0.367 = 1.1$$

A szélteher értéke az *x* irányban a 2. egységen az (1.15) képletből

$$w_e = c_{pe} q_p(z_e) = 1.1 \cdot 0.4125 = 0.454 \text{ kN/m}^2$$

A szélteher tervezési értéke a teherbírási határállapot „A” és „B” esetéhez tartozó $\gamma_Q = 1.50$ parciális (biztonsági) tényezővel

$$w_d = \gamma_Q w_e = 1.5 \cdot 0.454 = 0.681 \text{ kN/m}^2$$

3. egység:
A harmadik egységnél a referenciamagasság $z_e = 30$ m. A helyszíntényező értékét IV. beépítettségi kategória és 30 m magasság figyelembevételével az 1.11 ábráról olvashatjuk le:

$$c_e(30) \cong 1.94$$

A felületegységre vonatkoztatott átlagos torlónyomás csúcsértékét az (1.16) képlet adja meg:

$$q_p(z_e) = c_e(z_e) q_b = 1.94 \cdot 0.25 = 0.485 \text{ kN/m}^2$$

A külső nyomási tényező értékét az 1.2 táblázat segítségével az épületmagasság és az épület szélirányban mért mélysége arányában kapjuk meg. Ez az arány

$$\frac{H}{d} = \frac{30}{38.4} = 0.781$$

Ennek megfelelően a széltámadta oldalon a külső nyomási tényező az 1.2 táblázatból interpolálás után

$$c_{pe}^{+} = 0.7 + (0.781 - 0.25)\frac{0.8 - 0.7}{1 - 0.25} = 0.771$$

a szélárnyékos oldalon pedig

$$c_{pe}^{-} = 0.3 + (0.781 - 0.25)\frac{0.5 - 0.3}{1 - 0.25} = 0.442$$

A teljes külső nyomási tényező így

$$c_{pe} = c_{pe}^{+} + c_{pe}^{-} = 0.771 + 0.442 = 1.213$$

A szélteher értéke az *x* irányban a 3. egységen az (1.15) képletből

$$w_e = c_{pe} q_p(z_e) = 1.213 \cdot 0.485 = 0.588 \text{ kN/m}^2$$

A szélteher tervezési értéke a teherbírási határállapot „A” és „B” esetéhez tartozó $\gamma_Q = 1.50$ parciális (biztonsági) tényezővel

$$w_d = \gamma_Q w_e = 1.5 \cdot 0.588 = 0.882 \text{ kN/m}^2$$

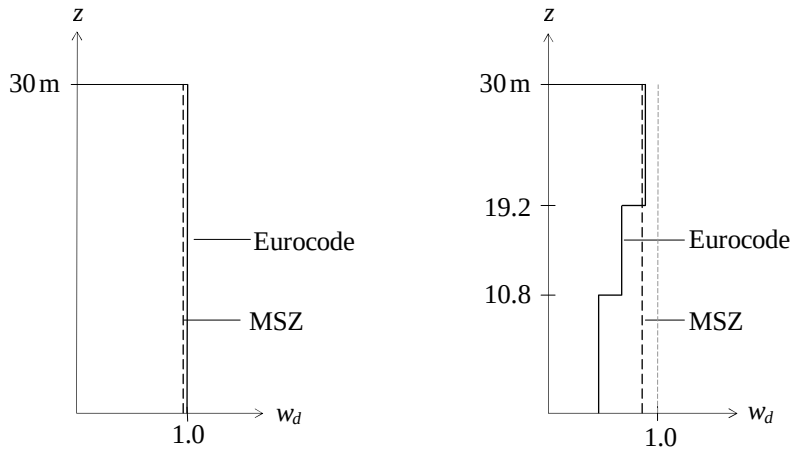
Az épületre ható teljes szélerő értéke $c_s c_d = 1.0$ szerkezeti tényezővel számolva az (1.20) képlet szerint

$$F_w = c_s c_d \sum_{felszinek} w_e A_{ref} = 1.0 \cdot 10.8 (0.299 \cdot 10.8 + 0.454 \cdot 8.4 + 0.588 \cdot 10.8) = 145\,\text{kN}$$

Az épületre ható teljes szélerő tervezési értéke a teherbírási határállapot „A” és „B” esetéhez tartozó $\gamma_Q = 1.50$ parciális (biztonsági) tényezővel az (1.23) képlet segítségével:

$$F_d = \gamma_Q F_w = 1.5 \cdot 145 = 217\,\text{kN}$$

A szélteher tervezési értékeit az *x* és *y* irányban az 1.20 ábrán foglaltuk össze. Az ábrán folytonos vonal az Eurocode szerinti és szaggatott vonal a „régi” MSZ szerinti értékeket jelenti.



y irány *x* irány

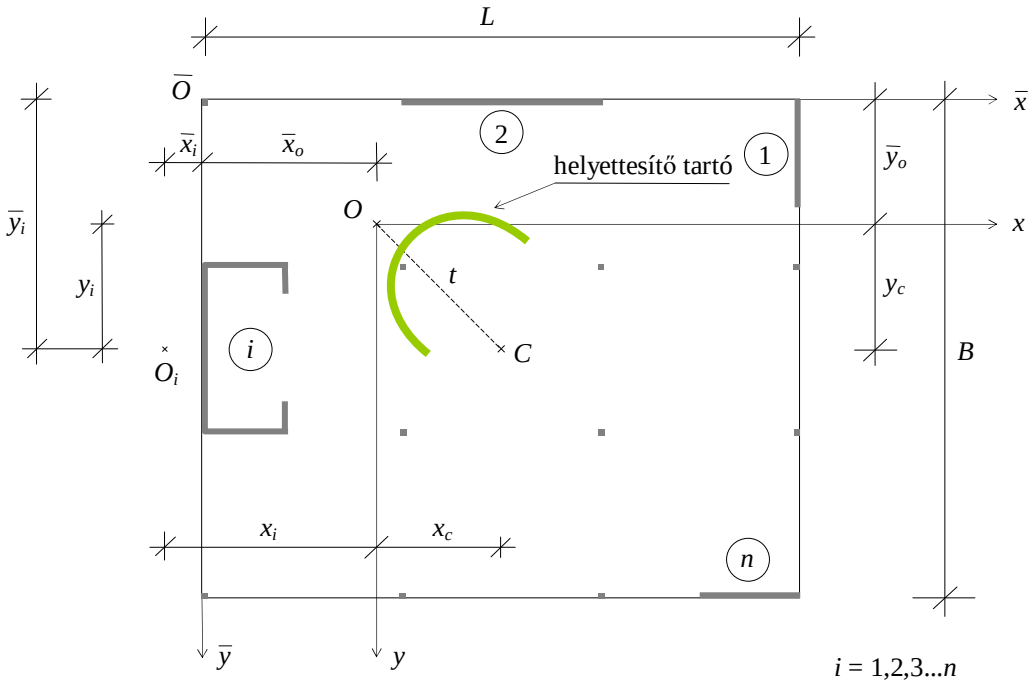
1.20 ábra. A w_d [kN/m^2] szélnyomás tervezési értéke a *z* [m] magasság függvényében a „régi” MSZ (----------) és az Eurocode (————) szerint.

Fenti számpélda – és számtalan más gyakorlati eset – tanúsága szerint igen gyors közelítő eredményhez juthatunk a vízszintes vizsgálat során a $w = 1$ kN/m^2 közelítő szélteher-intenzitás használatával.

2

A helyettesítő tartó

Falakból és magokból álló merevítőrendszerek globális vizsgálata viszonylag egyszerűen végrehajtható a helyettesítő tartó alkalmazásával (2.1 ábra). A vizsgálat során a merevítő-rendszer elemeit egyetlen (képzeletbeli) helyettesítő tartóvá toljuk össze, úgy, hogy a helyettesítő tartó egyenértékű legyen az eredeti merevítőrendszerrel. A helyettesítő tartó előállítása során két kérdésre kell választ adni: hol van és milyen merevségekkel rendelkezik.



2.1 ábra. Épületalaprajz a helyettesítő tartóval.

2.1 A helyettesítő tartó helye

Az épület térbeli viselkedésének elemzésekor úgy definiáltuk a nyírásközéppontot, mint az a pont, amelyen áthaladó erő hatására az épület eltolódik, de nem csavarodik el. Ha azt akarjuk hogy a helyettesítő tartó egyenértékű legyen a merevítőrendszerrel, akkor ebből az következik, hogy a helyettesítő tartó a merevítőrendszer nyírásközéppontjában kell hogy legyen.

Hasonlóan a korábbi tanulmányaink során a „Tartók statikája II” c. tárgyban tapasztaltakhoz, a nyírásközéppont koordinátáit most is a merevségek súlypontjaként határozzuk meg, célszerűen egy olyan $\bar{x}-\bar{y}$ koordinátarendszerben, amelynek koordinátatengelyei az épületet közrefogják (2.1 ábra). A centrifugális tehetetlenségi

nyomatékokat is figyelembe véve a nyírásközéppont koordinátáit az

$$\bar{x}_o = \frac{I_{xy}\left(\sum_{i=1}^{n} I_{y,i}\bar{y}_i - \sum_{i=1}^{n} I_{xy,i}\bar{x}_i\right) - I_y\left(\sum_{i=1}^{n} I_{xy,i}\bar{y}_i - \sum_{i=1}^{n} I_{x,i}\bar{x}_i\right)}{I_x I_y - I_{xy}^2} \tag{2.1}$$

$$\bar{y}_o = \frac{I_x\left(\sum_{i=1}^{n} I_{y,i}\bar{y}_i - \sum_{i=1}^{n} I_{xy,i}\bar{x}_i\right) - I_{xy}\left(\sum_{i=1}^{n} I_{xy,i}\bar{y}_i - \sum_{i=1}^{n} I_{x,i}\bar{x}_i\right)}{I_x I_y - I_{xy}^2} \tag{2.2}$$

összefüggések adják meg, ahol $I_{x,i}$, $I_{y,i}$ és $I_{xy,i}$ az i-edik merevítőelem tehetetlenségi nyomatékai az elemek saját súlyponti tengelyeire és I_x, I_y és I_{xy} a tehetetlenségi nyomatékok összegei:

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} I_{x,i}, \qquad I_y = \sum_{i=1}^{n} I_{y,i}, \qquad I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} I_{xy,i}$$

ahol n a merevítőelemek száma. A fenti képletekben $\bar{x}_i$ és $\bar{y}_i$ az egyes merevítőelemek saját nyírásközéppontjára vonatkozik.

Látható, hogy azoknál a merevítőrendszereknél amelyeknek az elemei nem rendelkeznek centrifugális tehetetlenségi nyomatékkal (vagy a centrifugális tehetetlenségi nyomaték elhanyagolhatóan kicsi), a fenti képletek a korábbi tanulmányaink – a Tartók statikája II c. tárgy – során már levezetett képletekre egyszerűsödnek:

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{x,i}\bar{x}_i}{I_x}; \qquad \bar{y}_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{y,i}\bar{y}_i}{I_y} \tag{2.3}$$

A nyírásközéppont koordinátáinak ismeretében a koordinátarendszert áthelyezzük a nyírásközéppontba és a további vizsgálatot a nyírásközéppontban lévő origóval rendelkező x-y koordinátarendszerben (2.1 ábra) fogjuk végrehajtani. Az $\bar{x}$ és $\bar{y}$ segédtengelyekre a továbbiakban nem lesz szükség.

2.2 A helyettesítő tartó jellemző tulajdonságai

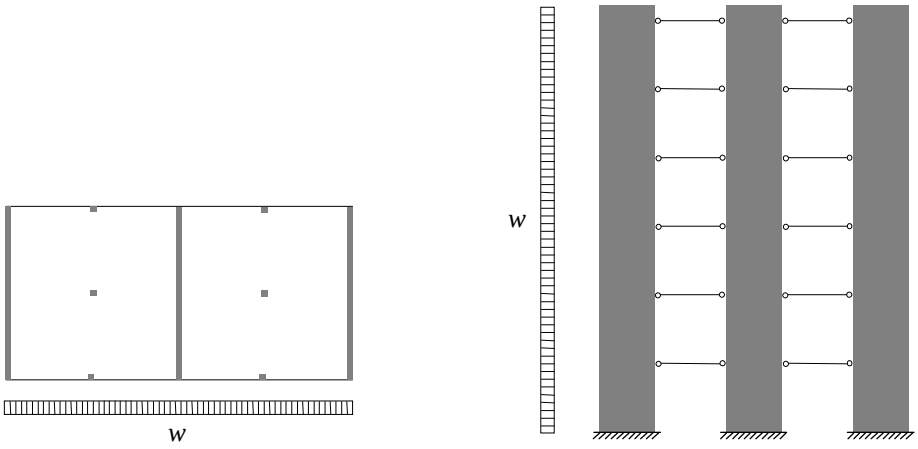
A helyettesítő tartó merevségei azonosak kell hogy legyenek a merevítőrendszer merevségeivel. Itt azt kell figyelembe venni, hogy a merevítőrendszert alkotó elemek (falak és magok) között a födémek jelentik a kapcsolatot. A merevségeket két csoportban, a hajlítási és a csavarási merevségek csoportjában vizsgáljuk.

A három hajlítási merevség esetében egyszerű a helyzet. A födémek saját síkban nagy merevségük révén a merevítőrendszer elemeit együttdolgoztatják, amelyek így úgy működnek mintha csuklós rudakkal „sorbakapcsolt” elemek lennének (2.2 ábra). Ebből az következik, hogy a helyettesítő tartó EI_x, EI_y és EI_{xy} hajlítási merevségeit úgy kapjuk meg, hogy a merevítőelemek hajlítási merevségeit egyszerűen összegezzük:

$$EI_x = E\sum_{i=1}^{n} I_{x,i} \qquad EI_y = E\sum_{i=1}^{n} I_{y,i} \qquad EI_{xy} = E\sum_{i=1}^{n} I_{xy,i} \tag{2.4}$$

A fenti képletekben E a rugalmassági tényező.

A csuklós rudakkal modellezett födémek továbbítják a falakra a külső vízszintes terhet, de nyomatékot nem adnak át.



a) alaprajz

b) az épület födémekkel együttdolgoztatott („sorbakapcsolt”) három fala.

2.2 ábra. Három fallal merevített hatszintes épület.

A helyettesítő tartó csavarási merevségei szempontjából a GJ tiszta csavarási és az EI_ω öblösödési csavarási merevséget eltérő módon kell kezelni. A tiszta csavarási merevség esetében – a hajlítási merevségekhez hasonlóan – a födémek nagy síkbeli merevségük folytán összekötik a merevítőelemeket és így a helyettesítő tartó tiszta csavarási merevségét egyszerű összegzéssel kapjuk meg:

$$GJ = G\sum_{i=1}^{n} J_i \tag{2.5}$$

ahol J_i az i-edik merevítőelem tiszta csavarási tehetetlenségi nyomatéka és G a nyírási rugalmassági tényező az (1.8) összefüggés szerint.

Az épület öblösödési csavarási merevsége két forrásból származik. Az egyes elemek öblösödési csavarási merevségét – ha van – egyszerűen össze kell adni, mint az előző esetekben. Ezen kívül azonban a födémek nagy síkbeli merevségük folytán a külső vízszintes teher hatására bekövetkező elcsavarodás során oly módon is együttdolgoztatják az egyes elemeket, hogy azokat hajlítási alakváltozásra kényszerítik. Az ily módon kialakuló hajlítási csavarási ellenállás az elemek saját hajlítási merevségével (egyenesen) és a csavarási középponttól mért távolságával (négyzetesen) arányos. Ez a „járulékos tag” épületek esetében általában igen fontos szerepet játszik, mert nagyságrend(ekk)el nagyobb lehet mint az elemek saját öblösödési merevségeinek összege. A helyettesítő tartó öblösödési csavarási merevsége így az

$$EI_\omega = E\sum_{i=1}^{n}(I_{\omega,i} + I_{x,i}x_i^2 + I_{y,i}y_i^2 - 2I_{xy,i}x_i y_i) \tag{2.6}$$

képletből határozható meg, ahol

$I_{\omega,i}$ az i-edik elem saját öblösödési tehetetlenségi nyomatéka,

x_i, y_i az i-edik elem nyírásközéppontjának távolsága a merevítőrendszer O nyírásközéppontjától (2.1 ábra).

A helyettesítő tartó jellemzői közé sorolható még az épület alaprajzának tehetetlenségi sugara is, amely – mint később látni fogjuk – az épületre ható külső függőleges terhek alapozásra történő továbbítása során játszik fontos szerepet. A tehetetlenségi sugár értékét általános esetben az

$$i_p = \sqrt{\frac{I_o}{A}} = \sqrt{\frac{I_{xp} + I_{yp} + A(x_c^2 + y_c^2)}{A}} = \sqrt{\frac{I_{xp} + I_{yp}}{A} + t^2} \tag{2.7}$$

összefüggés segítségével határozhatjuk meg, ahol

I_o az épület alaprajzának poláris tehetetlenségi nyomatéka a merevítőrendszer nyírásközéppontjára,

I_{xp}, I_{yp} az épület alaprajzának tehetetlenségi nyomatékai az alaprajz súlyponti tengelyeire,

A az alaprajz területe.

A fenti képletben t a merevítőrendszer nyírásközéppontja (O) és a külső terhek támadáspontja (C) közötti távolság (2.1 ábra), a

$$t = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \tag{2.8}$$

képlet szerint, ahol ennek a távolságnak a vetületei

$$x_c = \frac{L}{2} - \bar{x}_o, \qquad y_c = \frac{B}{2} - \bar{y}_o \tag{2.9}$$

Téglalap alaprajzzal rendelkező épületeknél a tehetetlenségi sugár képlete jelentősen egyszerűsödik:

$$i_p = \sqrt{\frac{\frac{BL^3}{12} + \frac{LB^3}{12}}{LB} + t^2} = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} \tag{2.10}$$

ahol L és B az alaprajz két mérete (2.1 ábra).

A helyettesítő tartó jellemzői között meg kell még említeni a tehetetlenségi főtengelyeket. Ha a helyettesítő tartó nem rendelkezik centrifugális tehetetlenségi nyomatékkal ($I_{xy} = 0$), akkor a nyírásközépponton átmenő és az épület oldalaival párhuzamos x és y tengelyek a tehetetlenségi főtengelyek. Ha viszont a helyettesítő tartó rendelkezik centrifugális tehetetlenségi nyomatékkal ($I_{xy} \neq 0$), akkor a tehetetlenségi főtengelyek szöget zárnak be az épület oldalaival. Az x tengellyel bezárt szöget (2.3 ábra) az

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \tag{2.11}$$

összefüggésből határozhatjuk meg.

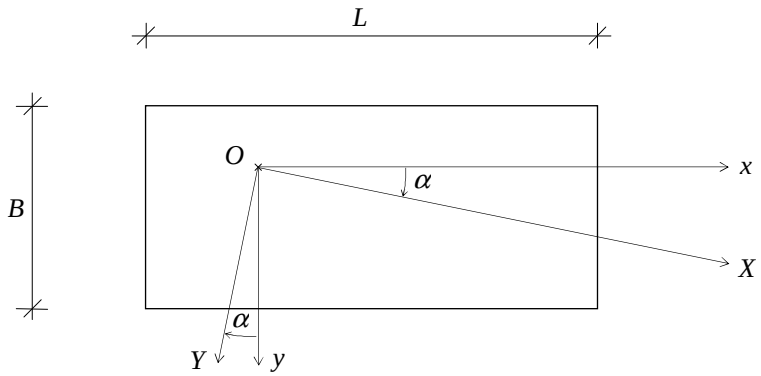
A x tengellyel bezárt α szög ismeretében az

$$I_X = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \tag{2.12}$$

és

$$I_Y = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \qquad (2.13)$$

összefüggések adják meg a főtehetetlenségi nyomatékokat, ahol *X* és *Y* a főtengelyeket jelölik (2.3 ábra).

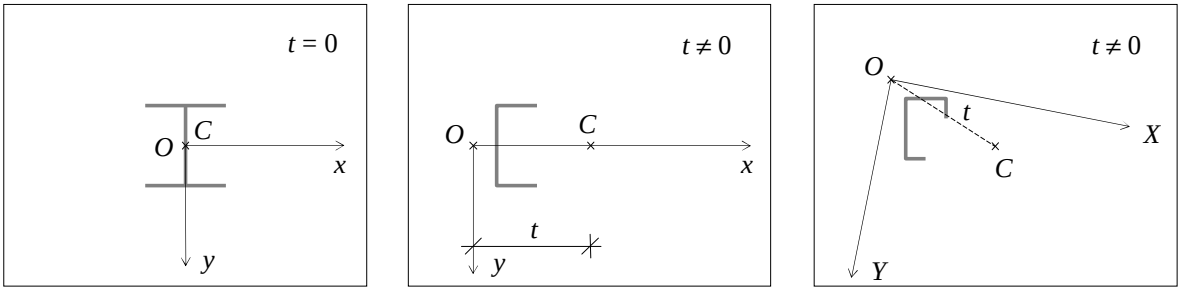


2.3 ábra. Az *X* és *Y* tehetetlenségi főtengelyek.

2.3 Az épület térbeli viselkedésének vizsgálata a helyettesítő tartó segítségével

Az épület merevítőrendszere térbeli viselkedésének elemzéséhez feltételezzük, hogy a teher függőleges és stabilitásvizsgálatról van szó. A stabilitási viselkedés 5. fejezetben megtalálható részletes tárgyalása előtt előrebocsátjuk, hogy a kritikus teher (N_{kr}) az a függőleges teher, amelynél az épület elveszti stabilitását. (A viselkedés *jellege* vízszintes teher és szilárdsági illetve dinamikai vizsgálatnál is megfelel az itt leírtaknak.) A 2.4 ábrán alaprajzával megadott épületet a nyírásközéppontban elhelyezkedő (képzelt) helyettesítő tartóval jellemezzük.

A térbeli viselkedés alapvetően attól függ, hogy a függőleges külső teher eredője (a *C* pontban) és a merevítőrendszer nyírásközéppontja (*O*) hogyan helyezkedik el egymáshoz képest. Három lehetőség van.



a) kétszeres szimmetria b) egyszeres szimmetria c) általános eset

2.4 ábra. Térbeli viselkedés (t –> OC távolság).

a) Kétszeres szimmetria: a függőleges terhek eredőjének támadáspontját jelző *C* pont egybeesik a merevítőrendszer *O* nyírásközéppontjával (2.4/a ábra).
Ebben az esetben három dolog történhet:

- A merevítőrendszer kihajlik az *xz* síkban (ezt az esetet $N_{kr,x}$ jellemzi), vagy
- A merevítőrendszer kihajlik az *yz* síkban (ezt az esetet $N_{kr,y}$ jellemzi), vagy
- Tiszta elcsavarodó kihajlás jön létre *z* tengely körül (ezt az esetet $N_{kr,\varphi}$ jellemzi).

A három jelenség közül az következik be, amelyikhez a legkisebb kritikus erő tartozik, vagyis

$$N_{kr} = \min (N_{kr,x}, N_{kr,y}, N_{kr,\varphi})$$

b) Egyszeres szimmetria: a függőleges terhek eredőjének támadáspontját jelző *C* pont az egyik tehetetlenségi főtengelyre (pl. az *x* tengelyre) esik (2.4/b ábra).
Ekkor két dolog történhet:

- A merevítőrendszer kihajlik az *xz* síkban (ezt az esetet $N_{kr,x}$ jellemzi), vagy
- A merevítőrendszer kihajlik az *yz* síkban ($N_{kr,y}$), de ez a kihajlás kombinálódik a *z* tengely körüli tiszta elcsavarodó kihajlással ($N_{kr,\varphi}$). Ezt az esetet az $N_{kr,y\varphi}$ jellemzi.

A két jelenség közül az következik be, amelyikhez a legkisebb kritikus erő tartozik, vagyis

$$N_{kr} = \min (N_{kr,x}, N_{kr,y\varphi})$$

c) Általános eset: a függőleges terhek eredőjének támadáspontját jelző *C* pont az egyik tehetetlenségi főtengelyre sem esik (2.4/c ábra).
Ez a legáltalánosabb, legbonyolultabb és leggyakoribb eset. Ekkor három dolog történik, de egyszerre. Az *x* irányú kihajlás ($N_{kr,x}$), az *y* irányú kihajlás ($N_{kr,y}$) és a *z* tengely körüli tiszta elcsavarodó kihajlás ($N_{kr,\varphi}$) kombinálódik. Ez a jelenség az elcsavarodó kihajlás, amelyet olyan kritikus erő jellemez, amelyik mindhárom „alap” kritikus erőnél ($N_{kr,x}$, $N_{kr,y}$, $N_{kr,\varphi}$) kisebb, vagyis

$$N_{kr} < N_{kr,x}, N_{kr,y}, N_{kr,\varphi}$$

A térbeli viselkedés részletes elemzése és az itt vázolt három esetre vonatkozó megállapítások bizonyítása az 5.2 és 5.3 alfejezetekben található meg.

2.4 Számpélda

Határozzuk meg a 2.5 ábrán alaprajzával vázolt Ép1 jelű hétszintes épület helyettesítő tartóját. Az épületet az 1. és 4. jelű 0.25x10 m méretű és a 2. és 3. jelű 0.25x4 m méretű fal merevíti.

A falak tehetetlenségi nyomatékai:

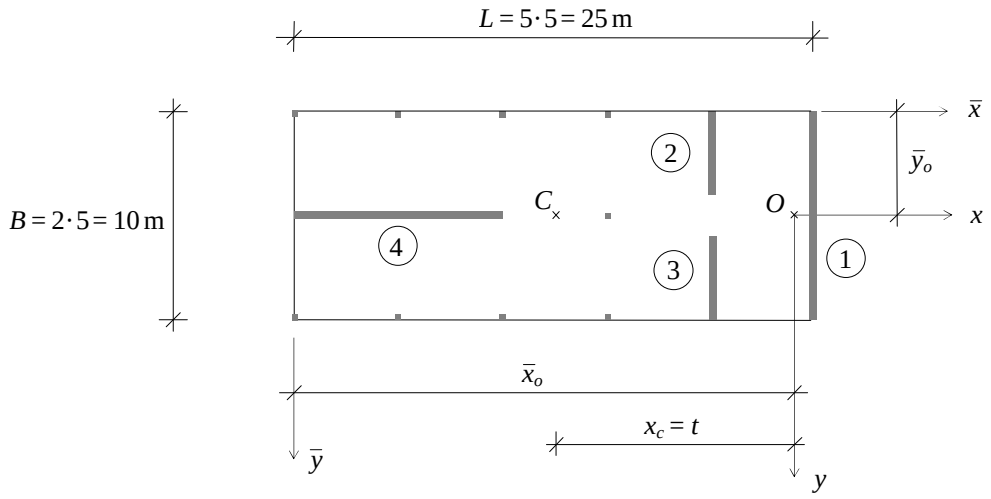
$$I_{1x} = \frac{0.25 \cdot 10^3}{12} = 20.83\,\mathrm{m}^4, \quad I_{1y} = \frac{10 \cdot 0.25^3}{12} = 0.013\,\mathrm{m}^4, \quad J_1 = \frac{10 \cdot 0.25^3}{3} = 0.052\,\mathrm{m}^4$$

$$I_{2x} = I_{3x} = \frac{0.25 \cdot 4^3}{12} = 1.333\,\mathrm{m}^4, \; I_{2y} = I_{3y} = \frac{4 \cdot 0.25^3}{12} = 0.0052\,\mathrm{m}^4, \; J_2 = J_3 = \frac{4 \cdot 0.25^3}{3} = 0.021\,\mathrm{m}^4$$

$$I_{4x} = \frac{10 \cdot 0.25^3}{12} = 0.013\,\mathrm{m}^4, \quad I_{4y} = \frac{0.25 \cdot 10^3}{12} = 20.83\,\mathrm{m}^4, \quad J_4 = \frac{10 \cdot 0.25^3}{3} = 0.052\,\mathrm{m}^4$$

Az I_{xy} és I_ω érték mind a négy fal esetében zérus.

A geometriai és merevségi alapadatokat célszerű táblázatosan megadni, ahol a későbbi részletszámítások is könnyen elvégezhetők (2.1 táblázat). A 2.1 táblázat – és a későbbi hasonló táblázatok – nem tartalmazzák a zérus nagyságú I_{xy} értékeket.



2.5 ábra. Az Ép1 jelű épület geometriai adatai.

A nyírásközéppont koordinátáit az $\bar{x}-\bar{y}$ koordinátarendszerben a (2.3) képletekből számíthatjuk ki:

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{x,i}\bar{x}_i}{I_x} = \frac{20.83\cdot 25 + 1.33\cdot 20\cdot 2 + 0.013\cdot 5}{23.5} = \frac{574.01}{23.5} = 24.422\,\text{m}$$

$$\bar{y}_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{y,i}\bar{y}_i}{I_y} = \frac{5\cdot 0.013 + 2\cdot 0.005 + 8\cdot 0.005 + 5\cdot 20.83}{20.85} = \frac{104.27}{20.85} = 5.00\,\text{m}$$

2.1 táblázat. Az Ép1 jelű épület geometriai és merevségi alapadatai.

Elem	$\bar{x}_i$ [m]	$\bar{y}_i$ [m]	$I_{x,i}$ [m^4]	$I_{y,i}$ [m^4]	J_i [m^4]	x_i [m]	y_i [m]	$I_{x,i}x_i^2$	$I_{y,i}y_i^2$	I_ω [m^6]
1	25	5	20.83	0.013	0.052	0.578	0	7.0	0.00	
2	20	2	1.33	0.005	0.021	-4.422	-3	26.0	0.05	
3	20	8	1.33	0.005	0.021	-4.422	3	26.0	0.05	
4	5	5	0.013	20.83	0.052	-19.42	0	4.9	0.00	
Σ			$\boldsymbol{I_x}$=23.50	$\boldsymbol{I_y}$=20.85	$\boldsymbol{J}$=0.146			63.9	0.10	$\boldsymbol{I_\omega}$=64.0

A nyírásközéppont koordinátáinak ismeretében a koordinátarendszer kezdőpontját áthelyezzük a nyírásközéppontba és az

$$x_i = \bar{x}_i - \bar{x}_o$$

$$y_i = \bar{y}_i - \bar{y}_o$$

összefüggések segítségével kiszámítjuk a merevítőfalak koordinátáit ebben az új koordinátarendszerben. Ezeket az értékeket a 2.1 táblázat 7. és 8. oszlopában tüntettük fel.

A helyettesítő tartó I_x, I_y és J tehetetlenségi nyomatékait egyszerű összegzéssel határozzuk meg. Ezeket az értékeket a 2.1 táblázat utolsó sora tartalmazza. Az I_ω öblösödési csavarási tehetetlenségi nyomatékot a (2.6) összefüggés szolgáltatja:

$$I_\omega = \sum_{i=1}^{n} (I_{x,i} x_i^2 + I_{y,i} y_i^2) = 20.83 \cdot 0.578^2 + 1.33 \cdot 4.422^2 \cdot 2 + 0.013 \cdot 19.42^2 + 0.005 \cdot 3^2 \cdot 2 = 64.0 \text{ m}^6$$

(A fenti képletben a zérus értékű tagokat nem tüntettük föl.)

A helyettesítő tartó utolsó jellemzője a tehetetlenségi sugár, amit a (2.9), (2.8) és (2.10) összefüggések segítségével határozunk meg:

$$x_c = \frac{L}{2} - \bar{x}_o = \frac{25}{2} - 24.42 = -11.92 \text{ m}; \qquad y_c = \frac{B}{2} - \bar{y}_o = \frac{10}{2} - 5 = 0$$

$$t = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = x_c = 11.92 \text{ m}$$

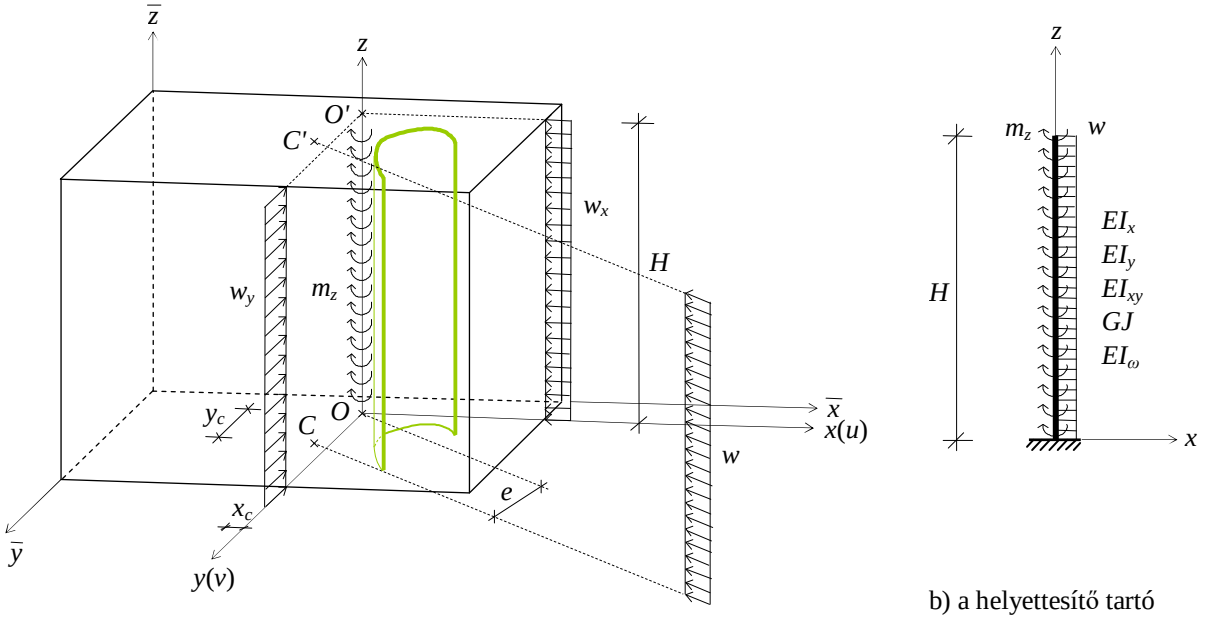
$$i_p = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} = \sqrt{\frac{25^2 + 10^2}{12} + 11.92^2} = \sqrt{202.5} = 14.23 \text{ m}$$

A helyettesítő tartót így az I_x, I_y, J, I_ω és i_p merevségi és geometriai jellemzőkkel, valamint a nyírásközéppont $\bar{x}_o$ és $\bar{y}_o$ koordinátáival előállítottuk.

3

Merevítőrendszerek szilárdsági vizsgálata vízszintes terhek hatására

Abban az általános esetben amikor a merevítőrendszert alkotó elemek között magok is vannak, a korábbi tanulmányaink során megismert egyszerű, egyensúlyi egyenletekre épülő módszer már nem alkalmazható. Ilyen esetekben fel kell írni és meg kell oldani a feladat differenciálegyenlet-rendszerét. Ez az általában bonyolult eljárás viszonylag egyszerűen és szemléletesen hajtható végre, ha a teljes merevítőrendszert helyettesítjük az előző fejezetben bevezetett helyettesítő tartóval (3.1 ábra) és a vizsgálatot azon hajtjuk végre.



a) épület a helyettesítő tartóval

b) a helyettesítő tartó terhei és merevségei

3.1 ábra. a) Vízszintes erőkkel terhelt épület.

Először a helyettesítő tartó és az épület alakváltozásait vizsgáljuk, majd megállapítjuk, hogy a külső teher hogyan oszlik meg a merevítőrendszer elemei között.

3.1 Alakváltozások

A merevítőrendszert pótló helyettesítő tartó EI_x, EI_y, EI_{xy}, GJ és EI_ω merevségekkel rendelkezik. A tartó egy elemi darabjának egyensúlyát vizsgálva az

$$EI_y u''''(z) + EI_{xy} v''''(z) = w_x \tag{3.1}$$

$$EI_x v''''(z) + EI_{xy} u''''(z) = w_y \tag{3.2}$$

$$EI_\omega \varphi''''(z) - GJ\varphi''(z) = m_z \tag{3.3}$$

differenciálegyenlet-rendszer írható fel, amelyhez az

$$u(0) = v(0) = \varphi(0) = 0 \tag{3.4a}$$

$$u'(0) = v'(0) = \varphi'(0) = 0 \tag{3.4b}$$

$$u''(H) = v''(H) = \varphi''(H) = 0 \tag{3.4c}$$

$$u'''(H) = v'''(H) = EI_\omega \varphi'''(H) - GJ\varphi'(H) = 0 \tag{3.4d}$$

peremfeltételek tartoznak. Az egyenletekben $u(z)$ és $v(z)$ az x és y irányú eltolódások, $\varphi(z)$ az elcsavarodás, w_x és w_y a külső teher intenzitása az x és y irányban és $m_z = we$ a külső teher csavarónyomatéka a nyírásközépponton átmenő z függőleges tengely körül.

Az első két egyenlet a ferde hajlítás differenciálegyenlete, míg a harmadik egyenlet a z tengely körüli elcsavarodás differenciálegyenlete. Az első peremfeltételek azt fejezik ki, hogy a befogási keresztmetszetben a tartó nem tolódik és nem csavarodik el. A második peremfeltétel-hármas szerint a befogási keresztmetszetnél az érintő függőleges és nem keletkezik öblösödés. A (3.4c) peremfeltételek értelmében a tartó szabad végén a hajlítónyomatékok zérus értékűek és nem ébrednek öblösödési feszültségek. Végül az utolsó peremfeltételek azt fejezik ki, hogy a tartó szabad végén a nyíróerők és a csavarónyomatékok értéke zérus.

A megoldás két lépésben történik. Először meghatározzuk az alakváltozásokat, majd megállapítjuk hogy a külső teherből mennyi jut az egyes merevítőelemekre.

A ferde hajlítást jellemző hiányos negyedrendű (3.1) és (3.2) differenciálegyenleteket általános esetben együtt kell kezelni, mert mindkettő tartalmazza az u és v eltolódásokat. Négy integrálás és a vonatkozó peremfeltételek felhasználása után az eltolódásokra az

$$u(z) = \frac{I_x w_x - I_{xy} w_y}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} \left(\frac{z^4}{24} - \frac{Hz^3}{6} + \frac{H^2 z^2}{4} \right) \tag{3.5a}$$

$$v(z) = \frac{I_y w_y - I_{xy} w_x}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} \left(\frac{z^4}{24} - \frac{Hz^3}{6} + \frac{H^2 z^2}{4} \right) \tag{3.5b}$$

összefüggéseket kapjuk. Maximális eltolódás a helyettesítő tartó tetején jön létre:

$$u_{\max} = u(H) = \frac{I_x w_x - I_{xy} w_y}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} \frac{H^4}{8} \tag{3.6a}$$

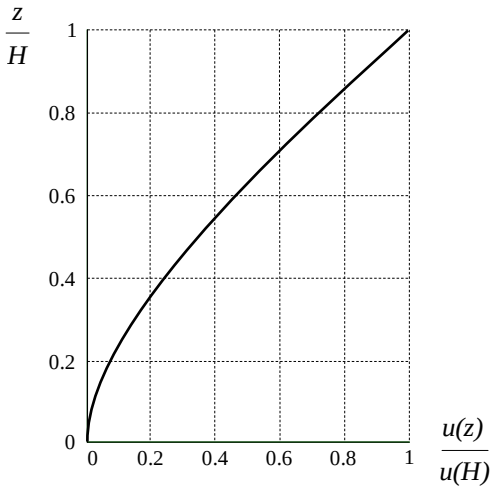
$$v_{\max} = v(H) = \frac{I_y w_y - I_{xy} w_x}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} \frac{H^4}{8} \tag{3.6b}$$

Zérus centrifugális tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező helyettesítő tartó esetén a (3.1) és (3.2) egyenletek a második tag zérussá válásával az egyenes hajlítás differenciálegyenletére

egyszerűsödnek. Ennek megfelelően az eltolódások képletei is egyszerűbb alakot öltenek és a maximális tetőponti eltolódásokra a már jól ismert összefüggéseket kapjuk:

$$u_{\max} = \frac{w_x H^4}{8EI_y}, \qquad v_{\max} = \frac{w_y H^4}{8EI_x} \tag{3.7}$$

A tartó alakváltozása – a (3.5) összefüggések tanúsága szerint – tiszta hajlítási alakváltozás (3.2 ábra).



3.2 ábra. A helyettesítő tartó eltolódásai.

A (3.3) egyenlet a helyettesítő tartó elcsavarodását jellemzi. A negyedrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet megoldása jóval bonyolultabb mint a ferde hajlítás egyenleteinek a megoldása. A megoldás

$$\varphi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh\frac{k}{H} z + C_4 \cosh\frac{k}{H} z - \frac{m_z}{6EI_\omega}\frac{3z^2H^2}{k^2} \tag{3.8}$$

alakban kereshető, ahol az első négy tag a homogén egyenlet megoldása és az utolsó tag az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása, és *k* a csavarási tényező:

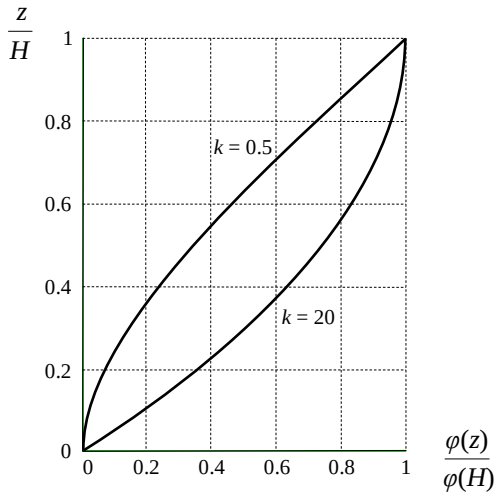
$$k = H\sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}} \tag{3.9}$$

A (3.8) egyenletet négyszer integrálva és figyelembe véve a vonatkozó négy peremfeltételt, a C_1, C_2, C_3 és C_4 konstansok meghatározhatók és a helyettesítő tartó elcsavarodására a

$$\varphi(z) = \frac{m_z}{GJ\cosh k}\left[\frac{H^2}{k^2}\left(\cosh\frac{kz}{H} + k\sinh(k - \frac{kz}{H}) - k\sinh k - 1\right) + z(H - \frac{z}{2})\cosh k\right] \tag{3.10}$$

összefüggés adódik. Az elcsavarodás függvénye – az eltolódás függvényével ellentétben – két merevségtől (*GJ* és EI_ω) is függ. A két merevség közötti kapcsolatot a *k* csavarási tényező

adja. A 3.3 ábrán az elcsavarodás magasság menti alakulását mutatjuk meg, $k = 0.5$ és $k = 20$ arányokra.



3.3 ábra. A helyettesítő tartó elcsavarodása.

A maximális elcsavarodás a tartó tetején $z = H$-nál jön létre és értékét a

$$\varphi_{\max} = \varphi(H) = \frac{m_z H^2}{GJ}\left(\frac{\cosh k - 1}{k^2 \cosh k} - \frac{\tanh k}{k} + \frac{1}{2}\right) \tag{3.11}$$

képlet adja meg.

A legtöbb merevítőrendszer esetében a k csavarási tényező értéke kicsi ($k < 1$), ami azt jelenti, hogy a csavarás során a tiszta csavarási merevség hatása kicsi az öblösödési csavarási merevség hatásához képest ($GJ^{\text{hatása}} << EI_\omega^{\text{hatása}}$). Ekkor a (3.3) egyenlet átrendezésével

$$\varphi''''(z) - \frac{GJ}{EI_\omega}\varphi''(z) = \frac{m_z}{EI_\omega} \tag{3.12}$$

és annak figyelembevételével hogy $GJ/EI_\omega \approx 0$, a

$$\varphi''''(z) = \frac{m_z}{EI_\omega} \tag{3.13}$$

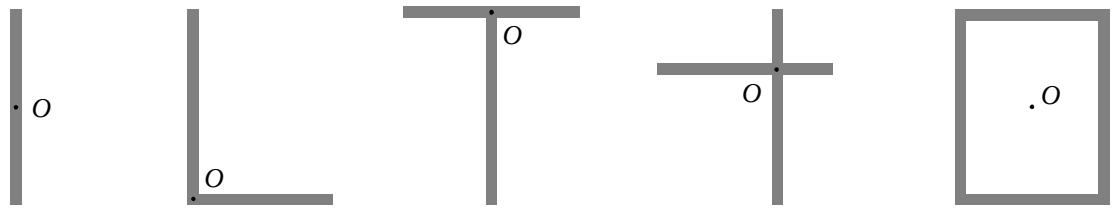
differenciálegyenlethez jutunk, ami a hajlítás jól ismert differenciálegyenletével formailag azonos és így a hajlításnál levezetett eredmény is felhasználható. Ennek megfelelően a maximális elcsavarodásra a

$$\varphi_{\max} = \varphi(H) = \frac{m_z H^4}{8EI_\omega} \tag{3.14}$$

összefüggést kapjuk.

Ha az öblösödési csavarási merevség zérus lenne, akkor az elcsavarodás (3.14) megoldása nem használható. Ilyen helyzet állhat elő például abban az egyébként ritka gyakorlati esetben, amikor az épületet egyetlen egy öblösödési merevséggel nem rendelkező (például lépcsőházi)

mag merevíti. – Zérus öblösödési csavarási merevséggel rendelkező merevítőelemeket mutat a 3.4 ábra.



3.4 ábra. Zérus öblösödési merevséggel rendelkező merevítőelemek.

Ekkor a (3.3) egyenlet a

$$\varphi''(z) = -\frac{m_z}{GJ} \tag{3.15}$$

egyenletre egyszerűsödik. Ez a hiányos másodrendű differenciálegyenlet közvetlenül megoldható és kétszeri integrálás és a vonatkozó peremfeltételek felhasználása után a maximális elcsavarodásra a

$$\varphi_{\max} = \varphi(H) = \frac{m_z H^2}{2GJ} \tag{3.16}$$

összefüggést kapjuk.

A fenti képletek az elcsavarodás szögét radiánban adják. Ha az elcsavarodást százalékban akarjuk megadni, akkor a radián érték 100-szorosát kell venni. Az átszámítás fokra a

$$\varphi\,[\text{fok}] = \varphi\,[\text{radián}]\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3\varphi\,[\text{radián}] \tag{3.17}$$

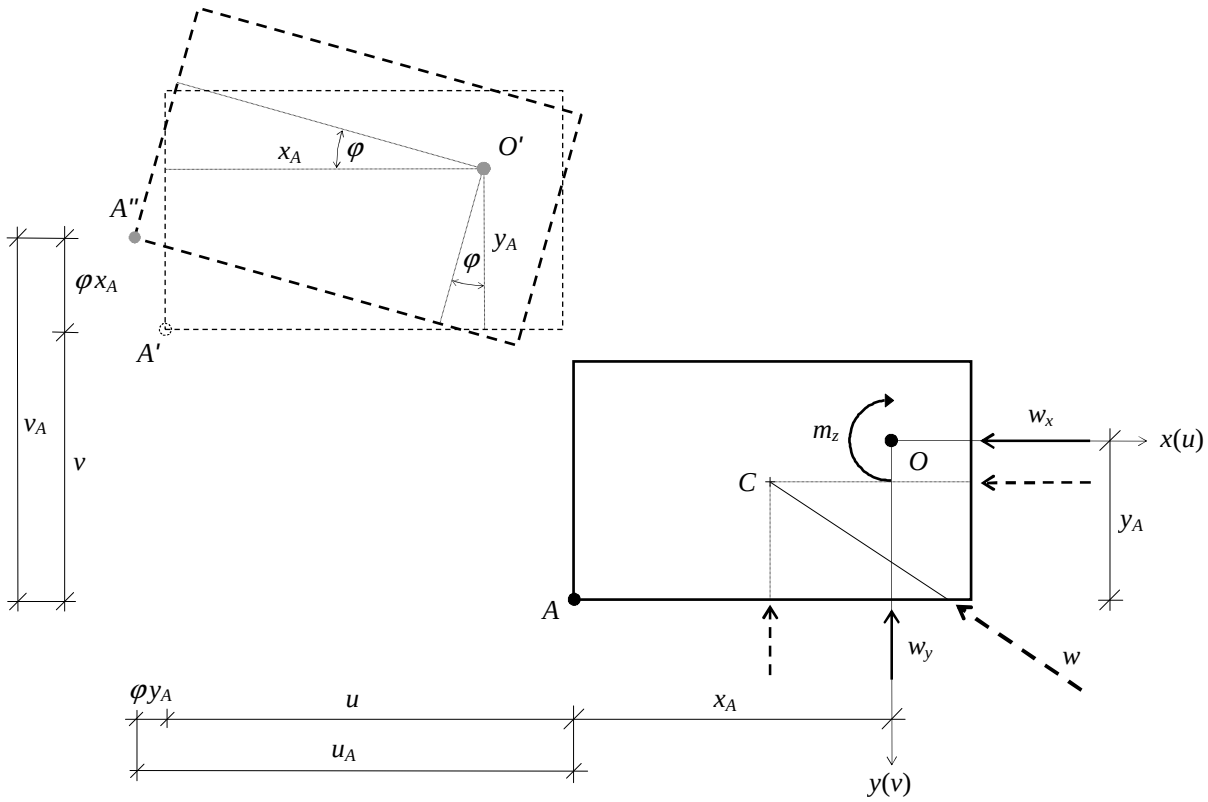
képlet szerint történik.

Fenti összefüggések a helyettesítő tartóra vonatkoznak, de mi az épület alakváltozásaira vagyunk kíváncsiak. Ami az elcsavarodást illeti, a helyettesítő tartó elcsavarodására levezetett képletek az épületre is érvényesek, de az épület eltolódásainak meghatározásához figyelembe kell venni az alaprajz méreteit, illetve a meghatározandó eltolódás helyét is.

A (3.5), (3.6) és (3.7) képletekkel megadott eltolódások a nyírásközéppontba áthelyezett külső teher hatására létrejövő eltolódások. Ezek az épület eltolódásai is, ha a külső teher átmegy a nyírásközépponton (vagyis ha a nyírásközéppont és a teher „támadáspontja” egybeesik), mivel ekkor nincs elcsavarodás. Általános esetben azonban a külső teher hatásvonala nem megy át a nyírásközépponton és így a teher csavarónyomatékot is ébreszt. E csavarónyomaték hatására az épület a nyírásközéppont körül el is csavarodik. Így az épület összes pontja – a nyírásközéppont kivételével – további eltolódást végez (3.5 ábra). Könnyű belátni, hogy a maximális eltolódás az épület valamelyik sarokpontjánál jön létre. A 3.5 ábrán vázolt esetben ez a pont az „A” sarokpont, amelynek *x* és *y* irányú eltolódásait az

$$u_A = u + y_A \tan\varphi \qquad\qquad v_A = v + x_A \tan\varphi \tag{3.18}$$

képletekből határozhatjuk meg, ahol *u* és *v* a nyírásközéppont (3.6)-(3.7) képletekkel számítható maximális eltolódásai és φ a helyettesítő tartó maximális elcsavarodása [(3.11) képlet].



3.5 ábra. Az épület u_A és v_A maximális eltolódásai.

Az épület maximális eltolódásának meghatározására egy másik módszer is alkalmazható, ha a maximális eltolódás helyén (az épület sarkánál) van merevítőelem. Ekkor az első lépés az erre a merevítőelemre jutó teher meghatározása (a következő 3.2 pontban ismertetett módon). Az elemre jutó erőhányad ismeretében a (3.6)–(3.7) képletek megadják az *épület* maximális eltolódásait, ha a képletben szereplő tehetetlenségi nyomaték helyére az illető *elem* tehetetlenségi nyomatékát helyettesítjük.

Többszintes épületek maximális eltolódásait célszerű korlátozni a nagy alakváltozások elkerülése céljából. Különböző országok különböző mértékű korlátozást javasolnak. Az elfogadható maximális vízszintes eltolódás értéke a különböző javaslatok szerint általában a magasság 0.0016–0.0035-szöröse közé esik, az épület magasságának, a szélnyomás mértékének, stb. függvényében. A „Committee on Wind Bracing of the American Society of Civil Engineers” (ASCE) ajánlása szerint a merevítőrendszer alakváltozás szempontjából megfelelő, ha az

$$u_{\max} \le \frac{H}{500} \qquad \text{és} \qquad v_{\max} \le \frac{H}{500} \tag{3.19}$$

feltételek teljesülnek, ahol H az épület magassága.

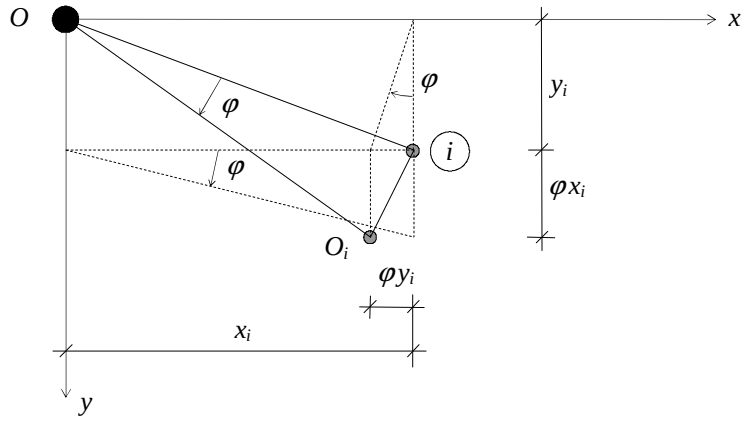
3.2 A merevítőrendszer elemeire jutó terhek

A merevítőrendszer csak akkor tudja betölteni elsőrendű feladatát (a vízszintes terhek továbbítását az alapozásra), ha az egyes elemeiben a feszültségek nem lépik túl a megfelelő határértékeket. A feszültségek nagysága alapvetően függ attól, hogy a teljes külső teherből mennyi jut a merevítőrendszer elemeire. A méretezés során tehát elkerülhetetlen feladat a külső vízszintes teher szétosztása a merevítőelemek között.

A merevítőrendszer elmeire jutó erők nagysága függ attól, hogy mekkora eltolódást végeznek. Az épület eltolódása – és így az elemek eltolódása is – két részből áll (3.5 ábra). A födémek merevtest-szerű eltolódása minden egyes elem *u* és *v* eltolódását eredményezi. Ezen kívül, az épület φ elcsavarodása miatt az egyes elemek φx_i és φy_i méretű többleteltolódást is szenvednek (3.6 ábra). Az *i*-edik elem teljes eltolódása így

$$v_i = v + x_i\varphi \qquad \text{és} \qquad u_i = u - y_i\varphi \tag{3.20}$$

ahol x_i és y_i az elem távolsága az *O* nyírásközépponttól.



3.6 ábra. Az *i*-edik merevítőelem elcsavarodás miatt keletkező többlet-elmozdulásai.

Tekintsük ismét a merevítőrendszer (3.1), (3.2) és (3.3) differenciálegyenlet-rendszerét. Célunk először az $u''''(z)$, $v''''(z)$ és $\varphi''''(z)$ meghatározása. Az első két egyenlet (a két ismeretlennel) együtt kezelendő és rendezés után az

$$u''''(z) = \frac{w_x I_x - w_y I_{xy}}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} \qquad \text{és} \qquad v''''(z) = \frac{w_y I_y - w_x I_{xy}}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} \tag{3.21}$$

összefüggéseket kapjuk.

Ha feltételezzük hogy az épület csavarási ellenállását dominálóan az öblösödési csavarási merevség jelenti (vagyis ha $k < 1$), akkor a (3.3) egyenletből $\varphi''''(z)$ közvetlenül kifejezhető:

$$\varphi''''(z) = \frac{m_z}{EI_\omega} \tag{3.22}$$

A gyakorlati esetekben a $k < 1$ feltétel általában teljesül. Amikor esetleg nem teljesül, például az egyetlen zárt maggal merevített szerkezet esetében, akkor pedig a probléma hogy a merevítőelemre mennyi teher jut, nem merül fel.

Ha most ismét elővesszük a (3.1), (3.2) és (3.3) differenciálegyenlet-rendszert, de most az *i*-edik elemre alkalmazzuk, amely a (3.20) összefüggések szerinti alakváltozásokat hajtja végre, akkor az *i*-edik elemre jutó terhekre az

$$EI_{y,i}[u''''(z) - y_i\varphi''''(z)] + EI_{xy,i}[v''''(z) + x_i\varphi''''(z)] = w_{x,i} \tag{3.23a}$$

$$EI_{x,i}[v''''(z) + x_i\varphi''''(z)] + EI_{xy,i}[u''''(z) - y_i\varphi''''(z)] = w_{y,i} \tag{3.23b}$$

egyenleteket kapjuk. Ide behelyettesítve $u''''(z)$, $v''''(z)$ és $\varphi''''(z)$ (3.21) és (3.22) értékeit, figyelembe véve hogy $wH = F$, megkapjuk az i-edik merevítőelemre jutó erőhányadok értékét:

$$F_{x,i} = \frac{I_{y,i}(F_x I_x - F_y I_{xy}) + I_{xy,i}(F_y I_y - F_x I_{xy})}{I_x I_y - I_{xy}^2} - \frac{M_z}{I_\omega}(I_{y,i} y_i - I_{xy,i} x_i) \tag{3.24}$$

$$F_{y,i} = \frac{I_{xy,i}(F_x I_x - F_y I_{xy}) + I_{x,i}(F_y I_y - F_x I_{xy})}{I_x I_y - I_{xy}^2} + \frac{M_z}{I_\omega}(I_{x,i} x_i - I_{xy,i} y_i) \tag{3.25}$$

ahol $M_z = F_x y_c + F_y x_c$ a külső teher ($F = wH$) csavarónyomatéka a nyírásközéppont körül.

A centrifugális tehetetlenségi nyomaték értéke gyakran zérus. Ekkor a fenti képletek egyszerűsödnek:

$$F_{x,i} = \frac{I_{y,i}}{I_y} F_x - \frac{I_{y,i} y_i}{I_\omega} M_z \tag{3.26}$$

$$F_{y,i} = \frac{I_{x,i}}{I_x} F_y + \frac{I_{x,i} x_i}{I_\omega} M_z \tag{3.27}$$

A gyakorlati számítások során ügyelni kell arra, hogy a fenti képletekben szereplő mennyiségek előjeles mennyiségek! A nyírásközéppont körül forgató M_z nyomaték előjelét a szokásos előjelszabály szabályozza: a nyomaték előjele akkor pozitív, ha az óramutató járásával egyezően forgat.

A csavaró tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező merevítőelemek a külső csavaró nyomatékból merevségeik arányában részesülnek (v. ö. a Cross-módszerrel):

$$M_{t,i} = \frac{J_i}{J} M_t \tag{3.28}$$

és

$$M_{\omega,i} = \frac{I_{\omega,i}}{I_\omega} M_\omega \tag{3.29}$$

ahol $M_t + M_\omega = M_z$.

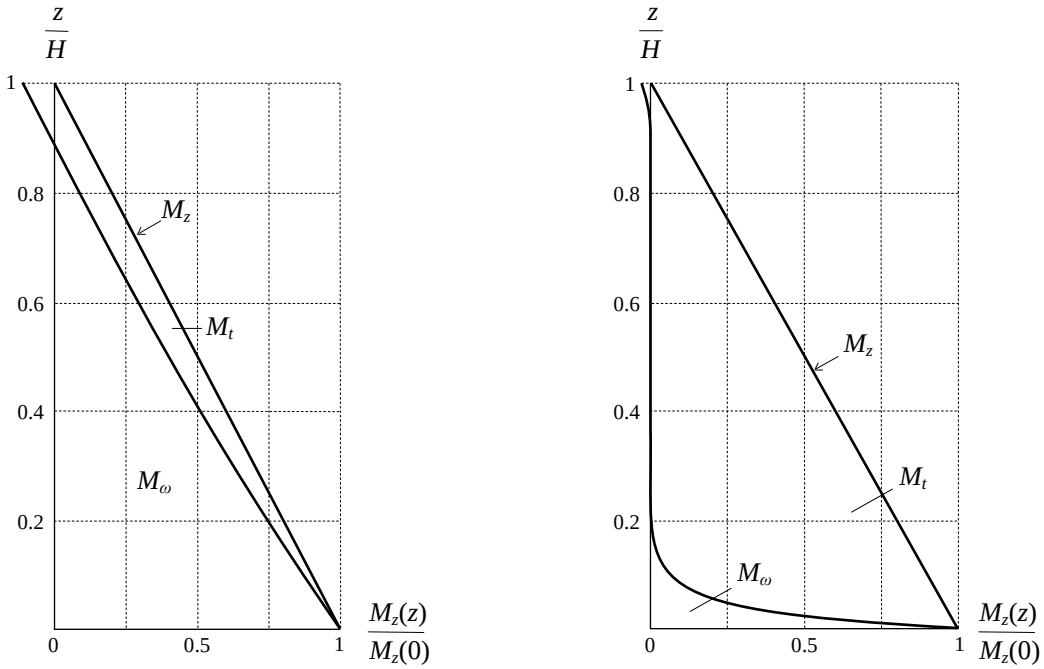
A 3.7 ábra jellegzetes csavarónyomaték eloszlást mutat $k = 1$ és $k = 30$ arányokra. Az ábrák tanúsága szerint már k = 1-nél is az öblösödési csavaró nyomaték hatása dominál, így a gyakorlati esetekre jellemző $0 < k < 1$ tartományban elegendő az öblösödési csavaró nyomatékkal foglalkozni. Az öblösödési csavarási nyomaték maximuma a befogási keresztmetszetnél van és így az

$$M_{\omega,\max} = M_\omega(0) = m_z H \tag{3.30}$$

nyomatékot kell szétosztani (3.29) képlet szerint az öblösödési tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező merevítőelemek között.

A merevítőrendszer elemeinek szilárdsági méretezése nem témája a jegyzetnek, így csak megemlítjük, hogy az erő- és nyomatékhányadok ismeretében a méretezés során a következőkkel kell számolni:

- Vízszintes erők → T → τ
  → $M_{hajlító}$ → σ
- Függőleges erők → N → σ (de N hatásával most nem foglalkoztunk)
- Csavarónyomatékok → M_ω → σ



a) $k = 1$ b) $k = 30$

3.7 ábra. A csavarónyomatékok alakulása a magasság mentén.

3.3 A merevítőrendszer viselkedése vízszintes teher hatására

Végezetül a fent bemutatott levezetések és képletek alapján összefoglaljuk a merevítőrendszer viselkedésével kapcsolatos legfontosabb tanulságokat.

Erőhányadok

- a merevítőelemek alapvetően merevségük arányában részesednek a külső teherből {a (3.26), (3.27) képletek első tagja}
- plusz/mínusz teher jöhet az elcsavarodásból {a (3.26), (3.27) képletek második tagja}
- az erők szétosztása nem függ a külső teher megoszlásától

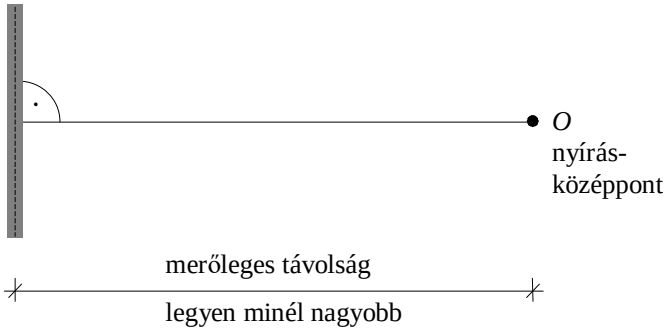
A merevítőrendszer viselkedését alapvetően jellemző tényezők

- a hajlítási merevség: EI_x, EI_y
- a csavarási merevség: EI_ω
  GJ – általában nem jelentős hatású
- a külső teher külpontossága

Hogyan növelhetjük a merevítőrendszer (=épület) hatékonyságát és csökkenthetjük alakváltozásait?

- a hajlítási merevség (EI_x, EI_y) növelésével, lehetőleg a külső teher (F_x, F_y) nagyságával összhangban

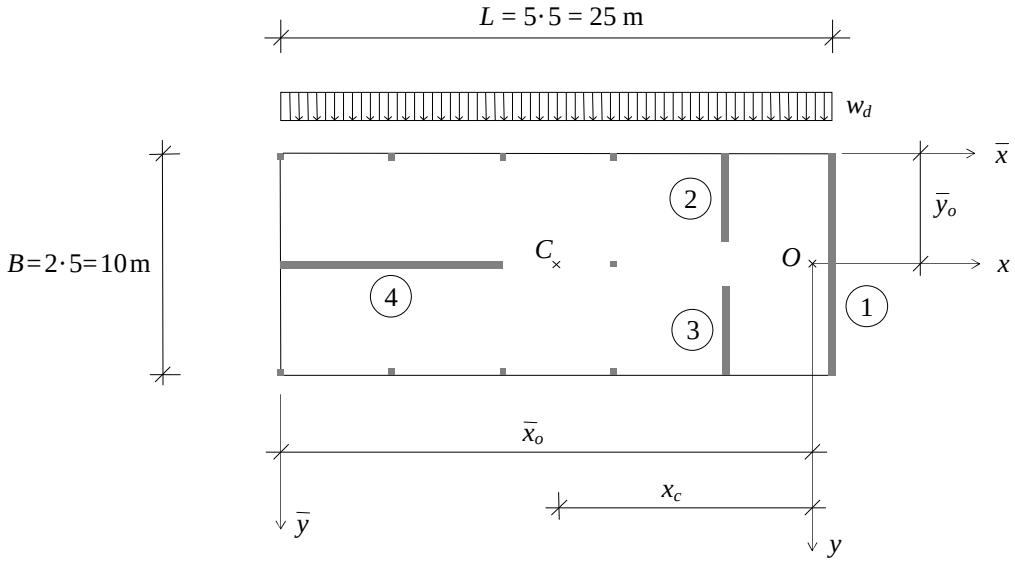
- a csavarás hatásának csökkentésével (–> a külső teher külpontosságának csökkentésével, optimálisan zérusra)
- az EI_ω öblösödési csavarási merevség növelésével (ha van csavarás). A falelemeket célszerű úgy elhelyezni, hogy merőleges távolságuk a nyírásközépponttól minél nagyobb legyen (3.8 ábra)



3.8 ábra. Merevítőfal optimális elhelyezése az épület *O* nyírásközéppontjához képest.

3.4 Számpélda

Határozzuk meg a 3.9 ábrán alaprajzával vázolt hétszintes, $H = nh = 7 \cdot 3 = 21$ m magas épület maximális eltolódását és a falaira jutó terheket $w_d = 0.8$ kN/m^2 intenzitású, y irányú, egyenletesen megoszló szélteher feltételezésével. A merevítőfalak anyagának rugalmassági tényezője $E = 25$ kN/mm^2. A nyírási rugalmassági tényező értéke $G = 10$ kN/mm^2.



3.9 ábra. Ép1 jelű épület a szilárdsági számításhoz.

A 2.4 pontban már előállítottuk ennek az épületnek a helyettesítő tartóját. Az ottani számítás felhasználásával az eredményeket a 3.1 táblázatban foglaljuk össze. A nyírásközéppont helyére az $\bar{x}_o = 24.42$ m értékét kaptuk.

A szélteher folyóméterenkénti intenzitása:

$$w = w_d L = 0.8 \cdot 25 = 20\ \text{kN/m}$$

A szélteher eredőjének távolsága a nyírásközépponttól:

$$x_c = \bar{x}_o - \frac{L}{2} = 24.42 - \frac{25}{2} = 11.92\ \text{m}$$

A szélteherből keletkező csavarónyomaték folyóméterenként:

$$m_z = -wx_c = -20 \cdot 11.92 = -238.4\ \text{kNm/m}$$

3.1 táblázat. Az Ép1 jelű épület alapadatai.

Elem	$I_{x,i}$ [m^4]	$I_{y,i}$ [m^4]	J_i [m^4]	x_i [m]	y_i [m]	I_ω [m^6]
1	20.83	0.013	0.052	0.578	0	
2	1.33	0.005	0.021	-4.42	-3	
3	1.33	0.005	0.021	-4.42	3	
4	0.013	20.83	0.052	-19.42	0	
Σ	$\boldsymbol{I_x}$=23.50	$\boldsymbol{I_y}$=20.85	$\boldsymbol{J}$=0.146			$\boldsymbol{I_\omega}$=64.0

A helyettesítő tartó maximális eltolódását a (3.7) összefüggésből számíthatjuk ki:

$$v_{\max} = \frac{wH^4}{8EI_x} = \frac{20 \cdot 21^4}{8 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 23.5} = 0.00083\ \text{m} = 0.83\ \text{mm}$$

A csavarási tényező értéke a várakozásnak megfelelően kicsi

$$k = H\sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}} = 21\sqrt{\frac{10 \cdot 10^6 \cdot 0.146}{25 \cdot 10^6 \cdot 64}} = 0.634$$

és teljesül a $k < 1$ egyenlőtlenség. A helyettesítő tartó maximális elcsavarodását így a (3.14) képlettel számoljuk ki:

$$\varphi_{\max} = \frac{m_z H^4}{8EI_\omega} = \frac{238.4 \cdot 21^4}{8 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 64} = 0.0036\ \text{rad}$$

Az épület maximális eltolódása az épület bal szélén jön létre. Ott nincs merevítőfal, így az eltolódás meghatározására a (3.18) összefüggést alkalmazzuk (figyelembe véve hogy $x_A = \bar{x}_o$):

$$v_{\max,\text{épület}} = v + x_A \tan\varphi = 0.83 + 24420 \cdot 0.0036 = 89\ \text{mm}$$

Ha ezt az eltolódást összehasonlítjuk az ASCE (3.19) képlettel megadott ajánlásával

$$v_{\max} \le \frac{H}{500} = \frac{21000}{500} = 42\ \text{mm}$$

akkor azt látjuk, hogy az épület alakváltozása több mint kétszerese az ajánlott maximális értéknek. Javasolt tehát a merevítőrendszer megerősítése, illetve a falak elrendezésének megváltoztatása. – Optimális merevítőrendszer kialakítására a 7. fejezetben mutatunk be példát.

Az egyes falakra jutó erőhányadok kiszámításához először meghatározzuk a teljes szélerőt és a belőle keletkező nyomatékot.

A teljes szélteher az *y* irányban:

$$F_y = wH = 20 \cdot 21 = 420 \text{ kN}$$

A teljes szélteher csavarónyomatéka:

$$M = F_y x_c = -420 \cdot 11.92 = -5006 \text{ kNm}$$

Az erőhányadokat ezután a (3.27) összefüggés szolgáltatja:

$$F_{y,1} = \frac{I_{x,1}}{I_x} F_y + \frac{I_{x,1} x_1}{I_\omega} M_z = \frac{20.83}{23.5} 420 + \frac{20.83 \cdot 0.578}{64} (-5006) = 372.3 - 941.7 = -569.4 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$F_{y,2} = F_{y,3} = \frac{I_{x,2}}{I_x} F_y + \frac{I_{x,2} x_2}{I_\omega} M_z = \frac{1.33}{23.5} 420 + \frac{1.33 \cdot (-4.42)}{64} (-5006) = 23.8 + 459.8 = 483.6 \text{ kN } (\downarrow)$$

$$F_{y,4} = \frac{I_{x,4}}{I_x} F_y + \frac{I_{x,4} x_4}{I_\omega} M_z = \frac{0.013}{23.5} 420 + \frac{0.013 \cdot (-19.42)}{64} (-5006) = 0.2 + 19.7 = 19.9 \text{ kN } (\downarrow)$$

Ellenőrzés:

$$\sum F_{y,i} = -569.4 + 2 \cdot 483.6 + 19.9 = 417.7 \text{ kN} \approx 420 \text{ kN} = F_y$$

Az *y* irányú szélből a csavarás miatt *x* irányú erő is keletkezik a 2. és 3. falakban. Ezek nagysága azonban a (3.26) képlet felhasználásával végrehajtott számítás szerint ebben az esetben nem számottevő:

$$F_{x,2} = \frac{I_{y,2}}{I_y} F_x - \frac{I_{y,2} y_2}{I_\omega} M_z = 0 - \frac{0.0052 \cdot (-3)}{64} (-5006) = 0 - 1.2 = -1.2 \text{ kN } (\leftarrow)$$

$$F_{x,3} = \frac{I_{y,3}}{I_y} F_x - \frac{I_{y,3} y_3}{I_\omega} M_z = 0 - \frac{0.0052 \cdot 3}{64} (-5006) = 0 + 1.2 = 1.2 \text{ kN } (\rightarrow)$$

Ellenőrzés:

$$\sum F_{x,i} = -1.2 + 1.2 = 0$$

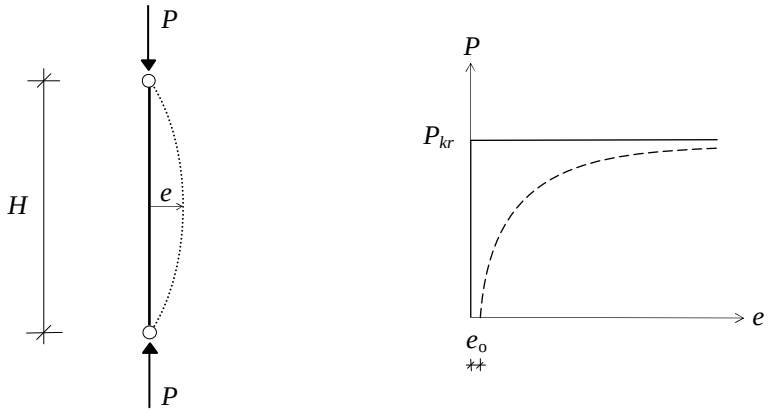
4

Stabilitás – összegzési tételek

A következő fejezetek olyan stabilitási és dinamikai problémákkal foglalkoznak, amelyek tárgyalása általában igen bonyolult és esetenként nem is létezik zárt alakú megoldás. A jellegében a statika szuperpozíció elvéhez hasonlítható összegzési tételek sok ilyen esetben meglepően egyszerű – bár közelítő – megoldást kínálnak. A Southwell-szerkesztést és három ilyen tételt ismertetünk ebben a fejezetben.

4.1 Bevezetés

Tekintsük a 4.1/a ábrán vázolt nyomott oszlopot, amelyet P koncentrált erő terhel. A P erő értékét zérusról folyamatosan növelve, a 4.1/b ábrán követhetjük a tartó alakváltozását, ahol e az oszlop eltolódását jelöli $H/2$ magasságban. Ha a P erő tökéletesen központos, akkor a nyomóerő növelésével párhuzamosan eleinte semmi nem történik, majd a tartó egy bizonyos erő elérésekor hirtelen nagy (és megállíthatatlan) alakváltozásokat szenved (folytonos vonal a 4.1/b ábrán). Ez az az erőérték, a P_{kr} *kritikus erő*, amelynél a nyomott rúd elveszti stabilitását. Abban az esetben amikor a P erő nem tökéletesen központos és e_o kezdeti külpontossággal rendelkezik, a tartó már a kezdettől fogva alakváltozást szenved, mely alakváltozás a P erő növelésével folyamatosan nő és a P_{kr} elérésekor végtelenné válik (szaggatott vonal a 4.1/b ábrán). Az ábrán az is látható, hogy a kritikus erő értéke nem függ a kezdeti külpontosságtól. (A kritikuson túli viselkedéssel most nem foglalkozunk.)



4.1 ábra. Nyomott oszlop.

A fent vázolt feladat matematikailag a következőkben megfogalmazott sajátértékfeladathoz vezet: Ha az $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \lambda \underline{x}$ egyenletnek valamely λ számérték mellett van megoldása, vagyis létezik olyan $\underline{x} \neq 0$ vektor amelyet az $\underline{\underline{A}}$ transzformáció λ-szorosába visz át, akkor a λ számértéket az $\underline{\underline{A}}$ lineáris transzformáció sajátértékének nevezzük, az egyenletet kielégítő $\underline{x}$

vektort pedig a lineáris transzformáció (λ sajátértékhez tartozó) sajátvektorának. Az $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \lambda \underline{x}$ egyenlet egy sajátértékfeladat. A megoldás során először a sajátértékeket határozzuk meg, majd (a) diszkrét feladat esetén egy homogén lineáris egyenletrendszert oldunk meg, (b) folytonos feladat esetén pedig egy differenciálegyenletet/differenciálegyenlet-rendszert.

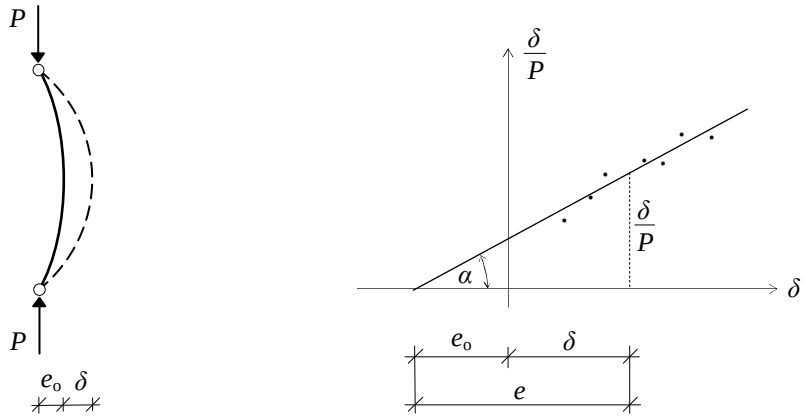
Esetünkben a feladat sajátértékei a kritikus erő $P_{kr,1} < P_{kr,2} < P_{kr,3}$ … értékeit adják meg. Ezek közül a legkisebbre van szükségünk, hiszen gyakorlati jelentősége csak a legkisebb kritikus erőnek van. (A sajátértékhez tartozó sajátfüggvény a tartó kihajlási alakját határozza meg.)

Southwell felismerése (1932) alapján a kritikus erő kísérleti úton történő előállítása is lehetséges. Az eljárás menete a következő. Az e_o kezdeti külpontossággal rendelkező nyomott rudat szakaszosan növekvő értékű P erővel terheljük. Mérjük a δ eltolódásokat és egy δ–δ/P koordinátarendszerben ábrázoljuk a mérések eredményeit (4.2 ábra). Elegendő mérés végrehajtása után a kapott pontokra egy egyenest fektetünk. Felírható az

$$e = e_0 + \delta$$

összefüggés, ahonnan

$$e_0 = e - \delta \tag{4.1}$$



a) nyomott rúd b) szerkesztés

4.2 ábra. A Southwell-szerkesztés.

Timoshenko klasszikus képlete megadja egy e_0 kezdeti külpontossággal rendelkező nyomott rúd e eltolódásait a P terhelő erő függvényében:

$$e = \frac{e_0}{1 - \dfrac{P}{P_{kr}}}$$

ahol P_{kr} a rúd kritikus ereje. Ebből a képletből:

$$e_0 = e\left(1 - \frac{P}{P_{kr}}\right) \tag{4.2}$$

A (4.1) és (4.2) képleteket egymással egyenlővé téve a

$$\delta = e\frac{P}{P_{kr}}$$

összefüggést kapjuk, ami átrendezés után a

$$P_{kr} = \frac{e}{\frac{\delta}{P}} = \operatorname{cotan}\alpha \tag{4.3}$$

alakban írható. A (4.3) képlet és a (4.2) ábra tanúsága szerint tehát a kritikus erő értékét megkaphatjuk úgy is, hogy a mérési eredményekre fektetett egyenes és a vízszintes koordinátatengely által bezárt szög kotangensét vesszük. Ez egy igen fontos eredmény, mert lehetővé teszi, hogy a kritikus erő értékét néhány mérési eredmény felhasználásával határozzuk meg. Modellkísérletek tanúsága szerint a kritikus erő meghatározható úgy, hogy a terhelés során a kritikus erőnek még csak a közelébe sem kell jutni – ami pedig a kísérletek során komoly gyakorlati problémákat jelenthet.

A bonyolult sajátértékfeladatok megoldásával járó nehézségek sok esetben megkerülhetők. Rugalmas viselkedésű szerkezetek esetében az összegzési tételek alkalmazásával egyszerű, gyors és szemléletes – noha általában közelítő – megoldást kaphatunk. Mind a három a továbbiakban tárgyalandó összegzési tételre jellemző, hogy a bonyolult problémát részproblémákra bontja és utána a végeredményt a részproblémák eredményeinek összegzésével állítja elő. Ha a részproblémák megoldása könnyen – esetleg zárt formában – előállítható, vagy esetleg már rendelkezésre áll, akkor az összegzési tétel alkalmazásával jelentős fáradságtól menthetjük meg magunkat.

4.2 A Southwell-tétel

A tételt Southwell 1922-ben eredetileg rezgéstani feladatok megoldásához mondta ki, de a tétel egyaránt alkalmazható stabilitási és rezgéstani feladatokra is. A tétel stabilitási feladatokra megfogalmazva a következő:

„Ha egy szerkezet merevsége több részből tehető össze, akkor a szerkezet kritikus terhe nem kisebb, mint az egyes részmerevségekhez tartozó kritikus részterhek összege.” Képlet formájában:

$$P_{kr} \geq P_{kr,1} + P_{kr,2} + \ldots \qquad \text{ha} \qquad M = M_1 + M_2 + \ldots \tag{4.4}$$

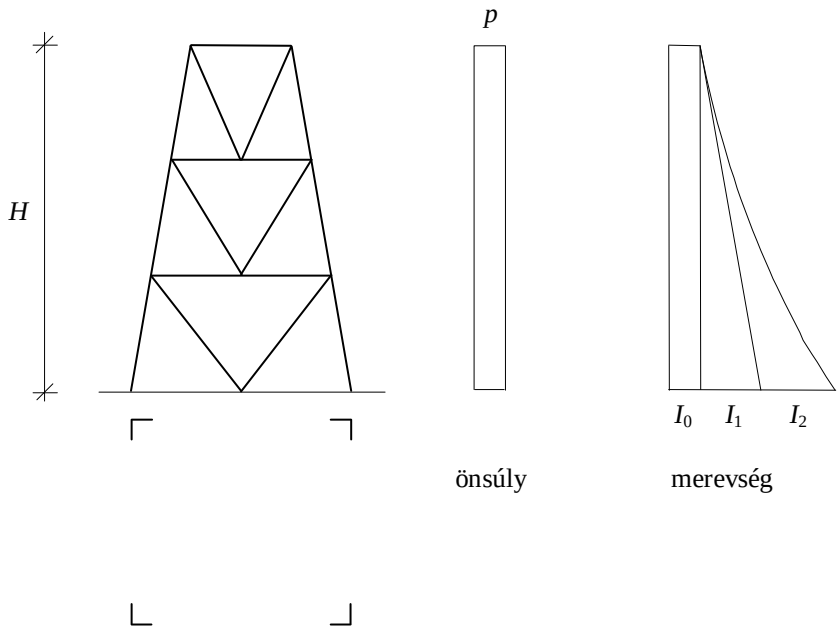
ahol M_1, M_2 a szerkezet részmerevségei (pl. EI). A tétel általában a biztonság javára való közelítéssel adja meg a kritikus erő értékét. Az egyenlőségjel akkor érvényes (vagyis a tétel akkor adja a pontos eredményt), amikor a részproblémák kihajlási alakjai azonosak.

A Southwell-tétel illusztrálására tekintsük a 4.3 ábrán vázolt acélszerkezetű tornyot. Feladatunk a torony kritikus terhének a megállapítása.

A torony önsúlya – közelítően – egyenletesen megoszlónak tekinthető. Merevsége viszont a 4.3 ábrán vázolt diagram szerint a magasság mentén változó. Ilyen merevség-megoszlással rendelkező rúd kritikus erejére nincs zárt alakú megoldás, de a merevség felbontható egy állandó (I_0), egy lineáris (I_1) és egy másodfokú parabola szerinti (I_2) részmerevségre, amire viszont léteznek zárt alakú megoldások [Timoshenko-Gere: Theory of elastic stability, 1961].

Felhasználva az I_0, I_1 és I_2 merevségekhez tartozó részmegoldásokat, a kritikus teher alsó korlátja a Southwell-tétel alkalmazásával egyszerű összegzéssel felírható:

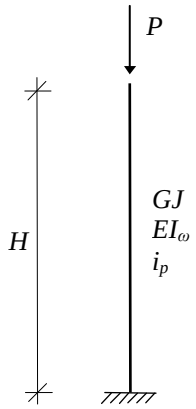
$$p_{kr} = \frac{7.84EI_0}{H^3} + \frac{5.78EI_1}{H^3} + \frac{3.67EI_2}{H^3} = \frac{E}{H^3}(7.84I_0 + 5.78I_1 + 3.67I_2) \tag{4.5}$$



4.3 ábra. Acélszerkezetű torony.

A Southwell-tétel alkalmazásával hasonlóan egyszerű módon juthatunk megoldáshoz a 4.4 ábrán látható alul befogott, felül szabad végű oszlop tiszta elcsavarodó kihajlásának vizsgálatakor. A kritikus teher előállítása a szokásos módon elég hosszadalmas eljárással lehetséges – egy elemi szakasz egyensúlyának vizsgálata, a differenciálegyenlet felírása és megoldása után – de van ennél egyszerűbb megoldás is. Az oszlop merevsége két részmerevség összegeként fogható fel, ami két részproblémához vezet: egy oszlop *GJ* tiszta csavarási merevséggel és egy oszlop EI_ω öblösödési csavarási merevséggel. Mindkét részprobléma megoldása kézikönyvből [Timoshenko-Gere: Theory of elastic stability, 1961] rendelkezésre áll ($P_{kr}^{(GJ)}$ illetve $P_{kr}^{(EI_\omega)}$) és a Southwell-tétel alkalmazásával csak össze kell őket adni:

$$P_{kr} = P_{kr}^{(GJ)} + P_{kr}^{(EI_\omega)} = \frac{GJ}{i_p^2} + \frac{\pi^2 EI_\omega}{4H^2 i_p^2} \tag{4.6}$$



4.4 ábra. Oszlop és csavarási merevségei az elcsavarodó kihajlás vizsgálatához.

Ebben az esetben a Southwell-féle megoldás pontos, mert a „határozatlan” alakú tiszta csavarási alakváltozás „alkalmazkodik” az öblösödési csavarási alakváltozáshoz, vagyis a két alakváltozás azonos típusúnak tekinthető.

4.3 A Dunkerley-tétel

Dunkerley 1894-ben – Southwell-hez hasonlóan – rezgéstani feladatokra fogalmazta meg tételét, de a tétel stabilitási és rezgéstani feladatokra egyaránt alkalmazható. A tétel stabilitási feladatokra megfogalmazva a következő:

„Ha egy szerkezet terhe részterhekből tehető össze, akkor a szerkezet kritikus terhének reciproka nem nagyobb, mint a részterhekből számítható kritikus terhek reciprokainak összege.” Képlet formájában:

$$\frac{1}{P_{kr}} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P_{kr,i}} \qquad \text{ha} \qquad P = P_1 + P_2 + \ldots \tag{4.7}$$

ahol P_i a szerkezet részterhei. A tétel általában a biztonság javára való közelítéssel adja meg a kritikus teher értékét. Az egyenlőségjel akkor érvényes (vagyis a tétel akkor adja a pontos eredményt), amikor a részproblémák kihajlási alakjai azonosak.

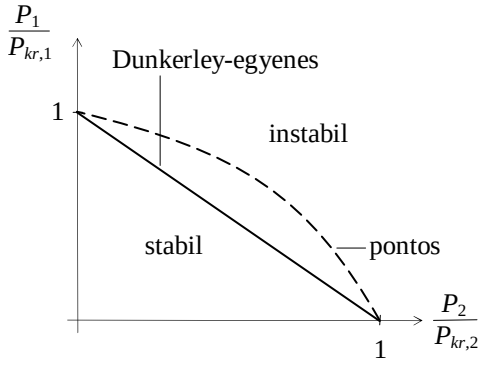
Két részteher esetében a képlet

$$\frac{1}{P_{kr}} \le \frac{1}{P_{kr,1}} + \frac{1}{P_{kr,2}} \tag{4.8}$$

alakú. Ezt az összefüggést a gyakorlati alkalmazások során az

$$1 \ge \frac{P_1}{P_{kr,1}} + \frac{P_2}{P_{kr,2}} \tag{4.9}$$

alakban is szokták alkalmazni, ahol P_1 és $P_{kr,1}$ illetve P_2 és $P_{kr,2}$ a két terhelési esethez tartozó teher és kritikus teher.



4.5 ábra. A Dunkerley-tétel grafikus ábrázolása két részteher esetén.

A (4.9) összefüggés grafikus ábrázolása egy egyszerű és szemléletes ellenőrzési eljárást tesz lehetővé. A szerkesztés során egy koordinátarendszer megfelelő tengelyeire felmérjük a $P_1/P_{kr,1} = 1$ és $P_2/P_{kr,2} = 1$ pontokat, amelyek összekötésével megkapjuk a Dunkerley-tételt képviselő egyenest (4.5 ábra). Ezután meghatározzuk a részterhekhez tartozó kritikus terheket

($P_{kr,1}$ és $P_{kr,2}$) és ábrázoljuk a terhelési esetet jellemző pontot a részterhekhez tartozó $P_1/P_{kr,1}$ és $P_2/P_{kr,2}$ koordináták segítségével. Ha a pont a Dunkerley-egyenes és a koordinátatengelyek által közrezárt („stabil”) területre esik, akkor a vizsgált szerkezet megfeleltnek nyilvánítható, ha a területen kívül esik, akkor a szerkezet az adott terhek hatására instabil állapotba kerül. A 4.5 ábrán (szaggatott vonallal) feltüntettük a pontos megoldáshoz tartozó görbét is.

A Dunkerley-tétel illusztrálására tekintsük a 4.6/a ábrán vázolt I-100 keresztmetszetű alul befogott, felül szabad végű oszlopot, amelyre egy $P_1 = 30$ kN nagyságú tetőponti koncentrált erő és egy $p_2 = 80$ kN/m intenzitású, a magasság mentén egyenletesen megoszló teher hat. Síkbeli kihajlást feltételezve az x–z síkban, vizsgáljuk meg, hogy az adott terhek hatására az oszlop stabilis állapotban marad-e. A tartó rugalmassági tényezője $E = 210000$ N/mm^2, magassága legyen $H = 1.0$ m, tehetetlenségi nyomatéka a kihajlás irányában $I_y = 122000$ mm^4. Az ilyen (két teherből álló) terhelés együttes hatására bekövetkező kihajláshoz tartozó megoldás nem ismert, de mindkét részteherhez tartozó kritikus erő ismert képletből számítható. A feladat adataival ezek a kritikus terhek:

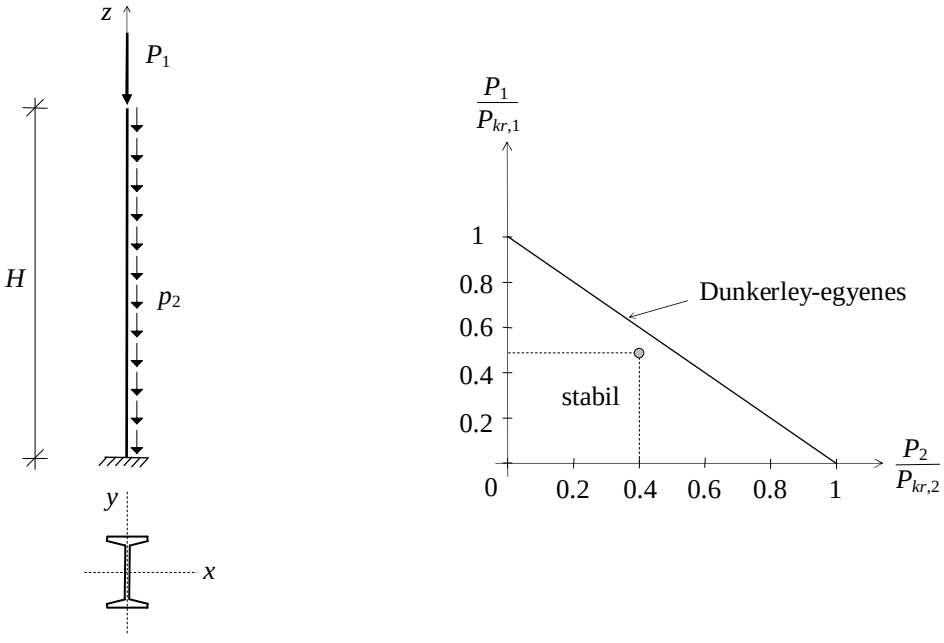
$$P_{kr,1} = \frac{\pi^2 EI}{4H^2} = \frac{\pi^2 210000 \cdot 122000}{4 \cdot 1000^2} = 63151 \text{ N} = 63.15 \text{ kN}$$

$$P_{kr,2} = p_{kr,2} H = \frac{7.84 EI}{H^2} = \frac{7.84 \cdot 210000 \cdot 122000}{1000^2} = 200861 \text{ N} = 200.86 \text{ kN}$$

Ezekkel a kritikus terhekkel a Dunkerley-féle ellenőrzés a (4.9) képlettel, illetve a grafikusan (4.6/b ábra) már végrehajtható. A (4.9) képletbe behelyettesítve azt találjuk, hogy az

$$1 \geq \frac{30}{63.15} + \frac{80 \cdot 1}{200.86} = 0.48 + 0.40 = 0.88$$

egyenlőtlenség teljesül, tehát a tartó a két teher együttes hatása alatt is stabilis állapotban marad. Ugyanerre az eredményre jutunk a szerkesztéssel is (4.6/b ábra).



a) nyomott oszlop b) Dunkerley-szerkesztés

4.6 ábra. A Dunkerley-tétel illusztrálása.

A (4.8) képletet felhasználhatjuk egy „kombinált” teher, illetve „kombinált” kritikus teher kiszámítására is és ezek összehasonlításával is végrehajthatjuk az ellenőrzést. A kombinált teher:

$$\frac{1}{P^{\text{kombinált}}} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} = \frac{1}{30} + \frac{1}{80} \qquad \text{innen} \qquad P^{\text{kombinált}} = 21.8 \text{ kN}$$

A kombinált kritikus teher:

$$\frac{1}{P_{kr}^{\text{kombinált}}} = \frac{1}{P_{kr,1}} + \frac{1}{P_{kr,2}} = \frac{1}{63.15} + \frac{1}{200.86} \qquad \text{innen} \qquad P_{kr}^{\text{kombinált}} = 48.0 \text{ kN}$$

A $P_{kr}^{\text{kombinált}} > P^{\text{kombinált}}$ teljesül, tehát az oszlop stabilis állapotban van.

4.4 A Föppl-Papkovics tétel

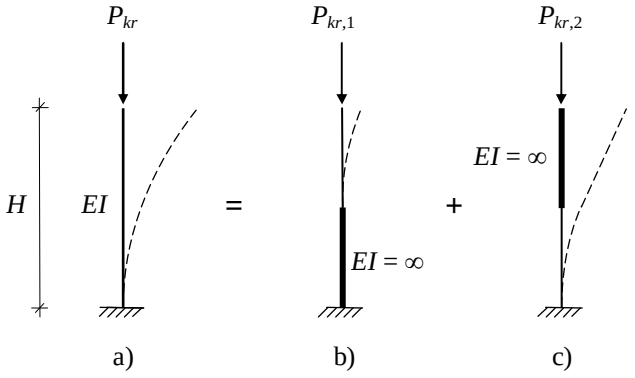
Föppl 1933-ban fogalmazta meg tételét, de a bizonyításra 1967-ig várni kellett, amikor is Papkovics matematikai eszközökkel igazolta a tétel helyességét. A tétel a következő:

„Ha egy szerkezet több különböző, egymástól független deformáció egyidejű fellépte mellett veszti el stabilitását, akkor a szerkezet kritikus terhének reciproka nem nagyobb mint az egyes deformációkhoz tartozó kritikus terhek reciprokainak összege.” Képlet formájában:

$$\frac{1}{P_{kr}} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P_{kr,i}} \tag{4.10}$$

A tétel általában a biztonság javára való közelítéssel adja meg a kritikus teher értékét. Az egyenlőségjel akkor érvényes (vagyis a tétel akkor adja a pontos eredményt), amikor a részproblémák kihajlási alakjai azonosak.

Föppl a tételt a részleges megmerevítés módszerének nevezte; a tétel gyakorlati alkalmazása során ugyanis úgy járunk el, hogy a több deformációt végző szerkezetet sorban megmerevítjük egy kivételével az összes deformációval szemben és kiszámítjuk, majd reciprok módon összegezzük az egyes „szabad” deformációhoz tartozó kritikus terheket.



4.7 ábra. a) Nyomott oszlop, b)-c) részlegesen megmerevített tartórészek.

A Föppl-Papkovics tétel illusztrálására tekintsük a 4.7/a ábrán vázolt, fent koncentrált erővel terhelt, *EI* hajlítási merevséggel rendelkező alul befogott, felül szabad végű oszlopot. Feladatunk a síkbeli kihajláshoz tartozó kritikus erő előállítása. (Ennek a tartónak ugyan

ismerjük a kritikus erejét, de most – a tétel illusztrálása céljából – a Föppl-Papkovics tétellel határozzuk meg.) A H magasságú oszlopot két szakaszra bontjuk és először az alsó felét (4.7/b ábra), majd a felső felét merevítjük meg (4.7/c ábra). Mindkét rész-tartóhoz tartozó megoldás kézikönyvben megtalálható.

A 4.7/b ábrán látható tartó az alsó $H/2$ magasságú szakasz végtelen merevsége miatt úgy viselkedik mintha (a felső szakaszon) egy $H/2$ magasságú alul befogott tartó volna, így a hozzá tartozó kritikus erő:

$$P_{kr,1} = \frac{\pi^2 EI}{4\left(\frac{H}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2 EI}{H^2}$$

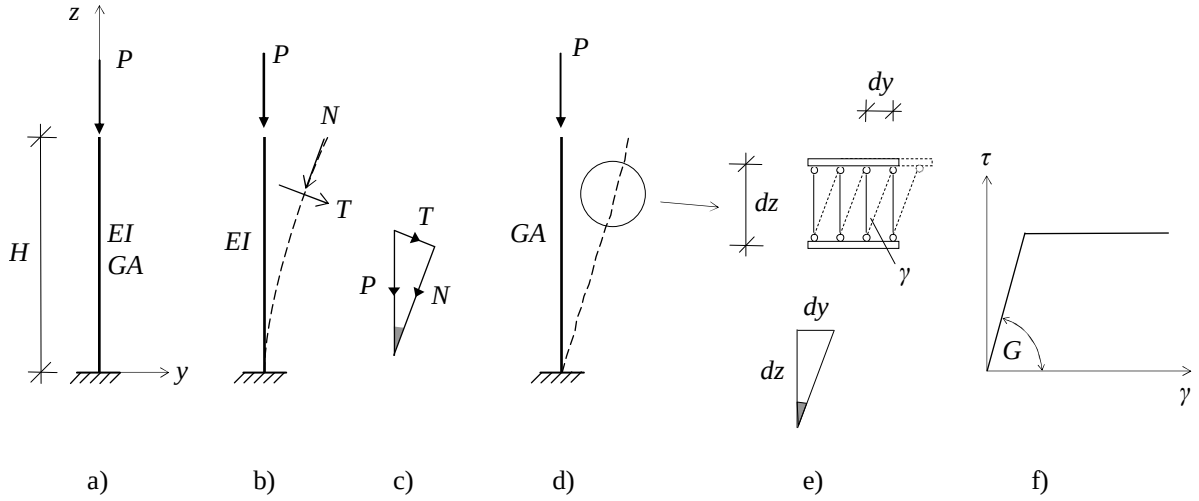
A 4.7/c ábrán látható tartó kritikus terhe is ismert:

$$P_{kr,2} = \frac{\pi^2 EI}{3H^2}$$

A Föppl-Papkovics tétellel az eredeti tartó kritikus ereje már meghatározható:

$$\frac{1}{P_{kr}} = \frac{1}{P_{kr,1}} + \frac{1}{P_{kr,2}} = \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{H^2}} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{3H^2}} = \frac{4H^2}{\pi^2 EI} \qquad \text{innen} \qquad P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4H^2}$$

A hajlítási és nyírási alakváltozást is végző nyomott oszlop kritikus erejének meghatározása („hagyományos” eszközökkel) meglehetősen bonyolult feladat. Határozzuk most meg a 4.8/a ábrán vázolt, fent koncentrált erővel terhelt, EI hajlítási és GA nyírási merevséggel rendelkező oszlop síkbeli kihajlásához tartozó kritikus erőt. A Föppl-Papkovics tétel alkalmazásával a tartót először megmerevítjük nyírási alakváltozással szemben ($GA = \infty$), majd pedig megmerevítjük hajlítási alakváltozással szemben ($EI = \infty$), utána meghatározzuk a kritikus erőket, és végül képezzük reciprok összegüket.



a) b) c) d) e) f)

4.8 ábra. a) oszlop EI és GA merevséggel, b) hajlítási alakváltozás, c) erők vektorháromszöge, d) nyírási alakváltozás, e) szögtorzulás, f) τ–γ diagram.

Ha a tartó csak hajlítási alakváltozást végez, akkor a kritikus erőt a jól ismert Euler-féle

képlettel határozhatjuk meg:

$$P_{kr,1} = P_{kr}^{E} = \frac{\pi^2 EI}{4H^2} \tag{4.11}$$

A csak nyírási alakváltozást végző tartó kritikus erejét a 4.8 ábra vázlatainak felhasználásával egyszerűen meghatározhatjuk. A 4.8/e ábra alapján a szögtorzulást a

$$tg\gamma \approx \gamma = \frac{dy}{dz} \quad \text{[rad]} \tag{4.12}$$

összefüggés határozza meg. A 4.8/f ábra τ–γ diagramja (ahol $G = \tau/\gamma$) és a $\tau = T/A$ összefüggés alapján, kiegészítve a ρ alaki tényezővel, a szögtorzulásra a

$$\gamma = \frac{T}{\frac{GA}{\rho}} \tag{4.13}$$

összefüggés írható fel. A 4.8/c és 4.8/e vektorháromszögek arányainak felhasználásával

$$\frac{dy}{dz} = \frac{T}{P} \tag{4.14}$$

A (4.13) és (4.14) összefüggéseket a (4.12) egyenlet két oldalára behelyettesítve megkapjuk a csak nyírási alakváltozást végző rúd kritikus erejét:

$$P_{kr,2} = P_{kr}^{ny} = \frac{GA}{\rho} \tag{4.15}$$

A hajlítási és nyírási alakváltozást végző rúd kritikus erejét most már a (4.10) Föppl-Papkovics tétellel meghatározhatjuk:

$$\frac{1}{P_{kr}} = \frac{1}{P_{kr}^{E}} + \frac{1}{P_{kr}^{ny}} = \frac{P_{kr}^{E} + P_{kr}^{ny}}{P_{kr}^{E} P_{kr}^{ny}} \qquad \text{innen} \qquad P_{kr} = \frac{P_{kr}^{E}}{1 + \frac{P_{kr}^{E}}{P_{kr}^{ny}}} \tag{4.16}$$

Két független deformáció esetén a Föppl-Papkovics tétel egy igen egyszerű és szemléletes szerkesztés végrehajtását teszi lehetővé. (Ez a szerkesztés két részteher esetén a Dunkerley-tétel esetében is érvényes.)

A két részproblémához tartozó kritikus terhet ($P_{kr,1}$ és $P_{kr,2}$) függőlegesen vektorszerűen felmérjük egy vízszintes tengely két végpontjában (4.9 ábra). Mindkét vektor végpontját összekötjük a másik vektor kezdőpontjával. Az így keletkezett ferde egyenesek metszéspontja megadja a kritikus erő értékét. A szerkesztés szemléletesen bizonyítja, hogy a szerkezet kritikus ereje mindig kisebb mint a rész kritikus terhek.

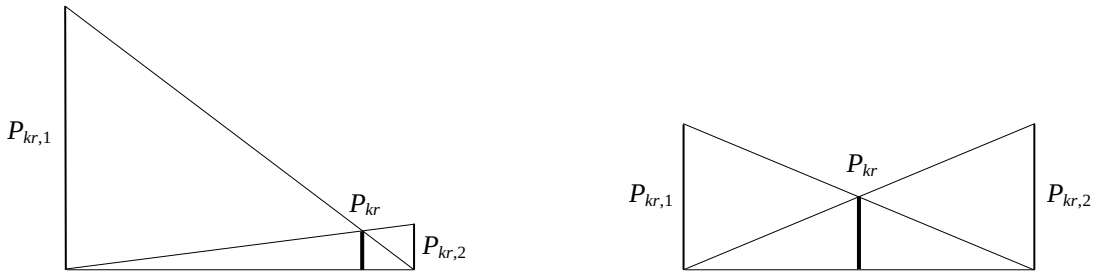
Amikor az egyik rész kritikus erő jóval nagyobb mint a másik (4.9/a ábra: $P_{kr,1} >> P_{kr,2}$), akkor a szerkezet kritikus ereje a másik rész kritikus erejéhez közeli nagyságú (de annál mindig kisebb):

$$P_{kr} \approx P_{kr,2}$$

Ilyen esetben – ha ez előre látható – esetleg nem is érdemes a nagyobbik rész kritikus erő értékét kiszámítani és a szerkezet kritikus erejét a kisebb kritikus erővel tesszük egyenlővé. Tudnunk kell azonban azt, hogy ily módon eljárva – ha kis mértékben is, de – a biztonság kárára közelítünk.

Két azonos nagyságú rész kritikus erő esetén a szerkezet kritikus ereje éppen fele a rész kritikus erőknek (4.9/b ábra):

$$P_{kr} = \frac{P_{kr,1}}{2}$$



a) $P_{kr,1} >> P_{kr,2}$ b) $P_{kr,1} = P_{kr,2}$

4.9 ábra. A Föppl-Papkovics és a Dunkerley tétel grafikus ábrázolása két részfeladat esetén.

5

Merevítőrendszerek stabilitásvizsgálata

A stabilitásvizsgálatra több okból is szükség van. A legfontosabb ok az, hogy meg kell bizonyosodnunk arról, hogy az épület stabilis állapotban van. Ezen túlmenően azonban a merevítőrendszer stabilitási állapota következményekkel jár a többi függőleges teherviselő elemre, azokra, amelyek nem részei a merevítőrendszernek (pl. az épület oszlopai). Ha a merevítőrendszer megfelelő biztonsággal rendelkezik a stabilitás szempontjából, akkor a többi – a merevítőrendszer által megtámasztott – függőleges szerkezeti elem a „merevített" kategóriába tartozik. Ez a szempont a méretezés során fontos szerepet játszik – amint ezt már a korábbi (szilárdságtani) tanulmányaink során tapasztalhattuk.

A 2. fejezetben láttuk hogy az épület merevítőrendszerét egy helyettesítő tartóvá „tolhatjuk össze" és így a vizsgálatot egyetlen nyomott oszlopon hajthatjuk végre. Először a síkbeli, majd az elcsavarodó kihajlással foglalkozunk. A síkbeli kihajlás vizsgálata során bevezetjük a hatványsoros módszert, ami egy olyan általános érvényű módszer, amellyel a kritikus erő még általános esetben is viszonylag egyszerűen meghatározható.

5.1 Síkbeli kihajlás

Tekintsük az 5.1/a ábrán vázolt, *EI* hajlítási merevséggel rendelkező alul befogott, felül szabad végű oszlopot, amelyre a magasság mentén egyenletesen megoszló függőleges teher hat. Ez a teher jelképezi az épület teljes függőleges terhét. (Az egyenletesen megoszló terhet úgy kapjuk, hogy a födémszinteken jelentkező koncentrált terheket az 5.3.6 pontban részletezett módon a magasság mentén „elkenjük".) Feladatunk az oszlop kritikus terhének megállapítása.

A tartó kihajlott alakja (5.1/b ábra) egy *dz* elemi szakaszának egyensúlyát vizsgálva (5.1/c ábra) a következő egyenletek írhatók fel. Nyomatéki egyenlet a szakasz alsó pontjára:

$$\sum M = qdz\frac{dy}{2} + qzdy + T(z)dz + M(z) - M(z) - dM(z) = 0$$

innen:

$$T(z) = \frac{dM(z)}{dz} - qz\frac{dy}{dz} = M'(z) - qzy' \tag{5.1}$$

Vízszintes vetületi egyenlet:

$$\sum F_y = T(z) - T(z) - dT(z) = 0$$

innen:

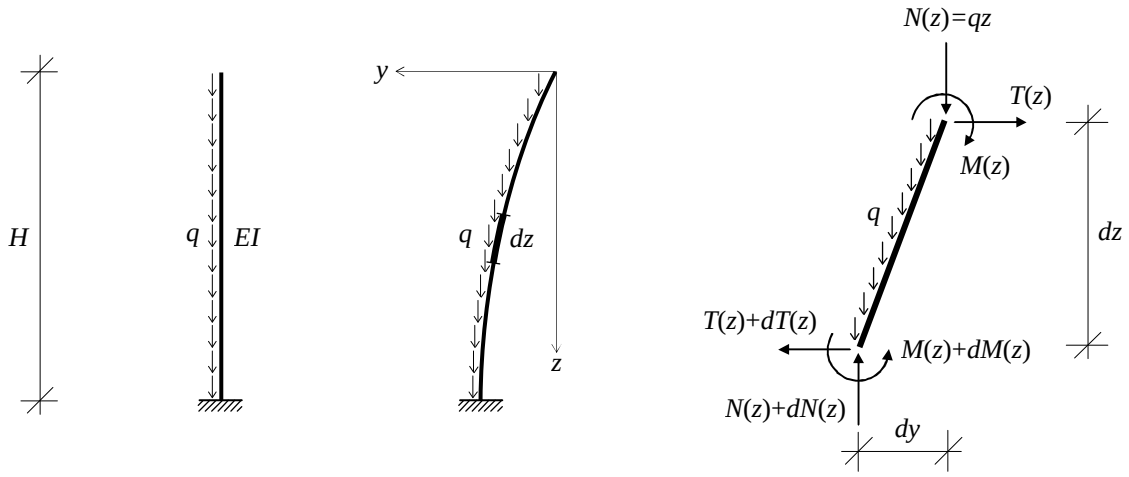
$$dT(z) = 0 \qquad \rightarrow \qquad T'(z) = 0 \tag{5.2}$$

Függőleges vetületi egyenlet:

$$\sum F_z = N(z) + qdz - N(z) - dN(z) = 0$$

innen:

$$q = \frac{dN(z)}{dz} = N'(z) \tag{5.3}$$



a) nyomott oszlop b) kihajlott alak c) tartó *dz* elemi szakasza

5.1 ábra. Oszlop síkbeli kihajlása.

A nyíróerő (5.1) összefüggését egyszer differenciálva és behelyettesítve az (5.2) képletbe a

$$T'(z) = M''(z) - \left[qzy'(z)\right]' = 0$$

összefüggést kapjuk, ahonnan – felhasználva a hajlítás ismert $M(z) = -EIy''(z)$ összefüggését valamint az (5.3) szerinti $q = N'(z)$ összefüggést – megkapjuk a feladat differenciálegyenletét:

$$y''''(z) + \left[\frac{N(z)y'(z)}{EI}\right]' = 0 \tag{5.4}$$

Abban a koordinátarendszerben amelyiknek az origója az oszlop tetőpontjához van rögzítve (5.1/b ábra), a fenti negyedrendű, változó együtthatójú homogén differenciálegyenlethez a következő peremfeltételek tartoznak.

A tartó tetőponti eltolódása (a tetőponttal együtt mozgó koordinátarendszerben) zérus:

$$y(0) = 0 \tag{5.5a}$$

Az érintő függőleges a befogási keresztmetszetnél:

$$y'(H) = 0 \tag{5.5b}$$

A tartó tetőpontjánál a nyomaték zérus:

$$y''(0) = 0 \tag{5.5c}$$

A tartó befogási keresztmetszeténél a nyíróerő zérus:

$$y'''(H) = 0 \tag{5.5d}$$

Rendszámcsökkentés céljából integráljuk egyszer az (5.4) differenciálegyenletet:

$$y'''(z) + \frac{qy(z)}{EI} + \frac{1}{EI}\int N(z)y''(z)dz + C = 0$$

Ez az egyenlet a harmadik tag parciális integrálása után egyszerűsödik:

$$y'''(z) + \frac{qy(z)}{EI} + \frac{1}{EI}\left[N(z)y'(z) - \int qy'(z)dz\right] + C = y'''(z) + \frac{N(z)y'(z)}{EI} + C = 0$$

Innen az (5.5b) és (5.5d) peremfeltételek figyelembevételével $C = 0$ és így az

$$y'''(z) + \frac{qz}{EI}y'(z) = 0 \tag{5.6}$$

differenciálegyenletet kapjuk, amelyhez az (5.5a), (5.5b) és (5.5c) peremfeltételek tartoznak. Az egyszerűbb kezelhetőség érdekében vezessük be az

$$\alpha = \frac{qH^3}{EI} \quad [-] \tag{5.7}$$

dimenziótlan mennyiséget, amivel az (5.6) differenciálegyenlet az

$$y'''(z) + \frac{\alpha}{H^3}zy'(z) = 0 \tag{5.8}$$

alakot ölti.

Az (5.8) differenciálegyenlet (és egyben sajátértékfeladat hiszen α ismeretlenként tartalmazza a kritikus terhet) megoldásához a hatványsoros megoldást alkalmazzuk. A módszer nagy előnye az, hogy minden ilyen típusú feladathoz alkalmazható és a megoldási eljárás könnyen programozható.

Keressük tehát a megoldást

$$y(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + c_6 z^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{5.9}$$

alakban. Az első, második és harmadik deriváltak rendben

$$y'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + 4c_4 z^3 + 5c_5 z^4 + 6c_6 z^5 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k z^{k-1} \tag{5.10}$$

$$y''(z) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3 z + 4\cdot 3c_4 z^2 + 5\cdot 4c_5 z^3 + 6\cdot 5c_6 z^4 + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2} \tag{5.11}$$

$$y'''(z) = 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2c_4 z + 5\cdot 4\cdot 3c_5 z^2 + 6\cdot 5\cdot 4c_6 z^3 + \cdots = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)c_k z^{k-3} \qquad (5.12)$$

A megoldásfüggvény szükséges (első és harmadik) deriváltjait a differenciálegyenletbe behelyettesítve a

$$\begin{array}{llll} 3\cdot 2c_3 & +4\cdot 3\cdot 2c_4 z & +5\cdot 4\cdot 3c_5 z^2 & +6\cdot 5\cdot 4c_6 z^3 \quad +\cdots \\ & +\dfrac{\alpha}{H^3}c_1 z & +\dfrac{\alpha}{H^3}2c_2 z^2 & +\dfrac{\alpha}{H^3}3c_3 z^3 \quad +\cdots \quad \equiv 0 \end{array}$$

egyenletet kapjuk. Az egyenlet baloldala csak úgy lehet zérussal egyenlő, ha a z változó minden egyes együtthatója zérus. Vegyük például a z^2 együtthatóit (k = 5-nél):

$$5\cdot 4\cdot 3c_5 + \frac{\alpha}{H^3}2c_2 = 0$$

Könnyen belátható, hogy a fenti összefüggés alapján létrehozott

$$k(k-1)(k-2)c_k + \frac{\alpha}{H^3}(k-3)c_{k-3} = 0$$

általános összefüggés nem csak a z^2 együtthatóira, hanem az összes z együtthatójára érvényes. Ez az összefüggés átrendezve rekurzív formulát ad a k-adik együtthatóra:

$$c_k = -\frac{(k-3)}{k(k-1)(k-2)H^3}\alpha c_{k-3} \qquad \text{ahol} \qquad k \geq 3 \qquad (5.13)$$

Az együtthatók tényleges meghatározásához azonban kezdőértékekre van szükségünk, hiszen az (5.13) rekurzív formula csak k = 3-tól működik. A szükséges kezdőértékek meghatározásához tekintsük a peremfeltételeket. Az (5.5a) peremfeltétel és a megoldásfüggvény (5.9) összefüggése segítségével

$$y(0) = c_0 + 0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad c_0 = 0 \qquad (5.14)$$

Az (5.5c) peremfeltétel és a megoldásfüggvény második deriváltja (5.11) segítségével

$$y''(0) = 2c_2 + 0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad c_2 = 0 \qquad (5.15)$$

Rendelkezésre áll még az (5.5b) peremfeltétel. A megoldásfüggvény első deriváltját a peremfeltételbe behelyettesítve és figyelembe véve a már meghatározott c_2 = 0 együtthatót, az

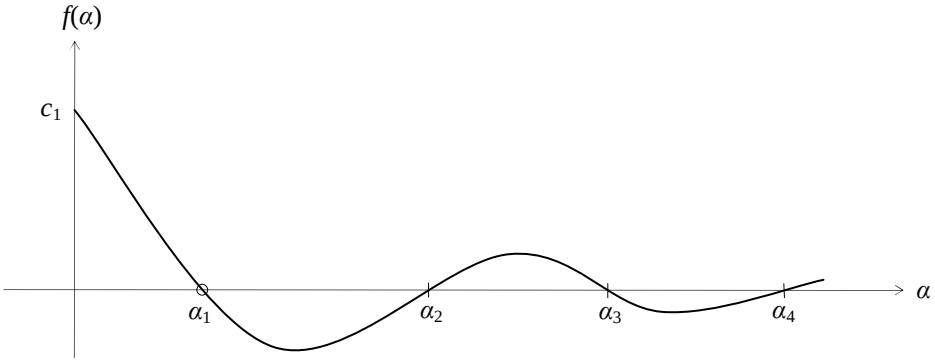
$$y'(H) = c_1 + 3c_3 z^2 + 4c_4 z^3 + 5c_5 z^4 + 6c_6 z^5 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1} \qquad (5.16)$$

egyenletet kapjuk. Ez az egyenlet – a c_1 együtthatón kívül – az α sajátérték függvénye és az

$$f(\alpha) = c_1 + \sum_{k=3}^{\infty} k c_k z^{k-1} = 0 \qquad (5.17)$$

alakban is írható. A második tag az (5.13) rekurzív formula tanúsága szerint c_1 függvénye. Látható, hogy itt egy zérushely-keresési feladattal állunk szemben (5.2 ábra), ahol a függvény α_i zérushelyei – az (5.7) összefüggés szerint – éppen a feladat keresett sajátértékeit, a kritikus teherparaméter értékeit adják meg. A gyakorlati számításokhoz a legkisebb sajátértékre van szükség, amivel a kritikus teher:

$$N_{kr} = q_{kr} H = \frac{\alpha_1 EI}{H^2} \tag{5.18}$$



5.2 ábra. Zérushely-keresési feladat.

A kritikus teher meghatározásához állítsuk elő a c_i értékeket. A számításnál a H és EI értékei tetszőlegesek, hiszen nem befolyásolják a sajátértékeket. Az egyszerűség kedvéért legyen így $H = 1$ és $EI = 1$. A peremfeltétek alapján tudjuk hogy

$$c_0 = 0$$

$$c_1 = c_1$$

$$c_2 = 0$$

Az (5.13) rekurzív formula segítségével számítsuk ki a $c_3 \ldots c_{10}$ értékeket:

$$c_3 = 0$$

$$c_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \alpha c_1 = -\frac{\alpha}{24} c_1$$

$$c_5 = 0$$

$$c_6 = 0$$

$$c_7 = -\frac{4}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1} \alpha \left(-\frac{\alpha}{24} \right) c_1 = \frac{\alpha^2}{1260} c_1$$

$$c_8 = 0$$

$$c_9 = 0$$

$$c_{10} = -\frac{7}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1} \alpha \frac{\alpha^2}{1260} c_1 = -\frac{\alpha^3}{129600} c_1$$

Határozzuk meg először a kritikus teher értékét négy tag figyelembevételével. Az (5.17) összefüggés szerint:

$$f(\alpha)^{(4)} = c_1 + \sum_{k=3}^{\infty} k c_k z^{k-1} = c_1 - \frac{4\alpha}{24} c_1 = c_1 (1 - \frac{\alpha}{6}) = 0$$

ahonnan – mivel c_1 értéke nem lehet zérus mert ez a triviális megoldást jelentené – $\alpha = 6$ és így az (5.7) összefüggésből a kritikus teher közelítő értéke:

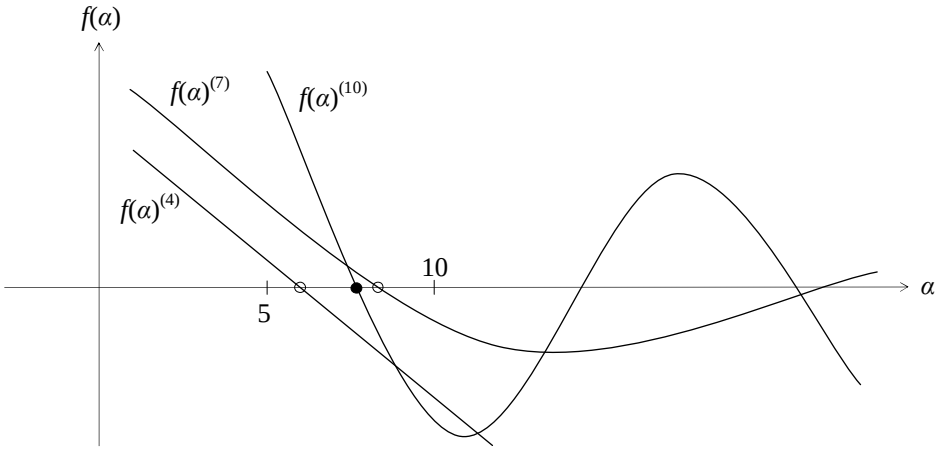
$$N_{kr} = q_{kr} H \cong \frac{6EI}{H^2}$$

Pontosítsuk a kritikus teher értékét további három – összesen hét – tag figyelembevételével. Az (5.17) összefüggés szerint:

$$f(\alpha)^{(7)} = c_1 + \sum_{k=3}^{\infty} k c_k z^{k-1} = c_1 - \frac{4\alpha}{24} c_1 + \frac{7}{1260} \alpha^2 c_1 = c_1 (1 - \frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha^2}{180}) = 0$$

Innen az $\alpha^2 - 30\alpha + 180 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, aminek a kisebbik gyöke $\alpha = 8.3$. A kritikus teher közelítő értéke így

$$N_{kr} = q_{kr} H \cong \frac{8.3EI}{H^2}$$



5.3 ábra. A kritikus teher értéke négy [$f(\alpha)^{(4)}$], hét([$f(\alpha)^{(7)}$] és tíz tag [$f(\alpha)^{(10)}$] figyelembevételével.

Végül vegyük figyelembe mind a tíz kiszámított együtthatót. Ekkor az (5.17) összefüggésből az

$$f(\alpha)^{(10)} = c_1 + \sum_{3}^{\infty} k c_k z^{k-1} = c_1 - \frac{4\alpha}{24} c_1 + \frac{7}{1260} \alpha^2 c_1 - \frac{10}{129600} \alpha^3 = c_1 (1 - \frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha^2}{180} - \frac{\alpha^3}{12960}) = 0$$

egyenletet kapjuk, ami átrendezve az $\alpha^3 - 72\alpha^2 + 2160\alpha - 12960 = 0$ harmadfokú egyenlethez vezet. A harmadfokú egyenlet legkisebb gyöke $\alpha = 7.815$. A kritikus teher közelítő értéke így

$$N_{kr} = q_{kr}H \cong \frac{7.815EI}{H^2}$$

Az $f(\alpha)^{(4)}$, $f(\alpha)^{(7)}$ és $f(\alpha)^{(10)}$ függvényeket és a hozzájuk tartozó α sajátértékeket az 5.3 ábrán ábrázoljuk.

A (három tizedesjegyre) pontos kritikus erő értéke

$$N_{kr} = q_{kr}H = \frac{7.837EI}{H^2} \tag{5.19}$$

Ezt az értéket kapjuk tizenhat tag figyelembevételével. Utána a figyelembe vett tagok számának növelése már nem változtatja a képletben szereplő konstans első négy értékes jegyének értékét.

Fentiek tanúsága szerint a hatványsoros módszer alkalmazásával viszonylag egyszerűen meghatározható a kritikus teher értéke. A módszer jól konvergál; a hiba a fenti esetben már hét tag esetén is 10% alatt volt (6%). – Nagy értéke a módszernek, hogy általánosságban is jól használható: az ebben a jegyzetben előforduló összes (síkbeli és térbeli) sajátértékfeladat esetében a megoldás könnyen előállítható a hatványsoros módszer alkalmazásával.

5.2 Elcsavarodó kihajlás – koncentrált tetőteher

Síkbeli kihajlás csak egyes speciális esetekben következik be. Általános esetben az épület – és az épületet reprezentáló helyettesítő tartó – a két tehetetlenségi síkban kihajlik és közben a függőleges tengely körül el is csavarodik. Ez az elcsavarodó kihajlás jelensége. Vizsgáljuk meg először a fent koncentrált erővel terhelt konzoltartó elcsavarodó kihajlását. Ez a jelenség – és a jelenséget jellemző képletek és egyenletek – igen fontos tanulságokkal szolgálnak és értékes segítséget nyújtanak majd a gyakorlati szempontból sokkal fontosabb esethez, a magasság mentén megoszló teherrel terhelt tartó esetéhez.

5.2.1 A feladat differenciálegyenlet-rendszere

Tekintsük az épület merevítőrendszerét (5.4/a ábra) helyettesítő alul befogott, felül szabad végű oszlopot (5.4/b ábra).

Az elcsavarodó kihajlás (5.4/c ábra) differenciálegyenlet-rendszerét Vlasov már 1940-ben felírta, de nem adott megoldást az általános esetre. A koncentrált erőkkel terhelt kétcsuklós rúd elcsavarodó kihajlására Timoshenko adott megoldást – az ő megoldását alkalmazzuk most az alul befogott, felül szabad végű oszlop esetére.

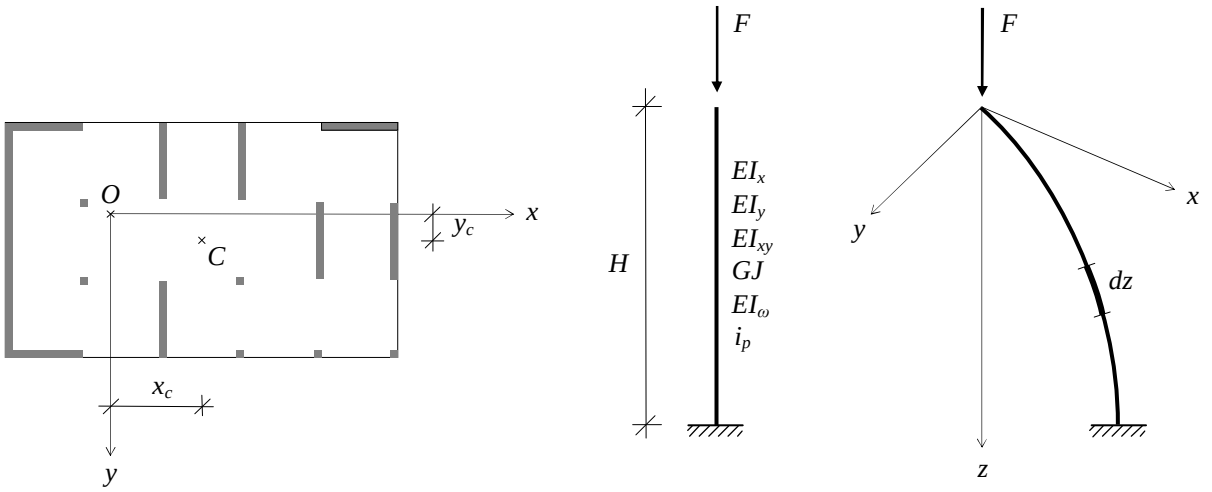
Az 5.1 pontban bemutatott módon eljárva – de a csavarást is figyelembe véve, ami a problémát sokkal bonyolultabbá teszi – a tartó egy *dz* elemi szakaszának egyensúlyát vizsgálva a következő differenciálegyenlet-rendszer vezethető le:

$$EI_y u''''(z) + Fu''(z) + Fy_c\varphi''(z) = 0 \tag{5.20a}$$

$$EI_x v''''(z) + Fv''(z) - Fx_c\varphi''(z) = 0 \tag{5.20b}$$

$$EI_\omega \varphi''''(z) - \left(GJ - Fi_p^2\right)\varphi''(z) - Fx_c v''(z) + Fy_c u''(z) = 0 \tag{5.20c}$$

A fenti differenciálegyenlet-rendszerben i_p az inerciasugár, a (2.7)…(2.10) képletek szerint.



a) az épület merevítőrendszere b) helyettesítő tartó c) elcsavarodó kihajlás

5.4 ábra. Elcsavarodó kihajlás.

A differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó peremfeltételek az oszlop tetejéhez rögzített origójú koordinátarendszerben (5.4/c ábra) a következők.

Az oszlop tetőpontjának eltolódása és elcsavarodása zérus:

$$u(0) = v(0) = \varphi(0) = 0 \tag{5.21a}$$

A befogási keresztmetszetnél az érintő függőleges és nem keletkezik öblösödés:

$$u'(H) = v'(H) = \varphi'(H) = 0 \tag{5.21b}$$

A tartó szabad végén a hajlítónyomatékok zérus értékűek és nem ébrednek öblösödési feszültségek:

$$u''(0) = v''(0) = \varphi''(0) = 0 \tag{5.21c}$$

A befogási keresztmetszetnél a nyíróerők és a csavarónyomatékok értéke zérus:

$$u'''(H) = v'''(H) = EI_\omega \varphi'''(H) - GJ\varphi'(H) = 0 \tag{5.21d}$$

Keressük a megoldást az

$$u(z) = A\sin\frac{\pi z}{2H}, \qquad v(z) = B\sin\frac{\pi z}{2H}, \qquad \varphi(z) = C\sin\frac{\pi z}{2H} \tag{5.22}$$

alakban. Először előállítjuk az

$$
\begin{aligned}
u'(z) &= A\frac{\pi}{2H}\cos\frac{\pi z}{2H} & v'(z) &= B\frac{\pi}{2H}\cos\frac{\pi z}{2H} & \varphi'(z) &= C\frac{\pi}{2H}\cos\frac{\pi z}{2H}\\
u''(z) &= -A\frac{\pi^2}{4H^2}\sin\frac{\pi z}{2H} & v''(z) &= -B\frac{\pi^2}{4H^2}\sin\frac{\pi z}{2H} & \varphi''(z) &= -C\frac{\pi^2}{4H^2}\sin\frac{\pi z}{2H}\\
u'''(z) &= -A\frac{\pi^3}{8H^3}\cos\frac{\pi z}{2H} & v'''(z) &= -B\frac{\pi^3}{8H^3}\cos\frac{\pi z}{2H} & \varphi'''(z) &= -C\frac{\pi^3}{8H^3}\cos\frac{\pi z}{2H}\\
u''''(z) &= A\frac{\pi^4}{16H^4}\sin\frac{\pi z}{2H} & v''''(z) &= B\frac{\pi^4}{16H^4}\sin\frac{\pi z}{2H} & \varphi''''(z) &= C\frac{\pi^4}{16H^4}\sin\frac{\pi z}{2H}
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

deriváltakat, majd a második és a negyedik deriváltakat a differenciálegyenlet-rendszerbe behelyettesítve az

$$
\begin{aligned}
&\left(EI_y A\frac{\pi^4}{16H^4} - FA\frac{\pi^2}{4H^2} \qquad\qquad - Fy_c C\frac{\pi^2}{4H^2}\right)\sin\frac{\pi z}{2H} = 0\\
&\qquad\qquad \left(EI_x B\frac{\pi^4}{16H^4} - FB\frac{\pi^2}{4H^2} \quad + Fx_c C\frac{\pi^2}{4H^2}\right)\sin\frac{\pi z}{2H} = 0\\
&\left(-Fy_c A\frac{\pi^2}{4H^2} \qquad + Fx_c B\frac{\pi^2}{4H^2} \qquad + C\frac{\pi^2}{4H^2}\left(EI_\omega\frac{\pi^2}{4H^2} + GJ - Fi_p^2\right)\right)\sin\frac{\pi z}{2H} = 0
\end{aligned}
$$

egyenletrendszert kapjuk, ami átalakítás után az

$$
\begin{aligned}
A\left(\frac{\pi^2 EI_y}{4H^2} - F\right) \qquad\qquad - CFy_c \quad &= \quad 0\\
B\left(\frac{\pi^2 EI_x}{4H^2} - F\right) \qquad CFx_c \quad &= \quad 0\\
-AFy_c \qquad BFx_c \qquad C\left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{4H^2} + GJ - Fi_p^2\right) \quad &= \quad 0
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

alakot ölti. Az $A = 0$, $B = 0$ és $C = 0$ esettől eltekintve az (5.24) egyenletrendszernek csak akkor lehet a triviálistól eltérő megoldása, ha az együtthatókból alkotott determináns értéke zérus:

$$
\begin{vmatrix}
F - F_x & 0 & Fy_c\\
0 & F - F_y & -Fx_c\\
Fy_c & -Fx_c & i_p^2(F - F_\varphi)
\end{vmatrix} = 0
\tag{5.25}
$$

ahol bevezettük a későbbiekben fontos szerepet játszó három *kritikus alapterhet*:

$$
F_x = \frac{\pi^2 EI_y}{4H^2}
\tag{5.26}
$$

$$
F_y = \frac{\pi^2 EI_x}{4H^2}
\tag{5.27}
$$

$$F_\varphi = \frac{1}{i_p^2}\left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{4H^2} + GJ\right) \tag{5.28}$$

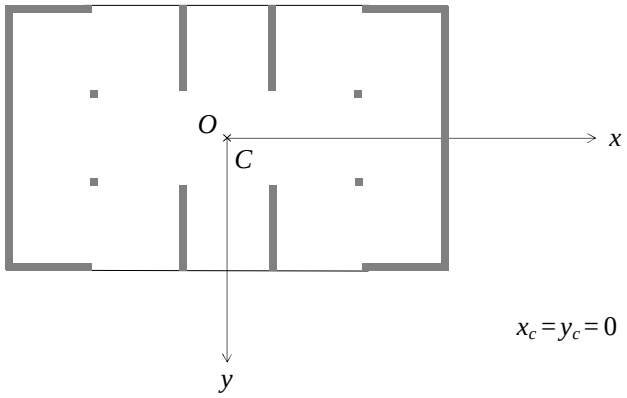
A feladat megoldását általános esetben az (5.25) determináns kifejtésével kapjuk, de két speciális eset külön figyelmet érdemel:

a) Kétszeres szimmetria $\rightarrow$ $x_c = y_c = 0$
b) Egyszeres szimmetria $\rightarrow$ $x_c = 0$ és $y_c \neq 0$ vagy $x_c \neq 0$ és $y_c = 0$

Először a két speciális esetet tekintjük.

5.2.2 Kétszeresen szimmetrikus merevítőrendszer

A gyakorlatban viszonylag ritkán fordul elő hogy a merevítőrendszer kétszeresen szimmetrikus, amikor is a merevítőrendszer merevségi középpontja és a külső teher támadáspontja egybeesik (5.5 ábra). Mégis kiemelten foglalkozunk ezzel a speciális esettel, mert az itt levonható tanulságok az általános esetnél is fontosak lesznek.



5.5 ábra. Kétszeresen szimmetrikus eset.

Az (5.25) determináns ebben az esetben az

$$\begin{vmatrix} F - F_x & 0 & 0 \\ 0 & F - F_y & 0 \\ 0 & 0 & i_p^2 (F - F_\varphi) \end{vmatrix} = 0 \tag{5.29}$$

alakot ölti. A stabilitási viselkedést jellemző három egyenlet egymástól független, ami azt jelenti, hogy vagy *x* irányú síkbeli, vagy *y* irányú síkbeli, vagy pedig a *z* tengely körüli tiszta elcsavarodó kihajlás jön létre. Ennek megfelelően három megoldás van:

$$F_{kr,1} = F_{kr,x} = \frac{\pi^2 EI_y}{4H^2} \tag{5.30}$$

$$F_{kr,2} = F_{kr,y} = \frac{\pi^2 EI_x}{4H^2} \tag{5.31}$$

és

$$F_{kr,3} = F_{kr,\varphi} = \frac{1}{i_p^2}\left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{4H^2} + GJ\right) \tag{5.32}$$

Ezek a kritikus alapterhek, amelyek közül a legkisebb az épület kritikus terhe:

$$F_{kr} = \min\left(F_{kr,x}, F_{kr,y}, F_{kr,\varphi}\right) \tag{5.33}$$

A fenti összefüggésekből az alábbi következtetések vonhatók le.

• Síkbeli kihajlás – $F_{kr,x}$ és $F_{kr,y}$

– a kritikus erő nagysága egyenesen arányos a hajlítási merevséggel (EI_y, EI_x)
– a kritikus erő nagysága fordítottan arányos a magasság négyzetével
– a kritikus erő nagyságát nem befolyásolja a merevítőelemek helye
– a kritikus erő nagyságát nem befolyásolja az alaprajz mérete

• Tiszta elcsavarodó kihajlás – $F_{kr,\varphi}$

– a kritikus erő nagysága egyenesen arányos a csavarási merevségekkel (EI_ω és GJ)
– a kritikus erő nagysága fordítottan arányos a magasság négyzetével
– a kritikus erő nagysága fordítottan arányos az alaprajz méreteinek (L és B) négyzetével:

a (2.10)-ből: $i_p^2 = \dfrac{L^2 + B^2}{12} + t^2$

– a kritikus erő nagysága „nagyon” függ a merevítőelemek helyétől (x_i, y_i):

a (2.6)-ból: $EI_\omega = E\sum_{i=1}^{n}(I_{\omega,i} + I_{x,i}x_i^2 + I_{y,i}y_i^2 - 2I_{xy,i}x_i y_i)$

• Az épület kritikus ereje (F_{kr}) növelésének lehetőségei:

– a merevségek (I_x, I_y, I_{xy}, J, I_ω) növelése
– a merevítőelemek nyírásközépponttól mért merőleges távolságának (x_i, y_i) növelése (ha az $F_{kr,\varphi}$ a meghatározó kritikus alapteher)
– a nyírásközéppont és geometriai középpont közötti távolság (t) csökkentése
– a magasság (H) csökkentése

5.2.3 Egyszeresen szimmetrikus merevítőrendszer

Legyen például $y_c = 0$. Ebben az 5.6 ábrán vázolt egyszeresen szimmetrikus esetben az (5.25) determináns az

$$\begin{vmatrix} F - F_x & 0 & 0 \\ 0 & F - F_y & -Fx_c \\ 0 & -Fx_c & i_p^2(F - F_\varphi) \end{vmatrix} = 0 \tag{5.34}$$

alakot ölti.

Ilyenkor két lehetőség van: az épület síkbeli kihajlást végez a szimmetriatengely irányában (x tengely az 5.6 ábrán vázolt esetben) vagy pedig kihajlik a szimmetriatengelyre merőleges irányban, de ez a kihajlás kombinálódik a z tengely körüli tiszta elcsavarodó kihajlással. Ez a két lehetőség az (5.34) determináns kifejtése során is nyilvánvalóvá válik. A determináns kifejtése után az

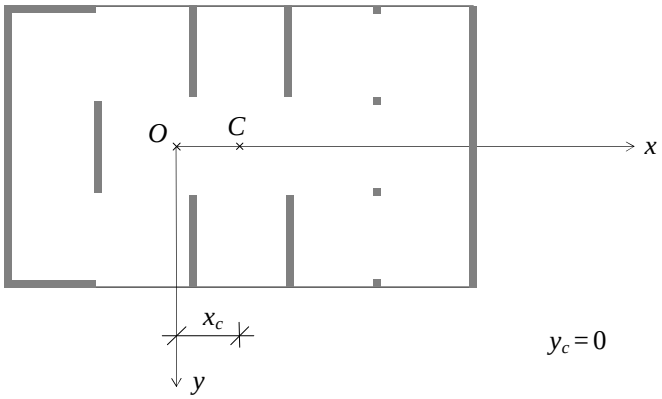
$$(F-F_x)\left[(F-F_y)(F-F_\varphi)i_p^2-F^2x_c^2\right]=0 \tag{5.35}$$

egyenletet kapjuk. Az egyenlet baloldala egy két tényezőből álló szorzat, ami akkor lehet zérussal egyenlő, ha valamelyik tényezője zérus. Ennek megfelelően két lehetőség van.

a) A baloldali első zárójeles tényező zérus. A kritikus erőt ekkor közvetlenül megkapjuk:

$$F_{kr,1}=F_{kr,x} \tag{5.36}$$

ami síkbeli kihajlást jelent az *x* tengely irányában.



5.6 ábra. Egyszeresen szimmetrikus eset.

b) A szögletes zárójelben lévő kifejezés zérus. Ez a kifejezés az *y* irányú kihajlás és a *z* tengely körüli tiszta elcsavarodó kihajlással kombinálódását fejezi ki:

$$(F-F_y)(F-F_\varphi)i_p^2-F^2x_c^2=0 \tag{5.37}$$

Ez az egyenlet rendezés után az

$$F^2+b_1F+b_0=0 \tag{5.38}$$

alakban írható, ahol

$$b_1=-\frac{F_y+F_\varphi}{1-\tau_x^2},\qquad b_0=\frac{F_yF_\varphi}{1-\tau_x^2}\qquad \text{és}\qquad \tau_x=\frac{x_c}{i_p} \tag{5.39}$$

A másodfokú egyenlet két gyöke $F_{kr,2}$ és $F_{kr,3} > F_{kr,2}$.
A három megoldás ismeretében az épület kritikus terhe:

$$F_{kr}=\min\left(F_{kr,1},F_{kr,2}\right) \tag{5.40}$$

5.2.4 Általános helyzetű merevítőrendszer

Ezt az esetet az jellemzi, hogy a teher támadáspontja nem esik rá egyik tehetetlenségi főtengelyre sem, vagyis $x_c \neq 0$ és $y_c \neq 0$ (5.4 ábra). Ilyenkor az $F_{kr,x}$, $F_{kr,y}$ és $F_{kr,\varphi}$ kritikus alapterhek kombinálódnak. A kombinálódást két módon vehetjük figyelembe: közelítően (a Föppl-Papkovics tétellel) és pontosan, az (5.25) determináns kifejtésével kapott harmadfokú egyenlet megoldásával.

A kombinálódás figyelembevétele a Föppl-Papkovics tétellel

Az (5.26)-(5.28) képletekkel kiszámolt $F_{kr,x}$, $F_{kr,y}$ és $F_{kr,\varphi}$ kritikus alapterhek ismeretében az épület kritikus terhe – közelítően – a (4.10) összefüggés felhasználásával az

$$\frac{1}{F_{kr}} \le \frac{1}{F_{kr,x}} + \frac{1}{F_{kr,y}} + \frac{1}{F_{kr,\varphi}} \tag{5.41}$$

képlet segítségével határozható meg.

Az (5.41) képlet használata mellett az szól, hogy igen egyszerű. Ha például ellenőrzésre használjuk a képletet és a szerkezet megfelel, akkor felesleges a jóval bonyolultabb pontos számítást végrehajtani. A képlet hátránya viszont, hogy gyakran nagyon „óvatos” és – a biztonság javára ugyan, de – nagy eltéréssel adja meg a kritikus teher értékét. Érzéketlen a teher külpontosságára (a *t* távolság nem szerepel a képletben), pedig a kombinálódás hatása nagy mértékben függ a külpontosságtól (az *O* nyírásközéppont és a *C* geometriai középpont távolságától).

A kombinálódás pontos figyelembevétele

A kombinálódást pontosan az (5.25) determináns kifejtésével kapott

$$(F - F_x)\left[(F - F_y)(F - F_\varphi)i_p^2 - F^2 x_c^2\right] - Fy_c(F - F_y)Fy_c = 0 \tag{5.42}$$

harmadfokú egyenlet megoldásával vehetjük figyelembe. Az (5.42) egyenlet rendezés után az

$$f(F) = F^3 + a_2F^2 + a_1F + a_0 = 0 \tag{5.43}$$

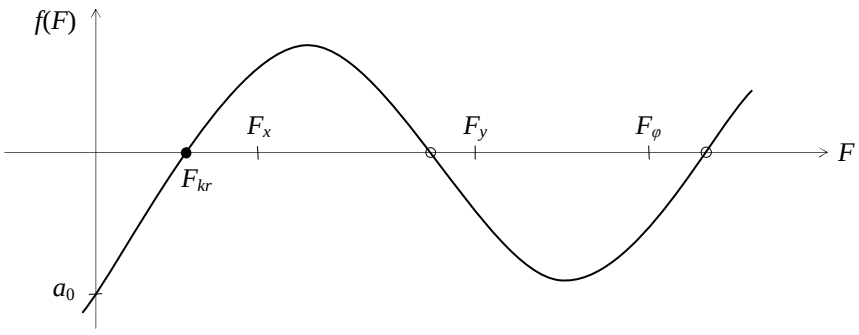
alakban írható, ahol

$$a_2 = \frac{F_x\tau_x^2 + F_y\tau_y^2 - F_x - F_y - F_\varphi}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2}, \qquad a_1 = \frac{F_xF_y + F_xF_\varphi + F_yF_\varphi}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2}, \qquad a_0 = -\frac{F_xF_yF_\varphi}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2} \tag{5.44}$$

és

$$\tau_x = \frac{x_c}{i_p} \qquad \text{és} \qquad \tau_y = \frac{y_c}{i_p} \tag{5.45}$$

Az (5.43) harmadfokú egyenlet legkisebb gyöke a kritikus teher értékét adja. Bizonyítható, hogy az F_{kr} kritikus erő mindhárom kritikus alaptehernél ($F_{kr,x}$, $F_{kr,y}$, $F_{kr,\varphi}$) kisebb (5.7 ábra).

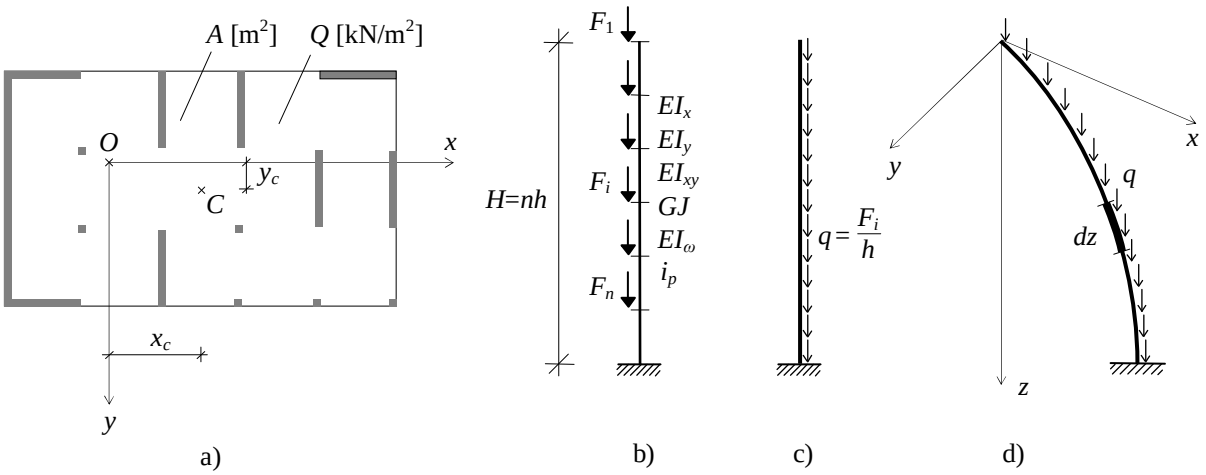


5.7 ábra. Példa az (5.43) harmadfokú függvény lefutására.

5.3 Elcsavarodó kihajlás – födémenként egyenletesen megoszló teher

Tekintsük most azt a gyakorlati esetet, amikor az épület a födémeken egyenletesen megoszló Q teherrel terhelt (5.8/a ábra). Az épületet helyettesítő oszlop terhe most szintenként $F_i = AQ$ nagyságú koncentrált erők formájában jelentkezik (5.8/b ábra). Ezt a terhet a függőleges mentén „elkenjük” és így a helyettesítő oszlop terhe egyenletesen megoszlóvá válik (5.8/c ábra). Az egyenletesen megoszló teher hatására az oszlop (illetve az általa helyettesített épület) általános esetben elcsavarodó kihajlást végez, amikor is az x és y irányban bekövetkező kihajlás kombinálódik a z tengely körül bekövetkező elcsavarodással (5.8/d ábra).

Feladatunk ennek a jelenségnek a vizsgálata és az épület kritikus terhének megállapítása. Feltételezzük, hogy a függőleges teherviselő elemek (magok, falak és oszlopok) megfelelő „sűrűn” vannak elosztva. Már most megjegyezzük, hogy a teher függőleges mentén történő elkenésével bizonyos – a biztonság kárára történő – közelítést tettünk. Ezzel a hatással, illetve a közelítés korrekciójával az 5.3.6 pontban még foglalkozunk.



5.8 ábra. a) födémeken terhelt épület, b)-c) a helyettesítő tartó, d) elcsavarodó kihajlás.

5.3.1 A feladat differenciálegyenlet-rendszere

A helyettesítő tartó (5.8/d ábra) egy dz elemi szakaszának egyensúlyát vizsgálva a következő differenciálegyenlet-rendszer vezethető le:

$$EI_y u''''(z) + \left[N(z)\{u'(z) + y_c\varphi'(z)\}\right]' = 0 \tag{5.46a}$$

$$EI_x v''''(z) + \left[N(z)\{v'(z) - x_c\varphi'(z)\}\right]' = 0 \tag{5.46b}$$

$$EI_\omega \varphi''''(z) - \left[GJ\varphi'(z) - N(z)i_p^2\varphi'(z)\right]' - \left[N(z)\{x_c v'(z) - y_c u'(z)\}\right]' = 0 \tag{5.46c}$$

ahol $N(z) = qz$ a helyettesítő tartó függőleges terhe.

A differenciaegyenlet-rendszerhez tartozó peremfeltételek az oszlop tetejéhez rögzített origójú koordinátarendszerben a következők.

Az oszlop tetőpontjának eltolódása és elcsavarodása zérus:

$$u(0) = v(0) = \varphi(0) = 0 \tag{5.47a}$$

A befogási keresztmetszetnél az érintő függőleges és nem keletkezik öblösödés:

$$u'(H) = v'(H) = \varphi'(H) = 0 \tag{5.47b}$$

A tartó szabad végén a hajlítónyomatékok zérus értékűek és nem ébrednek öblösödési feszültségek:

$$u''(0) = v''(0) = \varphi''(0) = 0 \tag{5.47c}$$

A befogási keresztmetszetnél a nyíróerők és a csavarónyomatékok értéke zérus:

$$u'''(H) = v'''(H) = EI_\omega \varphi'''(H) - GJ\varphi'(H) = 0 \tag{5.47d}$$

Az (5.46a-b-c) változó együtthatójú, negyedrendű, homogén, lineáris differenciálegyenlet-rendszer nem oldható meg olyan egyszerűen, mint a fent koncentrált erővel terhelt konzoltartó hasonló differenciálegyenlet-rendszere, de – bár meglehetősen hosszadalmas módon – az 5.1 pontban bemutatott hatványsoros módszer megoldáshoz vezet. Ez a megoldás azonban bonyolult és nem szemléletes, ezért inkább a két feladat közötti hasonlóságot kihasználva egy másik, egyszerűbb és szemléletesebb megoldást választunk.

Vegyük még egyszer szemügyre a fent koncentrált erővel terhelt konzoltartó (5.20) differenciálegyenlet-rendszerét. Némi átalakítással az egyenletrendszer az

$$EI_y u''''(z) + Fu''(z) + Fy_c\varphi''(z) = EI_y u''''(z) + \left[F\{u'(z) + y_c\varphi'(z)\}\right]' = 0 \tag{5.48a}$$

$$EI_x v''''(z) + Fv''(z) - Fx_c\varphi''(z) = EI_x v''''(z) + \left[F\{v'(z) - x_c\varphi'(z)\}\right]' = 0 \tag{5.48b}$$

$$\begin{aligned} &EI_\omega \varphi''''(z) - \left(GJ - Fi_p^2\right)\varphi''(z) - Fx_c v''(z) + Fy_c u''(z) = \\ &\quad = EI_\omega \varphi''''(z) - \left[GJ\varphi'(z) - Fi_p^2\varphi'(z)\right]' - \left[F\{x_c v'(z) - y_c u'(z)\}\right]' = 0 \end{aligned} \tag{5.48c}$$

alakban írható. Könnyen belátható, hogy ha az F helyére L operátort írunk az (5.48) egyenletrendszerben, és ugyanígy L operátort írunk az N helyére az (5.46) egyenletrendszerben, akkor az (5.46) és (5.48) differenciálegyenlet-rendszer formailag azonos. Ebből az következik, hogy az 5.2 pontban követett módon eljárva, formailag azonos alakú determinánst kapnánk, vagyis az alap kritikus erők kombinálódása azonos. (Természetesen az alap kritikus terhek nem azonosak, de a kombinálódás módja igen.)

Fentiek szerint eljárva, a feladat megoldását két lépésben kapjuk meg:

A) Előállítjuk az alapesetek kritikus terheit ($N_{kr,x}$, $N_{kr,y}$, $N_{kr,\varphi}$), majd
B) Figyelembe vesszük a kombinálódást – vagy közelítően a Föppl-Papkovics tétellel, vagy pedig pontosan az (5.43) harmadfokú egyenlettel.

Állítsuk elő először az alapesetek kritikus terheit.

5.3.2 Síkbeli kihajlás

Az alapesetek kritikus terheit úgy kapjuk meg, hogy az (5.46) egyenletrendszert az $x_c = y_c = 0$ helyettesítéssel írjuk fel és oldjuk meg. A síkbeli kihajlást leíró első két egyenlet ekkor az

$$EI_y u''''(z) + \left[N(z)u'(z)\right]' = 0 \quad \rightarrow \quad u''''(z) + \frac{\left[N(z)u'(z)\right]'}{EI_y} = 0 \tag{5.49a}$$

$$EI_x v''''(z) + \left[N(z)v'(z)\right]' = 0 \quad \rightarrow \quad v''''(z) + \frac{\left[N(z)v'(z)\right]'}{EI_x} = 0 \tag{5.49b}$$

alakot ölti. Ez a két egyenlet azonos az (5.4) egyenlettel, amit már (az 5.1 pontban hatványsoros módszerrel) megoldottunk. Nem kell mást tenni, mint kölcsönözni az ott kapott eredményt. Ezek szerint az *x* és *y* síkbeli kihajlásokhoz tartozó kritikus terhek képlete a következő:

$$N_{kr,x} = \frac{7.837 r_s EI_y}{H^2} \tag{5.50a}$$

és

$$N_{kr,y} = \frac{7.837 r_s EI_x}{H^2} \tag{5.50b}$$

A fenti képletben elhelyeztük az r_s redukciós tényezőt, amivel annak a közelítésnek a hatását korrigáljuk, hogy a valójában födémszinteken jelentkező koncentrált erőkből álló terhelést a tartó magassága mentén elkentük (5.8/b-c ábra). Az r_s tényező levezetését az 5.3.6 pontban adjuk majd meg; értéke kettőnél több szintes épületeknél az

$$r_s = \frac{n}{n+1.588} \tag{5.51}$$

képletből határozható meg, ahol *n* a szintek száma. Kétszintes épületnél $r_s = 0.528$, egyszintes épületnél $r_s = 0.315$ [v. ö. az (5.71) képlettel az 5.3.6 pontban]. Az r_s redukciós tényező értékeit az 5.1 táblázatban foglaltuk össze.

5.1 táblázat. Az r_s redukciós tényező értékei az *n* szintszám függvényében.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_s	0.315	0.528	0.654	0.716	0.759	0.791	0.815	0.834	0.850	0.863	0.874
n	12	13	14	15	16	18	20	25	30	50	>50
r_s	0.883	0.891	0.898	0.904	0.910	0.919	0.926	0.940	0.950	0.969	$n/(n+1.588)$

5.3.3 Tiszta elcsavarodó kihajlás

Az (5.46c) differenciálegyenlet az $x_c = y_c = 0$ helyettesítéssel a tiszta elcsavarodó kihajlás differenciálegyenletét adja:

$$EI_\omega \varphi''''(z) + \left[N(z) i_p^2 \varphi'(z) - GJ\varphi'(z)\right]' = 0 \tag{5.52}$$

Határozzuk meg először a feladat megoldását közelítő módon. A Southwell-tétel alkalmazásával először azt tételezzük fel, hogy a helyettesítő tartónak csak EI_ω öblösödési csavarási merevsége van és meghatározzuk a hozzá tartozó kritikus terhet ($N_{kr,1}$), majd pedig azt, hogy csak *GJ* tiszta csavarási merevsége van és meghatározzuk a hozzá tartozó kritikus terhet ($N_{kr,2}$). Ezután a (4.4) képlet szerint összegezzük a rész-merevségekhez tartozó kritikus terheket.

Ha a tartónak csak EI_ω öblösödési csavarási merevsége van (és a GJ tiszta csavarási merevsége zérus), akkor az (5.52) differenciálegyenlet az

$$EI_\omega \varphi''''(z) + \left[N(z) i_p^2 \varphi'(z)\right]' = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi''''(z) + \frac{\left[N(z)\varphi'(z)\right]'}{\frac{EI_\omega}{i_p^2}} = 0 \tag{5.53}$$

egyenletre egyszerűsödik. Ez az egyenlet formailag azonos az (5.4) egyenlettel (csak a merevség még i_p^2-el el van osztva). Így átvehetjük az (5.4) egyenlethez tartozó megoldást (csak a merevséget még i_p^2-el el kell osztani):

$$N_{kr,1} = N_{kr,\varphi}^{\omega} = \frac{7.837 r_s EI_\omega}{i_p^2 H^2} \tag{5.54}$$

Az (5.54) képlet számlálójában is elhelyeztük a fent tárgyalt r_s redukciós tényezőt.

A következő lépésben azt tételezzük fel, hogy a tartónak csak GJ tiszta csavarási merevsége van (és az EI_ω öblösödési csavarási merevsége zérus). Ekkor az (5.52) differenciálegyenlet az

$$\left[N(z) i_p^2 \varphi'(z) - GJ\varphi'(z)\right]' = 0 \tag{5.55}$$

alakot ölti. Az egyenlethez – az (5.47a-b) szerint – a $\varphi(0) = 0$ és a $\varphi'(H) = 0$ peremfeltételek tartoznak. Egyszer integrálva (5.55)-öt az

$$N(z) i_p^2 \varphi'(z) - GJ\varphi'(z) + c_1 = 0$$

egyenlethez jutunk, ahol a második peremfeltételből $c_1 = 0$ adódik, így – figyelembe véve hogy $N(z) = qz$ – a megoldandó egyenlet

$$(qz i_p^2 - GJ)\varphi'(z) = 0$$

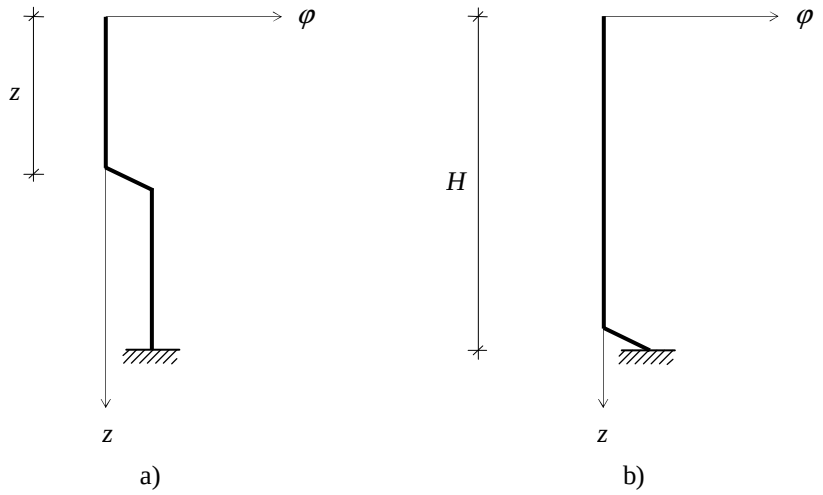
A baloldali két-tényezős szorzat csak úgy lehet zérus, ha valamelyik tényezője zérus. A $\varphi'(z)$ nem lehet a tartó teljes hossza mentén zérus, mert akkor nem lenne alakváltozás [hiszen az (5.47a) szerint $\varphi(0) = 0$ is fenn áll]. Így csak a zárójeles tényező lehet zérus, ami a

$$q_{kr} = \frac{GJ}{z i_p^2} \tag{5.56}$$

kritikus teherintenzitáshoz vezet. A tartó (5.56) képlethez tartozó elcsavarodását az 5.9/a ábra mutatja. A legkisebb kritikus terhet keressük és a fenti képlet jobboldala a $z = H$-nál lesz a legkisebb. A keresett kritikus teher így

$$N_{kr,2} = N_{kr,\varphi}^{t} = q_{kr} H = \frac{GJ}{i_p^2} \tag{5.57}$$

A tartó elcsavarodását a kritikus teher elérésekor az 5.9/b ábra mutatja.



5.9 ábra. *GJ*-vel rendelkező tartó hirtelen elcsavarodása. a) *z*-nél, b) *z* = *H*-nál.

Az (5.57) kritikus teher igen érdekes eredmény. A rudak kritikus ereje általában a magasságukkal fordított arányban csökken és függ a tehernek a magasság menti eloszlásától. Az (5.57) képlet viszont azt mutatja, hogy a kritikus erő ugyanakkora egy alacsony és egy magas rúd esetén, és értéke egyáltalán nem függ sem a rúd magasságától, sem pedig a megoszló teher eloszlásától a rúd hossza mentén. Érdekes a kihajlási alak is: a rúddal a tetőponttól lefelé sokáig nem történik semmi, azután a befogási keresztmetszetnél hirtelen elcsavarodik. Ez az alak némi magyarázatot nyújt arra is, hogy az (5.57) képletben miért nem kell alkalmazni az r_s csökkentő tényezőt: ahogyan a megoszló teher eloszlása nem befolyásolja a kritikus erő értékét, úgy a teher súlypontjának a helye sem változtatja meg a kritikus erő értékét – itt tehát nincs jelentősége a teher lefelé történt elkenésének.

A két rész merevséghez tartozó kritikus terhek Southwell-féle összegzésével megkapjuk a tiszta elcsavarodó kihajláshoz tartozó kritikus teher közelítő értékét:

$$N_{kr} = N_{kr,1} + N_{kr,2} = N_{kr,\varphi}^{\omega} + N_{kr,\varphi}^{t} = \frac{1}{i_p^2}\left(\frac{7.837 r_s EI_\omega}{H^2} + GJ\right) \tag{5.58}$$

Mielőtt megadnánk a tiszta elcsavarodó kihajlás *pontos* kritikus terhét, a jelenség jobb megértése érdekében – Kollár Lajos levezetését alkalmazva – állítsuk elő egy másik módszerrel is az (5.57) képletet. Tekintsük az 5.10/a ábrán vázolt egyszintes, *h* magasságú épületet. Az épületet az alaprajz geometriai középpontjában elhelyezett egyetlen merevítőmag merevíti, amelynek csak *GJ* tiszta csavarási merevsége van. Az épületet az *A* [m^2] területű födémen *Q* [kN/m^2] egyenletesen megoszló intenzitású teher terheli. A függőleges teher – a merevítőmagon kívül – *n* darab alul-felül csuklós oszlop segítségével adódik át az alapozásra. Az *i*-edik oszlopra $P_i = QA_i$ teher jut, ahol A_i az oszlop terhelő mezője. Feltételezzük, hogy az oszlopok elegendő sűrűn vannak elhelyezve, de a könnyebb láthatóság érdekében az 5.10 ábrán csak négy oszlopot tüntettünk fel.

Az *i*-edik oszlop a rá ható P_i függőleges erő hatására elferdül. Mivel az erő a ferde oszlopból nem tud kilépni, az egyensúly biztosításához szükség van egy H_i vízszintes erőre (5.10/b ábra). Ez az erő a födémben működik és az épület φ mértékű elcsavarodását okozza. Az *i*-edik oszloppal kapcsolatos csavarónyomaték nagysága

$$M_i = H_i r_i$$

ahol r_i az *i*-edik oszlop távolsága a nyírásközépponttól. Az 5.10/b ábra arányos három-

szögeiből a vízszintes erő értéke

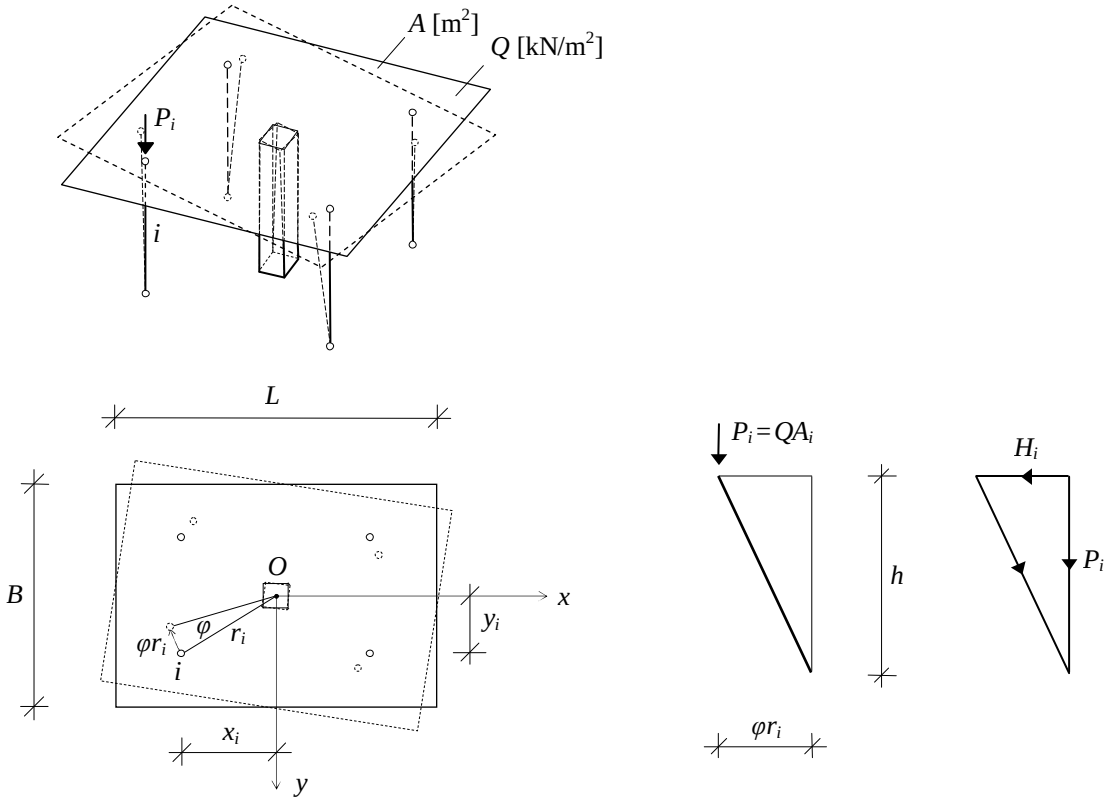
$$\frac{H_i}{P_i} = \frac{r_i \varphi}{h} \qquad \rightarrow \qquad H_i = P_i \frac{r_i \varphi}{h}$$

így a teljes külső csavarónyomaték:

$$M_k = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{r_i^2 \varphi}{h} = \sum_{i=1}^{n} QA_i \frac{r_i^2 \varphi}{h}$$

A merevítőmag *GJ* tiszta csavarási merevségével áll ellen a csavarásnak. Az ellenállás „hatékonysága” egyenesen arányos az elcsavarodás φ szögével és fordítottan arányos a mag *h* magasságával. A teljes belső csavarási ellenállás így

$$M_b = GJ \frac{\varphi}{h}$$



a) egyszintes épület b) elferdült oszlop

5.10 ábra. Tiszta elcsavarodó kihajlás.

Egyensúlynál a külső és belső csavarónyomaték egyenlő:

$$M_k = M_b \qquad \rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} QA_i \frac{r_i^2 \varphi}{h} = GJ \frac{\varphi}{h}$$

A födémteher kritikus intenzitására innen a

$$Q_{kr} = \frac{GJ}{\sum_i A_i r_i^2} = \frac{GJ}{\sum_i A_i (x_i^2 + y_i^2)} = \frac{GJ}{I_x + I_y} = \frac{GJ}{I_p}$$

összefüggést kapjuk. Mindkét oldalt megszorozva a teljes födémterülettel megkapjuk az épület kritikus terhét:

$$P_{kr} = Q_{kr} A = \frac{GJ}{\frac{I_p}{A}} = \frac{GJ}{i_p^2} \tag{5.59}$$

A következőkben megadjuk a tiszta elcsavarodó kihajlás pontos megoldását.

Az (5.46c) differenciálegyenlet az $x_c = y_c = 0$ helyettesítéssel a tiszta elcsavarodó kihajlás differenciálegyenlete. Ha az egyenletet a

$$\varphi''''(z) + \left[\frac{N(z) i_p^2 - GJ}{EI_\omega} \varphi'(z) \right]' = 0 \tag{5.60}$$

formában írjuk, akkor látható, hogy az egyenlet nagyon hasonlít az 5.1 pontban már megoldott (5.4) differenciálegyenlethez. Az 5.1 pontban részletesen bemutatott hatványsoros módszer alkalmazásával ebben az esetben is viszonylag gyors és egyszerű megoldáshoz jutunk, csak a végeredmény most két merevségtől (GJ és EI_ω) függ. Vezessük be a két merevség arányát kifejező k_s tényezőt:

$$k_s = \frac{k}{\sqrt{r_s}} = H \sqrt{\frac{GJ}{r_s EI_\omega}} \tag{5.61}$$

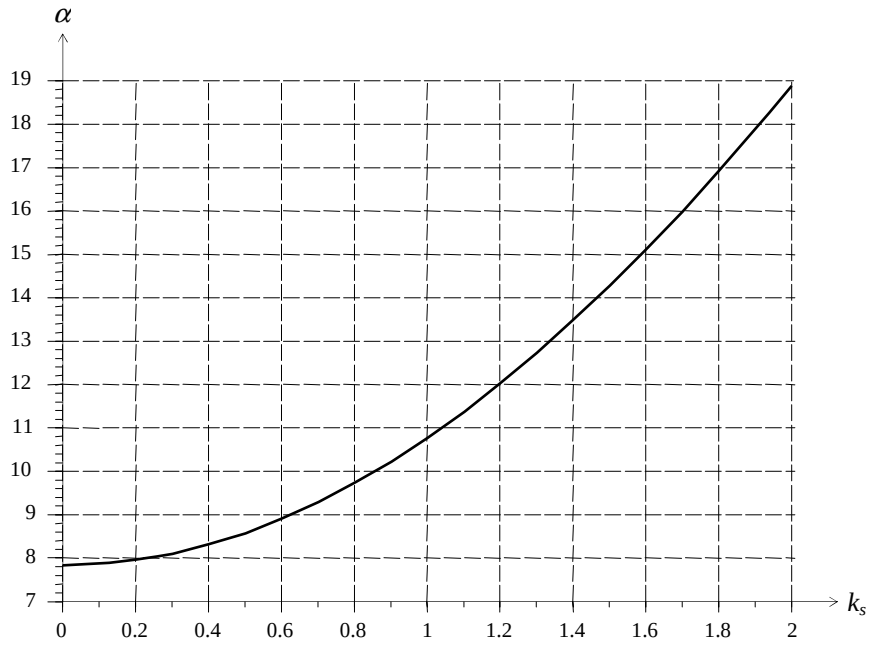
ahol k a vékonyfalú rudak elméletében jól ismert csavarási tényező:

$$k = H \sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}} \tag{5.62}$$

A k_s tényező segítségével – a levezetés mellőzésével – a kritikus teherre az

$$N_{kr,\varphi} = \frac{\alpha r_s EI_\omega}{i_p^2 H^2} \tag{5.63}$$

egyszerű képlet adható meg, ahol az α tényező a k_s tényező függvényében az 5.2 táblázatból illetve az 5.11 ábráról határozható meg.



5.11 ábra. Az $\alpha(k_s)$ tényező értékei a tiszta elcsavarodó kihajlás kritikus erejéhez.

5.2 táblázat. Az $\alpha(k_s)$ tényező értékei a tiszta elcsavarodó kihajlás kritikus erejéhez.

k_s	0	0.1	0.5	0.8	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5
α	7.837	7.867	8.583	9.73	10.77	14.27	18.87	24.38	30.59	37.39	44.7	60.8
k_s	6	8	10	15	20	100	1000		4000		> 4000	
α	78.8	121.2	172.4	338.6	558.6	11168	1023750		16149383		k_s^2	

5.3.4 Az alapesetek kombinálódása

A három kritikus alapteher ismeretében az utolsó lépés az, hogy meghatározzuk az épület kritikus terhét. Ha a merevítőrendszer kétszeresen szimmetrikus, akkor a két síkbeli kihajlás és a tiszta elcsavarodó kihajlás egymástól függetlenül jön létre és a három alapteher is független egymástól. Ekkor a három alapteher közül a legkisebb az épület kritikus terhe. Ha a merevítőrendszer nem rendelkezik kétszeres szimmetriával, akkor az alapterhek kombinálódnak és ezt a kombinálódást figyelembe kell venni, mert az épület kritikus terhe mindhárom alaptehernél kisebb lesz. Legrosszabb esetben a kombinálódás akár 141%-al is csökkentheti a kritikus terhet.

A kombinálódás figyelembevételére két lehetőségünk van. Figyelembe vehetjük közelítően a Föppl-Papkovics tétel segítségével, vagy pontosan. A Föppl-Papkovics-féle közelítő számításhoz vesszük a korábban már meghatározott $N_{kr,x}$, $N_{kr,y}$ és $N_{kr,\varphi}$ kritikus alapterheket és a (4.10) összefüggés alkalmazásával az

$$\frac{1}{N_{kr}} \le \frac{1}{N_{kr,x}} + \frac{1}{N_{kr,y}} + \frac{1}{N_{kr,\varphi}} \tag{5.64}$$

képletből kiszámítjuk az épület N_{kr} kritikus terhét. Ez a számítás egyszerű és gyors és a biztonság javára való közelítéssel szolgáltatja a kritikus terhet. A képlet hibatartománya (eltérése a pontos értéktől): 0–67%.

Az 5.3.1 pontban elmondottak szerint a kombinálódás pontos figyelembevétele az (5.43) harmadfokú egyenlet megoldásával történik, azzal a különbséggel hogy F helyére N-et írunk, vagyis az épület kritikus terhét az

$$f(N) = N^3 + a_2 N^2 + a_1 N + a_0 = 0 \tag{5.65}$$

harmadfokú egyenlet legkisebb gyöke adja. Az egyenlet megoldásához szükséges együtthatók:

$$a_2 = \frac{N_x\tau_x^2 + N_y\tau_y^2 - N_x - N_y - N_\varphi}{1-\tau_x^2-\tau_y^2}, \quad a_1 = \frac{N_xN_y + N_xN_\varphi + N_yN_\varphi}{1-\tau_x^2-\tau_y^2}, \quad a_0 = \frac{-N_xN_yN_\varphi}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} \tag{5.66}$$

ahol

$$\tau_x = \frac{x_c}{i_p} \qquad \text{és} \qquad \tau_y = \frac{y_c}{i_p} \tag{5.67}$$

5.3.5 Összefoglalás

Az 5.3 pont fenti összefüggései alapján a koncentrált tetőteher esetéhez nagyon hasonló következtetések vonhatók le. A födémeken egyenletesen megoszló teherrel terhelt épületek kritikus terhe alapvetően két dologtól függ:

– Az $N_{kr,x}$, $N_{kr,y}$ és $N_{kr,\varphi}$ alap kritikus terhek értékétől
– Az alap kritikus terhek kombinálódásától

Az alap kritikus terhek értékét befolyásoló tényezők:

• Síkbeli kihajlás – $N_{kr,x}$ és $N_{kr,y}$
  – a kritikus erő nagysága egyenesen arányos a hajlítási merevséggel (EI_y, EI_x)
  – a kritikus erő nagysága fordítottan arányos a magasság négyzetével
  – a kritikus erő nagyságát nem befolyásolja a merevítőelemek helye
  – a kritikus erő nagyságát nem befolyásolja az alaprajz mérete

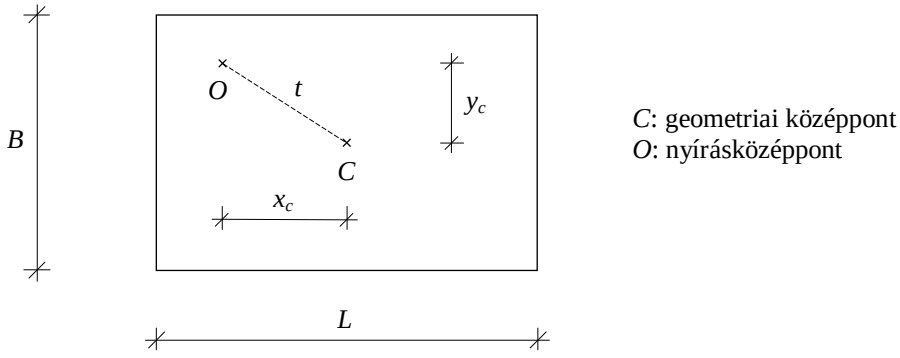
• Tiszta elcsavarodó kihajlás – $N_{kr,\varphi}$
  – a kritikus erő nagysága egyenesen arányos a csavarási merevségekkel (EI_ω és GJ)
  – a kritikus erő nagysága fordítottan arányos a magasság négyzetével
  – a kritikus erő nagysága fordítottan arányos az alaprajz méreteinek (L és B) négyzetével:

    a (2.10)-ből: $i_p^2 = \frac{L^2 + B^2}{12} + t^2$

  – a kritikus erő nagysága „nagyon” függ a merevítőelemek helyétől (x_i, y_i):

    a (2.6)-ból: $EI_\omega = E\sum_{i=1}^{n}(I_{\omega,i} + I_{x,i}x_i^2 + I_{y,i}y_i^2 - 2I_{xy,i}x_iy_i)$

• Az alap kritikus terhek kombinálódását alapvetően a nyírásközéppont és geometriai középpont t távolsága határozza meg (5.12 ábra). Minél távolabb van a két pont egymástól, annál nagyobb a kombinálódás (veszélyes) hatása.



5.12. ábra. A kombinálódást alapvetően befolyásoló *t* távolság.

Az épület kritikus ereje (N_{kr}) növelésének lehetőségei:

– a merevségek (I_x, I_y, I_{xy}, J, I_ω) növelése (lehetőleg arányosan),
– a merevítőelemek nyírásközépponttól mért merőleges távolságának (x_i, y_i) növelése (elcsavarodó kihajlás esetében),
– a nyírásközéppont és geometriai középpont közötti távolság (t) csökkentése,
– a magasság (H) csökkentése.

A legoptimálisabb eset az, amikor az alap kritikus terhek közel azonos nagyságúak és a nyírásközéppont és geometriai középpont távolsága kicsi, lehetőleg zérus, vagyis amikor

$$N_{kr,x} \approx N_{kr,y} \approx N_{kr,\varphi} \qquad \text{és} \qquad t \approx 0 \tag{5.68}$$

Az épület magasságának esetleges csökkentésével kapcsolatban megemlítendő, hogy ez funkcionális okokból gyakran nem lehetséges. Az i_p képletének vizsgálata azt jelzi, hogy a kritikus teher értéke növelhető az épület szélességi méreteinek csökkentésével is. Ez sem tűnik reális lehetőségnek, mert a tervezés ezen (statikai) fázisában az épület mérete általában már nem változtatható. Ezen túlmenően, a szélességi méretek csökkentése ellentmondásos hatással járhat, mert akadályozhatja azt a célkitűzést hogy növeljük az egyes merevítőelemek merőleges távolságát a nyírásközépponttól.

5.3.6 Az r_s redukciós tényező

A födémeken megoszló teherrel terhelt épületnél a kritikus terhet úgy határoztuk meg, hogy az épület szintenként koncentrált erőkként jelentkező terhét a függőleges mentén „elkentük”. Ebben a pontban ennek a közelítésnek a hatását vizsgáljuk meg. Nézzük meg először, hogy milyen következménnyel jár ha egy oszlop (=egyszintes épület) tetején működő erőt „kenünk el” a magasság mentén (5.13/a ábra).

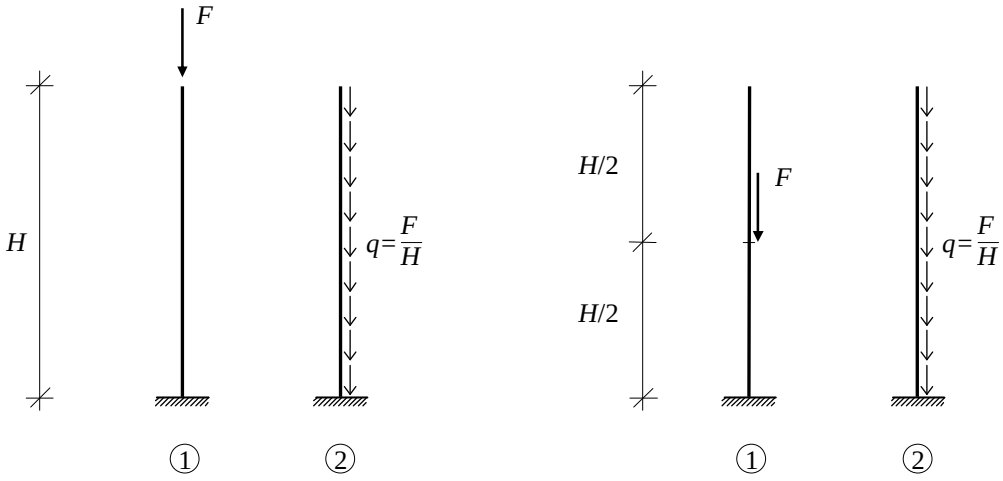
Ha az F erő az oszlop tetején hat, akkor a kritikus teher értéke:

$$F_{kr}^{(1)} = \frac{\pi^2 EI}{4H^2} = \frac{2.467EI}{H^2} \tag{5.69}$$

Ha ezt az F erőt a H magasság mentén „elkenjük” és $q = F/H$ intenzitású megoszló teherrel helyettesítjük, akkor a kritikus teher értéke az 5.1 pontban levezetett (5.19) képlet szerint:

$$F_{kr}^{(2)} = \frac{7.837EI}{H^2} \tag{5.70}$$

Látható, hogy a koncentrált erő fent bemutatott módon történő elkenése – a biztonság kárára – körülbelül háromszoros kritikus erőt eredményez, ami elfogadhatatlan. Ennek a biztonság kárára bekövetkező eltérésnek az az oka, hogy az erőt lefelé kentük el miközben megoszló terhet alakítottunk ki belőle és eközben a teher súlypontja (az oszlop tetejéről) lefelé tolódott el (a magasság felébe) ami – hibásan – jóval kedvezőbb helyzetet teremtett.



5.13 ábra. Az $F = qH$ koncentrált erő elkenése egyenletesen megoszló teherré.

A két kritikus teher hányadosa

$$\frac{F_{kr}^{(1)}}{F_{kr}^{(2)}} = 0.315 \tag{5.71}$$

vagyis az elkenéssel megoldott feladat kritikus terhét egy 0.315 szorzótényezővel kell ellátni hogy a helyes eredményt kapjuk (v. ö. az 5.1 táblázat első adatával n = 1-nél az 5.3.2 pont-ban).

Az érdekesség kedvéért nézzük meg most, hogy mi történik akkor, ha egy koncentrált erőt szimmetrikusan, felfelé és lefelé kenünk el (5.13/b ábra). Ha az F erő az oszlop magasságának felében hat, akkor a kritikus teher értéke:

$$F_{kr}^{(1)} = \frac{\pi^2 EI}{4\left(\frac{H}{2}\right)^2} = \frac{9.87EI}{H^2} \tag{5.72}$$

Ha ezt az F erőt most felfelé $H/2$-re és lefelé $H/2$-re „elkenjük”, akkor a teljes H magasság mentén megoszló terhet kapunk és a kritikus teher értéke ismét

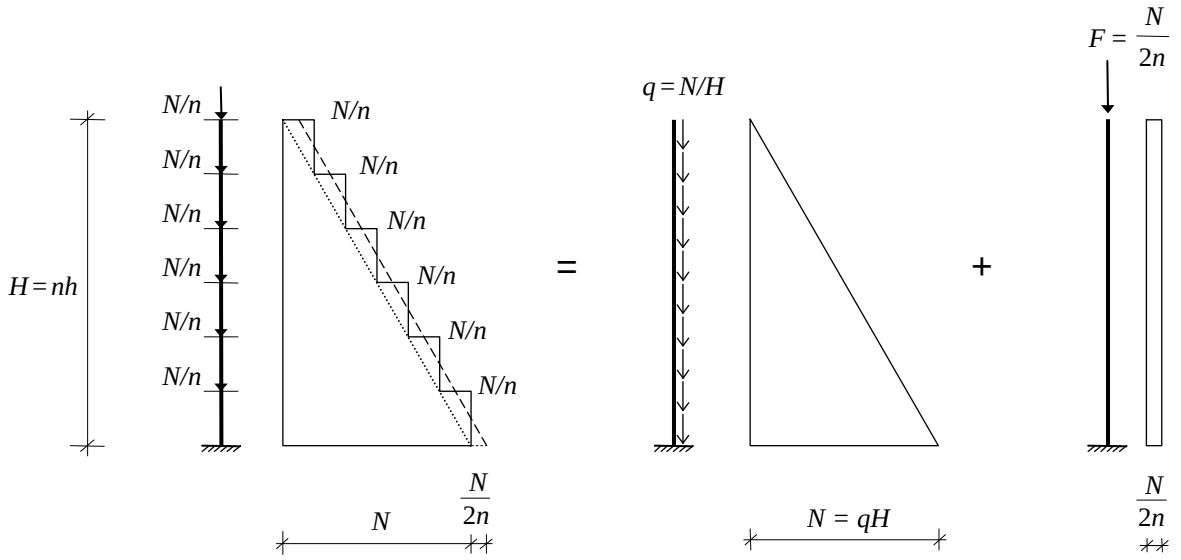
$$F_{kr}^{(2)} = \frac{7.837EI}{H^2} \tag{5.73}$$

Látható, hogy a koncentrált erő szimmetrikus elkenése a biztonság javára történő kismértékű eltéréssel adja a kritikus teher értékét. A két kritikus teher hányadosa

$$\frac{F_{kr}^{(1)}}{F_{kr}^{(2)}} = 1.26 \tag{5.74}$$

vagyis az elkenéssel megoldott feladat kritikus terhét egy 1.26 szorzótényezővel kell ellátni, hogy a helyes eredményt kapjuk.

Tekintsük most a többszintes épület esetét. Az épület teljes terhe N. Ez a teher az épület n szintjén oszlik el és így a teher födémszinteken jelentkező koncentrált erők formájában adódik át a helyettesítő tartóra (5.14/a ábra).



a) tényleges terhelés szintenként b) egyenletesen megoszló rész c) tetőponti koncentrált erő

5.14 ábra. Többszintes épület terhelése.

Az 5.13/b ábrán bemutatott második (szimmetrikus) módszerrel szeretnénk a födémszinteken jelentkező koncentrált erőket elkenni (mert ez biztonságos), de ez most nem lehetséges, mert a tetőn jelentkező erőt nem tudnánk fölfelé elkenni (mert ott már nincsen épület), az első szinten működő erő szimmetrikus elkenése után pedig maradna még egy $h/2$ hosszúságú szakasz ahol nem lenne teher, így a teljes magasság mentén egyenletesen megoszló teherrel terhelt oszloop esetét nem tudnánk használni. Így azután lefelé kenjük el a koncentrált erőket és megnézzük, hogy hogyan lehet majd a biztonság kárára jelentkező hibát korrigálni.

A tényleges terhelést N-ábra formájában az 5.14/a ábra mutatja (lépcsős ábra folytonos vonallal), ahol minden szinten N/n nagyságú koncentrált erő adódik át a helyettesítő tartóra. A lépcsős ábrát először a lépcsők felezőpontjait összekötő egyenessel kiegyenesítjük (szaggatott vonal az 5.14/a ábrán), majd az így keletkező ábrát két részre bontjuk. A ferde szaggatott vonallal határolt teljes ábrából a ferde szaggatott vonallal párhuzamosan pontvonallal lehatárolunk egy háromszög alakú ábrarészt. Ez az ábrarész zérusból indul a tartó tetejénél és N értéket ér el a befogásnál. Ez a terhelés pontosan megfelel egy $q = N/H$ egyenletesen megoszló tehernek (5.14/b ábra). A maradék ábrarész $N/2n$ értékkel kezdődik a tartó tetején és ez az érték a befogásig nem változik. Ez a terhelés egy $F = N/2n$ nagyságú, a tartó tetején működő koncentrált erőnek felel meg (5.14/c ábra). Van tehát egy olyan tartónk, aminek a terhe két részből tehető össze: egy egyenletesen megoszló teherből (5.14/b ábra) és egy tetőponti koncentrált erőből (5.14/c ábra). A két teher együttes hatását a 4.3 pontban ismertetett Dunkerley-tétellel vehetjük figyelembe:

$$1 \geq \frac{P_1}{P_{kr,1}} + \frac{P_2}{P_{kr,2}}$$

A mi esetünkben legyen az 1-es teher a megoszló teher (5.14/b ábra), a 2-es teher a koncentrált teher (5.14/c ábra). A Dunkerley-tétel így a mi jelöléseinkkel az

$$\frac{N}{N_{kr}} + \frac{F}{F_{kr}} = 1 \tag{5.75}$$

alakban fogalmazható meg. A megoszló terhelési esetet jellemző teher N, a koncentrált erő értéke pedig $F = N/2n$. Ezeket az értékeket behelyettesítjük a Dunkerley képletbe:

$$\frac{N}{N_{kr}} + \frac{N}{2nF_{kr}} = 1$$

Átrendezés után innen az

$$N = \frac{n}{n + \frac{N_{kr}}{2F_{kr}}} N_{kr} \tag{5.76}$$

képletet kapjuk. Itt a megoszló teherhez tartozó kritikus teher

$$N_{kr} = \frac{7.837EI}{H^2}$$

a koncentrált erőhöz tartozó kritikus teher pedig

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{H^2} = \frac{2.467EI}{H^2}$$

Ezeket az értékeket az (5.76) összefüggés megfelelő helyére behelyettesítve az

$$N = \frac{n}{n + 1.588} N_{kr} \tag{5.77}$$

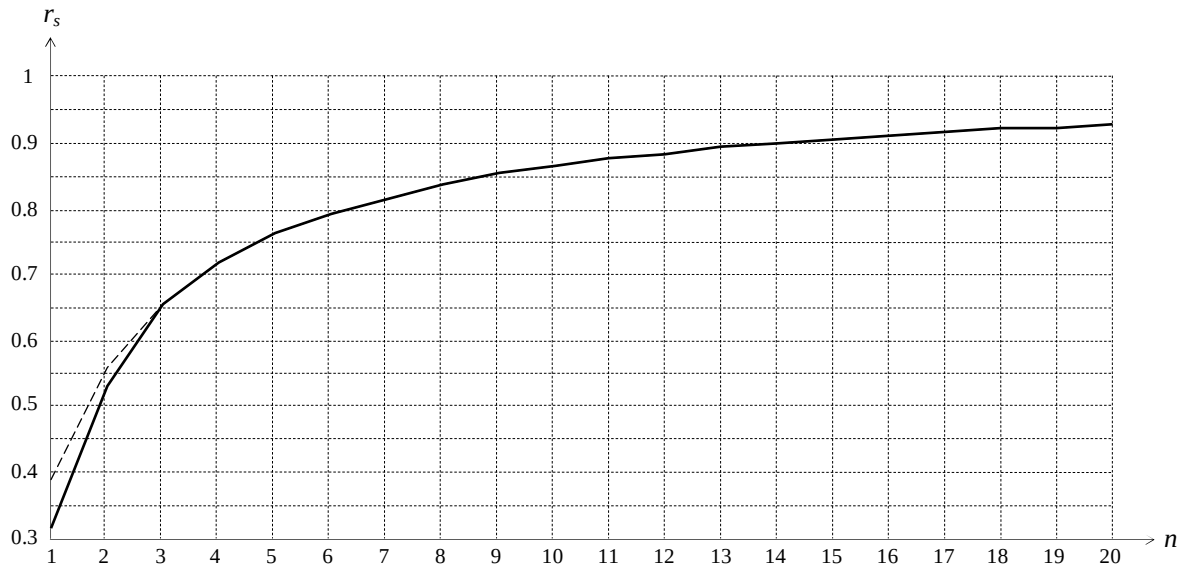
képletet kapjuk, ahol bevezetjük az

$$r_s = \frac{n}{n + 1.588} \tag{5.78}$$

redukciós tényezőt. Az (5.77) képlet azt tanúsítja, hogy a födémszinteken koncentrált erőkkel terhelt *épület* esetében a kritikus terhet úgy kapjuk meg, hogy az egyenletesen megoszló teherhez tartozó kritikus terhet (N_{kr}) korrigáljuk egy egynél kisebb redukciós tényezővel. Ez az r_s tényező és így:

$$N_{kr}^{épület} = r_s N_{kr} \tag{5.79}$$

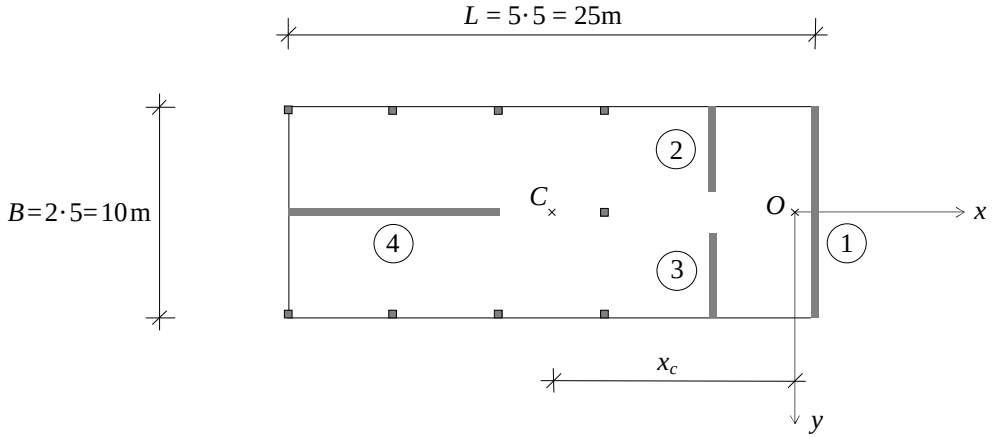
Az r_s tényező értékeit az n szintszám függvényében az 5.1 táblázatban és az 5.15 ábrán adtuk meg. A táblázatban az egyszintes és kétszintes épülethez tartozó r_s értékeket nem az (5.78) közelítő képlettel határoztuk meg, hanem felhasználtuk a pontos megoldást. – Az egyszintes esetben a pontos redukciós tényezőt korábban már levezettük; lásd az (5.71) képletet. A kétszintes esetben egy hosszadalmasabb számítás $r_s = 0.528$-at ad. Az 5.15 ábrán szaggatott vonallal ábrázoltuk a Dunkerley-féle közelítő számítás eredményeit és folytonos vonallal a pontos megoldást. Látható, hogy három szinttől felfelé a pontos és közelítő megoldás között gyakorlatilag nincs eltérés.



5.15 ábra. Az r_s redukciós tényező az n emeletszám függvényében.

5.4 Számpélda

Határozzuk meg az 5.16 ábrán alaprajzával vázolt hétszintes épület kritikus terhét egyenletesen megoszló födémteher feltételezésével. A merevítőfalak anyagának rugalmassági tényezője $E = 25$ kN/mm^2, a nyírási rugalmassági tényező értéke $G = 10$ kN/mm^2.



5.16 ábra. Ép1 jelű épület a stabilitásvizsgálathoz.

A 2.4 pontban már előállítottuk ennek az épületnek a helyettesítő tartóját. Az ottani számítás eredményeit az 5.3 táblázatban foglaljuk össze.

A stabilitásvizsgálatnál az első lépés az alap kritikus terhek előállítása. A síkbeli kihajlás

kritikus terheit az (5.50) képletek adják meg:

$$N_{kr,x} = \frac{7.837 r_s EI_y}{H^2} = \frac{7.837 \cdot 0.815 \cdot 25000 \cdot 20.85}{21^2} = 7550\,\text{MN}$$

és

$$N_{kr,y} = \frac{7.837 r_s EI_x}{H^2} = \frac{7.837 \cdot 0.815 \cdot 25000 \cdot 23.5}{21^2} = 8509\,\text{MN}$$

ahol az $r_s = 0.815$ tényező értékét az 5.1 táblázatból vettük.

A tiszta elcsavarodó kihajlás alap kritikus terhének közelítő értékét az (5.58) képletből számíthatjuk ki:

$$N_{kr,\varphi} = \frac{1}{i_p^2}\left(\frac{7.837 r_s EI_\omega}{H^2} + GJ\right) = \frac{1}{14.23^2}\left(\frac{7.837 \cdot 0.815 \cdot 25000 \cdot 64}{21^2} + 10000 \cdot 0.146\right) = 122\,\text{MN}$$

5.3 táblázat. Az Ép1 jelű épület alapadatai.

Elem	$I_{x,i}$ [m^4]	$I_{y,i}$ [m^4]	J_i [m^4]	x_i [m]	y_i [m]	I_ω [m^6]	i_p [m]
1	20.83	0.013	0.052	0.578	0		
2	1.33	0.005	0.021	-4.422	-3		
3	1.33	0.005	0.021	-4.422	3		
4	0.013	20.83	0.052	-19.42	0		
Σ	$\boldsymbol{I_x}$=23.50	$\boldsymbol{I_y}$=20.85	$\boldsymbol{J}$=0.146			$\boldsymbol{I_\omega}$=64.0	$\boldsymbol{i_p}$=14.23

Ha meg akarjuk határozni a tiszta elcsavarodó kihajlás pontosabb értékét, akkor előbb az (5.61) képletből ki kell számolni a k_s tényezőt

$$k_s = H\sqrt{\frac{GJ}{r_s EI_\omega}} = 21\sqrt{\frac{10000 \cdot 0.146}{0.815 \cdot 25000 \cdot 64}} = 0.70$$

A k_s tényező függvényében az 5.11 ábra diagramjáról (vagy az 5.2 táblázatból) megkapjuk az α kritikus teherparamétert:

$$\alpha(k_s = 0.7) \cong 9.35$$

Az α kritikus teherparaméterrel a tiszta elcsavarodó kihajlás kritikus terhe az (5.63) képletből számítható ki:

$$N_{kr,\varphi} = \frac{\alpha r_s EI_\omega}{i_p^2 H^2} = \frac{9.35 \cdot 0.815 \cdot 25000 \cdot 64}{14.23^2 \cdot 21^2} = 136\,\text{MN}$$

Ezzel az értékkel számolunk tovább.

Második – és utolsó – lépésben figyelembe vesszük az alap kritikus terhek kombinálódását. Itt két lehetőség van: a) a kombinálódás Föppl-Papkovics-féle közelítő figyelembevétele, illetve b) a pontos megoldás.

a) a kombinálódás Föppl-Papkovics-féle közelítő figyelembevétele

Az alaprajz geometriai középpontja (a függőleges terhek súlypontja) az *x* tehetetlenségi főtengelyre esik. Ez azt jelenti, hogy az *y* irányú kihajlás kombinálódik a tiszta elcsavarodó kihajlással, az *x* irányú kihajlás pedig függetlenül jön létre. A két kritikus teher közül a kisebbik az épület kritikus terhe.

A kombinált kritikus teher értékére az (5.64) összefüggés kéttagú változatának

$$\frac{1}{N_{kr,y\varphi}} = \frac{1}{N_{kr,y}} + \frac{1}{N_{kr,\varphi}} = \frac{1}{8509} + \frac{1}{136} = 0.00747$$

alkalmazásával

$$N_{kr,y\varphi} = 133.9\,\mathrm{MN}$$

adódik. Ez az érték kisebb, mint az *x* irányú kritikus erő értéke (7550 MN), így az épület kritikus terhe

$$N_{kr} = 133.9\,\mathrm{MN}$$

b) a pontos megoldás

A pontos megoldás alkalmazásánál nem kell nézni, hogy az alap kritikus terhek hogyan kombinálódnak egymással, mert az (5.65) harmadfokú egyenlet

$$f(N) = N^3 + a_2 N^2 + a_1 N + a_0 = 0$$

automatikusan figyelembe veszi a kombinálódást. Az (5.67) képletek szerinti

$$\tau_x = \frac{x_c}{i_p} = \frac{11.92}{14.23} = 0.8377 \qquad \text{és} \qquad \tau_y = \frac{y_c}{i_p} = 0$$

paraméterek segítségével előállítjuk a harmadfokú egyenlet megoldásához szükséges együtthatókat

$$a_0 = \frac{-N_x N_y N_\varphi}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} = -\frac{7550\cdot 8509\cdot 136}{1-0.8377^2} = -\frac{8737041200}{0.2983} = -2.929\cdot 10^{10}$$

$$a_1 = \frac{N_x N_y + N_x N_\varphi + N_y N_\varphi}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} = \frac{7550\cdot 8509 + 7550\cdot 136 + 8509\cdot 136}{0.2983} = 2.227\cdot 10^8$$

$$a_2 = \frac{N_x\tau_x^2 + N_y\tau_y^2 - N_x - N_y - N_\varphi}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} = \frac{7550\cdot 0.8377^2 - 7550 - 8509 - 136}{0.2983} = -36530$$

és a harmadfokú egyenlet legkisebb gyöke megadja az épület kritikus terhét:

$$N_{kr} = 134.5\,\mathrm{MN}$$

Ennél a példánál a közelítő és a pontos eredmény között jelentéktelen a különbség.

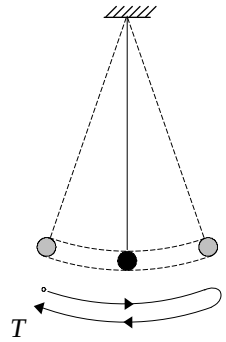
6

Merevítőrendszerek legkisebb sajátfrekvenciájának meghatározása

Az 1.3.2 pontban ahol az épületekre ható terhekkel foglalkoztunk, bemutattuk a földrengés-vizsgálatnál alkalmazható helyettesítő statikai módszert. Az eljárás ismertetése során fény derült arra, hogy a módszer „lelke” a β dinamikai tényező, ami valójában az épület legkisebb sajátfrekvenciája. A dinamikai tényező felvételére az 1.3.2 pontban két tapasztalati képletet adtunk meg, de jeleztük, hogy lehetséges és tanácsos a sajátfrekvenciát pontosabban meghatározni. Ebben a fejezetben egy olyan közelítő módszert ismertetünk, ami még nem túl bonyolult, de alkalmas a sajátfrekvencia jóval pontosabb meghatározására.

6.1 Alapfogalmak

A dinamikai vizsgálat során szakaszosan ismétlődő fizikai jelenségeket, rezgéseket vizsgálunk. Az egy rezgés megtételéhez szükséges időt rezgésidőnek, vagy periódusidőnek nevezzük (6.1 ábra). A rezgésidő jele T [sec].



6.1 ábra. A rezgésidő az egy rezgés megtételéhez szükséges idő.

Az egy másodperc alatt végzett rezgések számát frekvenciának vagy rezgésszámnak nevezzük. Jele f [Hz = 1/sec]. Szabad rezgésről akkor beszélünk, ha az erőhatás után a test tovább rezeg. A szabad rezgés rezgésszáma a sajátfrekvencia (saját rezgésszám). A sajátfrekvenciát az

$$f = \frac{1}{T} \tag{6.1}$$

képletből számíthatjuk ki.

A következőkben épületek sajátfrekvenciájának kiszámítására alkalmas módszert mutatunk be. A sajátfrekvencia értékének ismerete azért különösen fontos, mert a sajátfrekvencia az épület szeizmikus viselkedése jellemzésének talán legfontosabb tényezője.

6.2 A feladat differenciálegyenlet-rendszere

A stabilitásvizsgálathoz hasonlóan az épületet most is a nyírásközéppontban elhelyezkedő helyettesítő tartóval modellezzük és a vizsgálatot a helyettesítő tartón hajtjuk végre (6.2 ábra). A helyettesítő tartó egy *dz* elemi szakasza egyensúlyának vizsgálata most az

$$EI_y u''''(z,t) + \rho A[\ddot{u}(z,t) - y_c \ddot{\varphi}(z,t)] = 0 \tag{6.2a}$$

$$EI_x v''''(z,t) + \rho A[\ddot{v}(z,t) + x_c \ddot{\varphi}(z,t)] = 0 \tag{6.2b}$$

$$EI_\omega \varphi''''(z,t) - GJ\varphi''(z,t) + \rho A i_p^2 \ddot{\varphi}(z,t) + \rho A[x_c \ddot{v}(z,t) - y_c \ddot{u}(z,t)] = 0 \tag{6.2c}$$

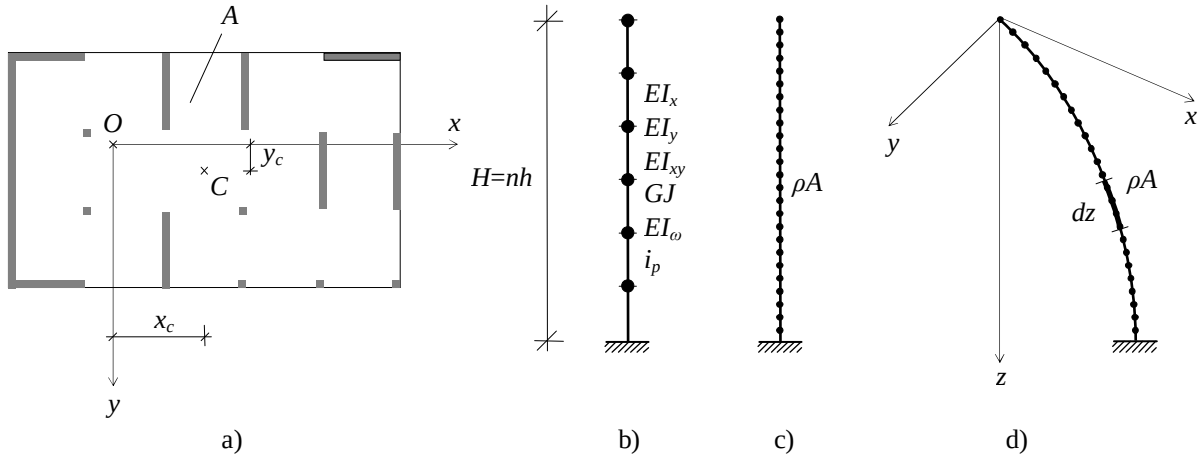
differenciálegyenlet-rendszerhez vezet, ahol a vesszők és a pontok a *z* és *t* (idő) szerinti differenciálást jelölik, és

A	az épületalaprajz területe,
$u(z,t)$, $v(z,t)$, $\varphi(z,t)$	a vízszintes és csavaró rezgések,
ρ	az épület térfogategységre jutó tömege, a

$$\rho = \frac{\gamma}{g} \tag{6.3}$$

összefüggés szerint, ahol

γ	az épület térfogategységre jutó súlya [kN/m^3],
g	a nehézségi gyorsulás [g = 9.81 m/s^2].



6.2 ábra. Épületmodell a rezgésvizsgálathoz. a) alaprajz, b) a helyettesítő tartó szintenként koncentrált tömegekkel, c) a helyettesítő tartó a magasság mentén elosztott tömeggel, d) kombinált síkbeli-csavarási rezgés.

A differenciálegyenletekhez tartozó (helyre vonatkozó) peremfeltételek azonosak a stabilitásvizsgálatnál felsorolt (5.21a-d) peremfeltételekkel. Az oszlop tetejéhez rögzített origójú koordinátarendszerben ezek a következők.

Az oszlop tetőpontjának eltolódása és elcsavarodása zérus:

$$u(0) = v(0) = \varphi(0) = 0 \tag{6.4a}$$

A befogási keresztmetszetnél az érintő függőleges és nem keletkezik öblösödés:

$$u'(H) = v'(H) = \varphi'(H) = 0 \tag{6.4b}$$

A tartó szabad végén a hajlítónyomatékok zérus értékűek és nem ébrednek öblösödési feszültségek:

$$u''(0) = v''(0) = \varphi''(0) = 0 \tag{6.4c}$$

A befogási keresztmetszetnél a nyíróerők és a csavarónyomatékok értéke zérus:

$$u'''(H) = v'''(H) = EI_\omega \varphi'''(H) - GJ\varphi'(H) = 0 \tag{6.4d}$$

Azon túlmenően hogy a peremfeltételek a stabilitási és dinamikai feladatnál azonosak, a két differenciálegyenlet-rendszer is rendkívüli hasonlóságot mutat. Ezek után nem meglepő, hogy a dinamikai probléma megoldása két lépésben, a stabilitásprobléma megoldásával azonos módon, állítható elő. Először meg kell határozni az alapesetek frekvenciáit, az *alapfrekvenciákat*, majd figyelembe kell venni az alapfrekvenciák kombinálódását.

6.3 Az alapfrekvenciák (alap rezgésszámok)

Az alapeseteket – a stabilitásvizsgálathoz hasonlóan – most is az $x_c = y_c = 0$ helyettesítéssel kapjuk a feladat differenciálegyenlet-rendszeréből, ebben az esetben a (6.2a), (6.2b) és (6.2c) egyenletekből. Az $u(z,t)$, $v(z,t)$ és $\varphi(z,t)$ változókat utána szétválasztjuk egy időtől és egy távolságtól függő tagra – az u esetében például $u(z,t) = u_1(z)u_2(t)$ – és kiejtjük az időtől függő tagokat. Ily módon eljárva, a differenciálegyenlet-rendszer az

$$EI_y u_1''''(z) + \rho A \omega_x^2 u_1(z) = 0 \tag{6.5}$$

$$EI_x v_1''''(z) + \rho A \omega_y^2 v_1(z) = 0 \tag{6.6}$$

$$EI_\omega \varphi_1''''(z) - GJ\varphi_1''(z) + \rho A i_p^2 \omega_\varphi^2 \varphi_1(z) = 0 \tag{6.7}$$

független differenciálegyenletekre esik szét, melyek megoldása szolgáltatja a keresett alapfrekvenciákat. A (6.5), (6.6) és (6.7) egyenletekben az $u_1(z)$, $v_1(z)$ és $\varphi_1(z)$ a vízszintes és csavaró rezgéseket jellemzi és ω_x, ω_y és ω_φ a körfrekvenciák az

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{6.8}$$

összefüggés szerint.

Az x irányú síkbeli rezgések vizsgálatához a megoldást az

$$u_1(z) = c_1 \sin bz + c_2 \cos bz + c_3 \sinh bz + c_4 \cosh bz \tag{6.9}$$

alakban keressük, ahol

$$b = \sqrt[4]{\frac{\omega_x \rho A}{EI_y}} \tag{6.10}$$

A megoldásfüggvényt és negyedik deriváltját a (6.5) differenciálegyenletbe behelyettesítve és a vonatkozó peremfeltételeket felhasználva az *x* irányú síkbeli rezgések legkisebb sajátfrekvenciájára az

$$f_x = \frac{0.56 r_f}{H^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} \tag{6.11}$$

összefüggést kapjuk. Itt bevezettük az r_f redukciós tényezőt, ami figyelembe veszi hogy az épület tömege nem egyenletesen megoszló a magasság mentén mint azt a 6.2/c-d ábrán vázolt modellünk feltünteti, hanem a födémeken koncentráltan jelentkezik (6.2/b ábra). Az r_f redukciós tényező értékeit – amelyeket a stabilitásvizsgálatnál az 5.3.6 pontban részletezett eljáráshoz hasonlóan lehet a Dunkerley-tétellel meghatározni – a 6.1 táblázatban és a 6.3 ábrán adjuk meg.

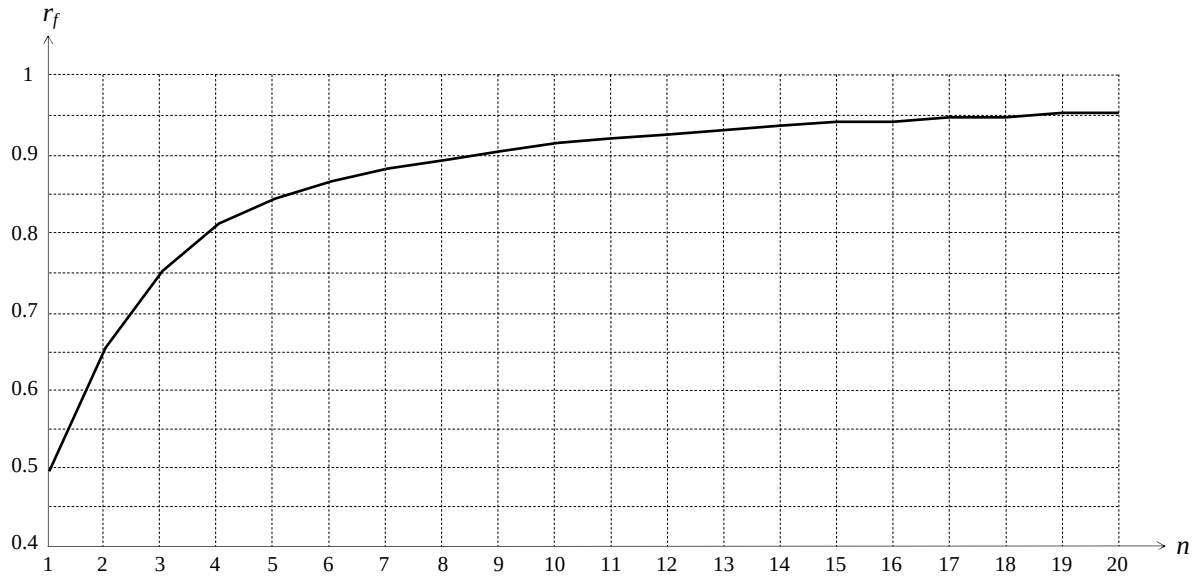
Az *y* irányú síkbeli rezgések vizsgálata a fentiekkel azonos módon történik és a (6.6) differenciálegyenlet megoldása után a sajátfrekvenciára az

$$f_y = \frac{0.56 r_f}{H^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}} \tag{6.12}$$

képletet kapjuk.

6.1 táblázat. Az r_f redukciós tényező értékei az *n* szintszám függvényében.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_f	0.493	0.653	0.770	0.812	0.842	0.863	0.879	0.892	0.902	0.911	0.918
n	12	13	14	15	16	18	20	25	30	50	>50
r_f	0.924	0.929	0.934	0.938	0.941	0.947	0.952	0.961	0.967	0.980	$\sqrt{n/(n+2.06)}$



6.3 ábra. Az r_f redukciós tényező az *n* szintszám függvényében.

A tiszta csavaró rezgések sajátfrekvenciáját a (6.7) differenciálegyenlet megoldása szolgáltatja. A megoldást a

$$\varphi_1(z) = c_1 \sinh \alpha z + c_2 \cosh \alpha z + c_3 \sin \beta z + c_4 \cos \beta z \tag{6.13}$$

függvény formájában keressük, ahol

$$\alpha = \sqrt{\frac{GJ + \sqrt{(GJ)^2 + 4EI_\omega \rho A i_p^2 \omega^2}}{2EI_\omega}} \qquad \text{és} \qquad \beta = \sqrt{\frac{-GJ + \sqrt{(GJ)^2 + 4EI_\omega \rho A i_p^2 \omega^2}}{2EI_\omega}} \tag{6.14}$$

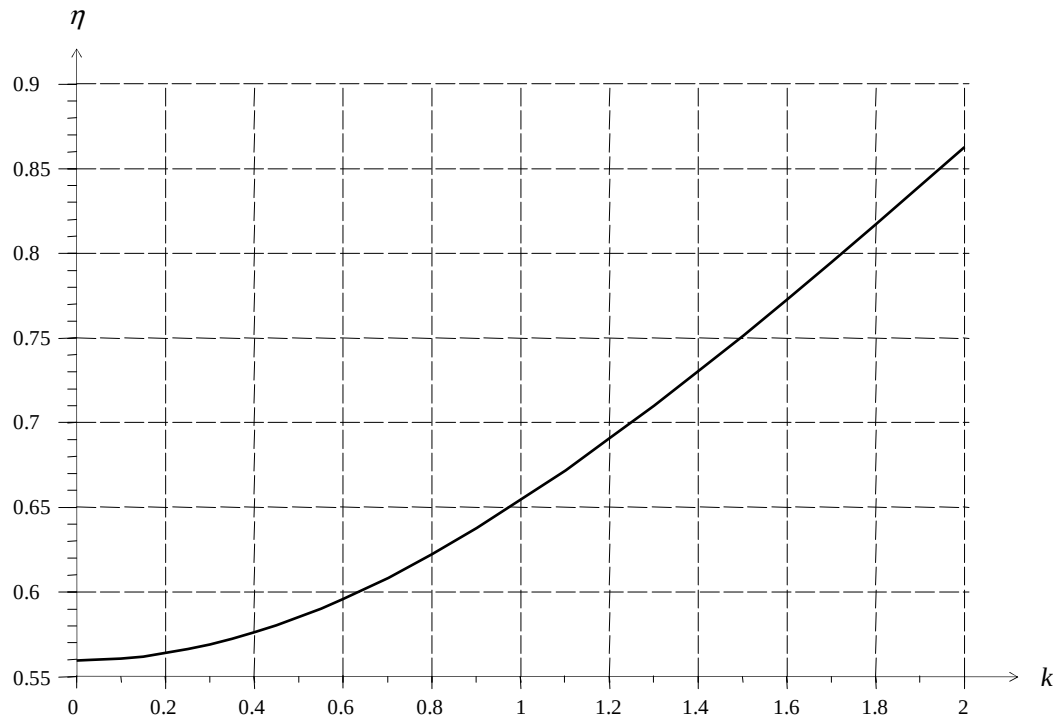
Itt a helyzetet jelentősen bonyolítja, hogy a sajátfrekvencia – a síkbeli esettel ellentétben – két merevségtől, a *GJ* tiszta csavarási merevségtől és az EI_ω öblösödési csavarási merevségtől is függ. A megoldásfüggvényt és deriváltjait a (6.7) differenciálegyenletbe behelyettesítve és a vonatkozó peremfeltételeket figyelembe véve – hosszadalmas rendezés után – a megoldás az előző fejezetben már bevezetett *k* csavarási tényező bevezetésével zárt alakban előállítható:

$$f_\varphi = \frac{\eta r_f}{i_p H^2} \sqrt{\frac{EI_\omega}{\rho A}} \tag{6.15}$$

A számlálóban szereplő η frekvenciatényező értékeit a

$$k = H \sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}} \tag{6.16}$$

csavarási tényező függvényében a (6.4) ábrán és a 6.2 táblázatban adjuk meg.



6.4 ábra. Az $\eta(k)$ frekvenciatényező értékei a tiszta csavarási rezgéshez a *k* csavarási tényező függvényében.

6.2 táblázat. Az $\eta(k)$ frekvenciatényező értékei a tiszta csavarási rezgéshez.

k	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
η	0.56	0.581	0.654	0.751	0.863	1.1	1.34	1.59	1.83	2.07	2.31	2.56	2.8
k	12	14	16	18	20	30	40	50	100	200	500	1000	> 1000
η	3.3	3.79	4.28	4.78	5.28	7.77	10.3	12.8	25.3	50.3	125	250	k/4

6.4 Az alapfrekvenciák kombinálódása

A három alapfrekvencia ismeretében most már meghatározhatjuk az épület legkisebb sajátfrekvenciáját. Ha a merevítőrendszer kétszeresen szimmetrikus, akkor a két síkbeli rezgés és a tiszta csavarási rezgés egymástól függetlenül jöhet létre és a három alapfrekvencia független egymástól. Ekkor a három alapfrekvencia közül a legkisebb az épület sajátfrekvenciája. Ha a merevítőrendszer nem rendelkezik kétszeres szimmetriával, akkor az alapfrekvenciák kombinálódnak és ezt a kombinálódást figyelembe kell venni, mert az épület sajátfrekvenciája mindhárom alapfrekvenciánál kisebb lesz. Legkedvezőtlenebb esetben a kombinálódás 55%-al csökkentheti a sajátfrekvenciát.

A kombinálódás figyelembevételére két lehetőségünk van. Figyelembe vehetjük közelítően a Föppl-Papkovics tétel segítségével, vagy pontosabban. A Föppl-Papkovics-féle közelítő számításhoz vesszük a korábban már meghatározott f_x, f_y és f_φ alapfrekvenciákat és a (4.10) képlet alkalmazásával az

$$\frac{1}{f^2} \le \frac{1}{f_x^2} + \frac{1}{f_y^2} + \frac{1}{f_\varphi^2} \tag{6.17}$$

képletből kiszámítjuk az épület f sajátfrekvenciáját. (Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a frekvenciaszámításnál a frekvenciák négyzetével kell dolgozni az összegzési tételek alkalmazásakor.) Ez a számítás egyszerű és gyors és a biztonság javára való közelítéssel szolgáltatja a sajátfrekvencia értékét. A képlet hiba-tartománya (eltérése a pontos értéktől): 0–42%.

A kombinálódást a (6.17) képletnél pontosabban is figyelembe vehetjük. Erre az (5.43) harmadfokú egyenlethez hasonló

$$f(f) = (f^2)^3 + a_2 (f^2)^2 + a_1 f^2 + a_0 = 0 \tag{6.18}$$

egyenlet ad lehetőséget. A legkisebb sajátfrekvenciát az $f(f)$ függvény legkisebb gyöke adja. Az egyenlet megoldásához szükséges együtthatók:

$$a_2 = \frac{f_x^2 \tau_x^2 + f_y^2 \tau_y^2 - f_x^2 - f_y^2 - f_\varphi^2}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2}, \quad a_1 = \frac{f_x^2 f_y^2 + f_x^2 f_\varphi^2 + f_y^2 f_\varphi^2}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2}, \quad a_0 = \frac{- f_x^2 f_y^2 f_\varphi^2}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2} \tag{6.19}$$

ahol

$$\tau_x = \frac{x_c}{i_p} \qquad \text{és} \qquad \tau_y = \frac{y_c}{i_p} \tag{6.20}$$

Ez az eljárás nagyon hasonló a stabilitásvizsgálatnál alkalmazott módszerhez, de amíg ott az (5.43) egyenlet megoldása a pontos megoldást jelentette, addig most a (6.18) egyenlet

megoldása a sajátfrekvencia közelítő értékét adja. A közelítés hiba-tartománya 0–2%, ami jóval pontosabb megoldást jelent mint a Föppl-Papkovics-féle (6.17) képlet.

6.5 Összefoglalás

A fenti eredményekből levonható tanulságok nagyon hasonlóak a stabilitásvizsgálatnál az 5.3.5 pontban tett megállapításokhoz.

Az egyenletes tömegelosztású épületek sajátfrekvenciája alapvetően két dologtól függ:

– Az f_x, f_y és f_φ alapfrekvenciák értékétől
– Az alapfrekvenciák kombinálódásától

Az alapfrekvenciák értékét befolyásoló tényezők:

• Síkbeli rezgés – f_x és f_y
  – az alapfrekvencia nagysága √-ös arányban van a hajlítási merevséggel (EI_y vagy EI_x)
  – az alapfrekvencia nagysága fordítottan arányos a magasság négyzetével
  – az alapfrekvencia nagyságát nem befolyásolja a merevítőelemek helye
  – az alapfrekvencia nagysága fordított és √-ös arányban van az épület tömegével

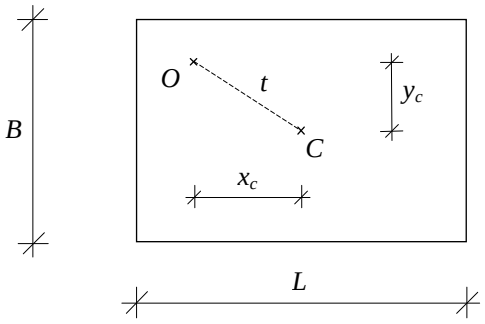
• Tiszta csavaró rezgés – f_φ
  – az alapfrekvencia nagysága √-ös arányban van a csavarási merevségekkel (EI_ω és GJ)
  – az alapfrekvencia nagysága fordítottan arányos a magasság négyzetével
  – az alapfrekvencia nagysága fordított és √-ös arányban van az épület tömegével
  – az alapfrekvencia nagysága fordított és √-ös arányban van az alaprajz méreteinek (L és B) négyzetével:

    a (2.10)-ből: $i_p = \sqrt{\dfrac{L^2 + B^2}{12} + t^2}$

  – az alapfrekvencia nagysága „nagyon” függ a merevítőelemek helyétől (x_i, y_i):

    a (2.6)-ból: $EI_\omega = E\sum_1^n (I_{\omega,i} + I_{x,i}x_i^2 + I_{y,i}y_i^2 - 2I_{xy,i}x_i y_i)$

• Az alapfrekvenciák kombinálódását alapvetően a nyírásközéppont és geometriai középpont t távolsága határozza meg (6.5 ábra).



C: geometriai középpont
O: nyírásközéppont

6.5 ábra. A kombinálódást alapvetően befolyásoló t távolság.

Az épület sajátfrekvenciája (f) növelésének lehetőségei:

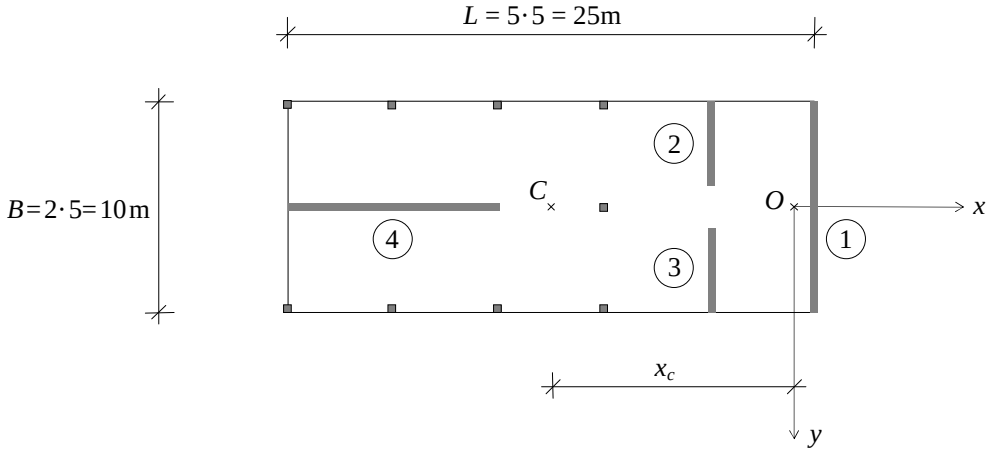
– a merevségek (I_x, I_y, I_{xy}, J, I_ω) növelése (lehetőleg arányosan)
– a merevítőelemek nyírásközépponttól mért merőleges távolságának (x_i, y_i) növelése
– a magasság (H) és az alaprajzi méretek (L és B) csökkentése
– a nyírásközéppont és geometriai középpont közötti távolság (t) csökkentése
– az épület tömegének (ρ) csökkentése

A legoptimálisabb eset az, amikor az alapfrekvenciák közel azonos nagyságúak és a nyírásközéppont és geometriai középpont távolsága kicsi, lehetőleg zérus, vagyis amikor

$$f_x \approx f_y \approx f_\varphi \qquad \text{és} \qquad t \approx 0 \tag{6.21}$$

6.6 Számpélda

Határozzuk meg a 6.6 ábrán alaprajzával vázolt Ép1 jelű hétszintes épület legkisebb saját-frekvenciáját egyenletesen megoszló födémteher feltételezésével. Az épület térfogategységre jutó súlya $\gamma = 2.5$ kN/m^3. A merevítőfalak anyagának rugalmassági tényezője $E = 25$ kN/mm^2, a nyírási rugalmassági tényező értéke $G = 10$ kN/mm^2.



6.6 ábra. Ép1 jelű épület a legkisebb sajátfrekvencia számításához.

A 2.4 pontban ennek az épületnek már előállítottuk a helyettesítő tartóját. Az ottani számítás eredményeit a 6.3 táblázatban foglaljuk össze.

6.3 táblázat. Az Ép1 jelű épület alapadatai.

Elem	$I_{x,i}$ [m^4]	$I_{y,i}$ [m^4]	J_i [m^4]	x_i [m]	y_i [m]	I_ω [m^6]	i_p [m]
1	20.83	0.013	0.052	0.578	0		
2	1.33	0.005	0.021	-4.42	-3		
3	1.33	0.005	0.021	-4.42	3		
4	0.013	20.83	0.052	-19.42	0		
Σ	$\boldsymbol{I_x}$=23.50	$\boldsymbol{I_y}$=20.85	$\boldsymbol{J}$=0.146			$\boldsymbol{I_\omega}$=64.0	$\boldsymbol{i_p}$=14.23

A frekvenciaszámítás első lépése a rezgések alapfrekvenciáinak előállítása. A síkbeli rezgések frekvenciáját a (6.11) és (6.12) képletek adják meg:

$$f_x = \frac{0.56 r_f}{H^2}\sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} = \frac{0.56 \cdot 0.879}{21^2}\sqrt{\frac{25 \cdot 10^6 \cdot 20.85}{\frac{2.5}{9.81} 25 \cdot 10}} = 3.19\,\text{Hz}$$

és

$$f_y = \frac{0.56 r_f}{H^2}\sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}} = \frac{0.56 \cdot 0.879}{21^2}\sqrt{\frac{25 \cdot 10^6 \cdot 23.5}{\frac{2.5}{9.81}25 \cdot 10}} = 3.39\,\text{Hz}$$

ahol az $r_f = 0.879$ tényező értékét a 6.1 táblázatból vettük.

A tiszta csavaró rezgés alapfrekvenciájának meghatározásához szükség van a k csavarási tényező (6.16) szerinti értékére:

$$k = H\sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}} = 21\sqrt{\frac{10000 \cdot 0.146}{25000 \cdot 64}} = 0.63$$

A k csavarási tényező függvényében a 6.4 ábra diagramjáról (vagy a 6.2 táblázatból) megkapjuk az η frekvenciatényezőt:

$$\eta(k = 0.63) = 0.6$$

Az η frekvenciatényezővel a tiszta csavaró rezgés frekvenciája a (6.15) képletből számítható ki:

$$f_\varphi = \frac{\eta r_f}{i_p H^2}\sqrt{\frac{EI_\omega}{\rho A}} = \frac{0.6 \cdot 0.879}{14.23 \cdot 21^2}\sqrt{\frac{25 \cdot 10^6 \cdot 64}{\frac{2.5}{9.81}25 \cdot 10}} = 0.421\,\text{Hz}$$

Végül figyelembe vesszük az alapfrekvenciák kombinálódását. Itt két lehetőség van: a) a kombinálódás Föppl-Papkovics-féle közelítő figyelembevétele, illetve b) a pontosabb megoldás.

a) a kombinálódás Föppl-Papkovics-féle közelítő figyelembevétele

Az alaprajz geometriai középpontja (az épület tömegközéppontja) az x tehetetlenségi főtengelyre esik. Ez azt jelenti, hogy az y irányú rezgés kombinálódik a tiszta csavaró rezgéssel ($f_{y\varphi}$), az x irányú rezgés pedig függetlenül jön létre (f_x). A két frekvencia közül a kisebbik az épület legkisebb sajátfrekvenciája.

A kombinált rezgés értékére a (6.17) összefüggés kéttagú változatának

$$\frac{1}{f_{y\varphi}^2} \le \frac{1}{f_y^2} + \frac{1}{f_\varphi^2} = \frac{1}{3.39^2} + \frac{1}{0.421^2}$$

alkalmazásával

$$f_{y\varphi} = 0.418\,\text{Hz}$$

adódik. Ez az érték kisebb, mint az x irányú rezgés frekvenciája (3.19 Hz), így az épület sajátfrekvenciája

$$f = 0.418\ \text{Hz}$$

b) a pontosabb megoldás

A pontosabb megoldás alkalmazásánál nem kell nézni, hogy az alapfrekvenciák hogyan kombinálódnak egymással, mert a (6.18) harmadfokú egyenlet

$$f(f) = (f^2)^3 + a_2(f^2)^2 + a_1 f^2 + a_0 = 0$$

automatikusan figyelembe veszi a kombinálódást. A (6.20) képletek szerinti

$$\tau_x = \frac{x_c}{i_p} = \frac{11.92}{14.23} = 0.8377 \qquad \text{és} \qquad \tau_y = \frac{y_c}{i_p} = 0$$

paraméterek segítségével előállítjuk a harmadfokú egyenlet megoldásához szükséges együtthatókat

$$a_0 = \frac{-f_x^2 f_y^2 f_\varphi^2}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} = -\frac{3.19^2 \cdot 3.39^2 \cdot 0.421^2}{1-0.8377^2} = -69.48$$

$$a_1 = \frac{f_x^2 f_y^2 + f_x^2 f_\varphi^2 + f_y^2 f_\varphi^2}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} = \frac{3.19^2 \cdot 3.39^2 + 3.19^2 \cdot 0.421^2 + 3.39^2 \cdot 0.421^2}{0.2983} = 405$$

$$a_2 = \frac{f_x^2\tau_x^2 + f_y^2\tau_y^2 - f_x^2 - f_y^2 - f_\varphi^2}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} = \frac{3.19^2 \cdot 0.8377^2 - 3.19^2 - 3.39^2 - 0.421^2}{0.2983} = -49.3$$

és a harmadfokú egyenlet legkisebb gyöke megadja az épület legkisebb sajátfrekvenciáját:

$$f = 0.419\,\text{Hz}$$

6.7 Szerkesztési szabályok földrengésveszélyes zónában épülő szerkezetekhez

A fent bemutatott módszerrel meghatározott sajátfrekvencia az 1.3.2 pontban ismertetett Helyettesítő Statikai Módszer alkalmazásához használható fel az egyszerűsített szeizmikus vizsgálat során.

Földrengésveszélyes zónákban épülő szerkezetek tervezésénél és kivitelezésénél az alábbiakban felsorolt szerkesztési szabályokat is célszerű figyelembe venni, illetve betartani:

- 4-es zónában 4 emeletnél magasabb falazott épületet ne építsünk
- 3-4-es zónában lehetőleg szabályos elrendezésre törekedjünk; kerüljük az L, T alakú épületalaprajzokat (a csavarás miatt)
- Az alapozási sík ne ugráljon
- Az alaptestek legyenek összekötve
- Falazott épületnél mindig legyen körbemenő vasalt koszorú
- A fafödémeket a koszorúhoz le kell kötni
- Falazott épületekben lehetőleg kerüljük a boltíveket; ha elkerülhetetlen, alkalmazzunk vonóvasat
- A födém tárcsaszerűen működjön
- A dilatációt szerkezetkettőzéssel (ne konzollal) oldjuk meg
- A vasbeton oszlopokat nyíróerőre méretezett kengyelezéssel kell ellátni – minimális kengyelezés nem elég! $A_{\text{hosszvas}} \leq 2\%$ legyen
- Az előregyártott szerkezetek csomópontjait méretezett vasalással kell ellátni
- Ügyelni kell a jó kibetonozhatóságra; jó betonminőséget kell előírni; biztosítani kell a jó minőségű, gondos kivitelezést

7

Globális biztonsági tényező

Az épület kritikus terhének ismeretében definiálható a kritikus teher és az épületre ható teljes függőleges teher hányadosa, mint az épület globális biztonsági tényezője. Az épület merevítőrendszerét célszerű úgy kialakítani, hogy a globális biztonsági tényező értéke legalább 10 legyen:

$$\frac{N_{kr}}{N} \geq 10 \tag{7.1}$$

A fenti koncepció az Eurocode több fejezetében megtalálható, de az Eurocode nem a globális biztonsági tényezőt, hanem annak reciprokát használja. Ennek megfelelően az Eurocode [2003] ajánlása:

$$\frac{N}{N_{kr}} \leq 0.1 \tag{7.2}$$

Ha a (7.1) – illetve az Eurocode szellemében a (7.2) – feltétel teljesül, akkor a függőleges teherviselő elemek megtámasztottnak tekinthetők. A másodrendű hatások (nagy alakváltozások) elhanyagolása ekkor maximum 10% hibát eredményezhet. Ez a hiba – figyelembe véve a terhekkel, anyagokkal, merevségekkel, stb. kapcsolatos egyéb elhanyagolásokat – elfogadható a gyakorlati számítások során.

Az épület teljes függőleges terhét részletes súlyelemzés segítségével kell meghatározni. Becslés céljából gyors közelítő eredményt kaphatunk az

$$N = QAn \tag{7.3}$$

képlet alkalmazásával, ahol Q [kN/m^2] az átlagos födémteher-intenzitás, A a födémterület és n a szintek száma. Az átlagos födémteher-intenzitás tartalmazza a függőleges szerkezetek becsült súlyát is.

Ha a (7.1) – illetve az Eurocode szellemében a (7.2) – feltétel nem teljesül, akkor az épület még mindig megfelelőnek nyilvánítható, de ilyen esetekben a stabil egyensúlyt valamely pontosabb módszerrel – amely a másodrendű hatásokat is figyelembe veszi – kell igazolni.

A gyakorlati szerkezettervezésben van azonban egy a globális biztonságra vonatkozó „ökölszabály”: soha ne fogadjunk el egy olyan merevítőrendszert, ami az

$$\frac{N_{kr}}{N} \geq 4 \tag{7.4}$$

illetve az Eurocode szerinti

$$\frac{N}{N_{kr}} \leq 0.25 \tag{7.5}$$

feltételt nem teljesíti.

A (7.1) képlettel megadott globális biztonsági tényező értéke (10) túlságosan nagynak tűnhet az eddigi tanulmányaink során megszokott értékekhez képest, de ez a szám valójában egy névleges biztonságot takar, hiszen a merevségek figyelembevételénél a névleges értékekkel számoltunk. Ezenkívül hangsúlyozni kell azt is, hogy ez egy ajánlás, amelynek teljesülése azt jelzi, hogy a másodrendű hatások figyelembevétele nélkül is biztosítható az épület kellő merevsége.

Az épület biztonsági tényezője – azon kívül hogy számszerű információt ad az épület biztonságáról – lehetőséget nyújt arra is, hogy segítségével jellemezzük a merevítőrendszer hatékonyságát és optimális merevítőrendszer-elrendezést keressünk. Ezt a lehetőséget a következő példasorozaton mutatjuk meg.

7.1 Számpéldák

Tekintsünk egy nyolcszintes épületet, aminek a merevítésére négy azonos (0.2 m×5 m) méretű merevítőfal áll a rendelkezésünkre. Feladatunk optimális merevítőrendszer kialakítása. Meg fogjuk vizsgálni az épület stabilitását, meghatározzuk a legkisebb sajátfrekvenciát és az épület maximális eltolódásait szélteher hatására.

Az épület $L = 24$ m és $B = 15$ m alaprajzi méretekkel rendelkezik. Az x és y irányú raszter-méret 6 és 5 méter. A függőleges teherviselő elemek a négy merevítőfal és a raszterhálózat metszéspontjaiban lévő oszlopok (amelyeket a merevítőrendszer vizsgálata során a nagyságrendekkel kisebb merevségük miatt a falak mellett elhanyagolunk). A rugalmassági tényező és a nyírási rugalmassági tényező $E = 2\times10^4$ MN/m^2 és $G = 8.33\times10^3$ MN/m^2. Az emeletmagasság 3.0 m és így az épület magassága $H = 24$ m. Az épület térfogategységre vonatkoztatott súlya (a sajátfrekvencia meghatározásához) $\gamma = 2.50$ kN/m^3.

Az épület függőleges terhe legyen a födémeken egyenletesen megoszló teher, $Q = 8$ kN/m^2 intenzitással. Az egyenletesen megoszlónak feltételezett szélteher intenzitása $w = 28.0$ kN/m, ami az x tengellyel 50°-ot zár be. Az x és y irányú vetületek így

$$w_x = -28.0\times\cos50° = -18.0 \text{ kN/m}$$

$$w_y = -28.0\times\sin50° = -21.45 \text{ kN/m}$$

A globális szélteher értéke

$$F = 28 \cdot 24 = 672 \text{ kN}$$

amelynek a komponensei:

$$F_x = -18 \cdot 24 = -432 \text{ kN}$$

és

$$F_y = -21.45 \cdot 24 = -514.8 \text{ kN}$$

A következőkben három különböző merevítőrendszer-elrendezést vizsgálunk meg, majd összehasonlítjuk a három rendszer viselkedését.

7.1.1 „A” elrendezés: egy elfogadhatatlan merevítőrendszer

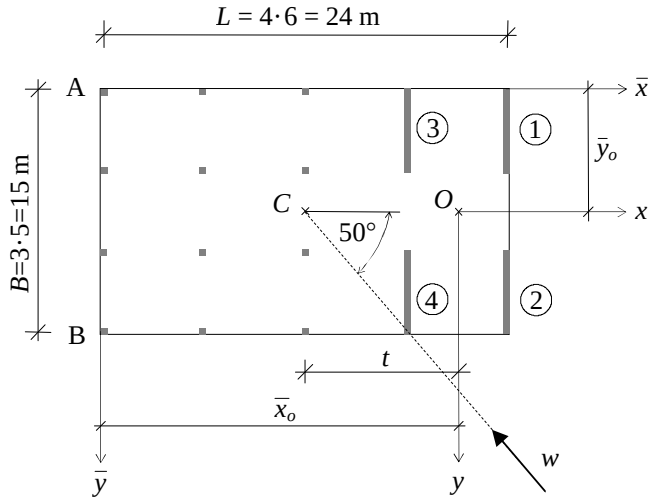
Ennél az elrendezésnél mind a négy falat az épület jobboldali részében helyezzük el, a 7.1/a ábrán vázolt elrendezésben. A 7.1/b ábra a négy merevítőfal adatait mutatja.

Mivel a helyettesítő tartót a merevítőrendszer nyírásközéppontjába kell elhelyezni, első lépés a nyírásközéppont koordinátáinak meghatározása. A két koordinátát az épületet közrefogó $\bar{x}-\bar{y}$ koordinátarendszerben a (2.3) képletek adják meg:

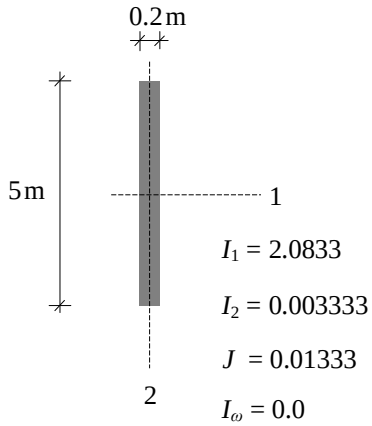
$$\bar{x}_o = \frac{2.0833(18+18+24+24)}{8.3333} = 21.0 \text{ m}$$

$$\bar{y}_o = \frac{0.0033(2.5+2.5+12.5+12.5)}{0.01333} = 7.5 \text{ m}$$

Ebben az egyszerű esetben – számítás nélkül – mérnöki szemlélettel is meghatározható a nyírásközéppont helyzete: a szimmetrikusan elhelyezkedő négy fal merevségének a súlypontja és a négy fal geometriai középpontja azonos.



a) „A” elrendezés



b) a merevítőfalak adatai

7.1 ábra. Nyolcszintes épület.

A helyettesítő tartó geometriai és merevségi jellemzőit a (2.4) és (2.5) összefüggések segítségével határozzuk meg és a 7.1 táblázatban foglaljuk össze.

A nyírásközéppont helyének ismeretében az öblösödési csavarási tehetetlenségi nyomaték értékét az új *x-y* koordinátarendszerben a (2.6) képlet szolgáltatja:

$$I_\omega = \sum_{i=1}^{n} (I_{\omega,i} + I_{x,i}x_i^2 + I_{y,i}y_i^2 - 2I_{xy,i}x_i y_i) = 75.33 \text{ m}^6$$

A számítás részleteit a 7.1 táblázat tartalmazza, ahol x_i és y_i a merevítőfalak nyírásközéppontjainak távolsága a merevítőrendszer nyírásközéppontjától az *x-y* koordinátarendszerben.

7.1 táblázat. Geometriai és merevségi jellemzők az „A” elrendezéshez.

Elem	$\bar{x}_i$ [m]	$\bar{y}_i$ [m]	$I_{x,i}$ [m^4]	$I_{y,i}$ [m^4]	x_i [m]	y_i [m]	$I_{x,i}x_i^2$	$I_{y,i}y_i^2$	$I_{\omega,i}$ [m^6]	J_i [m^4]
1	24	2.5	2.0833	0.00333	3	-5	18.75	0.08	0	0.01333
2	24	12.5	2.0833	0.00333	3	5	18.75	0.08	0	0.01333
3	18	2.5	2.0833	0.00333	-3	-5	18.75	0.08	0	0.01333
4	18	12.5	2.0833	0.00333	-3	5	18.75	0.08	0	0.01333
Σ			8.3333	0.01333			75.00	0.33	75.33	0.0533

A (2.9) képletek segítségével meg kell határozni az épület geometriai középpontjának a koordinátáit a nyírásközéppont origójú *x*-*y* koordinátarendszerben:

$$x_c = \frac{L}{2} - \bar{x}_o = 12 - 21 = -9 \text{ m}, \qquad y_c = \frac{B}{2} - \bar{y}_o = 7.5 - 7.5 = 0$$

A (2.8) összefüggés megadja az *O* nyírásközéppont és a *C* geometriai középpont távolságát:

$$t = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = 9.0 \text{ m}$$

amivel a poláris tehetetlenségi sugár értéke a (2.10) képletből már kiszámítható:

$$i_p = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} = \sqrt{\frac{24^2 + 15^2}{12} + 9^2} = \sqrt{147.75} = 12.16 \text{ m}$$

Ezzel előállítottuk a helyettesítő tartót. A következő pontban meghatározzuk az épület kritikus terhét és a biztonsági tényezőt.

Kritikus teher

A síkbeli kihajlás alap kritikus terheit egyenletesen megoszló födémteherre az (5.50) képletek adják meg:

$$N_{kr,x} = \frac{7.837 r_s E I_y}{H^2} = \frac{7.837 \times 0.834 \times 2 \times 10^4 \times 0.0133}{24^2} = 3.0 \text{ MN}$$

$$N_{kr,y} = \frac{7.837 r_s E I_x}{H^2} = \frac{7.837 \times 0.834 \times 2 \times 10^4 \times 8.333}{24^2} = 1892 \text{ MN}$$

ahol az r_s (0.834) redukciós tényező értékét az 5.1 táblázatból kaptuk.

A tiszta elcsavarodó kihajlás kritikus terhének meghatározásához szükség van a *k* csavarási tényező értékére, amit az (5.62) képletből számíthatunk ki:

$$k = H\sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}} = 24\sqrt{\frac{8.33 \times 10^3 \times 0.0533}{2 \times 10^4 \times 75.33}} = 0.412$$

A *k* fenti értékével a k_s tényező az (5.61) képletből kapható:

$$k_s = \frac{k}{\sqrt{r_s}} = \frac{0.412}{\sqrt{0.834}} = 0.451$$

A kritikus teherparaméter értékét a k_s tényező függvényében az 5.11 ábra diagramjáról (vagy az 5.2 táblázatból) kapjuk meg:

$$\alpha = 8.49$$

A kritikus teherparaméterrel a tiszta elcsavarodó kihajlás alap kritikus terhe az (5.63) képletből már kiszámítható:

$$N_{kr,\varphi} = \frac{\alpha r_s EI_\omega}{i_p^2 H^2} = \frac{8.49 \times 0.834 \times 2 \times 10^4 \times 75.33}{147.75 \times 24^2} = 125.4 \text{ MN}$$

Az alap kritikus terhek között létrejövő kombinálódást az (5.65) harmadfokú egyenlettel vesszük figyelembe. A számításhoz szükséges tényezőket és együtthatókat az (5.67) és (5.66) képletek segítségével határozzuk meg:

$$\tau_x = \frac{x_c}{i_p} = \frac{9.0}{12.16} = 0.74, \qquad \tau_y = \frac{y_c}{i_p} = \frac{0.0}{12.16} = 0.0$$

$$a_0 = -\frac{N_x N_y N_\varphi}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2} = -\frac{3 \times 1892 \times 125.4}{1 - 0.74^2} = -1572743$$

$$a_1 = \frac{N_x N_y + N_x N_\varphi + N_\varphi N_y}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2} = \frac{3 \times 1892 + 125.4 \times 3 + 125.4 \times 1892}{1 - 0.74^2} = 537631$$

$$a_2 = \frac{N_x \tau_x^2 + N_y \tau_y^2 - N_\varphi - N_x - N_y}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2} = \frac{3 \times 0.74^2 - 125.4 - 3 - 1892}{1 - 0.74^2} = -4464$$

A fenti együtthatók felhasználásával az épület kritikus terhét az

$$N^3 - 4464N^2 + 537631N - 1572743 = 0$$

harmadfokú egyenlet legkisebb gyöke adja:

$$N_1 = N_{kr} = 3.0 \text{ MN}$$

Ebben a speciális esetben (amikor a nyírásközéppont az x tengelyen van), ugyanerre az eredményre juthatunk számítás nélkül is. A 2.3 pontban elmondottak és az 5.2.3 pontban vizsgált egyszeresen szimmetrikus merevítőrendszernél tapasztaltak szerint a kombinálódás az $N_{kr,y} = 1892$ és $N_{kr,\varphi} = 124.8$ kritikus alapterhek között jön létre. A kritikus teher a kombinálódó $N_{kr,y}$ és $N_{kr,\varphi}$ valamint a független $N_{kr,x}$ közül a kisebbik, ami ebben az esetben nyilvánvalóan

$$N_{kr} = N_{kr,x} = 3.0 \text{ MN}$$

Az épület teljes terhe a (7.3) képlet szerint:

$$N = QAn = 0.008 \cdot 24 \cdot 15 \cdot 8 = 23.04\,\text{MN}$$

A globális biztonsági tényező (a 7.1 összefüggés szerint)

$$\frac{N_{kr}}{N} = \frac{3}{23.04} = 0.13$$

ami egy instabil, teljesen elfogadhatatlan merevítőrendszert jelent. Ennek az az oka, hogy az épület *x* irányban gyakorlatilag nem rendelkezik merevséggel – amit az $N_{kr,y}$ és $N_{kr,\varphi}$ kritikus alapterhekhez viszonyítva rendkívül kis értékű $N_{kr,x}$ is mutat.

Számítsuk ki azért az épület sajátfrekvenciáját és határozzuk meg az alakváltozásokat is, abból a célból, hogy később a különböző elrendezésű merevítőrendszerek viselkedését össze tudjuk hasonlítani.

Sajátfrekvencia

A síkbeli rezgések sajátfrekvenciáit a (6.11) és (6.12) képletekből számíthatjuk ki:

$$f_x = \frac{0.56 r_f}{H^2}\sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} = \frac{0.56 \times 0.892}{24^2}\sqrt{\frac{2\times10^7 \times 0.0133 \times 9.81}{2.5 \times 24 \times 15}} = 0.047\ \text{Hz}$$

és

$$f_y = \frac{0.56 r_f}{H^2}\sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}} = \frac{0.56 \times 0.892}{24^2}\sqrt{\frac{2\times10^7 \times 8.3333 \times 9.81}{2.5 \times 24 \times 15}} = 1.169\ \text{Hz}$$

ahol az r_f (0.892) redukciós tényező értéke a 6.1 táblázatból származik.

A frekvenciatényező értékét a *k* csavarási tényező függvényében a 6.4 ábra diagramjáról (vagy a 6.2 táblázatból) kapjuk:

$$\eta = 0.577$$

A tiszta csavaró rezgés frekvenciáját a (6.15) képlet szolgáltatja:

$$f_\varphi = \frac{\eta r_f}{i_p H^2}\sqrt{\frac{EI_\omega}{\rho A}} = \frac{0.577 \times 0.892}{12.16 \times 24^2}\sqrt{\frac{2\times10^7 \times 75.33 \times 9.81}{2.5 \times 24 \times 15}} = 0.298\ \text{Hz}$$

Az alapfrekvenciák kombinálódását a (6.18) harmadfokú egyenlettel vesszük figyelembe. Az egyenlet együtthatói a (6.19) képletekből számíthatók:

$$a_0 = -\frac{f_x^2 f_y^2 f_\varphi^2}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} = -\frac{0.047^2 \times 1.169^2 \times 0.298^2}{1-0.74^2} = -0.0005928$$

$$a_1 = \frac{f_x^2 f_y^2 + f_\varphi^2 f_x^2 + f_\varphi^2 f_y^2}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} = \frac{0.047^2 \times 1.169^2 + 0.298^2(0.047^2 + 1.169^2)}{1-0.74^2} = 0.2755$$

$$a_2 = \frac{f_x^2\tau_x^2 + f_y^2\tau_y^2 - f_\varphi^2 - f_x^2 - f_y^2}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} = \frac{0.047^2 \times 0.74^2 - 0.298^2 - 0.047^2 - 1.168^2}{0.4524} = -3.2206$$

ahol felhasználtuk a $\tau_x = 0.74$ és $\tau_y = 0$ értékeket, amelyeket a stabilitásvizsgálatnál már kiszámítottunk.

A harmadfokú egyenlet

$$\left(f^2\right)^3 - 3.2206\left(f^2\right)^2 + 0.2755\, f^2 - 0.0005928 = 0$$

legkisebb gyöke megadja az épület legkisebb sajátfrekvenciáját:

$$f_1 = f = 0.047 \text{ Hz}$$

Az alapfrekvenciák ismeretében és a speciális szimmetriaviszonyoknak köszönhetően – a stabilitásvizsgálathoz hasonlóan – ezt a sajátfrekvenciát elemi okoskodással, számolás nélkül is megkaphatjuk.

Alakváltozások és erőhányadok

A külső vízszintes teher nyírásközépponti *z* tengely körül forgató csavarónyomatékának értéke:

$$m_z = w_x y_c + w_y x_c = -21.45 \times (-9) = 193.05 \text{ kNm/m}$$

A globális csavarónyomaték értéke:

$$M_z = F_x y_c + F_y x_c = -514.8 \times (-9) = 4633.2 \text{ kNm}$$

A helyettesítő tartó maximális eltolódásait a (3.7) képletekből kapjuk meg:

$$u_{\max} = \frac{-18 \times 24^4}{8 \times 2 \times 10^7 \times 0.0133} = -2.81\text{m}, \qquad v_{\max} = \frac{-21.45 \times 24^4}{8 \times 2 \times 10^7 \times 8.333} = -0.005\text{m}$$

A maximális elcsavarodást a (3.14) összefüggés szolgáltatja:

$$\varphi_{\max} = \frac{193.05 \times 24^4}{8 \times 20 \times 10^6 \times 75.33} = 0.00531 \text{ rad}$$

Ez az elcsavarodás fokban a (3.17) képlet szerint:

$$\varphi_{\max} = 57.3 \times 0.00531 = 0.304°$$

A helyettesítő tartó eltolódásával és elcsavarodásával az épület maximális eltolódásai már a (3.18) képletekkel kiszámíthatók. A maximális eltolódások az ‘A’ és ‘B’ sarokpontoknál (7.1 ábra) jönnek létre:

$$v_{\max} = v_A = v + x_A \tan\varphi = -0.005 - 21 \times \tan(0.304) = -0.12 \text{ m}$$

és

$$u_{\max} = u_B = u + y_B \tan\varphi = -2.81 - 7.5 \times \tan(0.304) = -2.85 \text{ m}$$

A merevítőfalakra jutó terheket a (3.26) és (3.27) képletek szolgáltatják. Az 1. falra jutó terhek:

$$F_{x,1} = -\frac{0.00333}{0.0133}432 + \frac{0.00333\times 5}{75.33}4633.2 = -108.0 + 1.0 = -107\ \text{kN}$$

$$F_{y,1} = -\frac{2.0833}{8.3333}514.8 + \frac{2.0833\times 3}{75.33}4633.2 = -128.7 + 384.4 = 255.7\ \text{kN}$$

A négy falra jutó teherhányadokat a 7.2 táblázatban foglaljuk össze.

7.2 táblázat. Teherhányadok az „A” elrendezésnél.

Elem	$F_{x,i}$ $\{w_x\}$	$F_{x,i}$ $\{m_z\}$	$F_{x,i}$ [kN]	$F_{y,i}$ $\{w_y\}$	$F_{y,i}$ $\{m_z\}$	$F_{y,i}$ [kN]
1	-108.0	1.0	-107.0	-128.7	384.4	255.7
2	-108.0	-1.0	-109.0	-128.7	384.4	255.7
3	-108.0	1.0	-107.0	-128.7	-384.4	-513.1
4	-108.0	-1.0	-109.0	-128.7	-384.4	-513.1
Σ	-432.0	0.0	-432.0	-514.8	0.0	-514.8

Az épület statikai viselkedése nyilvánvalóan elfogadhatatlan – ezt már a stabilitásvizsgálat eredménye is mutatta. A maximális *x* irányú eltolódás számított értéke ($u_{\max}$ = 2.85 m) a javasolt maximális érték

$$u = v = \frac{H}{500} = \frac{24}{500} = 0.048\ \text{m}$$

majdnem 60-szorosa. A maximális eltolódás még *y* irányban is több, mint kétszerese a javasolt maximális értéknek.

Mivel az elfogadhatatlan mértékű alakváltozást az *x* irányú falak hiánya okozza, változtassuk meg a merevítőrendszer elrendezését oly módon, hogy a 3. és 4. jelű falat 90 fokkal elfordítjuk és egyben áttesszük az épület bal széléhez (7.2 ábra).

7.1.2 „B” elrendezés: egy jobb szerkezeti megoldás

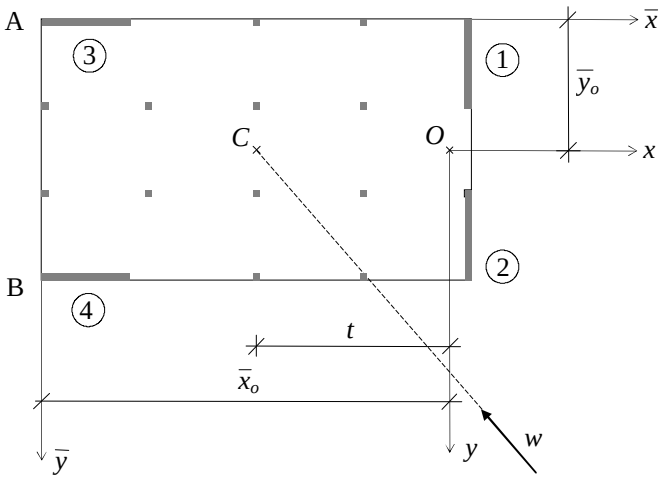
Ez az elrendezés jobb mint az előző, mert mind az *x*, mind pedig az *y* irányban vannak hatékonyan működő falak, valamint a falak egymástól távol helyezkednek el (7.2 ábra). A „B” elrendezéshez tartozó geometriai és merevségi adatokat a 7.3 táblázatban foglaljuk össze.

7.3 táblázat. A „B” elrendezés geometriai és merevségi adatai.

Elem	$\bar{x}_i$ [m]	$\bar{y}_i$ [m]	$I_{x,i}$ [m^4]	$I_{y,i}$ [m^4]	x_i [m]	y_i [m]	$I_{x,i}x_i^2$	$I_{y,i}y_i^2$	$I_{\omega,i}$ [m^6]	J_i [m^4]
1	24	2.5	2.0833	0.0033	0.035	-5.0	0.00	0.08	0	0.01333
2	24	12.5	2.0833	0.0033	0.035	5.0	0.00	0.08	0	0.01333
3	2.5	0.0	0.0033	2.0833	-21.465	-7.5	1.54	117.19	0	0.01333
4	2.5	15.0	0.0033	2.0833	-21.465	7.5	1.54	117.19	0	0.01333
Σ			4.1733	4.1733			3.08	234.54	237.6	0.0533

A nyírásközéppont koordinátái a (2.3) képletekből:

$$\bar{x}_o = 23.965\ \text{m} \qquad \text{és} \qquad \bar{y}_o = 7.5\ \text{m}$$



7.2 ábra. „B” elrendezés.

A koordinátarendszer kezdőpontját áthelyezzük a nyírásközéppontba. Az öblösödési csavarási tehetetlenségi nyomaték értékét ebben a koordinátarendszerben a (2.6) képletből határozhatjuk meg:

$$I_\omega = \sum_{i=1}^{n} (I_{\omega,i} + I_{x,i} x_i^2 + I_{y,i} y_i^2 - 2 I_{xy,i} x_i y_i) = 237.6 \text{ m}^6$$

A számítás részleteit a 7.3 táblázat tartalmazza, ahol x_i és y_i a merevítőfalak nyírásközéppontjainak távolsága a merevítőrendszer nyírásközéppontjától az *x–y* koordinátarendszerben.

A (2.9) képletek segítségével meg kell határozni az épület geometriai középpontjának a koordinátáit a nyírásközéppont origójú koordinátarendszerben:

$$x_c = \frac{L}{2} - \bar{x}_o = \frac{24}{2} - 23.965 = -11.965 \text{ m}, \qquad y_c = \frac{B}{2} - \bar{y}_o = \frac{15}{2} - 7.5 = 0$$

A (2.8) összefüggés megadja az *O* nyírásközéppont és a *C* geometriai középpont távolságát:

$$t = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = 11.965 \text{ m}$$

A poláris tehetetlenségi sugár értéke így a (2.10) képletből már kiszámítható:

$$i_p = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} = \sqrt{\frac{24^2 + 15^2}{12} + 11.965^2} = \sqrt{209.93} = 14.49 \text{ m}$$

A *k* csavarási tényező értékét az (5.62) képlet szolgáltatja:

$$k = H \sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}} = 24 \sqrt{\frac{8.33 \times 10^3 \times 0.0533}{2 \times 10^4 \times 237.6}} = 0.232$$

Ezzel előállítottuk a helyettesítő tartót. A következő pontban meghatározzuk az épület kritikus terhét és a globális biztonsági tényezőt.

Kritikus teher

Az r_s (0.834) redukciós tényezővel (5.1 táblázat) az alap kritikus terheket egyenletesen megoszló födémteherre az (5.50) és (5.63) képletek adják meg:

$$N_{kr,x} = \frac{7.837 r_s EI_y}{H^2} = \frac{7.837 \times 0.834 \times 2 \times 10^4 \times 4.1733}{24^2} = 947.5 \text{ MN}$$

$$N_{kr,y} = \frac{7.837 r_s EI_x}{H^2} = \frac{7.837 \times 0.834 \times 2 \times 10^4 \times 4.1733}{24^2} = 947.5 \text{ MN}$$

$$N_{kr,\varphi} = \frac{\alpha r_s EI_\omega}{i_p^2 H^2} = \frac{8.14 \times 0.834 \times 2 \times 10^4 \times 237.6}{209.93 \times 24^2} = 266.8 \text{ MN}$$

ahol az α kritikus teherparaméter értéke (α = 8.14) a

$$k_s = \frac{k}{\sqrt{r_s}} = \frac{0.232}{\sqrt{0.834}} = 0.254$$

tényező függvényében az 5.11 ábra diagramjáról (vagy az 5.2 táblázatból) kapható meg.

Az alap kritikus terhek között létrejövő kombinálódást az (5.65) harmadfokú egyenlettel vesszük figyelembe. A számításhoz szükséges tényezőket és együtthatókat az (5.67) és (5.66) képletek segítségével határozzuk meg:

$$\tau_x = \frac{x_c}{i_p} = \frac{11.965}{14.49} = 0.826, \qquad \tau_y = \frac{y_c}{i_p} = \frac{0.0}{14.49} = 0.0$$

$$a_0 = -\frac{N_x N_y N_\varphi}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2} = -\frac{947.5 \times 947.5 \times 266.8}{1 - 0.826^2} = -7.528 \times 10^8$$

$$a_1 = \frac{N_x N_y + N_x N_\varphi + N_\varphi N_y}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2} = \frac{947.5 \times 947.5 + 947.5 \times 266.8 + 266.8 \times 947.5}{0.3177} = 4.411 \times 10^6$$

$$a_2 = \frac{N_x \tau_x^2 + N_y \tau_y^2 - N_\varphi - N_x - N_y}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2} = \frac{947.5 \times 0.826^2 - 266.8 - 947.5 - 947.5}{0.3177} = -4764$$

A fenti együtthatók felhasználásával az épület kritikus terhét az

$$N^3 - 4764 N^2 + 4.411 \times 10^6 N - 7.528 \times 10^8 = 0$$

harmadfokú egyenlet legkisebb gyöke adja:

$$N_1 = N_{kr} = 221 \text{ MN}$$

A globális biztonsági tényező értéke

$$\frac{N_{kr}}{N} = \frac{221}{23.04} = 9.6$$

ami jelentős javulást mutat az előző elrendezéshez képest és már majdnem megfelel a (7.1) ajánlásnak.

Sajátfrekvencia

Az r_f (0.892) redukciós tényező (6.1 táblázat) ismeretében az alapfrekvenciákat a (6.11), (6.12) és (6.15) képletekből számíthatjuk ki:

$$f_x = \frac{0.56 r_f}{H^2}\sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} = \frac{0.56\times 0.892}{24^2}\sqrt{\frac{2\times 10^7 \times 4.1733 \times 9.81}{2.5\times 24\times 15}} = 0.827 \text{ Hz}$$

$$f_y = \frac{0.56 r_f}{H^2}\sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}} = \frac{0.56\times 0.892}{24^2}\sqrt{\frac{2\times 10^7 \times 4.1733 \times 9.81}{2.5\times 24\times 15}} = 0.827 \text{ Hz}$$

és

$$f_\varphi = \frac{\eta r_f}{i_p H^2}\sqrt{\frac{EI_\omega}{\rho A}} = \frac{0.57\times 0.892}{14.49\times 24^2}\sqrt{\frac{2\times 10^7 \times 237.6 \times 9.81}{2.5\times 24\times 15}} = 0.438 \text{ Hz}$$

ahol az η (0.57) frekvenciatényező értékét a k = 0.232 csavarási tényező függvényében a 6.4 ábra diagramjáról (vagy a 6.2 táblázatból) kapjuk.

Az alapfrekvenciák kombinálódását a (6.18) harmadfokú egyenlettel vesszük figyelembe. Az egyenlet együtthatói a (6.19) képletekből számíthatók:

$$a_0 = -\frac{f_\varphi^2 f_x^2 f_y^2}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} = -\frac{0.438^2\times 0.827^2\times 0.827^2}{1-0.826^2} = -0.2820$$

$$a_1 = \frac{f_x^2 f_y^2 + f_\varphi^2 f_x^2 + f_\varphi^2 f_y^2}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} = \frac{0.827^2\times 0.827^2 + 0.438^2(0.827^2+0.827^2)}{0.3177} = 2.295$$

$$a_2 = \frac{f_x^2\tau_x^2 + f_y^2\tau_y^2 - f_\varphi^2 - f_x^2 - f_y^2}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} = \frac{0.827^2\times 0.826^2 - 0.438^2 - 0.827^2 - 0.827^2}{0.3177} = -3.437$$

ahol felhasználtuk a τ_x = 0.826 és τ_y = 0 értékeket, amelyeket a stabilitásvizsgálatnál már kiszámítottunk.

A harmadfokú egyenlet

$$\left(f^2\right)^3 - 3.437\left(f^2\right)^2 + 2.295\, f^2 - 0.282 = 0$$

legkisebb gyöke megadja az épület legkisebb sajátfrekvenciáját:

$$f_1 = f = 0.399 \text{ Hz}$$

A sajátfrekvencia értéke is jelentős javulást mutat az előző elrendezéshez képest.

Alakváltozások és erőhányadok

A nyírásközépponti *z* tengely körül forgató csavarónyomaték értéke:

$$m_z = w_x y_c + w_y x_c = -21.45\times(-11.965) = 256.65\ \text{kNm/m}$$

A globális csavarónyomaték értéke:

$$M_z = -514.8\times(-11.965) = 6159.6\ \text{kNm}$$

A helyettesítő tartó maximális eltolódásait a (3.7) képletekből kapjuk meg:

$$u_{\max} = \frac{-18\times 24^4}{8\times 2\times 10^7\times 4.173} = -0.009\,\text{m}, \qquad v_{\max} = \frac{-21.45\times 24^4}{8\times 2\times 10^7\times 4.173} = -0.011\,\text{m}$$

A maximális elcsavarodást a (3.14) összefüggés szolgáltatja:

$$\varphi_{\max} = \frac{256.65\times 24^4}{8\times 20\times 10^6\times 237.6} = 0.00223\,\text{rad}$$

Ez az elcsavarodás fokban a (3.17) képlet szerint:

$$\varphi_{\max} = 57.3\times 0.00223 = 0.128^\circ$$

A helyettesítő tartó eltolódásával és elcsavarodásával az épület maximális eltolódásai már a (3.18) képletekkel kiszámíthatók. A maximális eltolódások az ‘A’ és ‘B’ sarokpontoknál (7.2 ábra) jönnek létre:

$$v_{\max} = v_A = v + x_A\tan\varphi = -0.011 - 23.965\times\tan(0.128) = -0.064\ \text{m}$$

$$u_{\max} = u_B = u + y_B\tan\varphi = -0.009 - 7.5\times\tan(0.128) = -0.026\ \text{m}$$

A merevítőfalakra jutó terheket a (3.26) és (3.27) képletek szolgáltatják. Az 1. falra jutó terhek:

$$F_{x,1} = -\frac{0.00333}{4.1733}432 + \frac{0.00333\times 5}{237.6}6159.6 = -0.34 + 0.43 = 0.09\,\text{kN}$$

$$F_{y,1} = -\frac{2.0833}{4.1733}514.8 + \frac{2.0833\times 0.035}{237.6}6159.6 = -257.4 + 1.9 = -255.1\,\text{kN}$$

A négy falra jutó teherhányadokat a 7.4 táblázatban foglaljuk össze.

7.4 táblázat. Teherhányadok a „B” elrendezésnél.

Elem	$F_{x,i}$ $\{w_x\}$	$F_{x,i}$ $\{m_z\}$	$F_{x,i}$ [kN]	$F_{y,i}$ $\{w_y\}$	$F_{y,i}$ $\{m_z\}$	$F_{y,i}$ [kN]
1	-0.34	0.43	0.09	-257.0	1.9	-255.1
2	-0.34	-0.43	-0.77	-257.0	1.9	-255.1
3	-215.7	405.1	189.4	-0.4	-1.9	-2.3
4	-215.7	-405.1	-620.8	-0.4	-1.9	-2.3
Σ	-432.0	0.0	-432.0	-514.8	0.0	-514.8

Az épület statikai viselkedése sokkal jobb, mint az „A” elrendezésé, de a maximális *y* irányú eltolódás még mindig nagyobb, mint a javasolt maximális érték

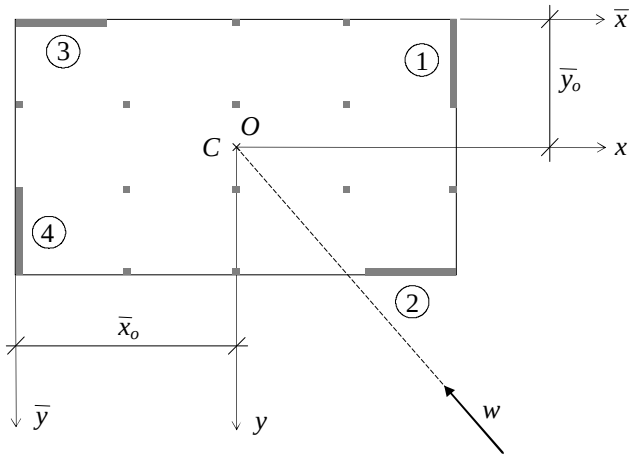
$$u = v = \frac{H}{500} = \frac{24}{500} = 0.048 \text{ m}$$

és a globális biztonsági tényező értéke nem éri el a javasolt 10-et.

Próbáljuk meg tovább javítani a helyzetet és változtassuk meg a merevítőrendszer elrendezését oly módon, hogy a 2. és 4. jelű falat felcseréljük. Ezáltal a 7.3 ábrán látható elrendezést kapjuk.

7.1.3 „C” elrendezés: egy optimális merevítőrendszer

Ez az elrendezés felületes ránézésre esetleg nem sok különbséget mutat a „B” elrendezéshez képest. A falak ugyanott vannak, de 2. és 4. jelű falak – felcserélésükkel – „jobb helyzetbe” kerültek (7.3 ábra). A „C” elrendezéshez tartozó geometriai és merevségi adatokat a 7.5 táblázatban foglaljuk össze.



7.3 ábra. „C” elrendezés.

A nyírásközéppont koordinátái a (2.3) képletekből (vagy szemléletből):

$$\bar{x}_o = 12.0 \text{ m} \qquad \text{és} \qquad \bar{y}_o = 7.5 \text{ m}$$

A koordinátarendszer kezdőpontját áthelyezzük a nyírásközéppontba. Az öblösödési csavarási tehetetlenségi nyomaték értékét ebben a koordinátarendszerben a (2.6) képletből határozhatjuk meg:

$$I_\omega = \sum_{i=1}^{n} (I_{\omega,i} + I_{x,i} x_i^2 + I_{y,i} y_i^2 - 2 I_{xy,i} x_i y_i) = 835.1 \text{ m}^6$$

A számítás részleteit a 7.5 táblázat tartalmazza, ahol x_i és y_i a merevítőfalak nyírásközéppontjainak távolsága a merevítőrendszer nyírásközéppontjától az *x*–*y* koordinátarendszerben.

A nyírásközéppont és az épület geometriai középpontja egybeesik, így az épület geometriai középpontjának a koordinátái a nyírásközéppont origójú koordinátarendszerben

$$x_c = \frac{L}{2} - \bar{x}_o = \frac{24}{2} - 12 = 0, \qquad y_c = \frac{B}{2} - \bar{y}_o = \frac{15}{2} - 7.5 = 0$$

és ezért

$$t = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = 0$$

7.5 táblázat. A „C” elrendezés geometriai és merevségi adatai.

Elem	$\bar{x}_i$ [m]	$\bar{y}_i$ [m]	$I_{x,i}$ [m^4]	$I_{y,i}$ [m^4]	x_i [m]	y_i [m]	$I_{x,i}x_i^2$	$I_{y,i}y_i^2$	$I_{\omega,i}$ [m^6]	J_i [m^4]
1	24.0	2.5	2.0833	0.0033	12.0	-5.0	300.0	0.08	0	0.01333
2	21.5	15.0	0.0033	2.0833	9.5	7.5	0.3	117.19	0	0.01333
3	2.5	0.0	0.0033	2.0833	-9.5	-7.5	0.3	117.19	0	0.01333
4	0.0	12.5	2.0833	0.0033	-12.0	5.0	300.0	0.08	0	0.01333
Σ			4.1733	4.1733			600.6	234.54	835.1	0.0533

A poláris tehetetlenségi sugár értéke a (2.10) képletből számítható ki:

$$i_p = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} = \sqrt{\frac{24^2 + 15^2}{12} + 0} = \sqrt{66.75} = 8.17 \text{ m}$$

A *k* csavarási tényező értékét az (5.62) képlet szolgáltatja:

$$k = H\sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}} = 24\sqrt{\frac{8.33\times10^3 \times 0.0533}{2\times10^4 \times 835.1}} = 0.124$$

Ezzel előállítottuk a helyettesítő tartót. A következő pontban meghatározzuk az épület kritikus terhét és a globális biztonsági tényezőt.

Kritikus teher

Az r_s (0.834) redukciós tényezővel (5.1 táblázat) az alap kritikus terheket egyenletesen megoszló födémteherre az (5.50) és (5.63) képletek adják meg:

$$N_{kr,x} = \frac{7.837 r_s EI_y}{H^2} = \frac{7.837\times0.834\times2\times10^4\times4.1733}{24^2} = 947.5 \text{ MN}$$

$$N_{kr,y} = \frac{7.837 r_s EI_x}{H^2} = \frac{7.837\times0.834\times2\times10^4\times4.1733}{24^2} = 947.5 \text{ MN}$$

$$N_{kr,\varphi} = \frac{\alpha r_s EI_\omega}{i_p^2 H^2} = \frac{7.93\times0.834\times2\times10^4\times835.1}{66.75\times24^2} = 2873 \text{ MN}$$

ahol az α (7.93) kritikus teherparaméter értékét a

$$k_s = \frac{k}{\sqrt{r_s}} = \frac{0.124}{\sqrt{0.834}} = 0.136$$

tényező függvényében az 5.11 ábra diagramjáról (vagy az 5.2 táblázatból) kapjuk meg.

Mivel a merevítőrendszer nyírásközéppontja és az épület geometriai középpontja egybeesik, a három alap kritikus erő nem kombinálódik és a legkisebb az épület kritikus terhe:

$$N_{kr,x} = N_{kr} = 947.5 \text{ MN}$$

A globális biztonsági tényező értéke

$$\frac{N_{kr}}{N} = \frac{947.5}{23.04} = 41.1$$

ami jelentős javulást mutat az előző elrendezéshez képest és messzemenően kielégíti a (7.1) ajánlást is.

Sajátfrekvencia

Az r_f (0.892) redukciós tényező (6.1 táblázat) ismeretében az alapfrekvenciákat a (6.11), (6.12) és (6.15) képletekből számíthatjuk ki:

$$f_x = \frac{0.56 r_f}{H^2}\sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} = \frac{0.56\times 0.892}{24^2}\sqrt{\frac{2\times 10^7 \times 4.1733 \times 9.81}{2.5\times 24\times 15}} = 0.827 \text{ Hz}$$

$$f_y = \frac{0.56 r_f}{H^2}\sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}} = \frac{0.56\times 0.892}{24^2}\sqrt{\frac{2\times 10^7 \times 4.1733 \times 9.81}{2.5\times 24\times 15}} = 0.827 \text{ Hz}$$

és

$$f_\varphi = \frac{\eta r_f}{i_p H^2}\sqrt{\frac{EI_\omega}{\rho A}} = \frac{0.565\times 0.892}{8.17\times 24^2}\sqrt{\frac{2\times 10^7 \times 835.1 \times 9.81}{2.5\times 24\times 15}} = 1.445 \text{ Hz}$$

ahol az η (0.565) frekvenciatényező értéke a k = 0.124 csavarási tényező függvényében a 6.4 ábra diagramjáról (vagy a 6.2 táblázatból) származik.

Az alapfrekvenciák most nem kombinálódnak, mert a merevítőrendszer nyírásközéppontja és az épület geometriai középpontja egybeesik, így a legkisebb alapfrekvencia az épület legkisebb sajátfrekvenciája:

$$f_x = f = 0.827 \text{ Hz}$$

A sajátfrekvencia értéke jelentősen megnövekedett az előző elrendezés saját-frekvenciájához képest.

Alakváltozások és erőhányadok

A szélteher eredője most átmegy a nyírásközépponton, így a csavarónyomaték értéke zérus:

$$m_z = w_x y_c + w_y x_c = 0 \qquad \text{és} \qquad M_z = 0$$

A helyettesítő tartó maximális eltolódásait a (3.7) képletekből kapjuk meg:

$$u_{\max} = \frac{-18 \times 24^4}{8 \times 2 \times 10^7 \times 4.173} = -0.009\,\text{m}, \qquad v_{\max} = \frac{-21.45 \times 24^4}{8 \times 2 \times 10^7 \times 4.173} = -0.011\,\text{m}$$

Mivel az épület nem csavarodik el, ezek az értékek egyben az épület maximális eltolódásai is.

A merevítőfalakra jutó terheket a (3.26) és (3.27) képletek szolgáltatják. Az 1. falra jutó terhek:

$$F_{x,1} = -\frac{0.003333}{4.1733} 432 + 0 = -0.35\,\text{kN}$$

$$F_{y,1} = -\frac{2.0833}{4.1733} 514.8 + 0 = -257.0\,\text{kN}$$

A négy falra jutó teherhányadokat a 7.6 táblázatban foglaljuk össze.

7.6 táblázat. Teherhányadok a „C” elrendezésnél.

Elem	$F_{x,i}$ $\{w_x\}$	$F_{x,i}$ $\{m_z\}$	$F_{x,i}$ [kN]	$F_{y,i}$ $\{w_y\}$	$F_{y,i}$ $\{m_z\}$	$F_{y,i}$ [kN]
1	-0.35	0.0	-0.35	-257.0	0.0	-257.0
2	-215.65	0.0	-215.65	-0.4	0.0	-0.4
3	-215.65	0.0	-215.65	-0.4	0.0	-0.4
4	-0.35	0.0	-0.35	-257.0	0.0	-257.0
Σ	-432.0	0.0	-432.0	-514.8	0.0	-514.8

Az épület statikai viselkedése tovább javult. Az épület maximális *y* irányú tetőponti eltolódása alig negyede a javasolt megengedhető maximális értéknek:

$$v_{\max} = 0.011\,\text{m} < 0.048\,\text{m} = \frac{H}{500}$$

A globális biztonsági tényező értéke négyszeresére növekedve messze meghaladja a javasolt 10-et és a sajátfrekvencia értéke is mintegy kétszeresére növekedett.

7.2 Hatékonyságmutató

A globális biztonsági tényező legfontosabb tulajdonsága az, hogy számszerűen jellemzi a teljes épület stabilitási állapotát. De a globális biztonsági tényező felhasználható arra is, hogy mérőszámnak tekintsük a merevítőrendszer hatékonyságát illetően. Minél nagyobb a globális biztonsági tényező, annál hatékonyabb a merevítőrendszer. A globális biztonsági tényező hatékonysági mutatóként történő alkalmazását igen jól illusztrálja a fent bemutatott példasorozat.

A jobb áttekinthetőség kedvéért a három elrendezéshez tartozó legfontosabb eredményeket a 7.7 táblázatban is összefoglaltuk. A táblázat negyedik oszlopában található „maximális

eltolódás-arány” az épület maximális eltolódása és a javasolt maximális megengedett eltolódás (*H*/500) arányát jelenti.

7.7 táblázat. A merevítőrendszer hatékonysága. A szélteher hajlásszöge az *x* tengellyel 50°.

Elrendezés	Maximális elcsavarodás [°]	Maximális eltolódás [mm]	Maximális eltolódás-arány [-]	Kritikus teher [MN]	Sajátfrekvencia [Hz]	Globális biztonsági tényező [-]
“A”	0.286	2843	59.22	3.0	0.047	0.13
“B”	0.126	64	1.33	221.0	0.399	9.5
“C”	0.000	11	0.23	947.5	0.827	41

A 7.1.1, 7.1.2 és 7.1.3 pontokban bemutatott és az „A”, „B” és „C” elrendezésekre vonatkozó számítást megismételtük arra az esetre is, amikor a szélteher párhuzamos az *y* tengellyel. Az ehhez a terhelési esethez tartozó eredményeket a 7.8 táblázat tartalmazza. A frekvenciaértékek és a kritikus terhek természetesen nem változtak, csak a szélteherrel kapcsolatos eltolódások és elcsavarodások.

A fenti két példasorozat, valamint számtalan épület adatainak elemző vizsgálata azt mutatja, hogy a globális biztonsági tényező egy igen megbízható és hasznos tényező a merevítőrendszer hatékonyságának ellenőrzésére. „Automatikusan” figyelembe veszi a szerkezet esetleges gyengeségeit és igen érzékenyen reagál a merevítőrendszer elemeinek változására (méret, elrendezés). A térbeli viselkedésnél oly fontos elcsavarodás – aminek kezelése már önmagában is bonyolult – és a síkbeli alakváltozások egymásrahatásának vizsgálata a módszer sajátságának köszönhetően automatikusan és szinte „észrevétlenül” megtörténik.

7.8 táblázat. A merevítőrendszer hatékonysága. A szélteher párhuzamos az *y* tengellyel.

Elrendezés	Maximális elcsavarodás [°]	Maximális eltolódás [mm]	Maximális eltolódás-arány [-]	Kritikus teher [MN]	Sajátfrekvencia [Hz]	Globális biztonsági tényező [-]
“A”	0.373	153	3.19	3.0	0.047	0.13
“B”	0.164	84	1.75	221.0	0.399	9.5
“C”	0.000	14	0.29	947.5	0.827	41

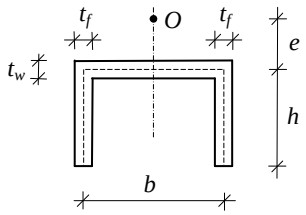
8

Függelék: Merevítőmagok keresztmetszeti jellemzői

Először megadjuk néhány gyakran alkalmazott és egyszerűbb (szimmetrikus) keresztmetszetű mag csavarási jellemzőit, majd a következő táblázatokban összefoglaljuk további – bonyolultabb kialakítású (nem-szimmetrikus) – magok keresztmetszeti jellemzőit.

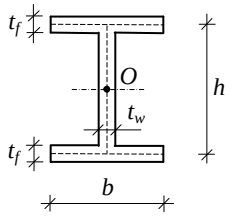
8.1 Néhány gyakran alkalmazott egyszerű keresztmetszetű mag csavarási jellemzői

8.1 táblázat. Π, T, Z és □ keresztmetszetű magok csavarási jellemzői.



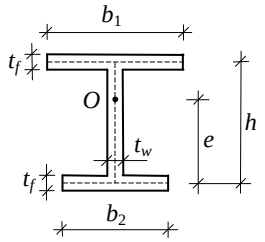
$$e=\frac{3t_f h^2}{6t_f h+t_w b},\qquad J=\frac{1}{3}(2ht_f^3+bt_w^3)$$

$$I_\omega=\frac{t_f h^3 b^2}{12}\frac{3t_f h+2t_w b}{6t_f h+t_w b}$$



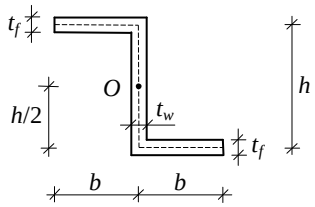
$$J=\frac{1}{3}(2bt_f^3+ht_w^3)$$

$$I_\omega=\frac{t_f b^3 h^2}{24}$$



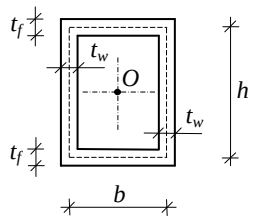
$$e=h\frac{b_1^3}{b_1^3+b_2^3},\qquad J=\frac{1}{3}\left((b_1+b_2)t_f^3+ht_w^3\right)$$

$$I_\omega=\frac{t_f h^2}{12}\frac{b_1^3 b_2^3}{b_1^3+b_2^3}$$



$$J=\frac{1}{3}(2bt_f^3+ht_w^3)$$

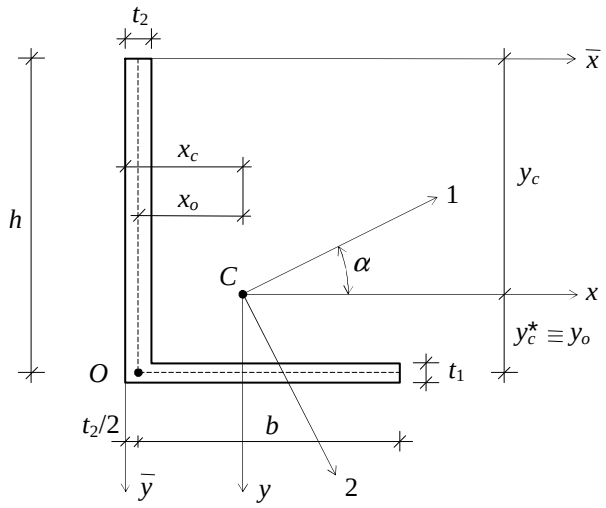
$$I_\omega=\frac{b^3h^2}{12(2b+h)^2}[2t_f(b^2+bh+h^2)+3t_w bh]$$



$$J=\frac{2b^2h^2t_f t_w}{ht_f+bt_w}$$

$$I_\omega\cong 0$$

8.2 L-keresztmetszetű merevítőmag keresztmetszeti jellemzői



8.1 ábra. L-keresztmetszet.

$$A = t_1\left(b - \frac{t_2}{2}\right) + t_2\left(h + \frac{t_1}{2}\right)$$

$$x_c = \frac{1}{2A}\left(t_2^2(h - \frac{t_1}{2}) + t_1(b + \frac{t_2}{2})^2\right)$$

$$y_c = \frac{1}{2A}\left(t_2(h - \frac{t_1}{2})^2 + 2ht_1(b + \frac{t_2}{2})\right)$$

$$x_o = x_c - \frac{t_2}{2}, \qquad y_o = y_c^* = h - y_c$$

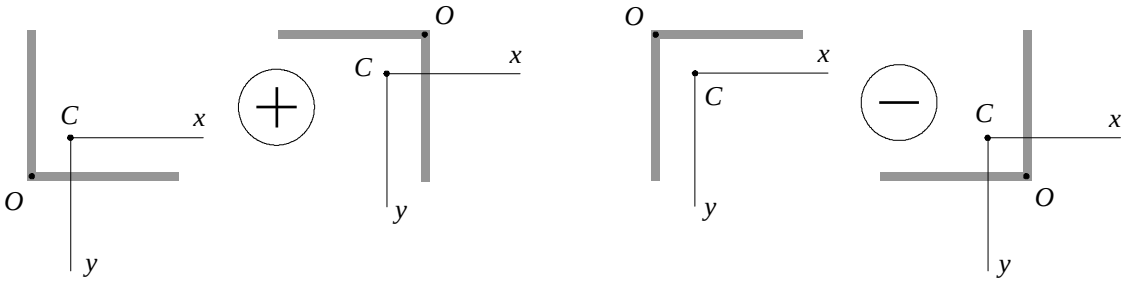
$$I_x = \frac{t_2}{12}\left(h - \frac{t_1}{2}\right)^3 + \frac{t_1^3}{12}\left(b + \frac{t_2}{2}\right) + t_2\left(h - \frac{t_1}{2}\right)\left(y_c - \frac{h}{2} + \frac{t_1}{4}\right)^2 + \left(b + \frac{t_2}{2}\right)t_1 y_c^{*2}$$

$$I_y = \frac{t_1}{12}\left(b + \frac{t_2}{2}\right)^3 + \frac{t_2^3}{12}\left(h - \frac{t_1}{2}\right) + t_2\left(h - \frac{t_1}{2}\right)\left(x_c - \frac{t_2}{2}\right)^2 + t_1\left(b + \frac{t_2}{2}\right)\left(\frac{b}{2} + \frac{t_2}{4} - x_c\right)^2$$

$$I_{xy} = t_2\left(h - \frac{t_1}{2}\right)\left(\frac{h}{2} - \frac{t_1}{4} - y_c\right)\left(\frac{t_2}{2} - x_c\right) + t_1\left(b + \frac{t_2}{2}\right)\left(\frac{b}{2} + \frac{t_2}{4} - x_c\right)y_c^*$$

Az I_{xy} centrifugális tehetetlenségi nyomaték meghatározásánál fokozottan kell ügyelni arra, hogy a távolságok előjeles mennyiségek. (Az I_{xy} fenti kétrészes összefüggésében mindkét négytagú rész harmadik és negyedik tagja képviseli ezeket a távolságokat.) Ebből az következik, hogy az I_{xy} előjele pozitív és negatív is lehet. Általános előjelszabályt rögzít a 8.2 ábra, amelyen látható, hogy az I_{xy} előjele a súlyponti x és y koordinátatengelyek és az

L-keresztmetszet szárainak relatív helyzetétől függ. Amikor egy koordinátatengely egy szárat metsz, akkor az előjel pozitív (8.2/a ábra). Amikor mindkét koordinátatengely metsz egy-egy szárat, vagy a tengelyek egyik szárat sem metszik, akkor az előjel negatív (8.2/b ábra).



a) pozitív b) negatív

8.2 ábra. Az I_{xy} centrifugális tehetetlenségi nyomaték előjele.

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

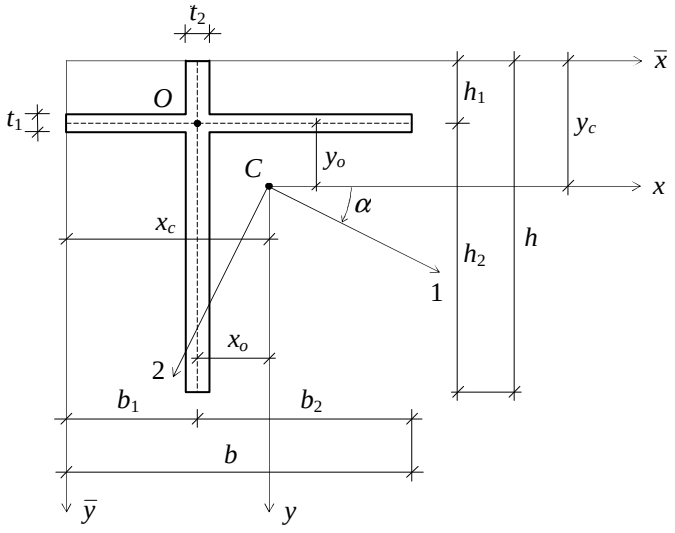
$$I_1 = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$I_2 = I_x \sin^2\alpha + I_y \cos^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$J = \frac{1}{3}\left(bt_1^3 + ht_2^3\right)$$

$$I_\omega \cong 0$$

8.3 ┼-keresztmetszetű merevítőmag keresztmetszeti jellemzői



8.3 ábra. ┼-keresztmetszet.

$$A = t_1 b + t_2 (h - t_1)$$

ahol

$$b = b_1 + b_2, \qquad h = h_1 + h_2$$

$$x_c = \frac{t_1 b^2}{2A} + \frac{t_2 b_1 (h - t_1)}{A}, \qquad y_c = \frac{t_2 h^2}{2A} + \frac{t_1 h_1 (b - t_2)}{A}$$

$$x_o = b_1 - x_c, \qquad y_o = h_1 - y_c$$

$$I_x = \frac{t_2 h^3 + (b - t_2) t_1^3}{12} + h t_2 \left(y_c - \frac{h}{2} \right)^2 + (b - t_2) t_1 (y_c - h_1)^2$$

$$I_y = \frac{t_1 b^3 + (h - t_1) t_2^3}{12} + b t_1 \left(\frac{b}{2} - x_c \right)^2 + (h - t_1) t_2 (b_1 - x_c)^2$$

$$I_{xy} = t_1 b (h_1 - y_c) \left(\frac{b}{2} - x_c \right) + t_2 \left(h_1 - \frac{t_1}{2} \right) \left(\frac{h_1}{2} - \frac{t_1}{4} - y_c \right) (b_1 - x_c) +$$
$$+ t_2 \left(h_2 - \frac{t_1}{2} \right) \left(h - \frac{h_2}{2} + \frac{t_1}{4} - y_c \right) (b_1 - x_c)$$

Az I_{xy} centrifugális tehetetlenségi nyomaték előjelével kapcsolatos és az előző pontban tett megjegyzés itt is érvényes. A centrifugális tehetetlenségi nyomaték kiszámításánál fokozottan kell ügyelni arra, hogy a távolságok előjeles mennyiségek. (Az I_{xy} fenti háromrészes összefüggésében mindhárom négytagú rész harmadik és negyedik tagja képviseli ezeket a távolságokat.) Ebből az következik, hogy az I_{xy} előjele pozitív és negatív is lehet. A 8.2 ábrán az L-keresztmetszetre megadott általános előjelszabály most is alkalmazható és ┼-keresztmetszetre a következőképpen fogalmazható meg: Ha a súlyponti x és y koordinátatengelyek a ┼-keresztmetszet egy szárát metszik, akkor az I_{xy} előjele pozitív, ha pedig két szárát metszik vagy egyik szárát sem metszik, akkor az előjel negatív.

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$I_1 = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_2 = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J = \frac{1}{3} \left(b t_1^3 + (h - t_1) t_2^3 \right) \qquad \text{és} \qquad I_\omega \cong 0$$

8.4 TT-keresztmetszetű merevítőmag keresztmetszeti jellemzői

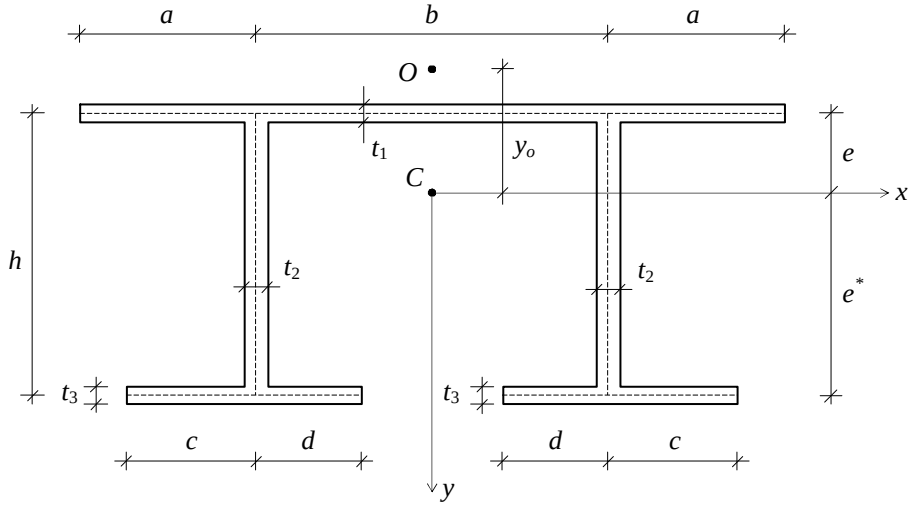
$$A = A_f + 2A_g + 2A_a$$

ahol

$$A_f = t_1(2a+b), \qquad A_g = t_2(h-\frac{t_1}{2}-\frac{t_3}{2}), \qquad A_a = t_3(c+d)$$

$$e = \frac{1}{A}\left(2A_a h + 2A_g(\frac{h}{2}-\frac{t_3}{4}+\frac{t_1}{4})\right), \qquad e^* = h - e$$

$$y_o = -e - \frac{eAb^2}{4I_y} + \frac{2hI_{ag}}{I_y} \qquad \text{ahol} \qquad I_{ag} = \frac{t_3}{3}(c^3+d^3)$$



8.4 ábra. TT-keresztmetszet.

$$I_x = \frac{1}{12}\left(A_f t_1^2 + 2A_a t_3^2 + 2A_g(h-\frac{t_1}{2}-\frac{t_3}{2})^2\right) + A_f e^2 + 2A_a e^{*2} + 2A_g\left(\frac{h}{2}-\frac{t_3}{4}+\frac{t_1}{4}-e\right)^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}\left(A_f(2a+b)^2 + t_3(b+2c)^3 - t_3(b-2d)^3 + 2A_g t_2^2\right) + \frac{b^2}{2}A_g$$

$$I_{xy} = 0, \qquad J = \frac{1}{3}\left(A_f t_1^2 + 2A_g t_2^2 + 2A_a t_3^2\right)$$

$$I_\omega = \frac{b^2 I_x}{4} + \frac{b^2 e^2 A}{4}\left(1-\frac{b^2 A}{4I_y}\right) + 2h^2 I_{ag} - 2bfh^2 A_a + b^2 ehA\frac{I_{ag}}{I_y} - 4h^2\frac{I_{ag}^2}{I_y}$$

$$\text{ahol} \qquad f = \frac{c-d}{2}$$

8.5 □-keresztmetszetű merevítőmag keresztmetszeti jellemzői

$$A = A_f + 2A_g + A_a$$

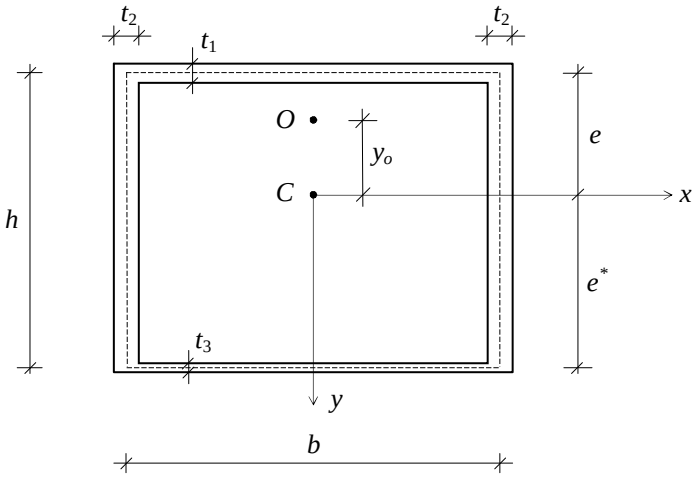
ahol

$$A_f = t_1(b+t_2)\,, \qquad A_g = t_2(h-\frac{t_1}{2}-\frac{t_3}{2})\,, \qquad A_a = t_3(b+t_2)$$

$$e = \frac{1}{A}\left(A_a h + A_g (h-\frac{t_3}{2}+\frac{t_1}{2})\right), \qquad e^* = h - e$$

$$I_x = \frac{1}{12}\left(A_f t_1^2 + A_a t_3^2 + 2A_g (h-\frac{t_1}{2}-\frac{t_3}{2})^2 \right) + A_f e^2 + A_a e^{*2} + 2A_g \left(\frac{h}{2}-\frac{t_3}{4}+\frac{t_1}{4}-e \right)^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}\left((A_f + A_a)(b+t_2)^2 + 2A_g t_2^2\right) + \frac{b^2}{2} A_g\,, \qquad I_{xy} = 0$$



8.5 ábra. □-keresztmetszet.

$$y_o = -e - \frac{I_{\omega x}}{I_y} \qquad \text{ahol} \qquad I_{\omega x} = \frac{b^2}{6}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_3) + \frac{bht_2}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\omega_1 = -\Psi \frac{b}{2t_1}\,, \qquad \omega_2 = \frac{bh}{2} - \Psi\left(\frac{b}{2t_1} + \frac{h}{t_2}\right), \qquad \Psi = \frac{2A_o}{\int \frac{ds}{t}} = \frac{2hb}{\frac{b}{t_1}+\frac{b}{t_3}+\frac{2h}{t_2}}$$

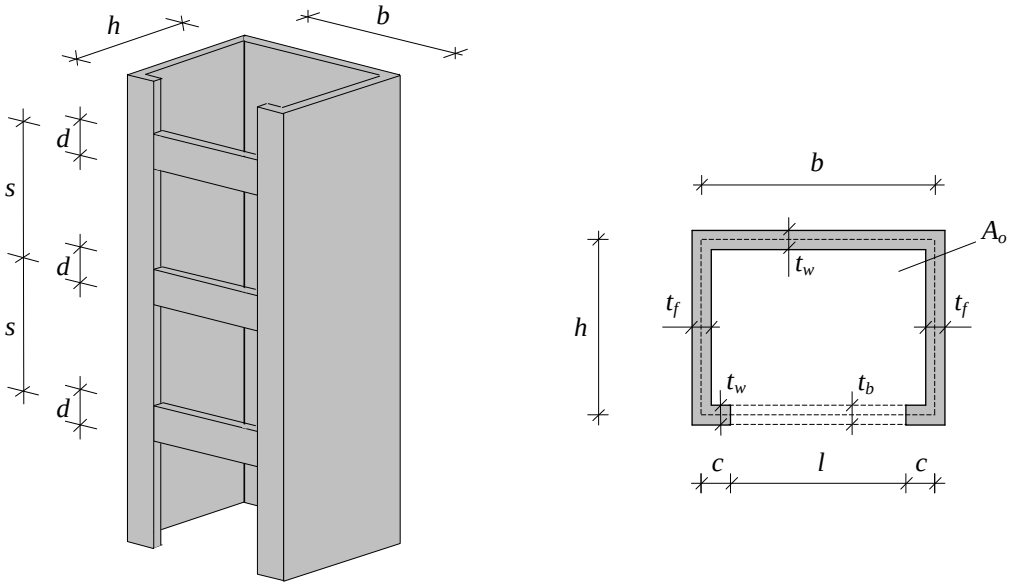
$$J = 2A_o\Psi = \frac{4h^2b^2}{\frac{b}{t_1}+\frac{b}{t_3}+\frac{2h}{t_2}}\,, \qquad I_\omega = \frac{2}{3}\left(ht_2(\Omega_1^2 + \Omega_1\Omega_2 + \Omega_2^2) + \frac{1}{2}b(\Omega_1^2 t_1 + \Omega_2^2 t_3)\right)$$

ahol

$$\Omega_1 = -\frac{bI_{\omega x}}{2I_y} + \omega_1\,, \qquad \Omega_2 = -\frac{bI_{\omega x}}{2I_y} + \omega_2 \qquad \text{és} \qquad A_o = bh$$

8.6 Részlegesen zárt Π-mag csavarási jellemzői

Talán a leggyakrabban alkalmazott merevítőmagok az Π-magok, amelyeket általában nyitott szelvényként szokás kezelni. A keresztmetszet viszont gyakran részlegesen „zárva” van, hiszen a födémek általában minden szinten összekötik az Π-szelvény szárait. A szárak közötti kapcsolat az esetek túlnyomó részében tovább „erősödik”, amennyiben a nyitott oldalon ajtók kerülnek elhelyezésre és az ajtók fölötti gerendák is az összekötés részévé válnak (8.6 ábra). Az összekötés révén csökken a keresztmetszet öblösödési csavarási merevsége és nő a tiszta (Saint-Venant) csavarási merevség. Összességében a mag csavarási ellenállása megnő.



a) b)

8.6 ábra. Részlegesen zárt Π-mag.

Vlasov kutatásai szerint a megnövekedett tiszta csavarási tehetetlenségi nyomaték értékét a

$$J = \frac{1}{3}(2ht_f^3 + bt_w^3 + 2ct_w^3) + \frac{4A_o^2}{\frac{l^3 sG}{12EI_b} + \frac{1.2ls}{A_b}}$$

összefüggés segítségével határozhatjuk meg, ahol az első tag az „eredeti” tiszta csavarási tehetetlenségi nyomaték [az (1.9) képlet szerint], a második tag pedig az összekötő gerendák hatását fejezi ki. A gyakorlati esetekben az első tag értéke jóval kisebb, mint a második tag értéke. A fenti összefüggésben

A_o	a falszakaszok középvonalai által közbezárt terület (8.6/b ábra),
b, h, c	a magot alkotó falszakaszok hossza,
l	az összekötő gerendák hossza,
s	az összekötő gerendák távolsága (általában emeletmagasság; 8.6/a ábra),
E	az összekötő gerendák rugalmassági tényezője,
G	az összekötő gerendák nyírási rugalmassági tényezője

és

$$A_b = t_b d \qquad \text{és} \qquad I_b = \frac{t_b d^3}{12}$$

az összekötő gerendák keresztmetszeti területe és tehetetlenségi nyomatéka, ahol

t_b az összekötő gerendák szélessége,
d az összekötő gerendák magassága (8.6/a ábra).

Pontossági vizsgálatok tanúsága szerint azokban az esetekben amikor az összekötő gerenda magassága (d) viszonylag nagy, a tiszta csavarási tehetetlenségi nyomaték fenti összefüggésének második tagja „túlértékelheti" az összekötő gerendák hatását és az összefüggés nagyobb értéket adhat a tiszta csavarási tehetetlenségi nyomaték értékére, mint a teljesen zárt keresztmetszet esetében [az (1.7) képlet szerint] – ami természetesen lehetetlen. Ilyen esetekben a fenti képlet helyett a

$$J = \frac{1}{3}(2ht_f^3 + bt_w^3 + 2ct_w^3) + \frac{4A_o^2}{\frac{2b-l}{t_w} + \frac{l}{t_w^*} + \frac{2h}{t_f}}$$

közelítő összefüggést lehet alkalmazni, ahol

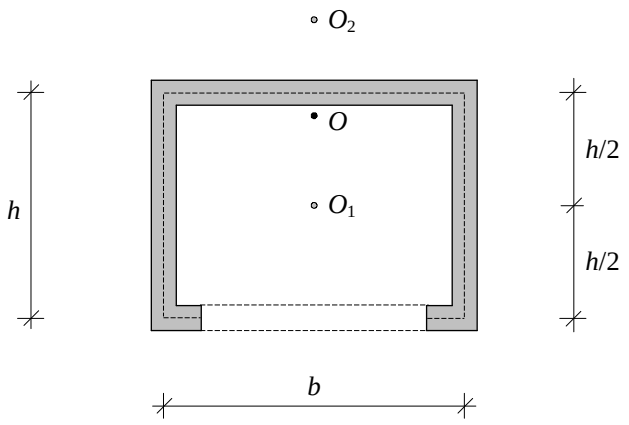
$$t_w^* = \frac{d}{s}t_b$$

a gerendák „elkent" vastagsága, d ismét az összekötő gerendák magassága és s az összekötő gerendák függőleges távolsága.

Az összekötő gerendák hatása miatt a keresztmetszet öblösödési csavarási ellenállása jelentős mértékben csökken. Ennek pontos figyelembevételére nem áll rendelkezésre megbízható összefüggés és így a számításoknál az öblösödési csavarási tehetetlenségi nyomaték értékét – a biztonság javára történő közelítéssel – el szokták hanyagolni:

$$I_\omega \cong 0$$

Egy épület globális vizsgálathoz szükség van minden egyes merevítőmag nyírásközéppontjának a helyére. Egy részlegesen zárt mag esetében a nyírásközéppont helye nem határozható meg egyszerű eszközökkel, de egyszerű (közelítő) módszerhez jutunk, ha a fenti t_w^* „elkent" gerendavastagság felhasználásával a feladatot visszavezetjük a 8.5 pontban bemutatott esetre. A t_3 falvastagság (8.5 ábra) szerepét átveszi a fenti t_w^* „elkent" falvastagság és ezután a 8.5 pontban megadott e és y_o mennyiségek segítségével a nyírásközéppont helye már meghatározható.

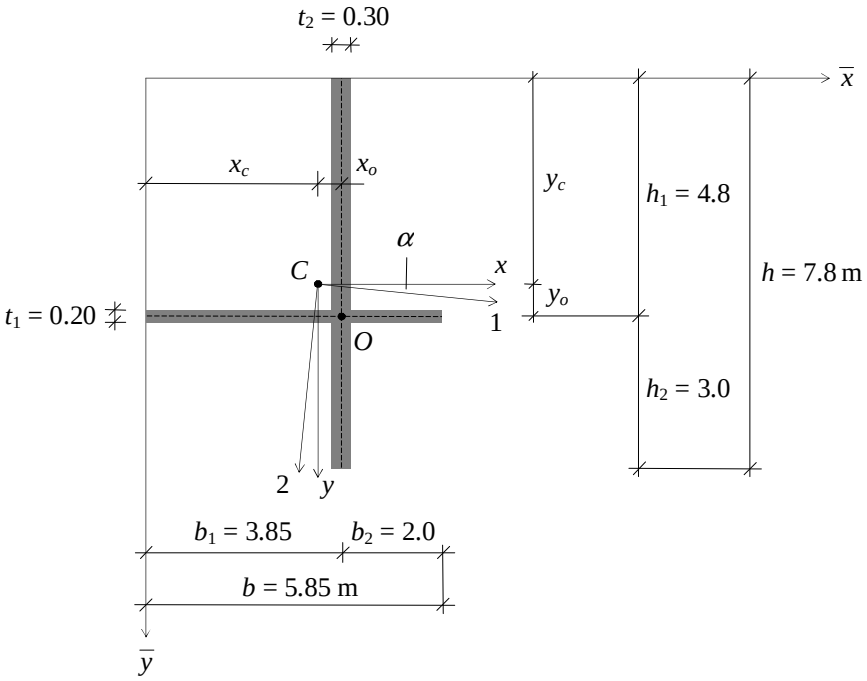


8.7 ábra. Az O nyírásközéppont helye részlegesen zárt mag esetén.

Némileg segíti a helyzetet és ellenőrzési lehetőséget ad az, hogy a nyírásközéppont két szélső helyzetének adatai azonnal rendelkezésre állnak. Ha ugyanis a keresztmetszetet teljesen zártnak tekintjük (végtelen merev összekötő gerendák feltételezésével), akkor a nyírásközéppont helye minden számítás nélkül megvan a keresztmetszet geometriai középpontjában (O_1 a 8.7 ábrán). Ha viszont teljesen elhanyagoljuk az összekötő gerendák merevségét, akkor egy nyitott Π-maghoz jutunk, amelynek a nyírásközéppontját a 8.1 táblázat első képletével meghatározhatjuk (O_2 a 8.7 ábrán). A tényleges nyírásközéppont (O) nyilván az O_1 és O_2 pontok között helyezkedik el.

8.7 Számpélda

Határozzuk meg a 8.8 ábrán vázolt két merőleges fal összeépítésével keletkezett merevítőmag keresztmetszeti jellemzőit. A számításhoz szükséges képleteket a 8.3 pontban találjuk.



8.8 ábra. ┼-keresztmetszet geometriai adatai.

Alapadatok:

$$b = b_1 + b_2 = 3.85 + 2 = 5.85\,\text{m} \qquad \text{és} \qquad h = h_1 + h_2 = 4.8 + 3 = 7.8\,\text{m}$$

$$A = t_1 b + t_2 (h - t_1) = 0.2 \cdot 5.85 + 0.3(7.8 - 0.2) = 3.45\,\text{m}^2$$

$$x_c = \frac{t_1 b^2}{2A} + \frac{t_2 b_1 (h - t_1)}{A} = \frac{0.2 \cdot 5.85^2}{2 \cdot 3.45} + \frac{0.3 \cdot 3.85(7.8 - 0.2)}{3.45} = 3.536\,\text{m}$$

$$y_c = \frac{t_2 h^2}{2A} + \frac{t_1 h_1 (b - t_2)}{A} = \frac{0.3 \cdot 7.8^2}{2 \cdot 3.45} + \frac{0.2 \cdot 4.8(5.85 - 0.3)}{3.45} = 4.190\,\text{m}$$

$$x_o = b_1 - x_c = 3.85 - 3.536 = 0.314\,\text{m} \qquad \text{és} \qquad y_o = h_1 - y_c = 4.8 - 4.19 = 0.61\,\text{m}$$

Tehetetlenségi nyomatékok:

$$I_x = \frac{t_2 h^3 + (b - t_2) t_1^3}{12} + h t_2 \left(y_c - \frac{h}{2} \right)^2 + (b - t_2) t_1 (y_c - h_1)^2 =$$

$$= \frac{0.3 \cdot 7.8^3 + (5.85 - 0.3) 0.2^3}{12} + 7.8 \cdot 0.3 \left(4.19 - \frac{7.8}{2} \right)^2 + (5.85 - 0.3) 0.2 (4.19 - 4.8)^2 = 12.477 \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{t_1 b^3 + (h - t_1) t_2^3}{12} + b t_1 \left(\frac{b}{2} - x_c \right)^2 + (h - t_1) t_2 (b_1 - x_c)^2 =$$

$$= \frac{0.2 \cdot 5.85^3 + (7.8 - 0.2) 0.3^3}{12} + 5.85 \cdot 0.2 \left(\frac{5.85}{2} - 3.536 \right)^2 + (7.8 - 0.2) 0.3 (3.85 - 3.536)^2 =$$

$$= 4.015 \text{ m}^4$$

$$I_{xy} = t_1 b (h_1 - y_c) \left(\frac{b}{2} - x_c \right) + t_2 \left(h_1 - \frac{t_1}{2} \right) \left(\frac{h_1}{2} - \frac{t_1}{4} - y_c \right) (b_1 - x_c) +$$

$$+ t_2 \left(h_2 - \frac{t_1}{2} \right) \left(h - \frac{h_2}{2} + \frac{t_1}{4} - y_c \right) (b_1 - x_c) =$$

$$= 0.3 \cdot 5.85 (4.8 - 4.19) \left(\frac{5.85}{2} - 3.536 \right) + 0.3 \left(4.8 - \frac{0.2}{2} \right) \left(\frac{4.8}{2} - \frac{0.2}{4} - 4.19 \right) (3.85 - 3.536) +$$

$$+ 0.3 \left(3.0 - \frac{0.2}{2} \right) \left(7.8 - \frac{3.0}{2} + \frac{0.2}{4} - 4.19 \right) (3.85 - 3.536) = -0.436 - 0.815 + 0.590 = -0.661 \text{m}^4$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{1}{2} \arctan \frac{-2 \cdot 0.661}{4.015 - 12.477} = \frac{1}{2} \arctan (0.1562) = 4.44 \text{°}$$

$$I_1 = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha =$$

$$= 12.477 \cos^2 (4.44) + 4.015 \sin^2 (4.44) - (-0.661) \sin (2 \cdot 4.44) = 12.528 \text{ m}^4$$

$$I_2 = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha =$$

$$= 12.477 \sin^2 (4.44) + 4.015 \cos^2 (4.44) + (-0.661) \sin (2 \cdot 4.44) = 3.964 \text{ m}^4$$

Csavarási jellemzők:

$$J = \frac{1}{3} \left(b t_1^3 + (h - t_1) t_2^3 \right) = \frac{1}{3} \left(5.85 \cdot 0.2^3 + (7.8 - 0.2) 0.3^3 \right) = 0.084 \text{ m}^4$$

$$I_\omega \cong 0$$

9

Irodalomjegyzék

Dulácska Endre – Kollár László: Méretezés földrengésre az európai elvek figyelembevételével. Tervezési Segédlet, TT-TS 4, Magyar Mérnöki Kamara, Tartószerkezeti Tagozat, 2003

Dulácska Endre – Joó Attila László – Kollár László P.: Tartószerkezetek tervezése földrengési hatásokra az Eurocode alapján. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2007

Eurocode 1: „Actions on structures – General actions – Part 1-4: Wind actions" [prEN 1991-1-4, 2004]

Eurocode 8: „Design of structures for earthquake resistance" [prEN 1998-1, 2003]

Freund Péter: SEGÉDLETEK a Mechanika és Tartószerkezetek c. tárgyakhoz. Budapest, 2015

Jeary, A. P. and Ellis, B. R.: The accuracy of mathematical models of structural dynamics. Building Research Establishment. 1981, PD112/81

Kollár Lajos (szerk.): A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái. 1. kiadás: Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991. 2. kiadás: Akadémiai Kiadó, 2006

Korányi Imre: Stabilitási kérdések a mérnöki gyakorlatban. Kihajlás a síkban. Akadémia Kiadó, Budapest, 1965

MSZ 15021/1-86: Magasépítési szerkezetek terhei. Budapest, 1986

MSZ EN 1991-1-4:2007 A tartószerkezeteket érő hatások. 1-4. rész: Szélhatás

Palotás László (szerk.): Mérnöki Kézikönyv. II. kötet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984

Timoshenko, S. – Gere, J.: Theory of elastic stability. 2nd edition. McGraw-Hill, 1961

Vlasov, V. Z.: Thin-walled elastic beams. 2nd edition. Moscow, 1959; Israeli Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961

Zalka, K. A. and Armer, G. S. T.: Stability of large structures. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1992

Zalka, K. A.: Global structural analysis of buildings. E & FN Spon, London & New York, 2000

Zalka Károly: Tartók statikája II. Budapest, 2024, e-kiadás

Zalka Károly: Keretekkel, falakkal és magokkal merevített épületek globális statikai vizsgálata. Budapest, 2025, e-kiadás