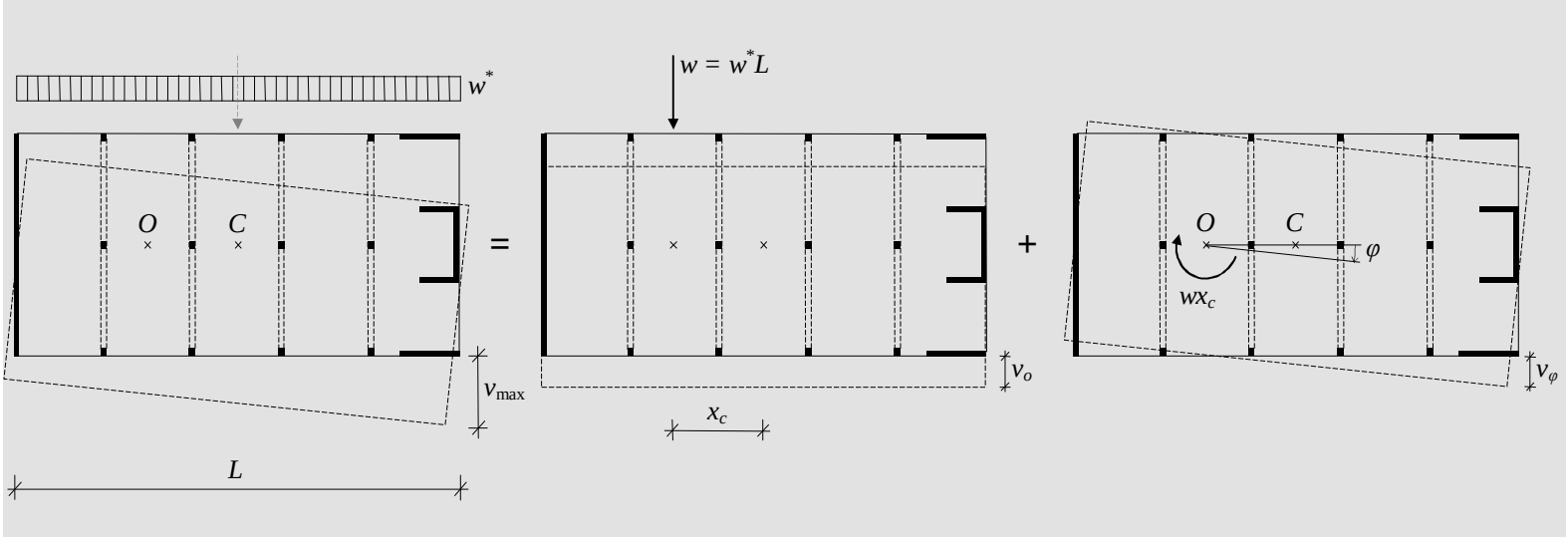
Keretekkel, falakkal és magokkal merevített épületek globális statikai vizsgálata

Zalka Károly



Budapest, e-kiadás

© Zalka Károly, Budapest, 2014-2025, e-kiadás

Szabad ezen kiadványt sokszorosítani, terjeszteni és elektronikus
vagy bármely formában tárolni.
Tilos viszont a kiadványt bármely formában megváltoztatni és bármely formában értékesíteni.

Lektorok:

Horváthné Fazakas Margit
okl. építőmérnök

Lőrincz György PhD
okl. építőmérnök

v1.07: 2025 február 4

Tartalomjegyzék

Előszó 1

1. Bevezetés 2

2. A merevítőrendszer elemei: keretek, falak és magok 4
2.1 Keretek alakváltozása vízszintes teher hatására 4
2.1.1 Jellemző alakváltozások 4
2.1.2 Kétlábas keret 5
2.1.3 Többnyílású, többszintes keretek 14
2.1.4 Értékelés; speciális esetek 15
2.2 Keretek frekvenciavizsgálata 18
2.3 Keretek stabilitásvizsgálata 24
2.4 Speciális kialakítású keretek 28
2.4.1 Keretek keresztmerevítéssel 28
2.4.2 Csuklós megtámasztású keretek 33
2.4.3 Eltérő magasságú földszinti oszlopokkal rendelkező keretek 34
2.4.4 Falazattal kitöltött keretek 34
2.5 Nyílásokkal áttört falak 37
2.6 Merevítőfalak 38
2.7 Merevítőmagok 39
2.7.1 Csavarási jellemzők 39
2.7.2 Eltolódás és elcsavarodás egyenletesen megoszló vízszintes teher hatására 43
2.7.3 Kritikus teher 45
2.7.4 Sajátfrekvencia 48
2.8 Számpélda: 28-szintes, 4-lábas keret globális vizsgálata 49
2.8.1 Alapadatok 49
2.8.2 A maximális tetőponti eltolódás 51
2.8.3 A legkisebb sajátfrekvencia 51
2.8.4 A kritikus teher 52

3. A merevítőrendszer viselkedése vízszintes teher hatására 55
3.1 Csavarodásmentes merevítőrendszer 56
3.1.1 A feladat differenciálegyenletei 56
3.1.2 Egyszerű megoldás 58
3.1.3 Pontosabb megoldás 60
3.2 A merevítőrendszer elcsavarodása 65
3.2.1 Csavarási jellemzők 65
3.2.2 A csavarási probléma megoldása 69
3.2.3 Általános megjegyzések; speciális esetek 71
3.3 A merevítőrendszer maximális tetőponti eltolódása 74
3.4 A merevítőrendszer elemeire jutó terhek 74
3.5 A merevítőrendszer viselkedése vízszintes teher hatására 76

3.6 Számpéldák a maximális tetőponti eltolódás meghatározására 77
3.6.1 Vízszintes erőkkel terhelt 28-szintes szimmetrikus épület 77
3.6.2 Vízszintes erőkkel terhelt 28-szintes aszimmetrikus épület 82

4. A merevítőrendszer sajátfrekvenciája 87
4.1 Síkbeli rezgés 88
4.2 Tiszta csavaró rezgés 93
4.3 Az alaprezgések kombinálódása: a merevítőrendszer sajátfrekvenciája 97
4.4 Számpélda: vasbeton falakkal és falazattal kitöltött vasbeton keretekkel merevített 6-szintes aszimmetrikus épület 100
4.4.1 Rezgés *x* irányban 101
4.4.2 Rezgés *y* irányban 101
4.4.3 Tiszta csavaró rezgés 103
4.4.4 Az épület legkisebb sajátfrekvenciája 105

5. A merevítőrendszer stabilitásvizsgálata; globális kritikus teher 107
5.1 Keretekből, falakból és magokból álló merevítőrendszer síkbeli kihajlása 108
5.2 Síkbeli kihajlás: speciális merevítőrendszerek 114
5.2.1 Csak tömör falakat és magokat tartalmazó merevítőrendszer 114
5.2.2 Csak kereteket tartalmazó merevítőrendszer 114
5.2.3 Falak és nagy gerenda/oszlop merevségarányú keretek 115
5.2.4 Falak és nagy oszlop/gerenda merevségarányú keretek 116
5.3 Tiszta elcsavarodó kihajlás 117
5.4 Az alapesetek kombinálódása: elcsavarodó kihajlás 120
5.5 Koncentrált tetőteher 123
5.6 Számpélda: keretekkel és falakkal merevített 22-szintes aszimmetrikus épület 124
5.6.1 A merevítőelemek kritikus terhei; nyírásközéppont 125
5.6.2 Síkbeli kihajlás az *x* és *y* irányban 127
5.6.3 Tiszta elcsavarodó kihajlás 129
5.6.4 Az épület kritikus terhe és globális biztonsági tényezője 131

6. A merevítőrendszer globális biztonsági tényezője 133
6.1 Globális biztonsági tényező – hatékonyságmutató 134
6.2 Számpéldák: keresztmerevítéses acél keretekkel és vasbeton falakkal merevített 10-szintes épület három különböző merevítőrendszer elrendezéssel 137
6.2.1 A merevítőelemek kritikus terhe 139
6.2.2 Egy elfogadhatatlan merevítőrendszer: 1. elrendezés 140
6.2.3 Egy jobb szerkezeti megoldás: 2. elrendezés 148
6.2.4 Egy hatékony merevítőrendszer: 3. elrendezés 155

7. A gyakorló feladatok eredményei 161
7.1 Két 28-szintes épület; 6-szintes épület; 22-szintes épület 161
7.2 10-szintes épület 162

Irodalomjegyzék 164

Előszó

Jelen jegyzet az „Épületek komplex statikai vizsgálata” című jegyzet folytatásának, illetve második részének is tekinthető. Az „Épületek komplex statikai vizsgálata” összefoglalta a témakör ismeretéhez szükséges alapelveket, bemutatta az összegzési tételeket és foglalkozott azzal a fontos gyakorlati esettel, amikor az épület merevítőrendszerét tömör elemek (merevítőfalak és magok) alkotják.

Legtöbb többszintes épületünk azonban keretszerkezeteket is tartalmaz és a falak gyakran nyílásokkal vannak áttörve. Az ily módon kialakuló vegyes szerkezeti rendszer jóval bonyolultabb erőjátékot eredményez, melynek kezelése olyan matematikai és mechanikai ismereteket igényel, amelyek helyenként nagymértékben felülmúlják a tömör rendszerek kezeléséhez szükséges ismereteket.

A jegyzet célja az, hogy olyan módszereket ismertessen, amelyek segítségével még a falakkal, magokkal *és* keretekkel valamint nyílásokkal áttört falakkal merevített épületek is viszonylag egyszerűen kezelhetők. Reményeink szerint ezek a módszerek nagymértékben hozzásegíthetnek ahhoz, hogy a bonyolult erőjáték érthető legyen és a szerkezettervező lássa hogy melyek a kulcsfontosságú tényezők – merevségek, elrendezés – amelyek döntő mértékben hozzájárulnak a hatékony viselkedéshez, illetve a gazdaságos és biztonságos szerkezetek megtervezéséhez.

A két jegyzet anyaga bizonyos – kismértékű – átfedéseket tartalmaz. Ennek az az oka, és egyben talán előnye is, hogy ily módon a két jegyzet bár kiegészítése egymásnak, önállóan is kezelhető, illetve használható.

A bemutatott számítási eljárások egyszerűségüknél fogva alkalmasak kézi számítások elvégzésére. Táblázatkezelő, illetve matematikai programok (pl. Excel, Mathcad, stb.) alkalmazásával a már így is egyszerű számítási munka tovább csökkenthető és komplex épületek globális (szilárdsági, stabilitási és dinamikai) vizsgálata percek alatt elvégezhető. Lehetőség nyílik így – önálló vizsgálatok végrehajtása és a viselkedés jellegének gyors megismerése mellett – részletes számítógépes vizsgálatok eredményeinek gyors ellenőrzésére is. Ez igen fontos, mert bár napjainkban számítógéppel mindent kiszámolhatunk, a viszonylag nagy számú adat bevitele jelentős hibalehetőséggel jár és a komplex viselkedés miatt esetenként nehéz a gépi számítás eredményeinek megbízhatóságát megítélni.

A jegyzet a statika olyan fejezeteit tárgyalja, amelyek elmélete az átlagosnál elmélyültebb tanulmányozást igényel és a szokásosnál komolyabb matematikai apparátust használ. Az anyag sok olyan képletet és néhány levezetést is tartalmaz, amelyek elsősorban a magyarázat céljait szolgálják. Megtanulni a számítási módszereket, az alapelveket és a gazdaságos és biztonságos szerkezetek kialakításának legfontosabb szempontjait kell.

Néhány összefüggést levezetés nélkül közlünk. Ezek az „Épületek komplex statikai vizsgálata” című jegyzetben közölt levezetések mintájára rekonstruálhatók. A részletek az irodalomjegyzékben felsorolt publikációkban megtalálhatók.

A tárgyalt anyag teljes egészében szabványfüggetlen. A szerkezetekre ható terheket viszont rendszerint szabványelőírások szerint kell meghatározni. Minden esetben az éppen érvényes szabvány előírásai szerint kell eljárni.

Az eredeti kézirat néhány fejezetét Rákóczy Katalin nézte át, majd a jegyzetet Horváthné Fazakas Margit és Lőrincz György lektorálta. Gondos munkájukat ezúton is szeretném megköszönni.

Budapest, 2014 január

Zalka Károly

Jelen 1.07 verzió néhány kisebb kiegészítést és módosítást tartalmaz.

Budapest, 2025 február Z.K.

1

Bevezetés

A jegyzet olyan többszintes épületek szerkezeti vizsgálatával foglalkozik közelítő módszerek ismertetésével, amelyek merevítőrendszerét keretek, nyílásokkal áttört falak, tömör falak és magok alkotják. Az ilyen típusú szerkezetek általában nagyméretűek és nagyon sok szerkezeti elemet tartalmaznak. A szerkezeti elemek nagy száma jelentős mennyiségű és igen összetett számítást igényel. Az utóbbi évtizedek számítástechnikai fejlődése nagyteljesítményű számítógépek és kifinomult programok elterjedéséhez vezetett, amelyek segítségével igen nagy méretű és komplex szerkezetek vizsgálata is viszonylag kis erőfeszítéssel lehetséges. Ez jelentősen megkönnyíti a statikus munkáját, de bizonyos veszélyekkel is jár. Az egyre „összkomfortosabb" programok olyan helyzetet idézhetnek elő, amikor a tervező egyre jobban támaszkodik a számítógépre és kevésbé érzi szükségesnek a szerkezet viselkedésének minden részletre kiterjedő megismerését.

Csábítóvá válhat a feladat megoldását a számítógépre bízni és az eredményeket kétségek nélkül elfogadni. Különösen nagyméretű és komplex viselkedésű szerkezetek vizsgálata során válik igen vonzóvá a számítógép. Felmerülhet az a kérdés is, hogy szükségünk van-e egyáltalán kézi számításokra. A válasz azonban egyértelműen az, hogy szükségünk van lehetőleg egyszerű és közelítő módszerekre. Mégpedig több okból is. A közelítő számítások eredményei igen hasznos ellenőrzéseket tesznek lehetővé. Az ilyen ellenőrzésekre különösen nagy szükség van, hiszen a nagyszámú bemenő adat és a gép által szolgáltatott eredmények feldolgozása és értékelése során könnyű hibát elkövetni és néha nehéz a hibát észrevenni. A „számítógéppel segített katasztrófa" kifejezés (CAD, azaz Computer Aided Disaster) sok konferencia kedvenc – és talán kissé hatásvadász – szekciócíme, de ilyen területen nem szabad semmit a véletlenre bízni, hiszen egyetlen egy katasztrófa is eggyel több az elfogadhatónál.

Több évtizedes tapasztalatok azt mutatják, hogy az a vélemény, mely szerint „ez az eredmény biztosan jó, mert a számítógép ezt hozta ki" időnként még ma is elhangzik. Esetleg akkor is, amikor a hozzáértő számára *biztos*, hogy a kérdéses eredmény rossz.

A közelítő módszerek kifejlesztésének és alkalmazásának vannak azonban más előnyei is. Egy közelítő eljárás rendszerint a „kevésbé fontos" szerkezeti elemek és jelenségek elhanyagolásával a lényeges tényezőkre összpontosít és így világosabban, érthetőbben és szemléletesebben tudja jellemezni a szerkezet viselkedését. Ez különösen a nagyméretű és komplex viselkedésű szerkezeteknél fontos, ahol ily módon könnyebb kifejleszteni a mérnöki érzéket.

Mivel a számítógépes vizsgálatok és a kézi (közelítő) módszerek rendszerint eltérő elméleti alapokra épülnek, párhuzamos alkalmazásuk (és a megfelelő mértékben közelálló eredmények) komoly biztosítékot nyújthatnak az eredmények helyességére.

A közelítő módszerek rendszerint analitikus megoldásokra épülnek, és zárt képleteket és táblázatokat/grafikonokat is alkalmaznak, melyek jelentősen lerövidítik a számítási munkát. Ekkor a szemléletes (és gyakran zárt alakú, egyszerű) képletek alkalmazhatósági határainak és a közelítések mértékének megállapítása fontos feladatot jelent. Optimális esetben mindkét megközelítést alkalmazzuk: az előtervezés során közelítő módszert alkalmazunk (az optimális szerkezeti megoldás kialakítása érdekében, esetleg ismételten, több szerkezeti variációt is megvizsgálva), majd a pontos számítás végrehajtása után véglegesítjük a szerkezetet. A véglegesítés során ismét tanácsos a kulcsfontosságú szerkezeti elemeket közelítő módszerrel is ellenőrizni.

A szerkezetvizsgálatot rendszerint két szinten kell elvégezni. A tervezőnek meg kell győződnie arról, hogy az egyes szerkezeti elemek (oszlopok, gerendák, födémlemezek, stb.) anyaga és mérete megfelelő és ezzel egy időben biztosítani kell azt is, hogy a szerkezet egésze rendelkezik a megfelelő vízszintes hajlítási és csavarási merevséggel, vagyis hogy a merevítőrendszer biztosítja az épület stabilitását.

Jelen jegyzet nem foglalkozik az egyes szerkezeti elemek vizsgálatával. A jegyzet célja olyan analitikus eljárások kifejlesztése, illetve bemutatása, amelyekkel végrehajtható többszintes komplex épületek globális vizsgálata. A bemutatott zárt alakú megoldások segítségével vizsgálható az épület alakváltozása vízszintes teher hatására, meghatározható a maximális tetőponti eltolódás és elcsavarodás, az épület legkisebb sajátfrekvenciája és a kritikus teher értéke térbeli viselkedés feltételezésével.

A vizsgálatokat a kontinuum módszer alkalmazásával hajtjuk végre, melyek során a diszkrét elemekből álló épületet folytonos modellel helyettesítjük. A kontinuum módszer kifejezetten alkalmas bonyolult problémák viszonylag egyszerű kezelésére. Az alkalmazás során fény derül a kulcsfontosságú merevségek szerepére és a viselkedésben fontos szerepet játszó geometriai jellemzők optimális megállapítására.

A következő fejezetekben közelítő módszereket mutatunk be a globális vizsgálat végrehajtásához, amelyekhez szükséges néhány egyszerűsítő feltételt bevezetni. A merevítőrendszerre vonatkozó feltételrendszer felállítása kompromisszum eredménye: legyen a számítás egyszerűbb, de az eredmények még maradjanak az építőmérnöki számításoknál elfogadott pontossági határok között. Így a következő fejezetekben feltételezzük, hogy a vizsgált szerkezetek

1) legalább négyszintesek és azonos emeletmagasságokkal rendelkeznek;
2) szabályosak, abban az értelemben hogy az alaprajzi elrendezés minden szinten azonos;
3) homogén anyagúak, rugalmasan viselkednek és kis alakváltozásokat végeznek. A másodrendű hatások elhanyagolhatók.

Feltételezzük továbbá, hogy

4) a merevítőrendszert alkotó nyílásokkal áttört falak, falak és magok alul befogottak;
5) az épületek födémei saját síkjukban merev tárcsát alkotnak, síkjukra merőlegesen viszont hajlékonyak;
6) a nyírásközéppont helye csak a geometriai jellemzők függvénye.

Vizsgálataink során egységes tárgyalásmódot alkalmazunk, mind a különböző szerkezeti egységek (keretek, nyílásokkal áttört falak, falak és magok) kezelésekor, mind pedig a különböző (szilárdsági, dinamikai és stabilitási) vizsgálatok végrehajtása során. Végig ugyanazt a terminológiát használjuk és bemutatjuk, hogy a látszólag egymástól független területek (alakváltozások, frekvenciák és kritikus terhek) valójában igen szoros kapcsolatban vannak egymással. A globális biztonsági tényező látványos – és igen hasznos – módon teremt kapcsolatot közöttük és a szerkezetek hatékony viselkedése között.

Az ismertetett módszerek alkalmazását számos példa segítségével mutatjuk be. Ezek többségét a legapróbb részletekig kidolgoztuk, megkönnyítve ezzel a gyakorlati alkalmazást. Néhány – gyakorlásra javasolt – példa esetében a végeredményeket az utolsó fejezetben adjuk meg. Bár a módszerek egyszerűek, a képletek zárt formában megadottak, a bonyolult térbeli viselkedés esetenként hosszadalmasabb számításokhoz vezet, amelyek kézi végrehajtása nem mondható vonzó feladatnak. Nincs is szükség hosszadalmas kézi számításokra, mert az eljárások táblázatkezelő (vagy egyszerű matematikai) programok alkalmazásával teljesen automatizálhatók és így a legbonyolultabb épület globális számítása is percek alatt elvégezhető. 19 ilyen kidolgozott számítás a [18] irodalom mellékleteként elérhető.

Az építőipari tervezési és kivitelezési gyakorlat ismeretében kijelenthető, hogy a bemutatott közelítő eljárások pontossága megfelelő. Ezt közel kétezer szerkezet és tucatnyi kis- és nagyléptékű modellkísérlet numerikus vizsgálatának adatai tanúsítják [18].

2

A merevítőrendszer elemei: keretek, falak és magok

Többszintes épületek merevítőrendszerei általában különböző típusú merevítőelemeket tartalmaznak: kereteket, nyílásokkal áttört falakat, tömör falakat és magokat. Rendszerint ezek mindegyike közreműködik a szerkezet szükséges merevségének biztosításában, de szerepük igen különböző lehet, mind típusában, mind pedig jelentőségében. Létfontosságú ezért, hogy a szerkezettervező ismerje viselkedésüket, annak érdekében hogy optimális merevítőrendszert tudjon kialakítani.

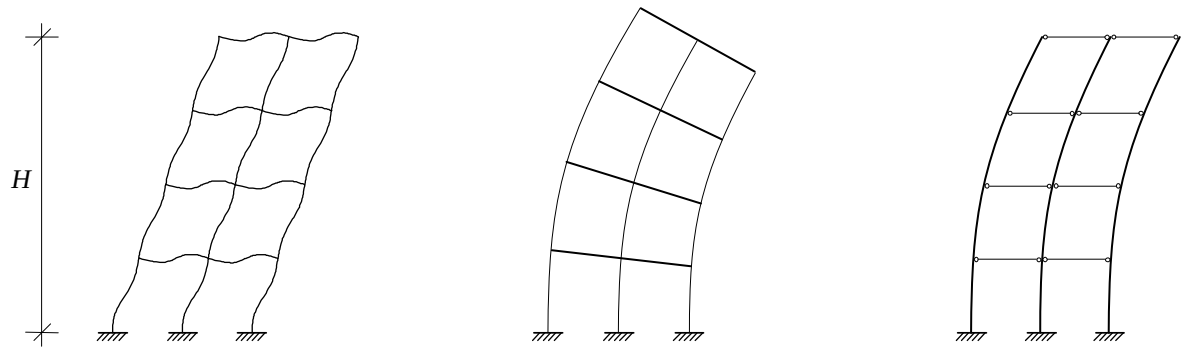
A keretek ugyan nem a leghatékonyabb merevítőelemek, de viselkedésük a legösszetettebb és így igen fontos szerepet játszanak az erőjáték megismerése során. Rendelkeznek mindhárom „alap” merevséggel: van lokális hajlítási merevségük, globális hajlítási merevségük és nyírási merevségük. Fontosságukat aláhúzza az a tény is, hogy gyakran egész szerkezeti rendszerek vizsgálata visszavezethető egyetlen keret, illetve helyettesítő tartójának vizsgálatára. Célszerű tehát vizsgálatainkat keretszerkezetek vizsgálatával kezdeni.

2.1 Keretek alakváltozása vízszintes teher hatására

Ebben az alfejezetben a magasság mentén egyenletesen megoszló vízszintes erőkkel terhelt, sarokmerev kapcsolatokkal rendelkező keretekkel foglalkozunk. Vizsgálataink során a szendvicselméletben bevezetett és a keretek vizsgálata során is szokásosan alkalmazott terminológiát és a szerkezettervezésben használatos jelöléseket használjuk.

2.1.1 Jellemző alakváltozások

A *H* magasságú keretet három jellegzetes merevséggel és a hozzájuk tartozó virtuális alakváltozással jellemezzük. A három típus a következő (2.1 ábra): az oszlopok és gerendák két csomópont között bekövetkező „S-alakú” meggörbülésével kapcsolatos és a szerkezet egészére kiterjedő *nyírási* alakváltozás, *globális hajlítási* alakváltozás (melynek során az egységes egésznek tekintett szerkezet az oszlopok tengelyirányú hosszváltozása következtében végez hajlítási alakváltozást) és *lokális hajlítási* alakváltozás (amikor a hajlítási alakváltozást a teljes *H* épületmagasságú és csuklósnak tekintett gerendákkal összekötött de egyébként egymástól függetlennek tekintett függőleges szerkezeti elemek – az oszlopok – végzik).



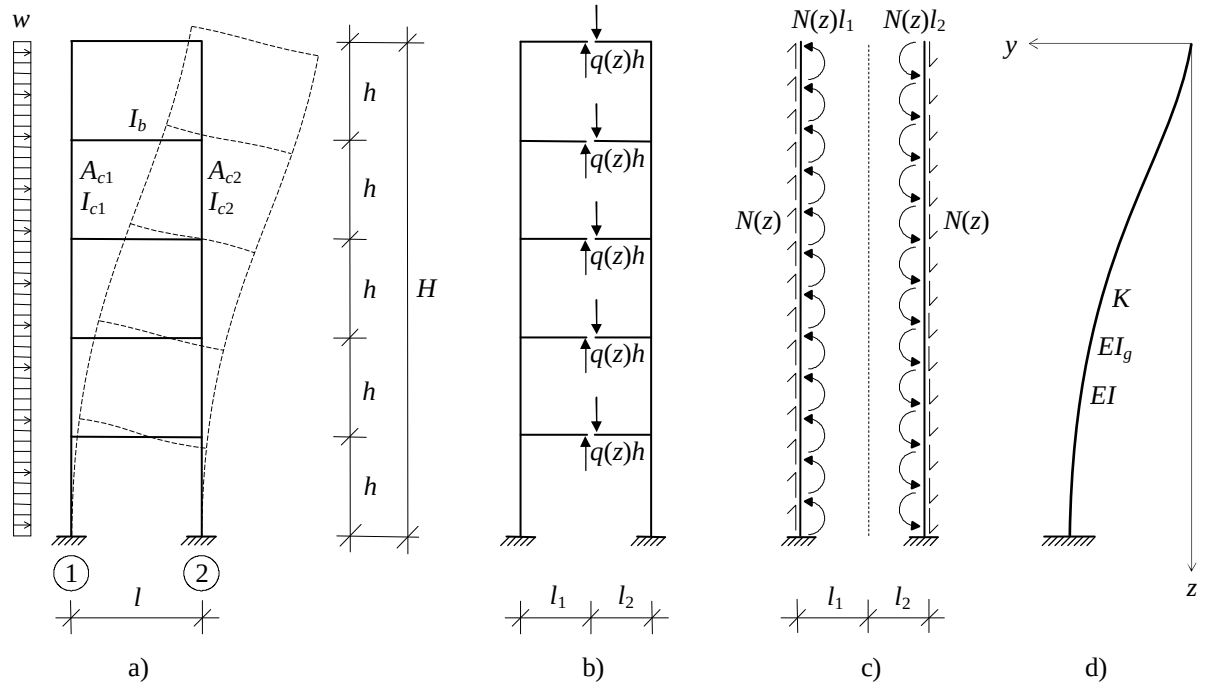
a) nyírási b) globális hajlítási c) lokális hajlítási

2.1 ábra. A keret jellemző virtuális alakváltozásai.

A keret tényleges alakváltozása a három virtuális alakváltozás kombinációja. A továbbiakban ezt a három merevséget és három virtuális alakváltozás típust használjuk, nem csak az ebben az alfejezetben végrehajtott eltolódásvizsgálathoz, hanem később az elcsavarodásvizsgálathoz, majd a frekvencia- és stabilitásvizsgálathoz is.

2.1.2 Kétlábas keret

A vizsgálathoz tekintsük először a 2.2/a ábrán vázolt, *w* intenzitású egyenletesen megoszló vízszintes teherrel terhelt, kétlábas keretet. A kontinuum-módszernél szokásos módon a keretgerendákat átvágottnak tekintjük az inflexiós pontokban (2.2/b ábra). Az így keletkező folytonosság-hiányt az inflexiós pontok által kijelölt függőleges egyenes mentén működő $q(z)$ intenzitású nyíróerő-folyam ellensúlyozza, amely szintenként $q(z)h$ erők formájában van jelen. [A $q(z)$ nyíróerő-folyam függvénye a 2.5/c ábrán látható.]



2.2 ábra. A kontinuum modell. a) az eredeti keret, b) $q(z)h$ nyíróerők az inflexiós pontokban átvágott gerendákban, c) a két oszlop és folytonos terheik, d) a helyettesítő tartó a jellemző merevségekkel.

Feltételezzük, hogy a gerendák száma „elegendő” ahhoz, hogy a szerkezetet folytonosnak tekinthessük. (Gyakorlati tapasztalatok szerint – összhangban a Bevezetés 1. sz. feltételével – a kontinuum módszer négyszintes szerkezetek esetében már biztonsággal alkalmazható.) A nyíróerő-folyamot ezután $N(z)$ normálerők és $N(z)l_1$ és $N(z)l_2$ nyomatékok formájában áthelyezzük az oszlopokra (2.2/c ábra). [Az $N(z)$ normálerő-függvény a 2.5/d ábrán látható.]

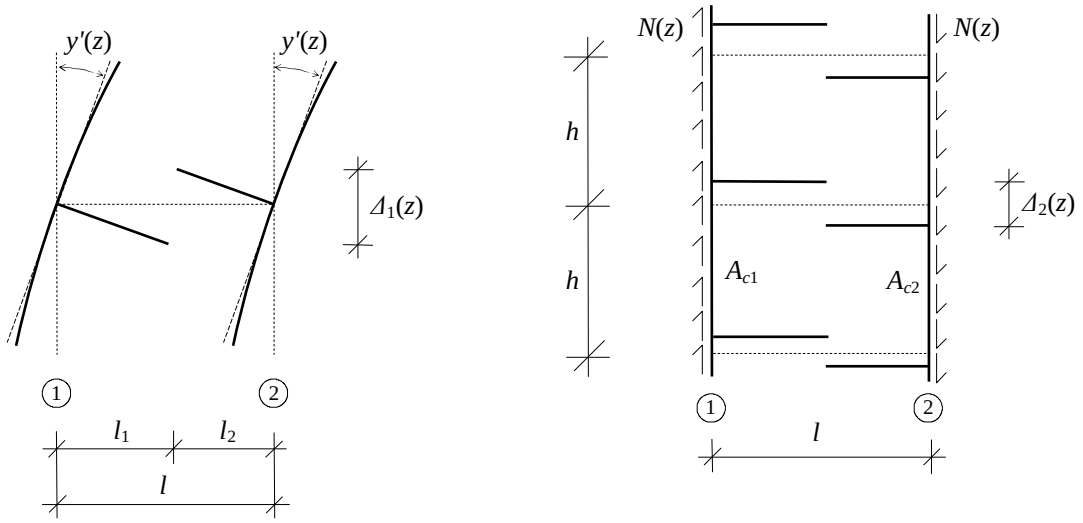
Végül – az inflexiós pontokban bekövetkező relatív elmozdulások zérusértékét kifejező differenciálegyenlet felállítása után [→ (2.9) egyenlet] – a probléma kontinuum-modelljéhez, a 2.2/d ábrán vázolt helyettesítő konzoltartóhoz jutunk. A következő levezetés Chitty [1] eredeti levezetését követi, de szerkezetépítő jelöléseket és terminológiát használ. A megoldás során viszont majd eltérünk az eredeti megoldástól és egy tetőponti origójú koordináta rendszert használva egy két-lépcsős eljárást alkalmazunk. Ez az eljárás az eltolódásokra egyszerű és a gyakorlati statikus vizsgálatok során jól használható, szemléletes képleteket eredményez.

A pillanatnyilag átvágottnak tekintett gerendák inflexiós pontjainál függőleges relatív elmozdulások jönnének létre. Ennek három különböző oka van, és a következőkben ezeket egymástól függetlennek képzelve vesszük sorba.

Az oszlopok hajlítása következtében létrejövő relatív eltolódás a 2.3/a ábra szerint

$$\Delta_1(z) = y'(z)(l_1 + l_2) = y'(z)l$$

ahol $y'(z)$ az oszlopok szögelfordulását jelenti. A sarokmerev kapcsolatnak köszönhetően az $y'(z)$ szögelfordulás érvényes a gerendákra is. A relatív eltolódás akkor pozitív, ha a baloldali oszlophoz tartozó gerendaszakasz vége lefelé, a másik gerendaszakasz vége pedig felfelé mozdul el.



a) az oszlopok elhajlása miatt b) az oszlopok tengelyirányú alakváltozása miatt

2.3 ábra. Relatív eltolódás az inflexiós pontban.

A gerendák inflexiós pontjaiban működő nyíróerőkből az oszlopokon keletkező normálerők az oszlopok megnyúlását, illetve összenyomódását okozzák (2.3/b ábra). Az ennek következtében létrejövő relatív eltolódás

$$\Delta_2(z) = -\frac{1}{E}\left(\frac{1}{A_{c1}} + \frac{1}{A_{c2}}\right)\int_z^H N(z)dz$$

ahol E a szerkezet rugalmassági tényezője, A_{c1} és A_{c2} az oszlopok keresztmetszeti területe, H a keret magassága és $N(z)$ az oszlopok tengelyirányú alakváltozását okozó normálerő:

$$N(z) = \int_0^z q(z)dz$$

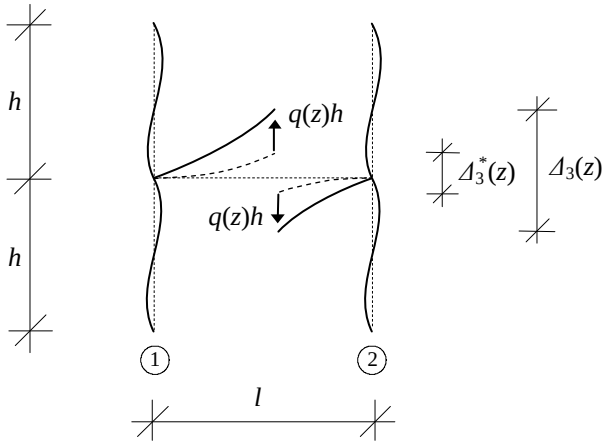
A harmadik relatív eltolódást az inflexiós pontban működő nyíróerők okozzák. Ezek a nyíróerők hajlítják a gerendaszakaszokat és ezáltal újabb relatív elmozdulás keletkezik (2.4 ábra). Ha az inflexiós pont a mező közepén van, akkor a relatív elmozdulás nagysága

$$\Delta_3^*(z) = -2\frac{q(z)h\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI_b} = -\frac{q(z)l^3h}{12EI_b} = -\frac{q(z)l^2}{\frac{12EI_b}{lh}} = -\frac{q(z)l^2}{K_b} \qquad (2.1)$$

ahol I_b a gerenda keresztmetszetének tehetetlenségi nyomatéka, h az emeletmagasság, l az oszlopok távolsága és

$$K_b = \frac{12EI_b}{lh} \tag{2.2}$$

az emeletmagasságra elosztott gerendamerevség.



2.4 ábra. A gerenda hajlítása miatt bekövetkező relatív eltolódás az inflexiós pontban.

A (2.1) összefüggés csak akkor érvényes, amikor a gerendák vízszintes érintővel indulnak a csomóponttól (szaggatott vonal a 2.4 ábrán). Ez az az eset, amikor az oszlopok merevsége végtelen nagynak tekinthető. A nyílásokkal áttört falak esetében ez, illetve ehhez közelálló lehet a helyzet, amikor is a gerendáknál jóval merevebb falszakaszok a csomópontoknál megakadályozzák az elfordulást. Kereteknél viszont nem ez a helyzet. A csomópontok között az oszlopok is meggörbülnek és ezzel a „lágyulással” növelik az inflexiós pontban a relatív eltolódást (folytonos vonal a 2.4 ábrán). Ebből az következik, hogy a 2.1 egyenletben megfogalmazott relatív eltolódás értékét módosítani kell, mivel az „oszloplágyulás” következtében a $\Delta_3^*(z)$ megnövekszik:

$$\Delta_3(z) = -\left(\frac{q(z)l^2}{\frac{12EI_b}{lh}} + \frac{q(z)l^2}{\frac{12EI_c}{h^2}} \right) = -q(z)l^2\left(\frac{1}{K_b} + \frac{1}{K_c} \right)$$

A fenti egyenletben bevezettük a magasság mentén elosztott oszlopmerevséget

$$K_c = \frac{12EI_c}{h^2} \tag{2.3}$$

ahol I_c az oszlopkeresztmetszetek tehetetlenségi nyomatéka.

A fenti két összetevővel [(2.2) és (2.3) képletek] már definiálható a keret magasság mentén elosztott *nyírási merevsége*:

$$K = \left(\frac{1}{K_b} + \frac{1}{K_c} \right)^{-1} = K_b \frac{K_c}{K_b + K_c} = K_b r \tag{2.4}$$

A fenti képletben bevezettük az

$$r = \frac{K_c}{K_b + K_c} \tag{2.5}$$

redukciós tényezőt, amely – a fentiek szerint – az oszlopok „lágyító” hatását kifejező tényezőként is értelmezhető. Az *r* tényező a későbbiekben még fontos szerephez jut.

Ha a K_b merevséget *K*-ra cseréljük a 2.1 egyenletben, megkapjuk az oszlopok meggörbülését is figyelembevevő tényleges relatív elmozdulást:

$$\Delta_3(z) = -\frac{q(z)l^2}{K}$$

A fenti összefüggés akkor „pontos”, ha a gerendák inflexiós pontja középen van, vagyis ha a szerkezet szimmetrikus. A gyakorlati esetek többségében azonban az összefüggés akkor is elfogadható pontosságú, amikor az oszlopok keresztmetszete különböző. Azokban az esetekben viszont amikor a gerendák nagyon eltérő keresztmetszetű oszlopokat kötnek össze, vagy merevítőfalba kötnek be, pontosabb eljárásra van szükség [7].

A fenti három relatív eltolódás akkor jönne létre, ha a gerendák át lennének vágva. A gerendák azonban a valóságban nincsenek átvágva, így a relatív eltolódások összege a tényleges szerkezet esetében zérus kell hogy legyen:

$$ly'(z) - \frac{q(z)l^2}{K} - \frac{1}{E}\left(\frac{1}{A_{c1}} + \frac{1}{A_{c2}}\right)\int_z^H N(z)dz = 0 \tag{2.6}$$

Figyelembe véve hogy

$$N'(z) = q(z) \tag{2.7}$$

és bevezetve az

$$I_g = A_{c1}l_1^2 + A_{c2}l_2^2 = \frac{A_{c1}A_{c2}}{A_{c1} + A_{c2}}l^2 \tag{2.8}$$

összefüggést mint a keretoszlopok globális tehetetlenségi nyomatékát, majd differenciálás és némi átrendezés után, a relatív eltolódás zérus értékét kifejező (2.6) egyenlet az

$$y''(z) - \frac{l}{K}N''(z) + \frac{l}{EI_g}N(z) = 0 \tag{2.9}$$

alakban írható. Az összefüggésben EI_g a keret *globális hajlítási merevsége*.

A következőkben a két oszlop hajlítását vizsgáljuk. Ehhez a hajlítás ismert általános egyenletét, az

$$y''(z)EI = -M(z)$$

differenciálegyenletet használjuk fel. Az összekötő gerendák a két oszlopot (az összegzett tehetetlenségi nyomatékukkal) azonos alakváltozásra kényszerítik. A külső (vízszintes teherből keletkező) nyomatékokat most ki kell egészíteni az inflexiós pontok egyenesében

működő nyíróerők okozta nyomatékokkal (2.2/b,c ábra):

$$y''(z)E(I_{c1}+I_{c2}) = -M(z) - (l_1+l_2)\int_z^0 q(z)dz$$

Bevezetve a keretoszlopok összegzett tehetetlenségi nyomatékát

$$I_c = I_{c1} + I_{c2} \tag{2.10}$$

a keret lokális tehetetlenségi nyomatékaként, figyelembe véve hogy $N(z)l_1 + N(z)l_2 = N(z)l$ és felhasználva az

$$\int_z^0 q(z)dz = -N(z)$$

összefüggést, a hajlítás differenciálegyenlete az

$$y''(z)EI_c = -M(z) + N(z)l \tag{2.11}$$

alakot ölti.

A keret vízszintes teher hatására bekövetkező elhajlásának differenciálegyenletét a (2.9) és (2.11) egyenletek kombinálásával kapjuk. A normálerő értékére a (2.11) egyenletből az

$$N(z) = \frac{1}{l}\left[y''(z)EI_c + M(z)\right]$$

összefüggést kapjuk. Ezt és a második deriváltját

$$N''(z) = \frac{1}{l}\left[y''''(z)EI_c + M''(z)\right]$$

a (2.9) egyenletbe helyettesítve az

$$y''''(z) - \left(\frac{K}{EI_c} + \frac{K}{EI_g}\right)y''(z) = \frac{1}{EI_c}\left(\frac{K}{EI_g}M(z) - M''(z)\right) \tag{2.12}$$

egyenlethez jutunk. Mielőtt az egyenlet megoldásával foglalkoznánk, némi módosítást kell végrehajtanunk. Elméleti [2] és numerikus vizsgálatok [16] tanúsága szerint a keret fenti differenciaegyenlettel jellemzett kontinuum modelljében az oszlopok hajlítási merevsége némileg túl van értékelve. (Alacsony keretek esetén ez a túlértékelés akár 16%-os, a biztonság kárára elkövetett hibát is eredményezhet.) A (2.5) összefüggéssel definiált redukciós tényező segítségével viszont ez a hiba korrigálható, oly módon, hogy a keretoszlopok (2.10) tehetetlenségi nyomatékát módosítjuk a redukciós tényezővel:

$$I = I_c r \tag{2.13}$$

Ennek megfelelően a továbbiakban az oszlopmerevség meghatározásánál ezt a módosított tehetetlenségi nyomatékot fogjuk használni és az

$$EI = EI_c r$$

összefüggéssel definiáljuk a keret *lokális hajlítási merevségét*.

A könnyebb kezelhetőség érdekében a következő – részben ideiglenes – jelöléseket vezetjük be:

$$a = \frac{K}{EI_g}, \qquad b = \frac{K}{EI}, \qquad \kappa = \sqrt{a+b} = \sqrt{bs}$$

$$s = 1 + \frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} = 1 + \frac{I_c r}{I_g} = \frac{I_g + I_c r}{I_g}, \qquad \frac{a}{a+b} = \frac{I_c r}{I_c r + I_g} \tag{2.14}$$

Fenti jelölésekkel és a nyomatékra vonatkozó $M(z) = wz^2/2$ összefüggés bevezetésével a (2.12) differenciálegyenlet a következő rövidebb alakban írható:

$$y''''(z) - \kappa^2 y''(z) = \frac{w}{EI}\left(\frac{az^2}{2} - 1\right) \tag{2.15}$$

Ez a keretet helyettesítő konzoltartó (2.2/d és 2.5/b ábrák) differenciálegyenlete, ahol EI a lokális hajlítási merevség, EI_g a globális hajlítási merevség és K a nyírási merevség.

A megoldás – a keret elhajlása – kétféleképpen is előállítható. Az egyik lehetőség az, hogy a (2.15) differenciálegyenletet közvetlenül, egy lépésben oldjuk meg [1]. A másik lehetőség az, hogy az egyenletet két lépésben oldjuk meg. Első lépésben előállítjuk a normálerőt, majd a normálerő ismeretében meghatározzuk az $y(z)$ vízszintes eltolódásokat. A megoldás során eldöntendő kérdés az is, hogy milyen koordinátarendszert alkalmazunk. A megoldás tartalma természetesen nem függ az alkalmazott koordinátarendszertől, és attól sem hogy a megoldást hány lépésben állítjuk elő. A megoldás menete – és nehézsége – viszont függ az alkalmazott megoldási technikától. Ami ennél is fontosabb, a megoldás (a végeredmény) formája/szerkezete is függ a választott megoldási eljárástól. Célunk egy olyan megoldás előállítása, amely szemléletes és jól értelmezhető információt ad a szerkezet merevségeinek az alakváltozás létrejöttében játszott szerepéről.

A fent vázolt lehetőségek figyelembevételével elvégzett megoldások során nyert tapasztalatok azt mutatták, hogy az a kétlépéses megoldás vezet a gyakorlatban legjobban hasznosítható megoldáshoz, amelynek során a koordinátarendszer kezdőpontja a helyettesítő konzoltartó tetőpontjához rögzítetten helyezkedik el (2.2/d és 2.5/b ábrák). A következőkben ezt a megoldást [18] mutatjuk be.

A (2.9) és (2.11) egyenleteket kombinálva és ismét felhasználva az $M(z) = wz^2/2$ összefüggést és a (2.14) jelöléseket, a normálerőre vonatkozó másodrendű differenciál-egyenlet a következő alakot ölti:

$$N''(z) - \kappa^2 N(z) = -\frac{bwz^2}{2l} \tag{2.16}$$

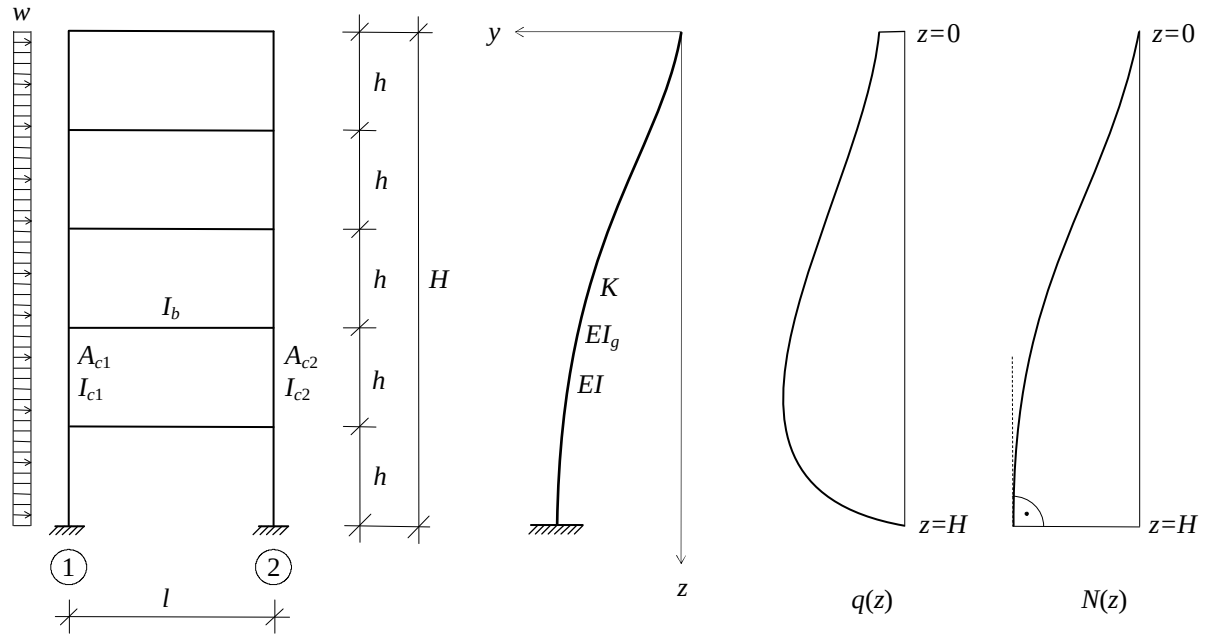
A differenciálegyenlet megoldásához két peremfeltételre van szükség. Az első peremfeltétel azt fejezi ki, hogy a normálerő értéke a tartó tetején zérus (2.5/d ábra):

$$N(0) = 0$$

A nyíróerő-folyam értéke a $z = H$-nál zérus (2.5/c ábra), hiszen a befogáshoz végtelen

közel képzelt gerenda az oszlopok függőleges érintője miatt nem görbülne meg. A második peremfeltétel így – a (2.7) egyenlet felhasználásával – a következő formában írható fel:

$$N'(H) = q(H) = 0$$



a) kétlábas keret b) helyettesítő tartó c) nyíróerő-folyam d) normálerő

2.5 ábra. F1 kétlábas keret (a 7.2 táblázat adataival); folytonosnak képzelt nyíróerő-folyam és normálerő.

A (2.16) differenciálegyenlet megoldását

$$N(z) = N_h(z) + N_p(z)$$

alakban keressük, ahol az

$$N_h(z) = A\sinh \kappa z + B\cosh \kappa z$$

a homogén megoldás, az

$$N_p(z) = Cz^2 + Dz + E$$

pedig az inhomogén probléma egy partikuláris megoldása.

Az N_p partikuláris megoldást és második deriváltját a (2.16) differenciálegyenletbe helyettesítve

$$2C - \kappa^2 Cz^2 - \kappa^2 Dz - \kappa^2 E = -\frac{bwz^2}{2l}$$

a C, D és E konstansok meghatározhatók, ha a z hatványainak együtthatóit mindkét oldalon egyenlővé tesszük:

$$C = \frac{bw}{2l\kappa^2}, \qquad D = 0, \qquad E = \frac{bw}{l\kappa^4}$$

A *C*, *D* és *E* konstansok ismeretében a megoldás

$$N(z) = A\sinh \kappa z + B\cosh \kappa z + \frac{bw}{2l\kappa^2} z^2 + \frac{bw}{l\kappa^4}$$

formában írható. A még hiányzó két konstans a rendelkezésre álló két peremfeltételből határozható meg:

$$N(0) = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = -\frac{bw}{l\kappa^4}$$

és

$$N'(H) = A\kappa\cosh \kappa H - \frac{bw}{l\kappa^3}\sinh \kappa H + \frac{bwH}{l\kappa^2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{bwH}{l\kappa^3 \cosh \kappa H}\left(\frac{\sinh \kappa H}{\kappa H} - 1\right)$$

A két konstans ismeretében a normálerő összefüggése a következő alakot (2.5/d ábra) ölti:

$$N(z) = \frac{bw}{l\kappa^2}\left(\frac{\sinh \kappa H \sinh \kappa z}{\kappa^2 \cosh \kappa H} - \frac{H \sinh \kappa z}{\kappa \cosh \kappa H} - \frac{\cosh \kappa z}{\kappa^2} + \frac{z^2}{2} + \frac{1}{\kappa^2}\right)$$

A normálerő fenti összefüggését a (2.11) egyenletbe helyettesítve a vízszintes eltolódások másodrendű differenciálegyenletéhez jutunk:

$$y''(z) = \frac{w}{EI}\left(\frac{bz^2}{2\kappa^2} + \frac{b}{\kappa^4} - \frac{z^2}{2} + \frac{b\sinh \kappa H \sinh \kappa z}{\kappa^4 \cosh \kappa H} - \frac{bH \sinh \kappa z}{\kappa^3 \cosh \kappa H} - \frac{b\cosh \kappa z}{\kappa^4}\right) \qquad (2.17)$$

A differenciálegyenlethez tartozó peremfeltételek azt fejezik ki, hogy a helyettesítő tartó tetőponti vízszintes eltolódása zérus (hiszen a koordinátarendszer kezdőpontja a tetőponttal együtt mozdul el)

$$y(0) = 0$$

és az érintő a befogásnál függőleges (2.5/b ábra):

$$y'(H) = 0$$

A differenciálegyenletet egyszer integrálva

$$y'(z) = \frac{w}{EI}\left(\frac{bz^3}{6\kappa^2} + \frac{bz}{\kappa^4} - \frac{z^3}{6} + \frac{b\sinh \kappa H \cosh \kappa z}{\kappa^5 \cosh \kappa H} - \frac{bH \cosh \kappa z}{\kappa^4 \cosh \kappa H} - \frac{b\sinh \kappa z}{\kappa^5}\right) + C_1$$

és felhasználva a második peremfeltételt, a konstans értékére

$$C_1 = \frac{w}{EI}\left(\frac{H^3}{6} - \frac{bH^3}{6\kappa^2}\right)$$

adódik. Felhasználva ezt az értéket és még egyszer integrálva az

$$y(z)=\frac{w}{EI}\left(\frac{bz^4}{24\kappa^2}+\frac{bz^2}{2\kappa^4}+\frac{H^3z}{6}-\frac{bH^3z}{6\kappa^2}-\frac{z^4}{24}+\frac{b\sinh\kappa H\sinh\kappa z}{\kappa^6\cosh\kappa H}-\frac{bH\sinh\kappa z}{\kappa^5\cosh\kappa H}-\frac{b\cosh\kappa z}{\kappa^6}\right)+C_2$$

egyenlethez jutunk, ahonnan az első peremfeltétel felhasználásával a második konstans értéke meghatározható:

$$C_2=\frac{bw}{EI\kappa^6}$$

A második konstans értékének visszahelyettesítésével megkapjuk a vízszintes eltolódások meghatározására szolgáló összefüggést:

$$y(z)=\frac{w}{EI}\left[\frac{H^3z}{6}-\frac{z^4}{24}+\frac{b}{\kappa^2}\left(\frac{z^4}{24}-\frac{H^3z}{6}+\frac{z^2}{2\kappa^2}+\frac{1}{\kappa^4}\right)-\frac{b}{\kappa^6}\left(\cosh\kappa z+\frac{\kappa H\sinh\kappa z}{\cosh\kappa H}-\tanh\kappa H\sinh\kappa z\right)\right]$$

Ez nem az a szemléletes képlet, aminek a létrehozását célul tűztük ki a Bevezetésben, illetve a (2.15) differenciálegyenlet felállítása után. Az összefüggés szerkezete viszont lehetővé teszi, hogy a (2.14) alatt összefoglalt jelölések ismételt felhasználásával (visszavezetésével) – bizonyos átalakítások után – a meglehetősen „ömlesztett” képletet sokkal kedvezőbb, a szerkezet viselkedését jobban bemutató alakra hozzuk:

$$y(z)=\frac{w}{EI_f}\left(\frac{H^3z}{6}-\frac{z^4}{24}\right)+\frac{wz^2}{2Ks^2}-\frac{wEI}{K^2s^3}\left(\frac{\cosh\kappa(H-z)+\kappa H\sinh\kappa z}{\cosh\kappa H}-1\right) \qquad (2.18)$$

vagy rövidebb alakban

$$y(z)=y_b(z)+y_s(z)-y_i(z)$$

Az összefüggés tisztán elkülönülő formában tartalmazza az alakváltozás két lényeges, meghatározó összetevőjét – az $y_b(z)$ hajlítási alakváltozást és az $y_s(z)$ nyírási alakváltozást – valamint a hajlítási és nyírási alakváltozás között létre jövő $y_i(z)$ egymásrahatás következményét:

$$y_b(z)=\frac{w}{EI_f}\left(\frac{H^3z}{6}-\frac{z^4}{24}\right) \qquad \text{és} \qquad y_s(z)=\frac{wz^2}{2Ks^2} \qquad (2.19)$$

és

$$y_i(z)=\frac{wEI}{K^2s^3}\left(\frac{\cosh\kappa(H-z)+\kappa H\sinh\kappa z}{\cosh\kappa H}-1\right) \qquad (2.20)$$

A (2.18) és (2.19) egyenletekben bevezettük a lokális és globális tehetetlenségi nyomatékok összegét az

$$I_f=I+I_g=I_cr+I_g \qquad (2.21)$$

összefüggés szerint.

Maximális vízszintes eltolódás a $z = H$-nál következik be:

$$y_{\max} = y(H) = \frac{wH^4}{8EI_f} + \frac{wH^2}{2Ks^2} - \frac{wEI}{K^2 s^3}\left(\frac{1+\kappa H \sinh \kappa H}{\cosh \kappa H} - 1\right) \tag{2.22}$$

vagy

$$y_{\max} = y(H) = y_b(H) + y_s(H) - y_i(H)$$

ahol a három jellemző összetevő:

$$y_b = \frac{wH^4}{8EI_f}, \qquad y_s = \frac{wH^2}{2Ks^2} \qquad \text{és} \qquad y_i = \frac{wEI}{K^2 s^3}\left(\frac{1+\kappa H \sinh \kappa H}{\cosh \kappa H} - 1\right) \tag{2.23}$$

2.1.3 Többnyílású, többszintes keretek

Bár a fenti összefüggések levezetése során kétlábas keretmodellre támaszkodtunk, az összefüggések érvényessége könnyen kiterjeszthető többnyílású keretekre (2.6 ábra).

Többnyílású keret esetén a teljes szerkezet nyírási merevségét a (2.4) összefüggéssel formailag azonos

$$K = \left(\frac{1}{K_b} + \frac{1}{K_c}\right)^{-1} = K_b \frac{K_c}{K_b + K_c} = K_b r \tag{2.24}$$

összefüggés segítségével határozzuk meg, ahol a nyírási merevség két összetevőjét a

$$K_b = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{12EI_{b,j}}{l_j h} \tag{2.25}$$

és

$$K_c = \sum_{j=1}^{n} \frac{12EI_{c,j}}{h^2} \tag{2.26}$$

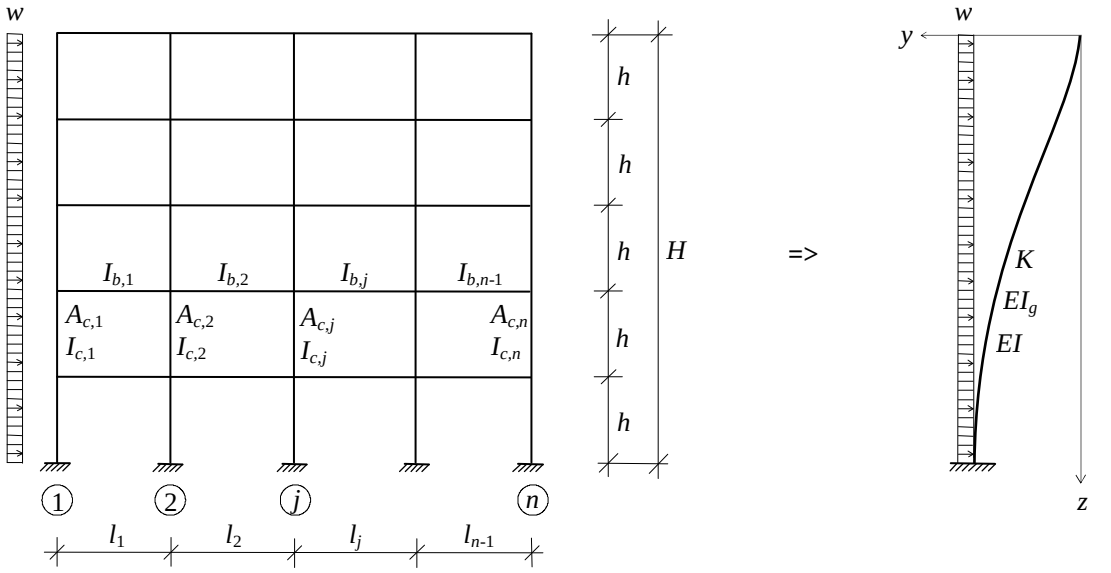
összefüggések szolgáltatják. A képletekben n a H épületmagas keretoszlopok száma. Az r redukciós tényező értékét a (2.25) és (2.26) összefüggések segítségével az

$$r = \frac{K_c}{K_b + K_c} \tag{2.27}$$

képlet adja meg.

A lokális hajlítási merevség ($EI = EI_c r$) előállításához – a (2.10) és (2.13) összefüggések alapján – az oszlopok tehetetlenségi nyomatékának összegét kell képezni (és a redukciós tényezővel megszorozni):

$$I = r \sum_{j=1}^{n} I_{c,j} \tag{2.28}$$



a) alapadatok b) a keret helyettesítő tartója

2.6 ábra. Többnyílású, többszintes keret.

A globális hajlítási merevség (EI_g) meghatározásához – a (2.8) összefüggés mintájára – az

$$I_g = \sum_{j=1}^{n} A_{c,j} t_j^2 \tag{2.29}$$

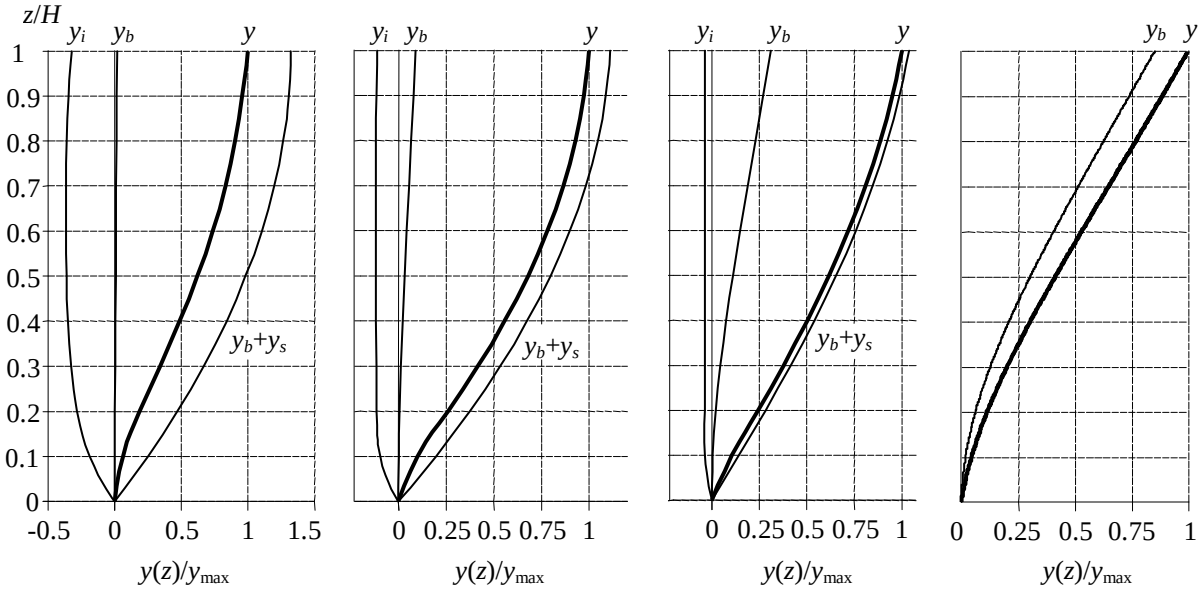
globális tehetetlenségi nyomatékot kell képezni, ahol $A_{c,j}$ a j-edik oszlop keresztmetszeti területe és t_j a j-edik oszlop távolsága az oszlopkeresztmetszetek súlypontjától.

A (2.29) képlet általában közelítő. A közelítés a biztonság kárára történik. Az elkövetett hiba négynyílású keretek esetén maximum 3%, tíznyílású keretek esetén maximum 6%.

2.1.4 Értékelés; speciális esetek

A (2.18) és (2.22) képletek numerikus értékelése céljából egy vizsgálatot hajtottunk végre, melynek során („pontos” számítógépes módszerrel is) meghatároztuk 90 keret alakváltozási görbéjét és a maximális tetőponti eltolódását. A szerkezetek széles skálán mozgó geometriai és merevségi adatokkal rendelkező kereteket tartalmaztak, melyek magassága nyolc lépésben öt szinttől nyolcvan szintig terjedt. Tipikus alakváltozási alakokat mutat a 2.7 ábra (ahol az eddigiektől eltérő módon a z tengely a szerkezetek aljától felfelé mutat). A számítási eredmények feldolgozása a következő észrevételekhez, illetve következtetésekhez vezet.

a) A hajlítási és nyírási alakváltozások közötti – a képletek harmadik tagjával jellemzett – egymásrahatás minden esetben előnyös, vagyis csökkenti a szerkezet maximális alakváltozását. A csökkenés mértéke 0-64% volt.
b) Az egymásrahatás jelentősége a szerkezetek magasságának növekedésével csökken. A maximális tetőponti eltolódást csökkentő hatás húsz szint felett már nem érte el a 20%-ot.
c) Az egymásrahatás eredménye a magasság mentén nagyjából egyenletesen jelentkezik (y_i a 2.7 ábrán).
d) A bemutatott módszer pontossága gyakorlati felhasználásra megfelelő. A hibatartomány -5% és 7% között, az átlaghiba abszolút értéke 1.2% volt.
e) A hajlítási és nyírási alakváltozások egymásrahatásának – vagyis a képletek harmadik tagjának – elhanyagolásával igen egyszerű (bár nagyobb hibahatárú) képlet adható meg a vízszintes eltolódás közelítő meghatározására. A képletek ekkor a biztonság javára közelítenek.



a) 5-emeletes keret b) 10-emeletes keret c) 20-emeletes keret d) 80-emeletes keret

2.7 ábra. Tipikus y alakváltozási módok az y_b hajlítási, y_s nyírási és y_i egymásrahatást kifejező összetevőkkel.

A (2.18) és (2.22) összefüggések tartalmi vizsgálata az alábbi általános észrevételekhez vezet, illetve speciális esetek megkülönböztetésére nyújt lehetőséget.

a) Dominálóan nyírási alakváltozást végző keretek és nyílásokkal áttört falak. Ide tartoznak a nagy gerendamerevséggel rendelkező és/vagy alacsony és többnyílású („zömök") keretek. Ezek esetében a lokális és globális hajlítómerevség hatása kicsi és általában elhanyagolható.

Ezt az esetet az $I_g >> I_c$ jellemzi, ami az $a \to 0$ és $b \to \infty$ tényezőkhöz vezet. A (2.15) differenciálegyenlet szingularitás miatt közvetlenül nem használható, de – némi átalakítás után – a (2.12) differenciálegyenlet igen, ami az

$$y''(z) = \frac{w}{K}$$

differenciálegyenletre egyszerűsödik, ahol $K \approx K_b$. Az $y(0) = 0$ és $y'(H) = 0$ peremfeltételekkel kiegészített egyenlet az

$$y(z) = \frac{wz^2}{2K} \qquad \text{és} \qquad y_{\max} = y(H) = \frac{wH^2}{2K}$$

megoldást adja az alakváltozási görbére és a maximális tetőponti eltolódás értékére. A keret jellemző alakváltozását a 2.1/a ábra mutatja.

b) Dominálóan lokális hajlítási alakváltozást végző keretek. (Ide tartozhatnak a nyílásokkal áttört falak is.) Az ehhez az – inkább elméleti – esethez tartozó keretek gerendái csak minimális hajlítási merevséggel rendelkeznek vagy nem is rendelkeznek hajlítási merevséggel. A gerendák szerepe így főleg arra szorítkozik, hogy a vízszintes erők továbbításával a keret oszlopait együttdolgoztatják.

Mivel a nyírási merevség egyik összetevője zérus, vagy elhanyagolhatóan kicsi ($K_b \approx 0$), maga a nyírási merevség is zérus ($K = 0$). Ebből az következik, hogy az a, b és κ tényezők

értéke is zérushoz tart. A (2.15) differenciálegyenlet az

$$y''''(z) = -\frac{w}{EI}$$

alakra egyszerűsödik. Az egyenlet megoldása az alakváltozásra, illetve a maximális vízszintes eltolódásra az

$$y(z) = \frac{w}{EI_c}\left(\frac{H^3 z}{6} - \frac{z^4}{24}\right) \qquad \text{és} \qquad y_{\max} = y(H) = \frac{wH^4}{8EI_c}$$

összefüggéseket szolgáltatja, ahol EI_c az oszlopok hajlítási merevségeinek összege. Ez az alakváltozás a három jellemző alakváltozás-típus egyikeként a 2.1/c ábrán látható, ahol a csuklós rudaknak képzelt összekötő gerendák csak vízszintes erőket (de nyomatékokat nem) adnak át az oszlopokra.

c) Dominálóan globális hajlítási alakváltozást végző keretek. Ide a magas és keskeny („karcsú") keretek tartoznak.

A (2.18) és (2.22) összefüggések második és harmadik tagja nagyságrenddel kisebb az első tagnál és így az alakváltozásra, illetve a maximális vízszintes eltolódásra szolgáló képletek egyszerűsödnek:

$$y(z) = \frac{w}{EI_f}\left(\frac{H^3 z}{6} - \frac{z^4}{24}\right) \qquad \text{és} \qquad y_{\max} = y(H) = \frac{wH^4}{8EI_f}$$

Ezt az esetet a 2.1/b ábra szemlélteti.

d) A keretek oszlopai nem végeznek tengelyirányú alakváltozást. Ebben az elméleti esetben a szerkezet nem végez globális hajlítási alakváltozást.

Ezt az elméleti esetet az $A_{c,j} \to \infty$ jellemzi, aminek a következményei $I_g \to \infty$, $a \to 0$, $\kappa^2 \to b$ és $s \to 1$. A (2.15) differenciálegyenlet ekkor az

$$y''''(z) - by''(z) = -\frac{w}{EI}$$

egyszerűbb alakot ölti. A differenciálegyenlet megoldása és a maximális tetőponti vízszintes eltolódás:

$$y(z) = \frac{wz^2}{2K} - \frac{wEI}{K^2}\left(\frac{\cosh \kappa(H-z) + \kappa H \sinh \kappa z}{\cosh \kappa H} - 1\right) \quad \text{és} \quad y_{\max} = \frac{wH^2}{2K} - \frac{wEI}{K^2}\left(\frac{1 + \kappa H \sinh \kappa H}{\cosh \kappa H} - 1\right)$$

A fenti két képlet a (2.18) és (2.22) összefüggések segítségével is előállítható, ha elhagyjuk az első tagot, amely az $I_g \approx \infty$ miatt kiesik, és felhasználjuk az $s = 1$ összefüggést. Az eredeti első tag hiánya a fenti képletekben azt mutatja, hogy a szerkezet közvetlenül nem „hasznosítja" a hajlítási merevségét. A hajlítási merevség azért (közvetve) szerepet játszik, a második tagon keresztül, amely a hajlítási és nyírási alakváltozások egymásrahatását veszi figyelembe.

2.2 Keretek frekvenciavizsgálata

A keretek frekvenciavizsgálatára rendelkezésre álló ismert közelítő módszerek különböző egyszerűsítő feltételezésekkel élnek, különböző bonyolultságúak, de van egy közös jellegzetességük: nincsenek alátámasztva olyan numerikus vizsgálatokkal, amelyek információt szolgáltatnának pontosságukról és rögzítenék az alkalmazhatósági határokat. Ezek fontos hiányosságok, ugyanis meglévő szerkezeteken végrehajtott frekvenciamérések és Jeary és Ellis kutatásai azt bizonyítják, hogy a közelítő módszerek pontossága igen széles skálán mozog és a módszerek esetenként akár elfogadhatatlanul pontatlan eredményeket is adhatnak [3].

Az itt bemutatandó közelítő módszer igen egyszerű, percek alatt eredményhez vezet és egy igen részletes pontosságvizsgálat eredményei szerint a gyakorlatban megfelelő biztonsággal alkalmazható.

Az első fejezetben részletezett feltételezéseken túlmenően feltételezzük még azt, hogy a szerkezet tömege a födémszinteken koncentrálódik.

A vizsgált többszintes és többnyílású kereteket ismét a 2.1.1 pontban már bemutatott három virtuális alakváltozás-típussal (2.1 ábra) és a hozzájuk tartozó három merevséggel jellemezzük. A keret síkbeli rezgéséhez tartozó sajátfrekvenciát a három merevséghez tartozó rezgésmódok, illetve frekvenciák segítségével határozzuk meg. Ezek a következők: a gerendák és oszlopok két csomópont közötti meggörbülésével kapcsolatos nyírási alakváltozás, a globális hajlítási alakváltozás (amikor a keret egységes egészként hajlik el oldalirányban) és a lokális hajlítási alakváltozás (amikor az oldalirányú elhajlást a végükön csuklósnak tekintett gerendákkal összekötött teljes magasságú oszlopok hajtják végre). A keret végleges alakváltozása a három rész-alakváltozás segítségével tehető össze. Hasonló módon a sajátfrekvencia is a három merevséghez kapcsolt három rész-frekvencia segítségével állítható elő. Ezek a K, EI_g és EI merevségek azonosak a 2.1.1 pontban már definiált merevségekkel.

A nyírási rezgés (2.1/a ábra) a keret nyírási merevséghez kapcsolódik. Értékét a magasság mentén egyenletesen elosztott nyírási merevségű és tömegű konzoltartóra levezetett képlet [12] felhasználásával határozhatjuk meg:

$$f_{s'}^2 = \frac{1}{(4H)^2}\frac{r_f^2 K}{m} \tag{2.30}$$

A képletben K a (2.24), (2.25), (2.26) és (2.27) képletekkel meghatározható nyírási merevség, H a keret magassága és m [kg/m] a szerkezet egységhosszra jutó tömege:

$$m = \frac{M_i}{h} = \frac{pL}{gh}$$

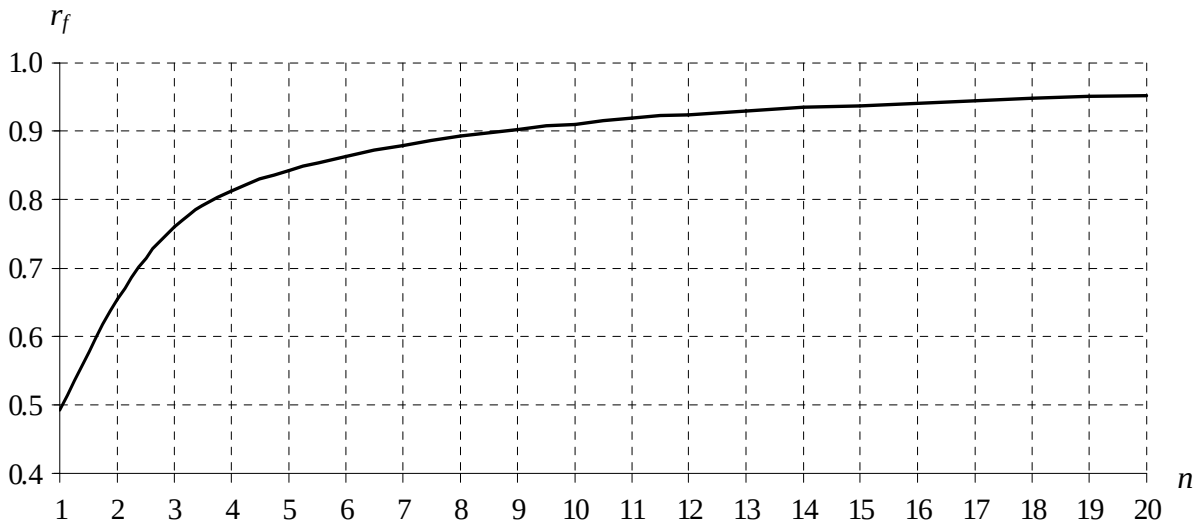
ahol M_i [kg] a födémszinteken koncentrált tömeg, h az emeletmagasság, p [kN/m] a keret egyenletesen megoszló födémterhe (2.9 ábra) és g = 9.81 m/s^2 a nehézségi gyorsulás.

A (2.30) képletbe beépítettük az r_f redukciós tényezőt is [16], amely azt veszi figyelembe, hogy a keret tömege nem egyenletesen megoszló a magasság mentén (mint ahogy az eredeti levezetés feltételezi), hanem – összhangban a fenti feltételezésünkkel – a födémszinteken koncentrálódik. A tényező értéke az $n \geq 3$ esetben az $r_f = [n/(n+2.06)]^{1/2}$ képletből számítható ki vagy az n emeletszám függvényében a 2.8 ábra diagramjáról olvasható le. A diagram maximum 20 szintes keretekre ad r_f értékeket. Magasabb szerkezetek esetén a 4.1 táblázat is használható.

A keret globális hajlítási rezgése (2.1/b ábra) tiszta hajlítási rezgést jelent. A keret H

magasságú oszlopai egy képzelt tömör rúd hosszanti szálaiként működnek (megnyúlva és összenyomódva) és a gerendák szerepe ekkor az, hogy – merevnek képzelt kapcsolatuk révén – a gerendákban keletkező nyíróerőket normálerők formájában továbbítsák az oszlopokra. Az ezzel az alakváltozással társított hajlítási merevség az EI_g globális hajlítási merevség, amely a (2.29) összefüggés felhasználásával határozható meg. Az ehhez az alakváltozáshoz tartozó rezgés frekvenciáját Timoshenko klasszikus összefüggése [10] segítségével határozhatjuk meg, amelyet szintén ki kell egészíteni az r_f redukciós tényezővel:

$$f_g^2 = \frac{0.313 r_f^2 EI_g}{H^4 m} \tag{2.31}$$



2.8 ábra. Az r_f redukciós tényező az n szintszám függvényében.

Noha a keretszerkezetekről gyakran rutinszerűen azt mondják hogy (a szerkezet egésze szempontjából) nyírási típusú alakváltozást végeznek, a valóság nem ilyen egyszerű. A 2.7 ábra tanúsága szerint – és ez számtalan különböző kialakítású és magasságú keret alakváltozásának megfigyelésével alátámasztható – a keret alakváltozási típusa a magasság függvényében is változik. Alacsony keretek általában dominálóan nyírási típusú alakváltozást végeznek, de a magasság növelésével ez vegyes hajlítási-nyírási alakváltozásba megy át, majd magas (és keskeny) keretek esetében általában a hajlítási rezgésalak a domináló. Ennek a jelenségnek az áll a hátterében, hogy bizonyos kölcsönhatás figyelhető meg a nyírási és globális hajlítási alakváltozás között. A keret magasságának növekedésével az oszlopok tengelyirányú alakváltozásának a hatása is nő. Ez az alakváltozás – az oszlopok megnyúlása és összenyomódása – hatással van a nyírási merevségre is. Ez a jelenség a nyírási merevség szempontjából akár „fellazító" hatásnak is tekinthető, ami oda vezet, hogy a nyírási alakváltozás létrejöttéhez egyre kevesebb tér marad. A nagyon magas (és keskeny) keretek oldalirányú kilendülési alakja szemlélteti is ezt a jelenséget, hiszen gyakran egyáltalán nem mutat nyírási alakváltozási jelleget.

Ez a jelenség igen egyszerűen figyelembe vehető, ha bevezetjük a *hatékony* nyírási merevség fogalmát (s index). Erre a Föppl-Papkovics tétel [9] alkalmazásával egyszerű lehetőség nyílik. A tételt a keret K (eredeti) nyírási merevségéhez (s' index) és globális hajlítási merevségéhez (g index) tartozó frekvenciák négyzetére alkalmazva az

$$\frac{1}{f_s^2} = \frac{1}{f_{s'}^2} + \frac{1}{f_g^2}$$

összefüggéshez jutunk. Az összefüggés átrendezésével kifejezhető a csökkentett nyírási merevséghez tartozó frekvencia (illetve a frekvencia négyzete):

$$f_s^2 = f_{s'}^2 \frac{f_g^2}{f_{s'}^2 + f_g^2} = \frac{1}{(4H)^2} \frac{r_f^2 K_e}{m} \tag{2.32}$$

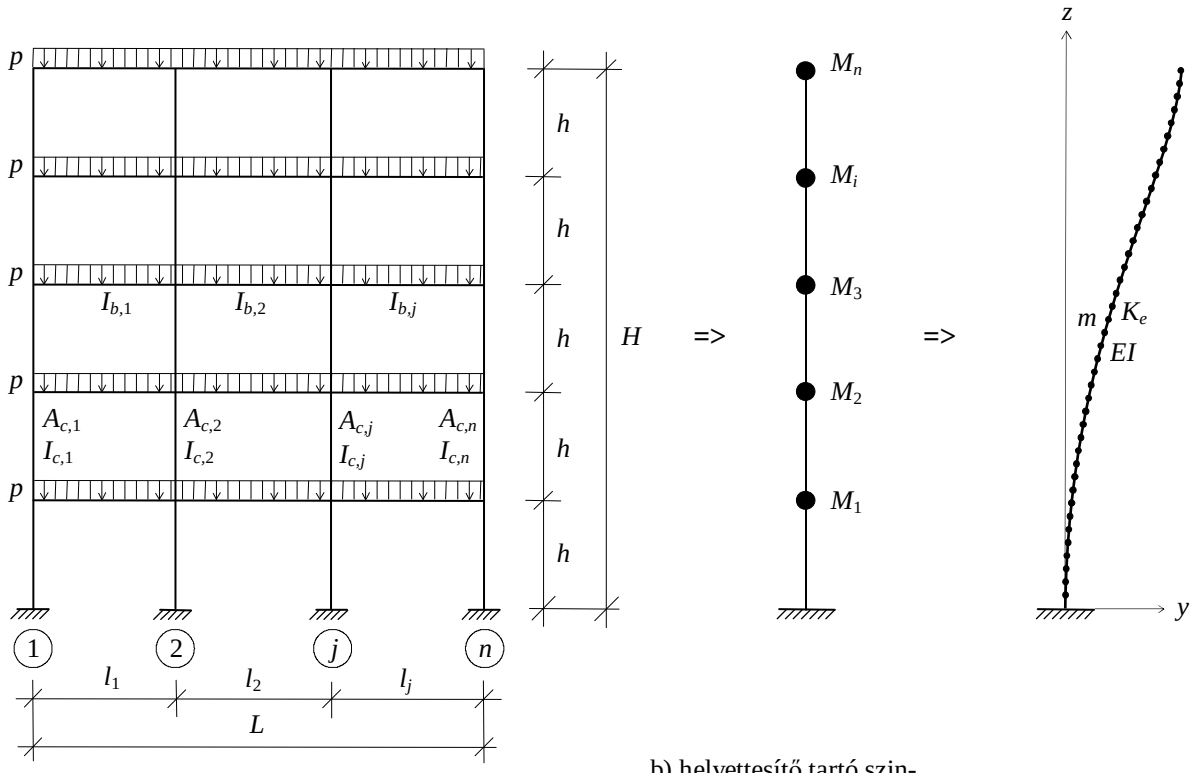
Fenti összefüggésben K_e a hatékony nyírási merevség a

$$K_e = s_f^2 K \tag{2.33}$$

képlet szerint, ahol

$$s_f = \sqrt{\frac{f_g^2}{f_{s'}^2 + f_g^2}} = \sqrt{\frac{K_e}{K}} \tag{2.34}$$

a nyírási merevség hatékonysági mutatója.



a) többnyílású keret

b) helyettesítő tartó szintenkénti tömeggel

c) kontinuum modell

2.9 ábra. A kontinuum modell származtatása a frekvenciavizsgálathoz.

A keret más módon is végez hajlítási rezgéseket. A *H* épületmagasságú oszlopok oldalirányú rezgése – a lokális hajlítási rezgés – szintén tiszta hajlítási alakváltozással jár (2.1/c ábra). Az ehhez az alakváltozáshoz tartozó *EI* merevséget a (2.28) összefüggés segítségével határozzuk meg. Az ehhez az esethez tartozó frekvenciát ismét Timoshenko képletének felhasználásával állítjuk elő:

$$f_b^2 = \frac{0.313 r_f^2 EI}{H^4 m} \tag{2.35}$$

A keretet most már a 2.9/c ábrán vázolt helyettesítő tartóval modellezhetjük, amelyet a K_e hatékony nyírási merevség és az EI lokális hajlítási merevség (és a hozzájuk tartozó frekvenciák) jellemeznek.

Mielőtt felírjuk a feladat differenciálegyenletét és előállítjuk a pontos megoldást, bemutatunk egy közelítő megoldást, amely – alsó korlátként – segíti a pontos megoldás előállítását is. A Southwell-tételt a hajlítási és nyírási merevségekhez tartozó frekvenciák négyzeteire alkalmazva – (2.35) és (2.32) képletek – azok egyszerű összegzésével megadható egy igen egyszerű összefüggés a keret legkisebb sajátfrekvenciájának meghatározására:

$$f_{\text{Southwell}}^2 = f_b^2 + f_s^2 = \frac{0.313 r_f^2 EI}{H^4 m} + \frac{1}{(4H)^2}\frac{r_f^2 K_e}{m} \tag{2.36}$$

A pontos megoldás előállítása érdekében a helyettesítő tartó (2.9/c ábra) egy elemi szakaszának egyensúlyát vizsgáljuk [15], melynek során előállítható a probléma differenciálegyenlete

$$r_f^2 EIv''''(z,t) - r_f^2 K_e v''(z,t) + m\ddot{v}(z,t) = 0$$

ahol $v(z,t)$ y irányú mozgást, a vesszők és pontok a z (hely) és t (idő) szerinti differenciálást jelentik. A megoldás

$$v(z,t) = v_1(z)v_2(t)$$

szorzat alakban kereshető, ahol $v_1(z)$ csak helytől, $v_2(t)$ pedig csak időtől függ.

A változók szétválasztása és az időtől függő tagok kiküszöbölése után az

$$r_f^2 EIv_1''''(z) - r_f^2 K_e v_1''(z) - \omega^2 m v_1(z) = 0 \tag{2.37}$$

peremértékfeladathoz jutunk, ahol már csak az időtől nem függő vízszintes mozgásokat kifejező $v_1(z)$ szerepel. Az egyenletben ω a körfrekvencia.

A helyettesítő tartó befogási keresztmetszetében lévő origójú koordinátarendszerben (2.9/c ábra) a differenciálegyenlethez a

$$v_1(0) = 0 \qquad\qquad v_1'(0) = 0$$

és

$$v_1''(H) = 0 \qquad\qquad EIv_1'''(H) - K_e v_1'(H) = 0$$

peremfeltételek tartoznak.

A megoldás

$$v_1(z) = c_1 \sinh \alpha z + c_2 \cosh \alpha z + c_3 \sin \beta z + c_4 \cos \beta z$$

alakban állítható elő, ahol

$$\alpha = \sqrt{\frac{K_e + \sqrt{K_e^2 + 4EI\omega^2 m}}{2EI}} \qquad \text{és} \qquad \beta = \sqrt{\frac{-K_e + \sqrt{K_e^2 + 4EI\omega^2 m}}{2EI}}$$

A peremfeltételek felhasználásával a

$$\frac{(\alpha H)^4+(\beta H)^4}{(\alpha H)^2(\beta H)^2}\cosh\alpha H\cos\beta H+\frac{(\alpha H)^2-(\beta H)^2}{\alpha H\beta H}\sinh\alpha H\sin\beta H+2=0$$

frekvenciaegyenlethez jutunk. A frekvenciaegyenlet első zérushelye szolgáltatja a legkisebb sajátfrekvencia meghatározásához szükséges frekvenciaparamétert. Ez a paraméter most két merevségtől (K_e és EI) függ és praktikus okokból célszerű bevezetni ezek arányát. Ezt a dimenziótlan

$$k=H\sqrt{\frac{K_e}{EI}} \tag{2.38}$$

tényező segítségével tesszük meg. A frekvenciaegyenletben szereplő körfrekvenciát az

$$\omega^2=\frac{(2\pi)^2\eta^2}{H^4}\frac{r_f^2EI}{m} \tag{2.39}$$

összefüggéssel adjuk meg, ahol η a frekvenciaparaméter. A (2.38) és (2.39) összefüggések segítségével a frekvenciaegyenlethez szükséges két tényező az

$$\alpha H=\sqrt{\frac{k^2+\sqrt{k^4+(4\pi\eta)^2}}{2}} \qquad \text{és} \qquad \beta H=\sqrt{\frac{-k^2+\sqrt{k^4+(4\pi\eta)^2}}{2}}$$

alakban írható.

A frekvenciaegyenlet különböző k merevségarányokra történő megoldása szolgáltatja az η frekvenciaparaméter értékeit, amelyeket a $0\geq k\geq 10$ tartományra a 2.10 ábra diagramja tartalmaz egész k értékekre. Nagyobb (vagy közbenső) k értékekre a 4.2 táblázat ad értékeket. A frekvenciaparaméter ismeretében a (2.39) képlet alapján az

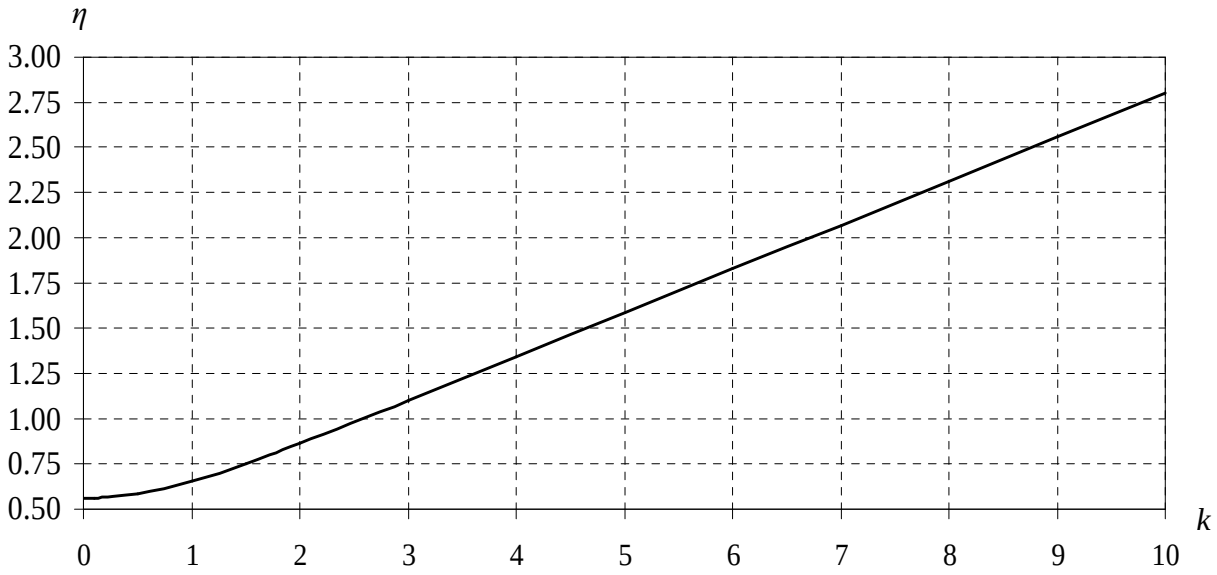
$$f^2=\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2=\frac{\eta^2}{H^4}\frac{r_f^2EI}{m} \tag{2.40}$$

összefüggéshez jutunk.

Mielőtt az eredményt felhasználnánk a legkisebb sajátfrekvencia meghatározására, némi módosítást kell végrehajtani. Ennek az az oka, hogy a (2.40) képlet „ömlesztve” tartalmaz három dolgot: a hajlítási és a nyírási merevségektől függő két „rész” frekvenciát valamint a két rezgéstípus egymásrahatásának következményét. Ezt a harmadik részt viszont el kell különíteni a részfrekvenciáktól, mert az egymásrahatás mértéke függ a nyírási merevség hatékonyságától is és ezt a tényt érvényesíteni kell az összefüggésben. Ezek a tagok szerencsére viszonylag könnyen elkülöníthetők a (2.32), (2.35) és (2.38) összefüggések felhasználásával.

A k tényező (2.38) képletéből az f_b és f_s részfrekvenciák segítségével könnyen kifejezhető a nyírási merevséghez tartozó részfrekvencia:

$$k^2=H^2\frac{K_e}{EI}=5\frac{f_s^2}{f_b^2} \qquad \rightarrow \qquad f_s^2=\frac{k^2}{5}f_b^2$$



2.10 ábra. Az η frekvenciaparaméter értékei a k dimenziótlan merevségarány függvényében.

Ha a (2.40) képletet az f_b bevonásával átalakítjuk és hozzáadjuk a zérusértékű $f_s^2 - f_s^2 + f_b^2 - f_b^2$ tagot

$$f^2 = \frac{\eta^2}{H^4}\frac{EIr_f^2}{m} = \frac{\eta^2}{0.313} f_b^2 + f_s^2 - f_s^2 + f_b^2 - f_b^2$$

akkor az f_s^2 fenti kifejezésének felhasználásával elkülöníthető a két – hajlítási és nyírási merevséghez tartozó – részfrekvencia. Így az

$$f^2 = f_b^2 + f_s^2 + \left(\frac{\eta^2}{0.313} - \frac{k^2}{5} - 1\right) f_b^2$$

összefüggéshez jutunk, ahol a „maradék” – a képlet harmadik tagja – tartalmazza az egymásrahatást. Az egymásrahatás viszont csak a nyírási merevség hatékonyságának megfelelő mértékben tud létrejönni, így ezt a tagot meg kell szorozni az s_f hatékonysági mutatóval. Ezzel előállítottuk a keret legkisebb sajátfrekvenciájának meghatározására szolgáló összefüggést:

$$f = \sqrt{f_b^2 + f_s^2 + \left(\frac{\eta^2}{0.313} - \frac{k^2}{5} - 1\right) s_f\, f_b^2} \qquad (2.41)$$

A (2.41) összefüggés vizsgálata valamint 216 különböző geometriai és merevségarányokkal rendelkező keretszerkezet legkisebb sajátfrekvenciájának kiértékelése a következő észrevételekhez vezet.

a) A hajlítási és nyírási alakváltozások közötti – a képletek harmadik tagjával jellemzett – egymásrahatás minden esetben növeli a keret sajátfrekvenciáját, figyelembe véve, hogy az $(\eta^2/0.313 - k^2/5) \geq 1$ összefüggés mindig fennáll. A 4.2 táblázat adatai szerint növekedés maximális értéke 62% (a k = 3.2 aránynál).
b) Az egymásrahatás jelentősége a szerkezetek magasságának növekedésével csökken. A sajátfrekvencia értékét növelő hatás a vizsgált szerkezetek esetében húsz szint felett már

nem érte el a 20%-ot. – A 2.7 ábrán bemutatott tipikus alakváltozási alakok a keretek rezgéseire is érvényesek.

c) Az egymásrahatás eredménye a magasság mentén nagyjából egyenletesen jelentkezik.

d) A bemutatott módszer pontossága gyakorlati felhasználásra megfelelő. A hibatartomány 90 fix megtámasztású keretnél -3% és 7% között, az átlaghiba abszolút értéke 1.6% volt.

e) A hajlítási és nyírási alakváltozások egymásrahatása – vagyis a képletek harmadik tagjának – elhanyagolásával az igen egyszerű (bár nagyobb hibahatárú) (2.36) képlethez jutunk a sajátfrekvencia közelítő meghatározására.

2.3 Keretek stabilitásvizsgálata

Az első fejezetben részletezett feltételeken túlmenően a stabilitásvizsgálathoz feltételezzük még, hogy

a) a kereteket a gerendákon egyenletesen megoszló teher terheli (2.11/a ábra),

b) a kritikus terhet az elágazási pont határozza meg.

A viszonylag egyszerű de még elfogadható pontosságú megoldás előállítása érdekében ismét a kontinuum módszert alkalmazzuk. A keret helyettesíthető egy vastaghéjalású szendvics oszloppal (2.11/c ábra), amelynek egyensúlyát vizsgálva a

$$\frac{B_0 B_l}{S}\varphi''''(z) - (B_0 + B_l)\varphi''(z) + N(z)\left(\frac{B_0}{S}\varphi''(z) - \varphi(z)\right) = 0$$

differenciálegyenlet vezethető le, ahol $\varphi(z)$ az oszlopkeresztmetszet normálisának elfordulása, $N(z)$ a tengelyirányú erő és B_0, B_l és S a szendvics oszlop globális hajlítási, lokális hajlítási és nyírási merevsége [2]. A differenciálegyenlet tetszőleges megoszlású axiális teher esetén érvényes, de a következőkben csak az egyenletesen megoszló esettel foglalkozunk.

A befogott alsó és szabad felső véggel rendelkező szendvicsoszlop és a felső keresztmetszethez rögzített kezdőpontú koordinátarendszer (2.11/c ábra) esetében az egyenlethez a

$$\varphi(H) = \varphi''(H) = 0$$

és

$$\varphi'(0) = \varphi'''(0) = 0$$

peremfeltételek tartoznak. A differenciálegyenlet megoldása a függőleges mentén egyenletesen megoszló teher esetére [amikor az $N(z) = qz$ összefüggés érvényes, ahol q a teher intenzitása] a következő igen egyszerű alakban adható meg:

$$N_{cr} = qH = c_1 \frac{B_0 + B_l}{H^2} \tag{2.42}$$

ahol a c_1 paraméter a $B_l/(B_0 + B_l)$ és az $SH^2/(B_0 + B_l)$ merevségarányok függvényében táblázatosan megadható.

A fenti egyszerű képlet némi módosítással használható többszintes, többnyílású keretek kritikus terhének meghatározására is. Először a szendvicsoszlop merevségeinek megfelelőit kell azonosítani. Ezeket a 2.11 ábrán megadott geometriai és merevségi jellemzők segítségével a szerkezettervezésben szokásos terminológia alkalmazásával az alábbiakban adjuk meg. (A merevségek nagyon hasonlóak a 2.1 pontban bevezetett merevségekhez.)

A keret K nyírási merevségét két összetevő segítségével lehet meghatározni. Az első – a globális nyírási merevségnek is nevezett – a keretek gerendáihoz köthető a

$$K_b = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{12EI_{b,j}}{l_j h} \tag{2.43}$$

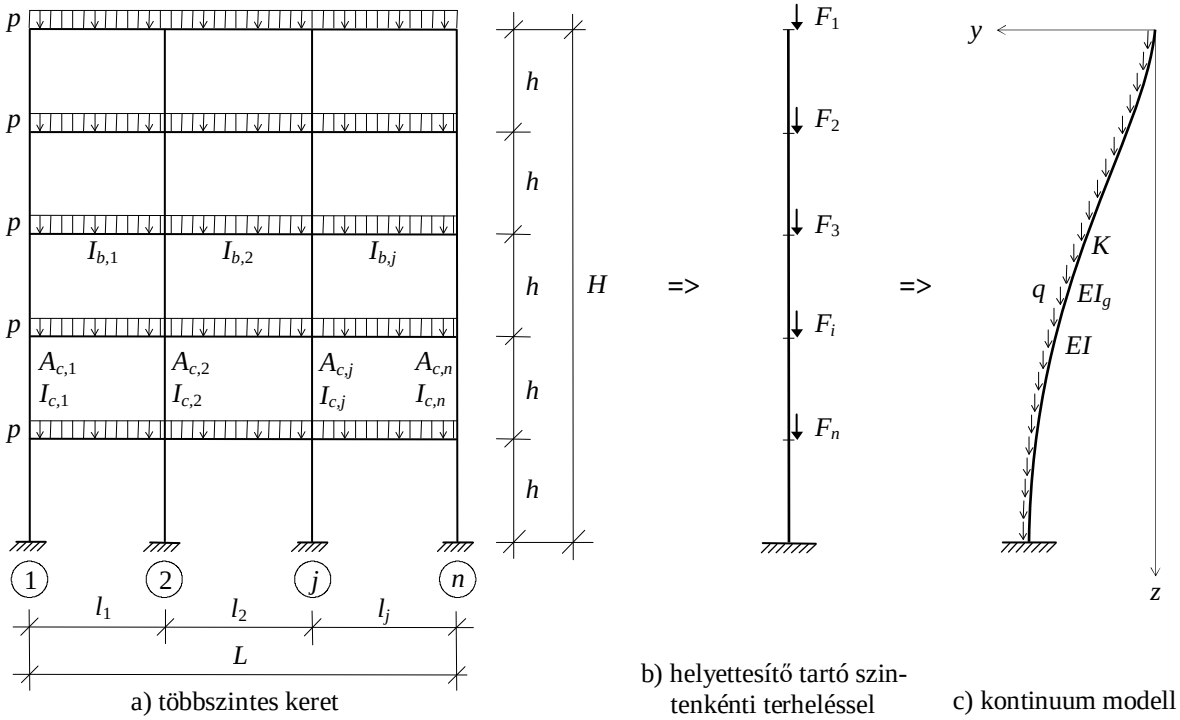
formában, ahol

E	a rugalmassági modulus,
$I_{b,j}$	a j-edik gerenda tehetetlenségi nyomatéka,
l_j	a j-edik gerenda hossza,
h	az emeletmagasság,
n	az oszlopok száma.

A nyírási merevség másik összetevője – a lokális nyírási merevségnek is nevezett rész – a keret oszlopaival kapcsolatos, illetve azzal a ténnyel, hogy az emeletmagas oszlopok két szint között vízszintes kilendülést hajthatnak végre:

$$K_c = \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi^2 EI_{c,j}}{h^2} \tag{2.44}$$

ahol $I_{c,j}$ a j-edik oszlop keresztmetszetének tehetetlenségi nyomatéka.



a) többszintes keret

b) helyettesítő tartó szintenkénti terheléssel

c) kontinuum modell

2.11 ábra. A kontinuum modell származtatása a stabilitásvizsgálathoz.

A fenti két összetevő segítségével a keret nyírási merevsége a

$$K = \left(\frac{1}{K_b} + \frac{1}{K_c} \right)^{-1} = K_b \frac{K_c}{K_b + K_c} = K_b r \tag{2.45}$$

alakban adható meg, ahol

$$r = \frac{K_c}{K_b + K_c} \tag{2.46}$$

a gerendamerevséghez köthető redukciós tényező.

A hasonlóság – és különbség – a 2.1 és 2.2 pontban az alakváltozások vizsgálatához, illetve a frekvenciaszámításhoz bevezetett nyírási merevség tekintetében figyelemreméltó. Részletesebb (a nyírási merevség összetevőire is kiterjedő) magyarázat található az 5. fejezetben, ahol térbeli rendszerek stabilitásvizsgálatával foglalkozunk.

Az EI_g globális hajlítási merevség a keret teljes magasságú, egységes egészként történő kihajlásával kapcsolatos, amikor a keretoszlopok egy hajlított tömör konzoltartó hosszanti szálaiként viselkednek. Kiszámítása a 2.1 pontban bemutatott módon az

$$I_g = \sum_{j=1}^{n} A_{c,j} t_j^2 \tag{2.47}$$

globális tehetetlenségi nyomaték segítségével történik, ahol $A_{c,j}$ a j-edik oszlop keresztmetszeti területe és t_j a j-edik oszlop távolsága az oszlopkeresztmetszetek súlypontjától.

Az $EI = EI_c r$ lokális hajlítási merevség a csuklósvégű gerendákkal összekötve képzelt teljes magasságú oszlopok konzolszerű kihajlásával kapcsolatos. Meghatározása szintén a 2.1 pontban elmondottak szerint, az

$$I = r \sum_{j=1}^{n} I_{c,j} \tag{2.48}$$

tehetetlenségi nyomaték segítségével történik, ahol $I_{c,j}$ a j-edik oszlop tehetetlenségi nyomatéka és r a (2.46) képlet által megadott redukciós tényező.

A fenti szendvics-megoldás alkalmazásához szükséges merevségek azonosítása után a terhelés vizsgálata következik. A szendvics-megoldás esetében a tartó terhelése a függőleges mentén egyenletesen megoszló tengelyirányú erőrendszer. A keret terhelése viszont a függőleges mentén nem folytonos, hanem a födémszinteken jelentkezik vízszintesen egyenletesen megoszló teherként (2.11/a ábra). Amikor a keretet a kontinuum módszer alkalmazásához a helyettesítő tartóval modellezzük, akkor ez a teher a födémszinteken jelentkező koncentrált erőrendszer formájában jelenik meg (2.11/b ábra). Ez az erőrendszer a függőleges mentén „elkenve” egyenletesen megoszló teherré alakítható át (2.11/c ábra). Ez az eljárás közelítő és a közelítés a biztonság kárára történik, mivel a födémszinteken jelentkező koncentrált erők „elkenése” csak lefelé történhet. Az eredeti erőrendszert képzeletben helyettesítő eredő erő támadáspontja így lefelé mozdul el, ami a stabilitás szempontjából egy kedvezőbb helyzetet teremt. Minél alacsonyabb a keret, annál nagyobb a közelítés hatása. Egy négyszintes szerkezet esetében például a közelítés közel 40%-al nagyobb kritikus terhet eredményez mint a tényleges terheléshez tartozó érték. Ilyen mértékű közelítés nem fogadható el. Nem is kell elfogadni, mert a Dunkerley-tétel alkalmazásával a teher „elkenésének” hatása könnyen figyelembe vehető. A tétel alkalmazásával meghatározható egy r_s korrekciós tényező, ami közvetlenül beépíthető a kritikus teher képletébe [16]. Ennek megfelelően a szendvics-megoldás alkalmazásával és módosításával a keret kritikus terhének meghatározására az

$$N_{cr} = qH = c_1 \frac{E(I + I_g) r_s}{H^2} \tag{2.49}$$

összefüggés adható meg, ahol EI a lokális hajlítási merevség, EI_g a globális hajlítási merevség és r_s a tehermegoszlás redukciós tényezője, melynek értékeit a 2.12 ábra diagramján találhatjuk. A 2.12 diagram maximum 20 szintes keretekre ad r_s értéket. Magasabb keretek esetén – vagy ha az ábráról leolvasható értéknél pontosabbra van szükség – az 5.1 táblázat használható. Az r_s tényező értékét egyébként $n \geq 3$ esetben az $r_s = n/(n+1.588)$ képletből is kiszámíthatjuk. (Az r_s korrekciós tényező tanulságos levezetése a [17] irodalomban is megtalálható.)

A c_1 tényező értékeit – a szendvics-megoldás alapján – a 2.1 táblázat tartalmazza az

$$\frac{I}{I + I_g} \tag{2.50}$$

és

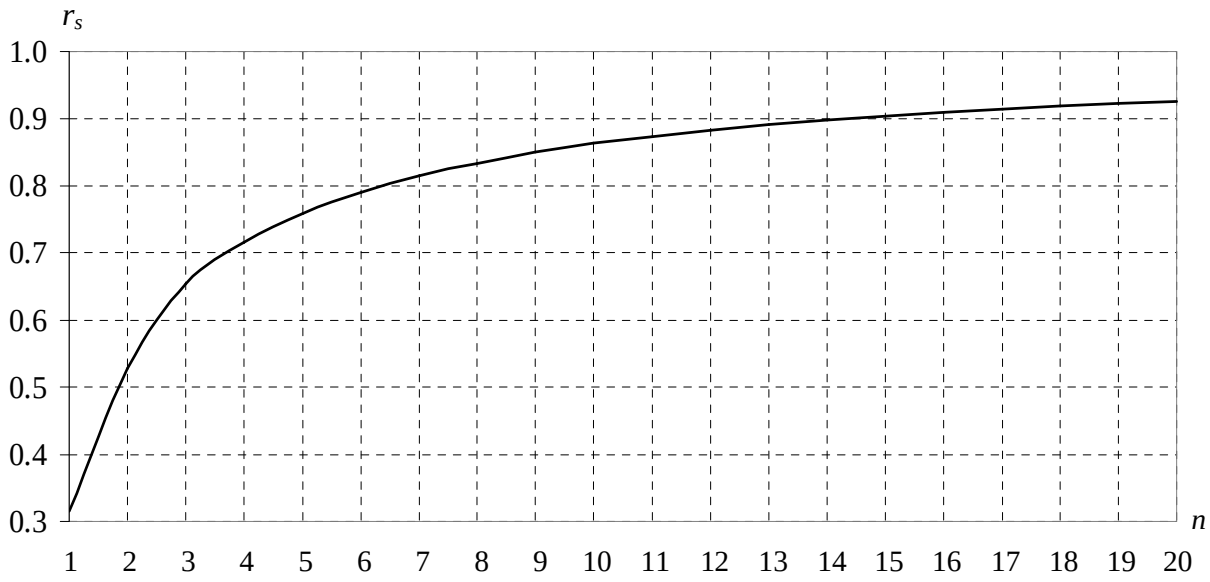
$$\frac{KH^2}{E(I + I_g)r_s} \tag{2.51}$$

függvényében, ahol K a keret nyírási merevsége.

2.1 táblázat. A c_1 paraméter értékei [2].

$\frac{KH^2}{E(I+I_g)r_s}$	$\frac{I}{I+I_g}$													
	0	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	1
0.00	0.000	0.0078	0.039	0.078	0.392	0.784	1.567	2.351	3.135	3.918	4.702	5.486	6.269	7.837
0.05	0.050	0.099	0.161	0.211	0.535	0.928	1.712	2.496	3.279	4.062	4.844	5.626	6.405	7.837
0.1	0.100	0.171	0.255	0.320	0.668	1.064	1.850	2.632	3.414	4.195	4.974	5.750	6.519	7.837
0.2	0.200	0.304	0.412	0.500	0.904	1.314	2.102	2.882	3.658	4.432	5.219	5.957	6.698	7.837
0.5	0.500	0.665	0.815	0.933	1.465	1.917	2.717	3.486	4.238	5.025	5.691	6.378	7.015	7.837
1	1.000	1.222	1.403	1.536	2.142	2.642	3.449	4.185	4.887	5.551	6.179	6.757	7.265	7.837
2	2.000	2.289	2.483	2.574	3.094	3.589	4.366	5.026	5.618	6.178	6.679	7.111	7.473	7.837
5	4.211	4.364	4.475	4.524	4.858	5.057	5.637	6.117	6.532	6.892	7.202	7.458	7.655	7.837
10	5.597	5.600	5.626	5.655	5.861	6.080	6.457	6.773	7.052	7.279	7.466	7.620	7.736	7.837
20	6.570	6.572	6.584	6.599	6.706	6.828	7.045	7.230	7.388	7.522	7.632	7.719	7.783	7.837
50	7.287	7.288	7.292	7.298	7.344	7.395	7.485	7.574	7.641	7.700	7.749	7.787	7.815	7.837
100	7.554	7.555	7.557	7.560	7.583	7.609	7.657	7.700	7.736	7.767	7.792	7.812	7.826	7.837
∞	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837

Itt említjük meg, hogy sok gyakorlati esetben a fent bemutatott eljárásnál egyszerűbb megoldást is alkalmazhatunk. Egy ilyen módszert a 2.4.1 pontban ismertetünk.



2.12 ábra. Az r_s redukciós tényező az n szintszám függvényében.

A frekvenciavizsgálathoz hasonlóan a stabilitásvizsgálatra fent bemutatott módszer pontosságát is megvizsgáltuk és azt tapasztaltuk hogy (2.49) képlet pontossága gyakorlati felhasználásra megfelelő. A hibatartomány 90 teszt-szerkezet esetében -5% és 14% között, a hiba abszolút értékének átlaga 3.3% volt.

2.4 Speciális kialakítású keretek

Az előző pontokban bemutatott módszerek „oszlop-gerenda” típusú keretekkel foglalkoztak és a feltételek azonos emeletmagasságot és befogott megtámasztásokat írtak elő. A módszerek azonban más típusú keretek vizsgálatára is alkalmazhatók, esetenként bizonyos módosításokkal, ha a jellemző három merevség – a nyírási valamint a lokális és globális hajlítási merevség – ismert, illetve meghatározható. Néhány esetben akár a bemutatott módszereknél egyszerűbb megoldások is előállíthatók. A következőkben ilyen eseteket mutatunk be.

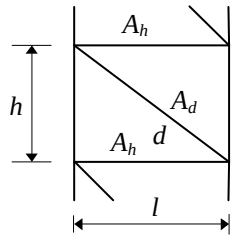
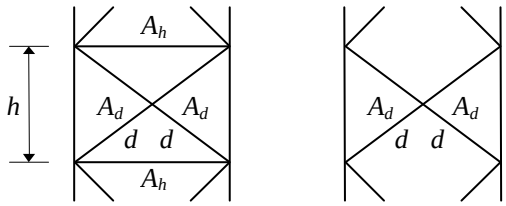
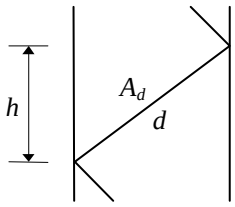
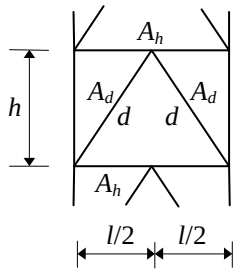
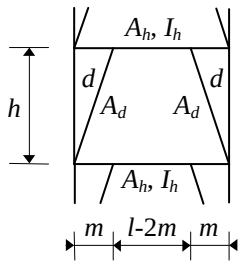
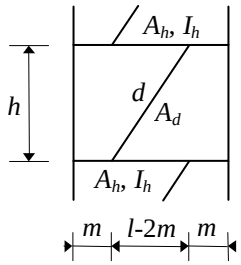
2.4.1 Keretek keresztmerevítéssel

A vízszintes merevség növelése céljából gyakran alkalmaznak egy vagy kétirányú keresztmerevítést (2.2 táblázat). A merevítések jelentős statikai előnnyel járhatnak, mert segítségükkel hatékonyan lehet a keret merevségét növelni és a vízszintes eltolódásokat csökkenteni. Elhelyezésük viszont funkcionális hátrányt okozhat, hiszen korlátozzák a belső terek kihasználhatóságát.

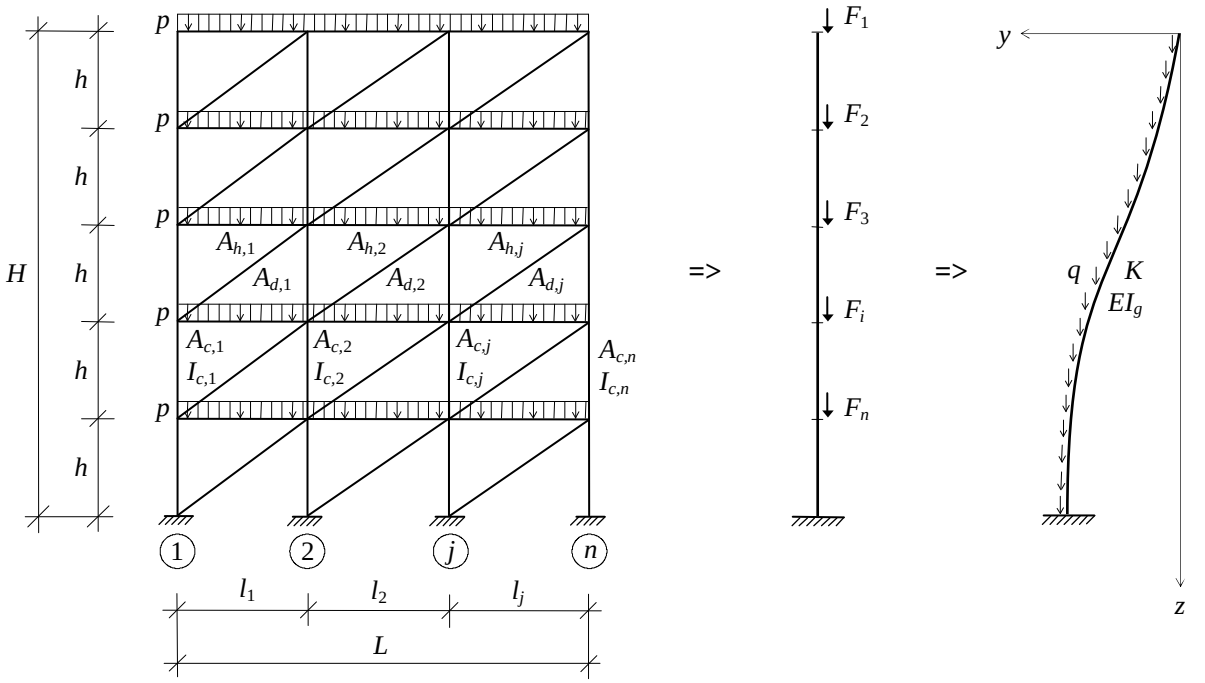
A többszintes, többnyílású keresztmerevítéssel ellátott keretek (2.13 ábra) lokális hajlítási merevsége az egyes oszlopok hajlítási merevségeinek összegzésével – a (2.28) képlet alapján – állítható elő, de az $r = 1$ redukciós tényezővel, vagyis $EI = EI_c$. Az EI_g globális hajlítási merevség számítása azonos a 2.1.3 pontban leírtakkal, vagyis a számítás a (2.29) képlet szerint történik.

A nyírási merevség meghatározása alapjaiban eltér a keresztmerevítéssel nem rendelkező kereteknél bemutatottaktól és a keresztmerevítés típusától is függ. A 2.2 táblázatban összefoglaltuk a nyírási merevség kiszámítására szolgáló összefüggéseket a leggyakrabban használt keresztmerevítés típusokhoz. A képletekben d a ferde rúd hossza.

2.2 táblázat. Keresztmerevítések nyírási merevsége.

Merevítéstípus:	
	$K = \left(\frac{1}{K_d} + \frac{1}{K_h} \right)^{-1} = \left(\frac{d^3}{A_d E_d h l^2} + \frac{l}{A_h E_h h} \right)^{-1}$ szimpla
	$K = 2A_d E_d \frac{hl^2}{d^3}$ dupla
	$K = A_d E_d \frac{hl^2}{d^3}$ folyamatos
	$K = \left(\frac{2d^3}{A_d E_d h l^2} + \frac{l}{4A_h E_h h} \right)^{-1}$ K-merevítés
	$K = \left(\frac{d^3}{2A_d E_d m^2 h} + \frac{m}{2A_h E_h h} + \frac{h(l-2m)^2}{12 I_h E_h l} \right)^{-1}$ K-merevítés
	$K = \left(\frac{d^3}{A_d E_d h (l-2m)^2} + \frac{l-2m}{A_h E_h h} + \frac{h m^2}{12 I_h E_h l} \right)^{-1}$ térd-merevítés

A hajlítási és nyírási merevségek birtokában az előző pontokban bemutatott módszerekkel meghatározhatók a keresztmerevítéssel rendelkező keret vízszintes eltolódásai és végrehajtható a frekvencia-vizsgálat.



a) keresztmerevítéses keret b) helyettesítő tartó szintenkénti terheléssel c) kontinuum modell

2.13 ábra. A kontinuum modell származtatása a stabilitásvizsgálathoz.

A stabilitásvizsgálat is végrehajtható a korábban (a 2.3 pontban) vázolt módon, de lehetőség van egy az ott bemutatottnál egyszerűbb eljárásra is. A három jellemző merevség (lokális és globális hajlítási és nyírási merevség) közül a lokális hajlítási merevség hatása rendszerint nagyságrendekkel kisebb a másik kettőnél. Elhanyagolásával egy egyszerű modell állítható fel, ami igen egyszerű megoldáshoz vezet. Ez a modell a 2.13/c ábrán vázolt vékonyhéjalású szendvics oszlop. Az oszlop egy elemi darabjának egyensúlyát vizsgálva [14] levezethető a feladat differenciaegyenlete:

$$y''''(z)\left(1-\frac{zq}{K}\right)-\frac{3q}{K}y'''(z)+\frac{q}{r_s EI_g}\left[zy''(z)+y'(z)\right]=0$$

ahol q a kritikus teherintenzitás (2.13/c ábra), a feladat sajátértéke.

A differenciálegyenlethez az

$$y(0)=0, \qquad y'(H)\left(1-\frac{qH}{K}\right)=0$$

$$y''(0)-\frac{q}{K}y'(0)=0, \qquad y'''(0)-\frac{2q}{K}y''(0)=0$$

peremfeltételek tartoznak.

Az egyenlet hatványsoros megoldása az

$$N_{cr} = \alpha_s K \tag{2.52}$$

igen egyszerű összefüggést eredményezi a kritikus teher értékére, ahol K a keret nyírási merevsége. Különböző típusú keresztmerevítések nyírási merevségeit a 2.2 táblázat tartalmazza. A megoldáshoz szükséges α_s kritikus teherparaméter értékeit a 2.14 ábra és a 2.3 táblázat tartalmazza a

$$\beta_s = \frac{K}{N_g} \tag{2.53}$$

arány függvényében. (A hatványsoros megoldási módszer részletes ismertetése az „Épületek komplex statikai vizsgálata” c. jegyzetben megtalálható.)

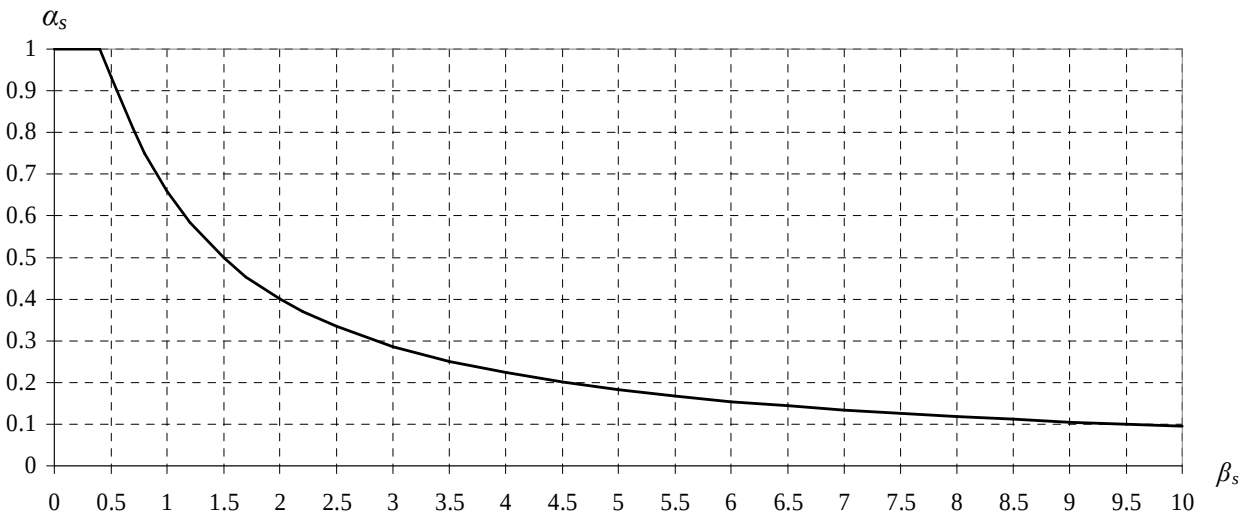
2.3 táblázat. Az α_s kritikus teherparaméter értékei a β_s arány függvényében.

β_s	α_s	β_s	α_s	β_s	α_s	β_s	α_s
0.0	1.0000	2.2	0.3711	4.2	0.2135	17	0.05722
0.3	1.0000	2.3	0.3579	4.3	0.2090	18	0.05413
0.4	0.9972	2.4	0.3457	4.4	0.2047	19	0.05135
0.5	0.9325	2.5	0.3342	4.5	0.2006	20	0.04884
0.6	0.8663	2.6	0.3235	5.0	0.1824	25	0.03926
0.7	0.8051	2.7	0.3134	5.5	0.1672	30	0.03282
0.8	0.7501	2.8	0.3039	6.0	0.1543	35	0.02819
0.9	0.7011	2.9	0.2950	6.5	0.1433	40	0.02471
1.0	0.6575	3.0	0.2866	7.0	0.1337	45	0.02199
1.1	0.6186	3.1	0.2787	7.5	0.1253	50	0.01981
1.2	0.5838	3.2	0.2711	8.0	0.1179	55	0.01803
1.3	0.5526	3.3	0.2640	8.5	0.1114	60	0.01654
1.4	0.5243	3.4	0.2572	9.0	0.1055	65	0.01527
1.5	0.4988	3.5	0.2508	10	0.09544	70	0.01419
1.6	0.4755	3.6	0.2447	11	0.08713	80	0.01243
1.7	0.4543	3.7	0.2389	12	0.08015	90	0.01105
1.8	0.4349	3.8	0.2333	13	0.07420	100	0.00995
1.9	0.4170	3.9	0.2280	14	0.06908	200	0.00499
2.0	0.4005	4.0	0.2230	15	0.06462	300	0.00333
2.1	0.3852	4.1	0.2181	16	0.06069	>300	$1/\beta_s$

A (2.53) képletben N_g a keret globális hajlítási merevségéhez tartozó kritikus rész teher:

$$N_g = \frac{7.837 r_s E I_g}{H^2} \tag{2.54}$$

ahol I_g a keretoszlopok (2.47) képlet szerint számítható globális tehetetlenségi nyomatéka és r_s a 2.12 ábrán és az 5.1 táblázatban megadott redukciós tényező.



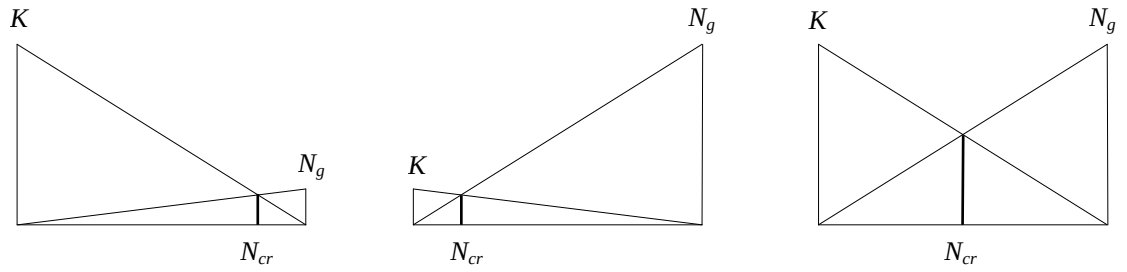
2.14 ábra. Az α_s kritikus teherparaméter értékei a β_s arány függvényében.

Fenti eljárás akkor alkalmazható, ha a keret lokális hajlítási merevsége jóval kisebb a globális hajlítási merevségnél, például ha a (2.50) képlet szerinti arányra teljesül az $I/(I+I_g) \leq 0.0003$ feltétel. A másik lehetséges felhasználási terület a viszonylag nagy nyírási merevséggel rendelkező szerkezetek, amikor a (2.51) képlet szerinti arány esetében teljesül a $KH^2/[E(I+I_g)r_s] \geq 3$ feltétel.

A (2.52) és (2.53) összefüggések tanúsága szerint a keret kritikus terhe a K és N_g két „rész” kritikus tehertől függ, és az értéke a K és N_g értékének növekedésével nő.

Annak érdekében hogy optimális viselkedésű szerkezetet alakíthassunk ki, érdemes megvizsgálni, hogy a két összetevő milyen módon befolyásolja a kritikus teher értékét. A Föppl-Papkovics tétel alkalmazása azt mutatja, hogy a leghatékonyabb helyzet akkor áll elő, amikor a két „rész” kritikus teher azonos nagyságú (2.15/c ábra).

Ebben az esetben a keret kritikus terhe a maximum és értéke egyenes arányban növelhető a „rész” kritikus terhek növelésével, vagyis például megkétszerezve a „rész” kritikus terheket a keret kritikus terhe is duplájára nő. A 2.15 ábra azt is mutatja, hogy két különböző nagyságú „rész” kritikus teher esetében nincs sok értelme a nagyobb „rész” kritikus teher értékét növelni, mert a szerkezet kritikus terhét – felső határként – mindig a kisebbik „rész” kritikus teher határozza meg (2.15/a és 2.15/b ábra).

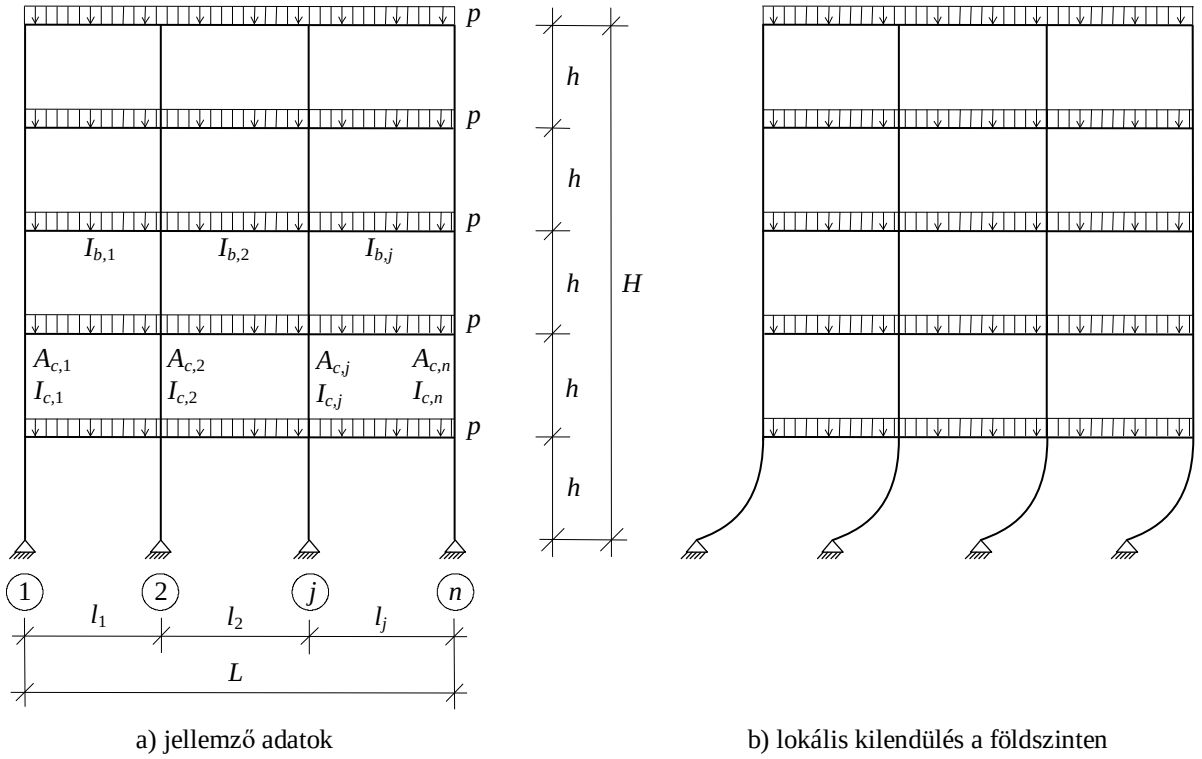


a) $K >> N_g$ b) $N_g >> K$ c) $K = N_g$

2.15 ábra. A „rész” kritikus terhek arányának hatása a kritikus teherre.

2.4.2 Csuklós megtámasztású keretek

A csuklós megtámasztású többszintes keretek (2.16/a ábra) olyan teljes H magasságú oszlopokkal rendelkeznek, amelyek a csuklós megtámasztás miatt önmagukban nem lennének állékonyak. Ez azt jelenti, hogy a lokális hajlítási merevségükhöz tartozó „rész” kritikus teher zérus. Ebből az következik, hogy a stabilitásvizsgálathoz az előző pontban bemutatott vékonyhéjalású szendvics modell használható.



a) jellemző adatok b) lokális kilendülés a földszinten

2.16 ábra. Csuklós megtámasztású keret.

A kritikus teher tehát az

$$N_{cr} = \alpha_s K \tag{2.55}$$

összefüggés segítségével határozható meg, ahol K a keret nyírási merevsége. A nyírási merevség globális része (K_b) a gerendák merevségével kapcsolatos és nem függ az oszlopok megtámasztásától, így a fix megtámasztású keretekre megadott (2.43) összefüggés használható. A nyírási merevség lokális része az oszlopokhoz és azok lokális, két szint között bekövetkező kilendüléséhez tartozik. A csuklós megtámasztású keretek esetében a lokális kilendülés a földszint és az első emeleti szint között következik be (2.16/b ábra). Az ehhez a kilendüléshez tartozó kritikus teher adja ezt a „rész” merevséget, amelynek értéke

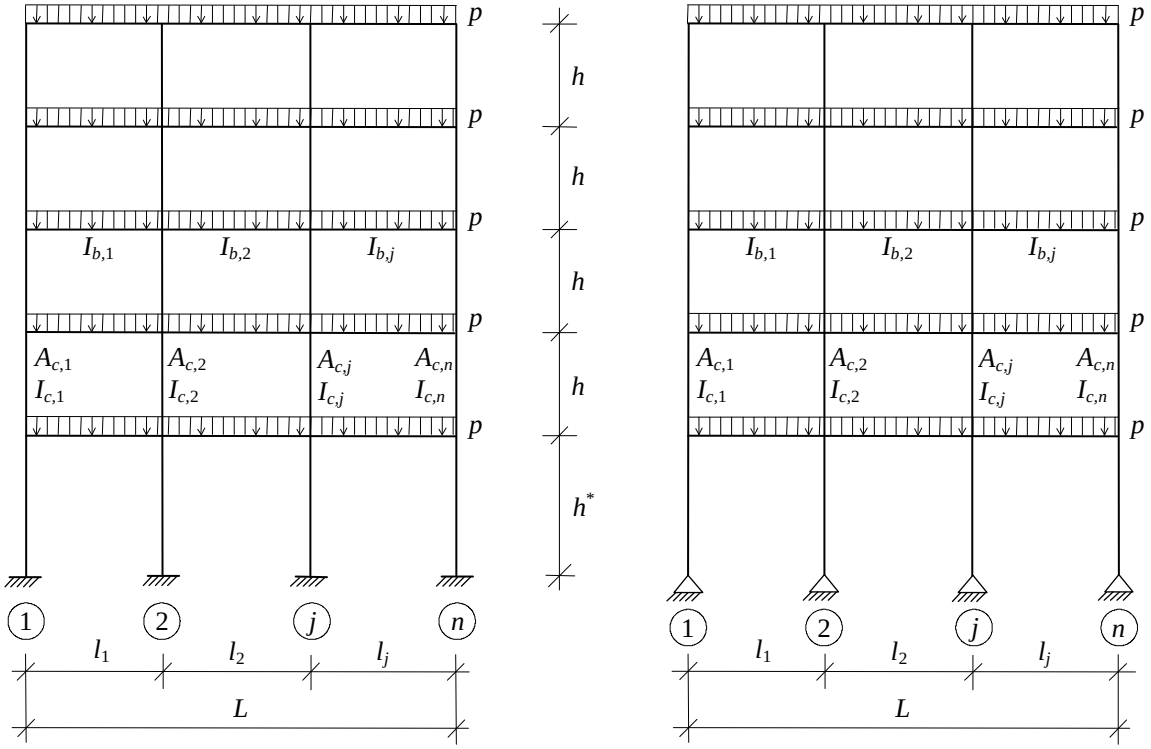
$$K_c = \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi^2 EI_{c,j}}{(2h)^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi^2 EI_{c,j}}{4h^2} \tag{2.56}$$

Ezzel a lokális merevséggel számolva, a keret nyírási merevségét a (2.45) összefüggés szolgáltatja. A (2.55) képletben szereplő α_s kritikus teherparaméter értékeit a 2.14 ábra és a 2.3 táblázat tartalmazza a (2.53) képlettel megadott β_s arány függvényében. A (2.53)

képletben szereplő N_g értéke most is a (2.54) összefüggés felhasználásával határozható meg, hiszen a globális hajlítási merevséghez tartozó kritikus teher értéke nem függ a keret oszlopainak megtámasztásától.

2.4.3 Eltérő magasságú földszinti oszlopokkal rendelkező keretek

A keretekre fent megadott összefüggések abban az esetben is használhatók, amikor a földszinti oszlopok magassága eltér a fölöttük lévő oszlopok magasságától (2.17 ábra). Ha a földszinti oszlopok alacsonyabbak mint a fölöttük lévő szintek oszlopai, akkor a vonatkozó képletek változtatás nélkül alkalmazhatók. Ha a földszinti emeletmagasság nagyobb mint a többi, akkor ezt a tényt a lokális nyírási merevség meghatározásánál kell figyelembe venni. Ez azt jelenti, hogy a (2.44) vagy a (2.56) képletet kell használni, de a h helyett a h^* emeletmagassággal (2.17 ábra).



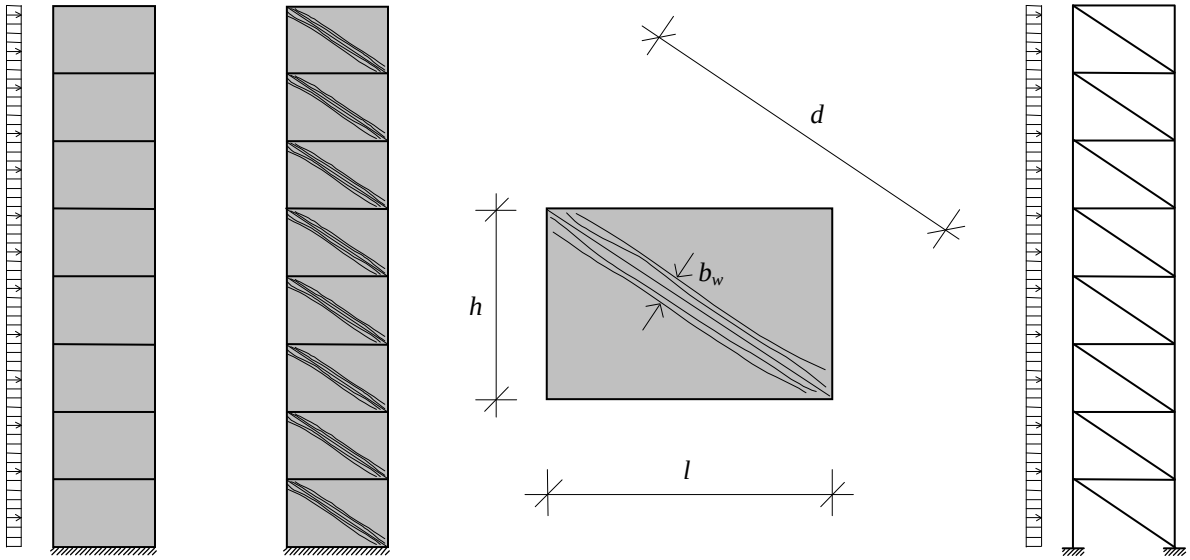
a) keret befogott támaszokkal

b) keret csuklós támaszokkal

2.17 ábra. Keretek eltérő ($h^* > h$) magasságú földszinti oszlopokkal.

2.4.4 Falazattal kitöltött keretek

A vízszintes mozgásokra elég érzékeny keretek vízszintes merevsége növelhető kitöltő falazattal is (2.18/a ábra). Az így kialakított „vegyes” típusú szerkezet erőjátéka meglehetősen bonyolult, de kísérleti eredményekre támaszkodva kialakítható egy viszonylag egyszerű számítási modell. A kitöltő falazat helyettesíthető egy húzott és egy nyomott diagonális rúddal. Mivel a kitöltő falazat húzószilárdsága elhanyagolhatóan kicsiny, a modell a húzott rúd elhagyásával tovább egyszerűsíthető (2.18/b-c ábra). Ily módon elérkezünk a 2.4.1 pontban már vizsgált keresztmerevítéses keretmodellhez (2.18/d ábra).



2.18 ábra. Modell falazattal kitöltött keretek vizsgálatához.

A nyomott diagonális rúd keresztmetszete

$$A_d = tb_w \tag{2.57}$$

ahol

t a kitöltő falazat vastagsága,
b_w a nyomott sáv hatékony szélessége (2.18/c ábra).

Elméleti vizsgálatok és kísérleti tapasztalatok szerint a nyomott sáv hatékony szélessége a geometriai jellemzőkön túlmenően főleg a keretoszlopok és a kitöltő falazat relatív merevségétől függ és meglehetősen széles határok között mozog: $0.10 \le b_w/d \le 0.40$, ahol d a nyomott diagonális hossza. Bizonyos esetekben tervezési diagramok segítségével kaphatunk mérési eredményeken alapuló becsléseket [6]. Alternatív lehetőséget nyújt a

$$b_w = 0.15d \tag{2.58}$$

összefüggés használata, amely a gyakorlati esetekben általában a biztonság javára történő közelítést eredményez.

A 2.18/d modell alkalmazásához szükséges nyírási merevség a 2.2 táblázat első képletének felhasználásával két részből tehető össze. Az egyik rész a diagonálisoktól (K_d), a másik rész pedig a gerendáktól (K_h) függ:

$$K = \left(\frac{1}{K_d} + \frac{1}{K_h} \right)^{-1} = \left(\frac{d^3}{A_d E_d h l^2} + \frac{l}{A_h E_h h} \right)^{-1} \tag{2.59}$$

ahol

E_d a kitöltő falazat rugalmassági modulusa,
E_h a gerendák rugalmassági modulusa,
A_h a gerendák keresztmetszeti területe.

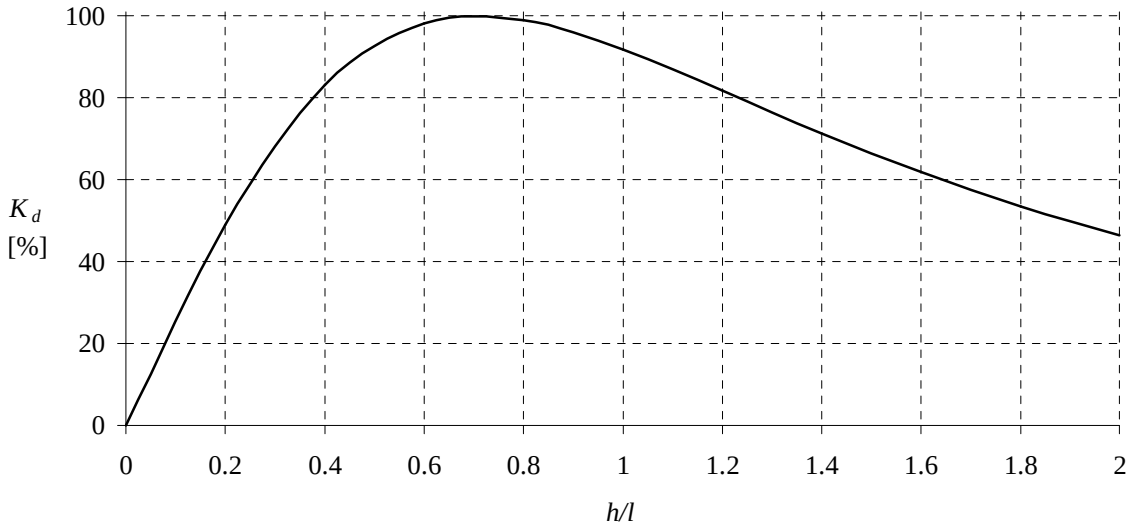
A (2.59) képlet egynyílású keretekre vonatkozik. Többnyílású keretek esetében a nyílásonkénti merevségeket egyszerűen összegezni kell:

$$K = \sum_{j=1}^{n-1} K_j \tag{2.60}$$

ahol n az oszlopok száma és K_j a j-edik nyíláshoz tartozó nyírási merevség. A K nyírási merevség – definíció szerint – a keret nyírási kritikus terhe is.

A K nyírási kritikus teher és az N_g globális hajlítási kritikus teher ismeretében a falazattal kitöltött keret kritikus terhe a (2.52) képlet segítségével határozható meg a 2.4.1 pontban leírtak szerint.

A K és N_g „rész" kritikus terhek értékének növelése (a keret kritikus terhének növelése céljából) a következő megfontolások segítségével történhet. A K nyírási merevség a (2.59) képlet tanúsága szerint „egyenrangúan" függ a két összetevő merevség értékétől: a diagonálisoktól függő első tagtól (K_d) és a gerendáktól függő második tagtól (K_h). Amit a K és N_g két összetevő kritikus teherről a 2.4.1 pontban elmondtunk (és a 2.15 ábrán bemutattunk), az most is érvényes, de a K_d és a K_h vonatkozásában. Ez azt jelenti, hogy minél nagyobb a K_d és a K_h, annál nagyobb a K kritikus teher. Optimális eset akkor áll elő, amikor a K_d és a K_h azonos nagyságú.



2.19 ábra. Optimális geometriai arány a K_d merevség maximalizálásához.

A K_d értéke egyenes arányban van a diagonálisok A_d keresztmetszeti területével és az E_d rugalmassági tényezővel. Ami a geometriai kialakítást illeti, a K_d nyírási merevség maximális értéket vesz fel amikor fennáll a

$$\frac{h}{l} = 0.708$$

arány (2.19 ábra), ahol h az emeletmagasság és l a nyílásköz.

A nyírási merevség másik összetevőjével, a gerendák közreműködését kifejező K_h merevséggel kapcsolatban egyszerűbb a helyzet. Értéke az A_h keresztmetszeti területtel és az E_h rugalmassági tényezővel egyenesen, míg a gerendák hosszával fordítottan arányos.

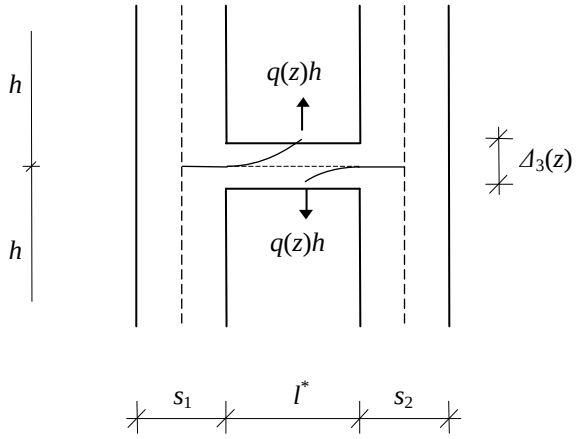
A globális hajlítási merevséghez tartozó N_g kritikus teher értéke többféleképpen növelhető:

az oszlopkeresztmetszetek és a rugalmassági modulus növelésével valamint az oszlopok távolságának növelésével.

A fenti *K* nyírási merevség felhasználásával a keresztmerevítéses modell természetesen az eltolódás- és frekvenciaszámításhoz is alkalmazható.

2.5 Nyílásokkal áttört falak

A nyílásokkal áttört falak speciális kialakítású keretekként kezelhetők, ha két jelenséget figyelembe veszünk [8]. Ezeknek a szerkezeteknek rendszerint széles oszlopaik (=falszakaszaik) vannak és a gerendák (=áthidalók) általában a szokásosnál magasabbak (2.20 ábra). A széles oszlopok esetében a gerendák meggörbülésekor figyelembe veendő tengelyvonalnál nem elhanyagolható az egyenes szakasz hossza, amikor az inflexiós pont $\Delta_3(z)$ relatív elmozdulását határozzuk meg – a részletek a 2.1.2 pontban találhatók. A gerendák (saját) nyírási alakváltozását szintén figyelembe kell venni.



2.20 ábra. A gerendák hajlítása következtében bekövetkező $\Delta_3(z)$ relatív függőleges eltolódás.

Ezeket a módosításokat viszonylag egyszerűen végre lehet hajtani és segítségükkel az inflexiós pont relatív eltolódását kifejező összefüggés a

$$\Delta_3(z) = -\frac{q(z)l^2}{K^*}$$

alakban írható, ahol

$$K^* = K_b^* \frac{K_c}{K_b^* + K_c} = K_b^* r^* \tag{2.61}$$

és

$$K_b^* = \frac{6EI_b\left((l^* + s_1)^2 + (l^* + s_2)^2\right)}{l^{*3}h\left(1 + 12\frac{\rho EI_b}{l^{*2}GA_b}\right)} \tag{2.62}$$

egynyílású keretek esetén és

G a gerendák nyírási rugalmassági modulusa,
A_b a gerendák keresztmetszeti területe,
I_b a gerendák tehetetlenségi nyomatéka,
s_1, s_2 a falszakaszok szélessége,
ρ a gerenda-keresztmetszet alakjától függő konstans (téglalap keresztmetszet esetén $\rho = 1.2$),
h az emeletmagasság,
l^* a falszakaszok közötti távolság (2.20 ábra).

A keretekre az előző pontokban megadott összefüggések (eltolódás, frekvencia, kritikus teher) alkalmazhatók a nyílásokkal áttört falak esetében, ha az r és K_b helyére a (2.61) és (2.62) képletekkel definiált r^* és K_b^* értékeit helyettesítjük. Többnyílású nyílásokkal áttört falak kezelése a már megszokott módon, az egyes (módosított) nyírási merevségek egyszerű összegzésével – a (2.60) képlet alkalmazásával – történik, ahol n most a nyílásokkal áttört fal falszakaszainak száma.

2.6 Merevítőfalak

Tömör merevítőfalak vizsgálata nagyon egyszerű összefüggések segítségével történhet. Ezek az összefüggések a keretekre levezetett összefüggések segítségével is származtathatók. A falakat tekinthetjük olyan egyszerű kereteknek, melyek esetében a három jellemző merevségből csak egy, az EI lokális hajlítási merevség játszik szerepet. (A fal globális hajlítással és nyírási alakváltozással kapcsolatos ellenállása – keret-terminológiában gondolkodva – gyakorlatilag végtelen nagy.)

A vízszintes elmozdulásra, a legkisebb sajátfrekvenciára és a kritikus teherre vonatkozó jól ismert összefüggéseket az alábbiakban foglaljuk össze.

Vízszintes eltolódás:

$$y(z) = \frac{w}{EI}\left(\frac{H^3 z}{6} - \frac{z^4}{24}\right) \qquad \text{és} \qquad y_{\max} = y(H) = \frac{wH^4}{8EI} \tag{2.63}$$

ahol w a magasság mentén egyenletesen megoszló vízszintes teher intenzitása és z a földszinttől mért helykoordináta. A (2.63) összefüggések a szerkezetépítő gyakorlatban szokásos módon elhanyagolják a fal nyírási alakváltozását. Zömök (kis magasság/szélesség aránnyal rendelkező) merevítőfalak esetében viszont a nyírási alakváltozás jelentős lehet. Ekkor a maximális tetőponti eltolódást az

$$y_{\max} = y(H) = \frac{wH^4}{8EI} + \frac{wH^2}{2K} \tag{2.63a}$$

összefüggés segítségével számíthatjuk ki, ahol K a merevítőfal nyírási merevsége.

Legkisebb sajátfrekvencia:

$$f = \frac{0.56 r_f}{H^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \tag{2.64}$$

ahol m az egységhosszra jutó tömeg és r_f a 2.8 ábra és 4.1 táblázat segítségével meghatározható redukciós tényező.

Kritikus teher:

$$N_{cr} = q_{cr} H = \frac{7.837 EIr_s}{H^2} \tag{2.65}$$

ahol r_s a 2.12 ábra és 5.1 táblázat segítségével meghatározható redukciós tényező. A síkbeli probléma részletes vizsgálata és a (2.65) képlet nagyon tanulságos előállítása a [17]-ben található.

2.7 Merevítőmagok

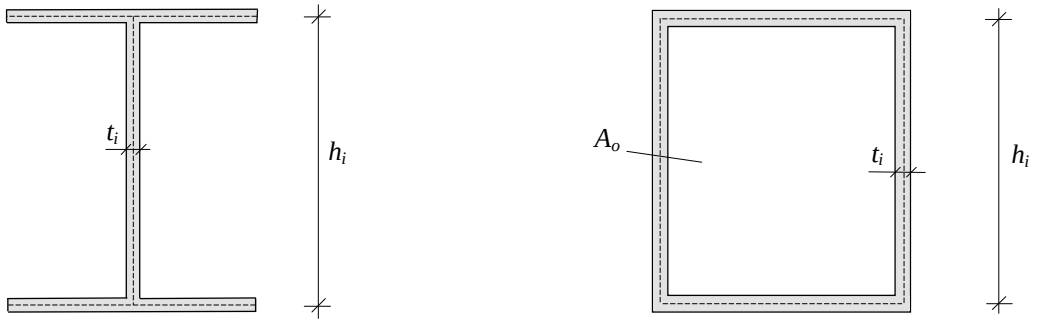
A merevség növelése céljából és/vagy funkcionális okokból merevítőfalakat gyakran összeépítenek és térbeli elemeket, úgynevezett merevítőmagokat hoznak létre. Jellegzetes példa a lépcsőházi U-mag, de számos más kialakítás is létezik.

A rendszerint vasbeton anyagú magok tehetetlenségi nyomatéka általában elég nagy és esetenként néhány mag már elegendő merevséget biztosíthat a tehetetlenségi főirányokban vízszintes erőkkel terhelt alacsony vagy középmagas épületek esetén. A magok a két tehetetlenségi főirányban merevítőfalként működnek és a vízszintes merevségek ismeretében a (2.63), (2.64) és (2.65) összefüggések segítségével a vízszintes eltolódások, a saját-frekvencia és a kritikus teher értéke egyszerűen meghatározható.

A merevítőfalakkal (és keretekkel) ellentétben a magok a kétirányú összeépített falak révén térbeli szerkezetek és csavarási merevségekkel is rendelkeznek. Ezek a „saját” csavarási merevségek általában nem nagyok a merevítőrendszer teljes csavarási merevségéhez képest, de bizonyos esetekben az épület teljes csavarási merevségének számottevő részét adhatják.

2.7.1 Csavarási jellemzők

A merevítőmagok geometriai arányai (magasság, falvastagság, falszakasz-hosszak) rendszerint olyanok, hogy a magokat a csavarási viselkedés vizsgálatához vékonyfalú keresztmetszetű rudaknak tekinthetjük. A csavarási ellenállásuk két forrásból származik: a GJ tiszta (Saint-Venant-féle) csavarási merevségből és az EI_ω öblösödési csavarási merevségből [13].



a) nyitott keresztmetszet b) zárt keresztmetszet

2.21 ábra. Vékonyfalú falszakaszokból felépített magok.

Nyitott keresztmetszetű magok (2.21/a ábra) esetében a Saint-Venant-féle tiszta csavarási tehetetlenségi nyomaték a

$$J = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{m} h_i t_i^3 \tag{2.66}$$

összefüggésből határozható meg, ahol

h_i az *i*-edik falszakasz hossza,
t_i az *i*-edik falszakasz vastagsága,
m a falszakaszok száma.

Abban a ritka esetben amikor a mag zárt keresztmetszetű (vagy a nyílások hatása kis méretük miatt elhanyagolható), Bredt képletét kell alkalmazni:

$$J = \frac{4A_o^2}{\sum_{i=1}^{m} \frac{h_i}{t_i}} \tag{2.67}$$

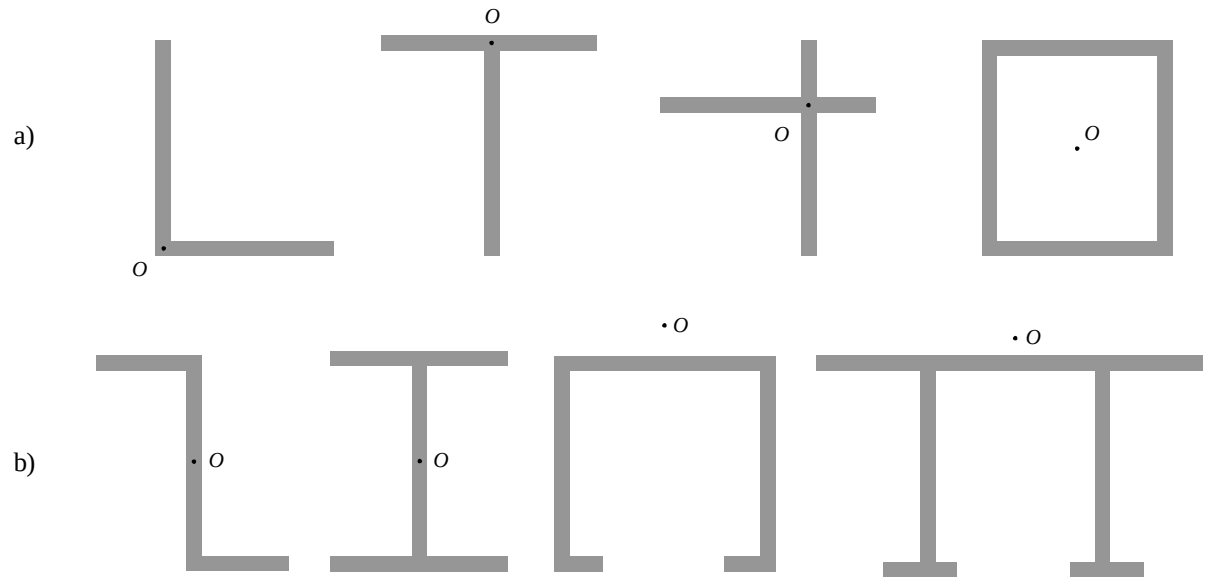
ahol A_o a falszakaszok középvonalai által közbezárt terület (2.21/b ábra) és, ismét,

h_i az *i*-edik falszakasz hossza,
t_i az *i*-edik falszakasz vastagsága,
m a falszakaszok száma.

A rugalmassági tényező és a nyírási rugalmassági tényező között fennáll a

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.68}$$

összefüggés, ahol ν a Poisson tényező.

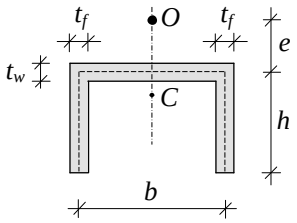


2.22 ábra. Jellegzetes mag-keresztmetszetek. a) $I_\omega \approx 0$, b) $I_\omega > 0$. *O*: nyírásközéppont

Az öblösödési csavarás a falszakaszok hajlításával kapcsolatos – lásd részletesebben a 3.2.1 pontban – és a hozzá tartozó merevség meghatározása jóval bonyolultabb mint a Saint-Venant-féle tiszta csavarás esetében [8], [13]. Bár nem adható meg általános érvényű, minden

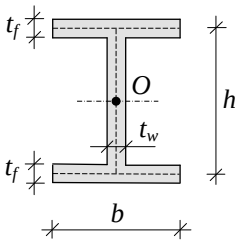
keresztmetszetre érvényes összefüggés az I_ω öblösödési tehetetlenségi nyomaték kiszámítására, néhány esetben létezik zárt alakú megoldás (2.4 táblázat).

2.4 táblázat. Π, T, Z és □ keresztmetszetű mag csavarási jellemzői.



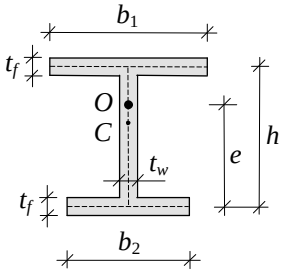
$$e=\frac{3t_f h^2}{6t_f h+t_w b},\qquad J=\frac{1}{3}(2ht_f^3+bt_w^3)$$

$$I_\omega=\frac{t_f h^3 b^2}{12}\frac{3t_f h+2t_w b}{6t_f h+t_w b}$$



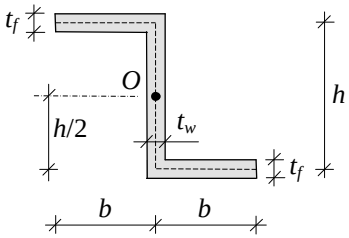
$$J=\frac{1}{3}(2bt_f^3+ht_w^3)$$

$$I_\omega=\frac{t_f b^3 h^2}{24}$$



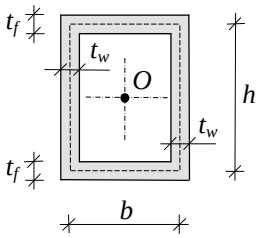
$$e=h\frac{b_1^3}{b_1^3+b_2^3},\qquad J=\frac{1}{3}\left[(b_1+b_2)t_f^3+ht_w^3\right]$$

$$I_\omega=\frac{t_f h^2}{12}\frac{b_1^3 b_2^3}{b_1^3+b_2^3}$$



$$J=\frac{1}{3}(2bt_f^3+ht_w^3)$$

$$I_\omega=\frac{b^3h^2}{12(2b+h)^2}[2t_f(b^2+bh+h^2)+3t_w bh]$$



$$J=\frac{2b^2h^2t_f t_w}{ht_f+bt_w}$$

$$I_\omega\cong 0$$

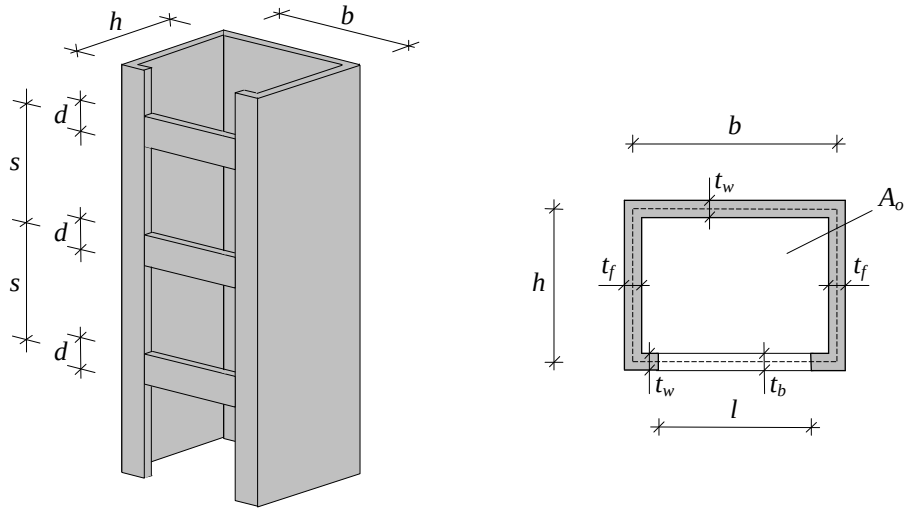
A 2.22 ábrán vázolunk néhány gyakran alkalmazott keresztmetszetet. Ezek közül a 2.22/a ábrán látható keresztmetszetek öblösödési tehetetlenségi nyomatéka olyan kicsi, hogy értéke a gyakorlati számításoknál elhanyagolható.

A leggyakrabban előforduló keresztmetszetek csavarási jellemzőit a 2.4 táblázatban foglaljuk össze. További – összetettebb és aszimmetrikus eseteket is tartalmazó – esetekre a [17] irodalom 8. fejezete ad zárt képleteket.

Talán a „legnépszerűbb” merevítőmag az U-mag (2.23 ábra). Ennek főleg praktikus okai vannak, hiszen az U-mag kiválóan alkalmas a függőleges közlekedés megoldására és gépészeti vezetékek elhelyezésére is kedvező lehetőségeket nyújt.

Az U-mag nyitott oldala sok esetben részlegesen zártnak tekinthető, amikor a födémek és/vagy gerendák szintenként megfelelő erősségű összekötést biztosítanak. Ez a hatás természetesen a biztonság javára elhanyagolható, de a statikus szükségesnek tarthatja figyelembevételét (pl. gazdasági okokból).

A szintenkénti összekötés bizonyos mértékben korlátozza a mag öblösödését és ezáltal növeli a mag csavarással szembeni ellenállását. Vlasov [13] vizsgálatai szerint ez a hatás viszonylag egyszerűen, a [később tárgyalandó (2.75)] csavarási differenciálegyenlet módosításával is figyelembe vehető.



a) U-mag összekötő gerendákkal b) keresztmetszet

2.23 ábra. Részlegesen zárt U-mag.

A módosított differenciálegyenlet

$$EI_\omega \varphi''''(z) - G(J + \bar{J})\varphi''(z) = m \tag{2.69}$$

alakú, ahol m a függőleges mentén egyenletesen megoszló csavarónyomaték, és

$$\bar{J} = \frac{4A_o^2}{\dfrac{l^3 sG}{12EI_b} + \dfrac{1.2ls}{A_b}} \tag{2.70}$$

az összekötő gerendák hatását fejezi ki. J-t a (2.66) összefüggés adja meg. A fenti képletben

$A_o = bh$	a falszakaszok középvonalai által közbezárt terület (2.23/b ábra),
b és h	a falszakaszok hossza,
l	az összekötő gerendák fesztávolsága,
s	az összekötő gerendák függőleges távolsága (rendszerint az emeletmagasság),
E	az összekötő gerendák rugalmassági modulusa,
G	az összekötő gerendák nyírási rugalmassági modulusa

és

$$A_b = t_b d \qquad \text{és} \qquad I_b = \frac{t_b d^3}{12}$$

az összekötő gerendák keresztmetszeti területe és tehetetlenségi nyomatéka, ahol

t_b az összekötő gerendák vastagsága,
d az összekötő gerendák magassága (2.23/a ábra).

Ha a Saint-Venant csavarási tehetetlenségi nyomatékot a $(J + \bar{J})$ módosított értékkel vesszük figyelembe, akkor a (2.75) differenciálegyenlet megoldásaként a későbbiekben bemutatott összes képlet alkalmazható a részlegesen zárt mag elcsavarodásának, sajátfrekvenciájának és kritikus terhének meghatározására.

Numerikus vizsgálatok tanúsága szerint azokban az esetekben amikor az összekötő gerendák magassága viszonylag nagy, a (2.70) képlet túlbecsülheti a gerendák hatását és a $(J + \bar{J})$ képletből nagyobb érték jöhet ki mintha a mag teljesen zárt lenne – ami természetesen lehetetlen. Ilyen esetekben a

$$\bar{J} = \frac{4h^2 b^2}{\frac{2b-l}{t_w} + \frac{l}{t_w^*} + \frac{2h}{t_f}} \tag{2.71}$$

közelítés alkalmazható, ahol a

$$t_w^* = \frac{d}{s} t_b \tag{2.72}$$

az összekötő gerenda helyettesítő vastagsága és

s az összekötő gerendák függőleges távolsága (2.23/a ábra),
d az összekötő gerendák magassága.

2.7.2 Eltolódás és elcsavarodás egyenletesen megoszló vízszintes teher hatására

A nyírásközépponti tengely mentén működő egyenletesen megoszló vízszintes teher hatására a mag csak eltolódásokat végez (és nem csavarodik el) és a megfelelő tehetetlenségi nyomaték ismeretében a (2.63) összefüggések alkalmazhatók az eltolódások, illetve a maximális tetőponti eltolódás meghatározására:

$$u(z) = \frac{w_x}{EI_y}\left(\frac{H^3 z}{6} - \frac{z^4}{24}\right) \qquad \text{és} \qquad u_{\max} = u(H) = \frac{w_x H^4}{8EI_y} \tag{2.73}$$

$$v(z) = \frac{w_y}{EI_x}\left(\frac{H^3 z}{6} - \frac{z^4}{24}\right) \qquad \text{és} \qquad v_{\max} = v(H) = \frac{w_y H^4}{8EI_x} \tag{2.74}$$

A függőleges mentén egyenletesen megoszló m csavarónyomatékkal terhelt mag (2.24 ábra) egy elemi szakaszának egyensúlyát vizsgálva az

$$EI_\omega \varphi''''(z) - GJ\varphi''(z) = m \tag{2.75}$$

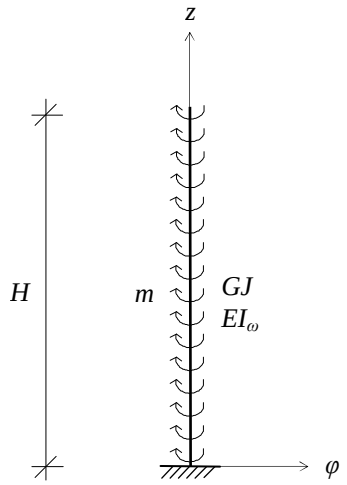
differenciálegyenlet vezethető le, amelyhez a

$$\varphi(0) = 0\,, \qquad \varphi'(0) = 0$$

és

$$\varphi''(H) = 0\,, \qquad EI_\omega \varphi'''(H) - GJ\varphi'(H) = 0$$

peremfeltételek tartoznak.



2.24 ábra. Egyenletesen megoszló *m* csavarónyomatékkal terhelt merevítőmag a csavarási vizsgálathoz.

A megoldás zárt formában előállítható:

$$\varphi(z) = \frac{m}{GJ\cosh k}\left[\frac{H^2}{k^2}\left(\cosh\frac{kz}{H} + k\sinh(k - \frac{kz}{H}) - k\sinh k - 1\right) + z(H - \frac{z}{2})\cosh k\right] \qquad (2.76)$$

ahol

$$k = H\sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}} \qquad (2.77)$$

a dimenziótlan csavarási tényező.

Maximális elcsavarodás a tartó tetején keletkezik:

$$\varphi_{\max} = \varphi(H) = \frac{mH^2}{GJ}\left(\frac{\cosh k - 1}{k^2\cosh k} - \frac{\tanh k}{k} + \frac{1}{2}\right) \qquad (2.78)$$

Két speciális esetet érdemes megvizsgálni. A gyakorlati esetek többségében a *GJ* tiszta csavarási merevség hatása jóval kisebb mint az EI_ω öblösödési csavarási merevség hatása és a

$$k << 1$$

egyenlőtlenség fennáll. Figyelembe véve hogy ilyen esetekben $GJ/EI_\omega \approx 0$, a csavarás differenciálegyenlete a

$$\varphi''''(z) = \frac{m}{EI_\omega}$$

alakra egyszerűsödik és a maximális tetőponti elcsavarodásra a

$$\varphi_{\max} = \varphi(H) = \frac{mH^4}{8EI_\omega} \tag{2.79}$$

összefüggést kapjuk. Figyelemre méltó a (2.79) és (2.73)/(2.74) összefüggések hasonlósága (illetve azonos szerkezete). Ennek az a magyarázata, hogy a hajlítási és csavarási jelenségek között bizonyos analógia áll fenn [13]; ezt az analógiát később a 3.2, 4.2 és 5.3 pontokban még fel fogjuk használni.

A másik speciális esetben a magnak nincs öblösödési merevsége (2.22/a ábra). Ekkor a csavarás differenciálegyenlete a

$$\varphi''(z) = -\frac{m}{GJ}$$

alakra egyszerűsödik. A megoldás ekkor a tetőponti maximális elcsavarodásra:

$$\varphi_{\max} = \varphi(H) = \frac{mH^2}{2GJ} \tag{2.80}$$

2.7.3 Kritikus teher

A mag stabilitásának vizsgálata során három jelenséget kell figyelembe venni: síkbeli kihajlást a két tehetetlenségi főtengelyben és tiszta elcsavarodó kihajlást. A síkbeli kritikus teher meghatározása során a merevítőfalakra megadott (2.65) képlet alkalmazható a megfelelő tehetetlenségi nyomatékok felhasználásával:

$$N_{cr,x} = \frac{7.837EI_y r_s}{H^2} \qquad \text{és} \qquad N_{cr,y} = \frac{7.837EI_x r_s}{H^2} \tag{2.81}$$

A tiszta elcsavarodó kihajlás esetében a helyzet bonyolultabb. A mag tetőponti keresztmetszetéhez rögzített origójú koordinátarendszer (2.25 ábra) technikailag némileg egyszerűbb megoldást tesz lehetővé. A feladat differenciálegyenlete

$$r_s EI_\omega \varphi''''(z) + \left[\left(N(z)i_p^2 - GJ\right)\varphi'(z)\right]' = 0$$

amelyhez a

$$\varphi(0) = 0\,, \qquad \varphi''(0) = 0$$

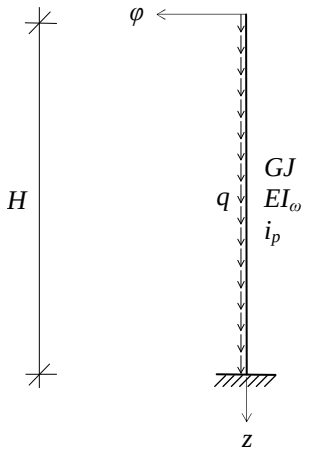
és

$$\varphi'(H) = 0\,, \qquad EI_\omega \varphi'''(H) - GJ\varphi'(H) = 0$$

peremfeltételek tartoznak, ahol

$$i_p = \sqrt{\frac{I_x + I_y}{A}} \tag{2.82}$$

a mag keresztmetszetének inerciasugara, r_s a redukciós tényező (a 2.12 ábra vagy az 5.1 táblázat szerint) és $N(z) = qz$.



2.25 ábra. A merevítőmag modellje a tiszta elcsavarodó kihajlás vizsgálatához.

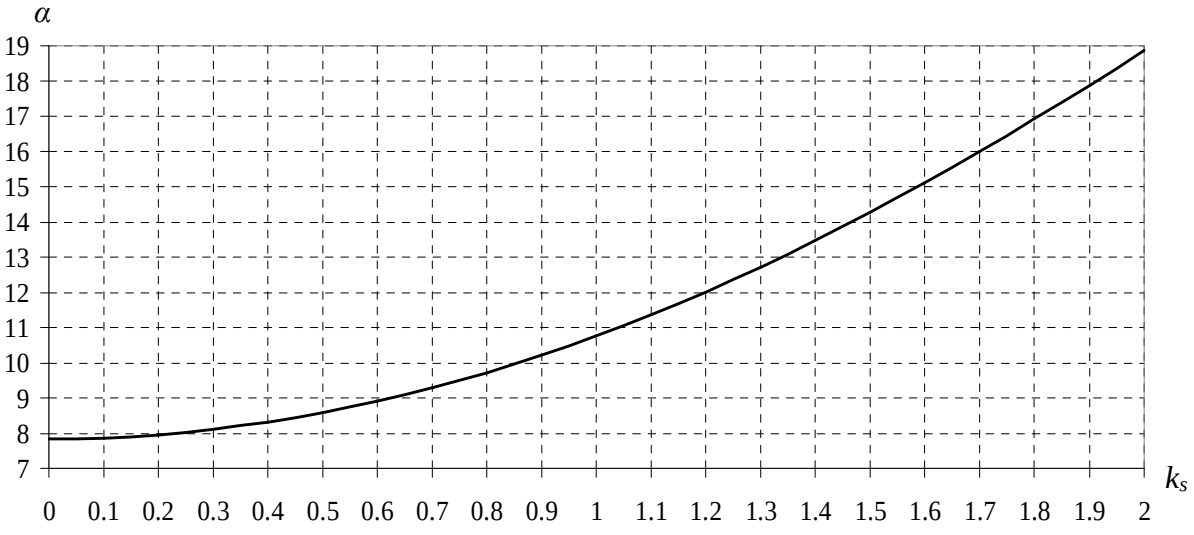
A differenciálegyenlet különböző merevségarányokra történő megoldása után a kritikus teher meghatározására szolgáló összefüggés az

$$N_{cr,\varphi} = \frac{\alpha r_s EI_\omega}{i_p^2 H^2} \tag{2.83}$$

alakban adható meg, ahol α a kritikus teherparaméter. Függvényét a 2.26 ábra mutatja és értékeit a 2.5 táblázat segítségével határozhatjuk meg a

$$k_s = \frac{k}{\sqrt{r_s}} = H\sqrt{\frac{GJ}{r_s EI_\omega}} \tag{2.84}$$

csavarási tényező függvényében.



2.26 ábra. Az α kritikus teherparaméter a k_s csavarási tényező függvényében.

Fontos megjegyezni, hogy amikor a (2.83) összefüggést egy egyetlen merevítőmaggal merevített *épület* stabilitásának vizsgálatára használjuk, akkor az i_p inerciasugár meghatározásánál az épület alaprajzi területét kell használni (nem pedig a mag keresztmetszeti területét) – lásd a vonatkozó levezetést a [17] irodalom 5.3.3 pontjában.

2.5 táblázat. Az α kritikus teherparaméter a k_s csavarási tényező függvényében.

k_s	α	k_s	α	k_s	α	k_s	α
0.00	7.837	1.3	12.72	2.8	28.03	50	2984.7
0.01	7.838	1.4	13.47	2.9	29.30	60	4209.3
0.05	7.845	1.5	14.27	3.0	30.59	70	5640.9
0.10	7.867	1.6	15.11	4.0	44.69	80	7278.1
0.20	7.957	1.7	15.99	5.0	60.75	90	9120.7
0.30	8.107	1.8	16.91	6.0	78.80	100	11168
0.40	8.316	1.9	17.87	7.0	98.94	200	42864
0.50	8.583	2.0	18.87	8.0	121.2	300	94863
0.60	8.909	2.1	19.91	9.0	145.7	400	167093
0.70	9.291	2.2	20.98	10	172.4	500	259498
0.80	9.730	2.3	22.08	15	338.6	1000	1023750
0.90	10.22	2.4	23.21	20	558.6	2000	4059499
1.00	10.77	2.5	24.38	25	831.8	3000	9101926
1.10	11.37	2.6	25.57	30	1157.8	4000	16149383
1.20	12.02	2.7	26.79	40	1967.1	>4000	k_s^2

Abban az esetben amikor a mag öblösödési merevsége zérus (2.22/a ábra), a (2.83) és (2.84) összefüggések nem használhatók. Ilyen esetekben a tiszta elcsavarodó kihajlás kritikus terhét az

$$N_{cr,\varphi} = \frac{GJ}{i_p^2} \tag{2.85}$$

összefüggés segítségével határozhatjuk meg. A viselkedés érdekessége, hogy a kritikus teher értéke ekkor nem függ a szerkezet magasságától.

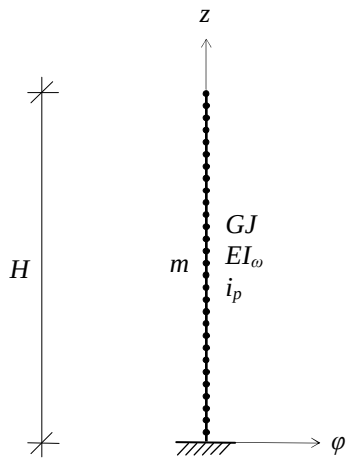
A mag síkbeli és tiszta elcsavarodó kihajlásához tartozó kritikus terheinek meghatározásával rendszerint a feladat első részét oldottuk meg, mert a magok gyakran nem rendelkeznek kétszeres szimmetriával és általában térbeli viselkedésűek. Az $N_{cr,x}$, $N_{cr,y}$ és $N_{cr,\varphi}$ kritikus terheket *alap* kritikus terheknek tekintjük, mert a térbeli viselkedés következtében ezek általában kombinálódnak és elcsavarodó kihajlás jön létre. Ez a kombinálódás igen fontos, mert a kombinálódás kedvezőtlen jelenség: a mag kombinált kritikus terhe mindig kisebb (legfeljebb ugyanannyi) mint az alap kritikus terhek. Az alap kritikus terhek kombinálódásával kapcsolatban az 5. fejezet ad részletesebb információt, ahol a merevítőrendszerek térbeli viselkedését tárgyaljuk.

2.7.4 Sajátfrekvencia

A mag dinamikai vizsgálata során a síkbeli rezgésekhez tartozó frekvenciákat a merevítőfalaknál megadott (2.64) képlet segítségével azonnal meg lehet adni:

$$f_x = \frac{0.56 r_f}{H^2}\sqrt{\frac{EI_y}{m}} \qquad \text{és} \qquad f_y = \frac{0.56 r_f}{H^2}\sqrt{\frac{EI_x}{m}} \tag{2.86}$$

ahol m az egységhosszra jutó tömeg és r_f a 2.8 ábra és a 4.1 táblázat segítségével meghatározható redukciós tényező.



2.27 ábra. A merevítőmag modellje a tiszta csavaró rezgések vizsgálatához.

A tiszta csavaró rezgések vizsgálatához a mag (2.27 ábra) egy elemi szakaszának egyensúlya alapján az

$$r_f^2 EI_\omega \varphi''''(z,t) - r_f^2 GJ\varphi''(z,t) + m i_p^2 \ddot{\varphi}(z,t) = 0$$

differenciálegyenlet vezethető le, ahol a vesszők és pontok a z (hely) és t (idő) szerinti differenciálást jelentik. A megoldás szorzatalakban kereshető és a változók szétválasztása és az időtől függő tagok kiküszöbölése után az

$$r_f^2 EI_\omega \varphi_1''''(z) - r_f^2 GJ\varphi_1''(z) - \omega^2 m i_p^2 \varphi_1(z) = 0$$

peremérték-feladathoz jutunk, ahol $\varphi_1(z)$ az időtől már nem függő csavaró rezgéseket jelöli, ω a körfrekvencia és i_p az inerciasugár. Ez a differenciálegyenlet szerkezetében azonos a (2.37) differenciálegyenlettel, a peremfeltételek is azonosak, és így a (2.37) egyenlet megoldása felhasználható most is, ha a megfelelő merevségeket használjuk. Ekképpen eljárva, a tiszta csavaró rezgések legkisebb sajátfrekvenciájára az

$$f_\varphi = \frac{\eta r_f}{i_p H^2}\sqrt{\frac{EI_\omega}{m}} \tag{2.87}$$

összefüggést kapjuk, ahol az η frekvenciaparaméter értékeit a 2.10 diagram és a 4.2 táblázat tartalmazza a k dimenziótlan csavarási tényező [(2.77) képlet] függvényében:

$$k = H\sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}}$$

A (2.87) képlet nem alkalmazható zérus öblösödési merevséggel rendelkező magok esetében. A legkisebb sajátfrekvencia ilyenkor az

$$f_\varphi = \frac{1}{4Hi_p}\sqrt{\frac{GJ}{m}} \tag{2.88}$$

összefüggés segítségével határozható meg.

Most is érvényes az előző pontban tett megjegyzés: amikor a (2.87) és (2.88) összefüggéseket egy egyetlen merevítőmaggal merevített *épület* sajátfrekvenciájának meghatározására használjuk, akkor az i_p inerciasugár meghatározásánál az épület alaprajzi területét kell használni (nem pedig a mag keresztmetszeti területét).

A mag viselkedése hasonló a stabilitásvizsgálatnál elmondottakhoz, abból a szempontból, hogy a térbeli mag rendszerint térbeli módon rezeg, vagyis az f_x, f_y és f_φ frekvenciák rendszerint kapcsolódnak. Az f_x, f_y és f_φ frekvenciák így *alap* frekvenciáknak tekinthetők és figyelembe kell venni a kombinálódásukat. A kapcsolt frekvencia mindig kisebb (vagy legfeljebb egyenlő) bármelyik alapfrekvenciánál. Az alapfrekvenciák kapcsolódását részletesen a 4. fejezetben vizsgáljuk, ahol merevítőrendszerek térbeli viselkedésével foglalkozunk.

2.8 Számpélda: 28-szintes, 4-lábas keret globális vizsgálata

Ebben és az összes többi számpéldában is a könnyebb azonosítás céljából az alkalmazott képletek számát *kapcsos* zárójelek között a lap jobboldalán adjuk meg.

A számítások során rendszerint az elméleti rész sorrendjétől eltérő sorrendet követünk. Ennek az az oka, hogy amíg az elméleti részben a magyarázat érthetősége és szemléletessége volt a fő cél, addig a gyakorlati számítások során a számítási munka egyszerűsítésére és áttekinthetőségére törekszünk.

Határozzuk meg a 2.28 ábrán vázolt 28-szintes keret legnagyobb tetőponti eltolódását, a legkisebb sajátfrekvenciáját és a kritikus teher értékét. A keret anyagának rugalmassági modulusa $E = 25\cdot10^6$ kN/m^2, az emeletmagasság $h = 3$ m, a három azonos nyílásköz $l = 6$ m és a keret teljes magassága $H = 84$ m. Az oszlopok keresztmetszete 40 cm/40 cm és a gerendák keresztmetszete 40 cm/70 cm, ahol az első szám a keresztmetszet szélessége és a második a keresztmetszet magassága (a keret síkjában).

2.8.1 Alapadatok

Néhány adat mindhárom vizsgálatnál azonos és így célszerű ezeket először meghatározni.

A keretgerendákhoz köthető globális nyírási merevség:

$$K_b = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{12EI_{b,j}}{l_j h} = 3\frac{12\cdot25\cdot10^6\cdot0.4\cdot0.7^3}{12\cdot6\cdot3} = 571667\ \text{kN} \qquad \{2.25\}$$

A keretoszlopokhoz tartozó lokális nyírási merevség:

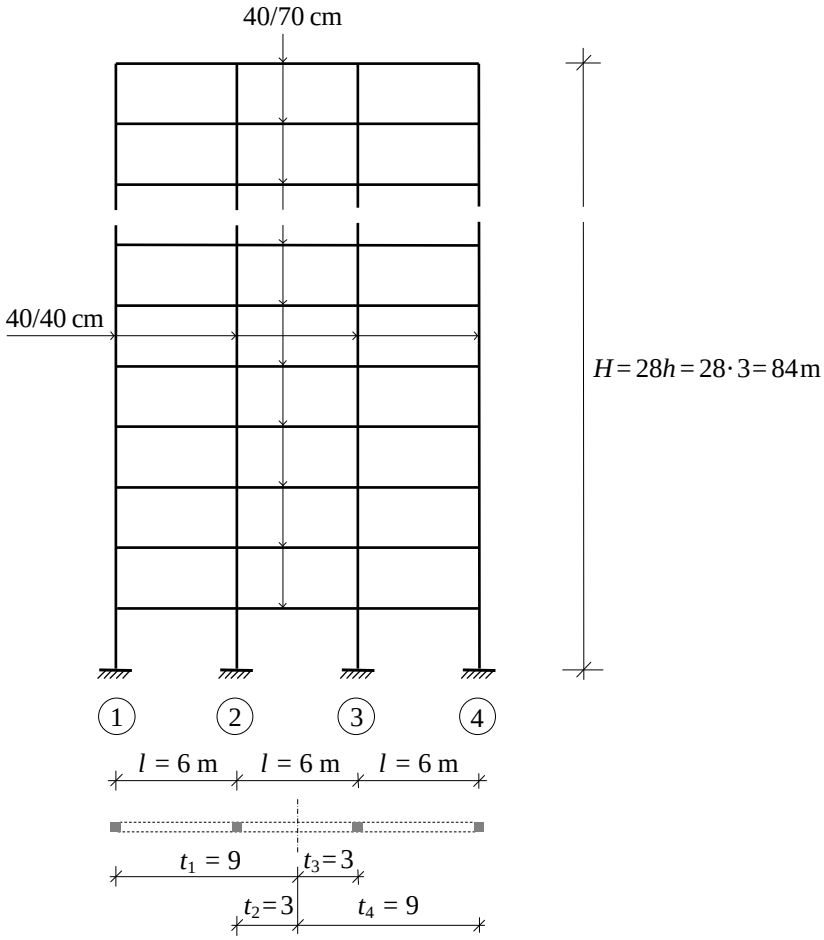
$$K_c = \sum_{j=1}^{n}\frac{12EI_{c,j}}{h^2} = 4\frac{12\cdot25\cdot10^6\cdot0.4^4}{12\cdot3^2} = 284444\ \text{kN} \qquad \{2.26\}$$

Az *r* redukciós tényező:

$$r = \frac{K_c}{K_b + K_c} = \frac{284444}{571667 + 284444} = 0.33225 \qquad \{2.27\}$$

A keret eredeti nyírási merevsége:

$$K = K_b r = 571667 \cdot 0.33225 = 189936\,\text{kN} \qquad \{2.24\}$$



2.28 ábra. 28-szintes keret a síkbeli vizsgálatokhoz.

Az oszlopok lokális hajlítási merevséghez tartozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$I = r\sum_{i=j}^{n} I_{c,j} = 0.33225 \cdot 4 \cdot \frac{0.4^4}{12} = 0.0028352\,\text{m}^4 \qquad \{2.28\}$$

Az oszlopok globális tehetetlenségi nyomatéka:

$$I_g = \sum_{j=1}^{n} A_{c,j} t_j^2 = 0.4 \cdot 0.4(9^2 + 3^2)2 = 28.8\,\text{m}^4 \qquad \{2.29\}$$

A lokális és globális tehetetlenségi nyomatékok összege:

$$I_f = I + I_g = 0.0028352 + 28.8 = 28.80\,\mathrm{m}^4 \qquad \{2.21\}$$

2.8.2 A maximális tetőponti eltolódás

A keret maximális tetőponti eltolódását $w = 5$ kN/m intenzitású, egyenletesen megoszló vízszintes teher hatására határozzuk meg.

A számításhoz szükséges segédmennyiségek:

$$s = 1 + \frac{I_c r}{I_g} = 1 + \frac{0.0028352}{28.8} = 1.000098 \approx 1.0 \qquad \{2.14\}$$

$$\kappa = \sqrt{bs} = \sqrt{\frac{K}{EI}} = \sqrt{\frac{189936}{25 \cdot 10^6 \cdot 0.0028352}} = 1.637\,, \qquad \kappa H = 1.637 \cdot 84 = 137.5 \qquad \{2.14\}$$

A maximális tetőponti eltolódás: $\{2.22\}$

$$y_{\max} = \frac{wH^4}{8EI_f} + \frac{wH^2}{2Ks^2} - \frac{wEI}{K^2 s^3}\left(\frac{1 + \kappa H \sinh \kappa H}{\cosh \kappa H} - 1\right) = \frac{5 \cdot 84^4}{8 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 28.8} + \frac{5 \cdot 84^2}{2 \cdot 189936} -$$

$$- \frac{5 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 0.0028352}{189936^2}\left(\frac{1 + 137.5 \sinh 137.5}{\cosh 137.5} - 1\right) = 0.043 + 0.093 - 0.001 = 0.135\,\mathrm{m}$$

Összhangban a 2.1.4 pont b) alatti megjegyzéssel, miszerint az egymásrahatás jelentősége a szerkezet magasságának növekedésével csökken, a vizsgált 28-szintes keret esetében az egymásrahatásnak köszönhető eltolódáscsökkenés (a harmadik tag a fenti képletben) nem éri el az egy százalékot.

2.8.3 A legkisebb sajátfrekvencia

A keret sajátfrekvenciájának meghatározásához $m = 18.35$ kg/m egységhosszra jutó tömeget tételezünk fel. A számításhoz először néhány segédmennyiséget és frekvencia-összetevőt határozunk meg. A tömeg függőleges eloszlásával kapcsolatos redukciós tényező:

$$r_f = \sqrt{\frac{n}{n + 2.06}} = \sqrt{\frac{28}{28 + 2.06}} = 0.965 \qquad \{4.1\ \text{táblázat}\}$$

Az eredeti nyírási merevséghez tartozó frekvencia négyzete:

$$f_{s'}^2 = \frac{1}{(4H)^2}\frac{r_f^2 K}{m} = \frac{1}{(4 \cdot 84)^2}\frac{0.965^2 \cdot 189936}{18.35} = 0.0854\,\mathrm{Hz}^2 \qquad \{2.30\}$$

A globális hajlítási merevséghez tartozó frekvencia négyzete:

$$f_g^2 = \frac{0.313 r_f^2 E I_g}{H^4 m} = \frac{0.313 \cdot 0.965^2 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 28.8}{84^4 \cdot 18.35} = 0.230\,\mathrm{Hz}^2 \qquad \{2.31\}$$

A nyírási merevség hatékonysági mutatója:

$$s_f = \sqrt{\frac{f_g^2}{f_{s'}^2 + f_g^2}} = \sqrt{\frac{0.23}{0.0854 + 0.23}} = \sqrt{0.729} = 0.854 \qquad \{2.34\}$$

A hatékony nyírási merevség:

$$K_e = s_f^2 K = 0.729 \cdot 189936 = 138463\,\text{kN} \qquad \{2.33\}$$

A hatékony nyírási merevséghez tartozó frekvencia négyzete:

$$f_s^2 = \frac{1}{(4H)^2}\frac{r_f^2 K_e}{m} = \frac{1}{(4 \cdot 84)^2}\frac{0.965^2 \cdot 138463}{18.35} = 0.0622\,\text{Hz}^2 \qquad \{2.32\}$$

A lokális hajlítási merevséghez tartozó frekvencia négyzete:

$$f_b^2 = \frac{0.313 r_f^2 EI}{H^4 m} = \frac{0.313 \cdot 0.965^2 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 0.0028352}{84^4 \cdot 18.35} = 0.00002\,\text{Hz}^2 \qquad \{2.35\}$$

A frekvenciaparaméter meghatározásához szükséges dimenziótlan tényező:

$$k = H\sqrt{\frac{K_e}{EI}} = 84\sqrt{\frac{138463}{25 \cdot 10^6 \cdot 0.0028352}} = 117.4 \qquad \{2.38\}$$

A frekvenciaparaméter:

$$\eta = \frac{k}{4} = \frac{117.4}{4} = 29.35 \qquad \{4.2\ \text{táblázat}\}$$

Minden rendelkezésre áll a keret legkisebb sajátfrekvenciájának meghatározásához:

$$f = \sqrt{f_b^2 + f_s^2 + \left(\frac{\eta^2}{0.313} - \frac{k^2}{5} - 1\right) s_f f_b^2} = \qquad \{2.41\}$$

$$= \sqrt{0.00002 + 0.0622 + \left(\frac{29.35^2}{0.313} - \frac{117.4^2}{5} - 1\right) 0.854 \cdot 0.00002} = 0.249\,\text{Hz}$$

2.8.4 A kritikus teher

A keret kritikus terhének meghatározásához azt tételezzük fel, hogy a terhelés a gerendákon egyenletesen megoszló teher.

A teher függőleges eloszlásával kapcsolatos redukciós tényező:

$$r_s = \frac{n}{n + 1.588} = \frac{28}{28 + 1.588} = 0.946 \qquad \{5.1\ \text{táblázat}\}$$

A segédmennyiségek közül újra kell számolni a lokális nyírási merevséget (és az összes ettől függő mennyiséget), mert a képlete nem azonos a 2.8.1 pontban használt (2.26) képlettel.

A lokális nyírási merevség:

$$K_c = \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi^2 E I_{c,j}}{h^2} = 4 \frac{\pi^2 25 \cdot 10^6 \cdot 0.4^4}{12 \cdot 3^2} = 233946 \,\text{kN} \qquad \{2.44\}$$

Az *r* redukciós tényező:

$$r = \frac{K_c}{K_b + K_c} = \frac{233946}{571667 + 233946} = 0.2904 \qquad \{2.46\}$$

A nyírási merevség:

$$K = K_b r = 571667 \cdot 0.2904 = 166009 \,\text{kN} \qquad \{2.45\}$$

Az oszlopok lokális hajlítási merevséghez tartozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$I = r \sum_{j=1}^{n} I_{c,j} = 0.2904 \cdot 4 \cdot \frac{0.4^4}{12} = 0.002478 \,\text{m}^4 \qquad \{2.48\}$$

A kritikus teherparaméter meghatározásához szükséges két merevségarány:

$$\frac{I}{I + I_g} = \frac{0.002478}{0.002478 + 28.8} = 0.000086 \quad \approx \quad 0.0 \qquad \{2.50\}$$

és

$$\frac{KH^2}{E(I + I_g) r_s} = \frac{166009 \cdot 84^2}{25 \cdot 10^6 (0.002478 + 28.8) 0.946} = 1.72 \qquad \{2.51\}$$

A két merevségarány felhasználásával a 2.1 táblázatból megkapjuk a kritikus teherparamétert. Mivel az $I/(I+I_g)$ arány igen kicsi (és zérusnak vehető), a teherparaméter az első oszlop segítségével

$$c_1 = 1.72 \qquad \{2.1 \text{ táblázat}\}$$

A keret kritikus terhe – meganewton-ra áttérve – így

$$N_{cr} = c_1 \frac{E(I + I_g) r_s}{H^2} = 1.72 \frac{25 \cdot 10^6 (0.002478 + 28.8) 0.946}{10^3 \cdot 84^2} = 166.0 \,\text{MN} \qquad \{2.49\}$$

Mivel az $I/(I+I_g)$ arány igen kicsi és teljesül az $I/(I+I_g) \leq 0.0003$ feltétel, a keret kritikus terhe a 2.4.1 pontban bemutatott egyszerűbb módszerrel is meghatározható. Gyakorlásképpen ezt az egyszerűbb számítást is elvégezzük.

A globális hajlítási merevséghez tartozó rész kritikus teher:

$$N_g = \frac{7.837 r_s E I_g}{H^2} = \frac{7.837 \cdot 0.946 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 28.8}{84^2} = 756510 \,\text{kN} \qquad \{2.54\}$$

A β_s rész kritikus teher arány

$$\beta_s = \frac{K}{N_g} = \frac{166009}{756510} = 0.22 \qquad \{2.53\}$$

segítségével a kritikus teherparaméter értékét a 2.14 ábráról vagy a 2.3 táblázatból kapjuk meg:

$$\alpha_s = 1.0 \qquad \{2.14 \text{ ábra}\}$$

A keret kritikus terhe – meganewton-ra áttérve – így

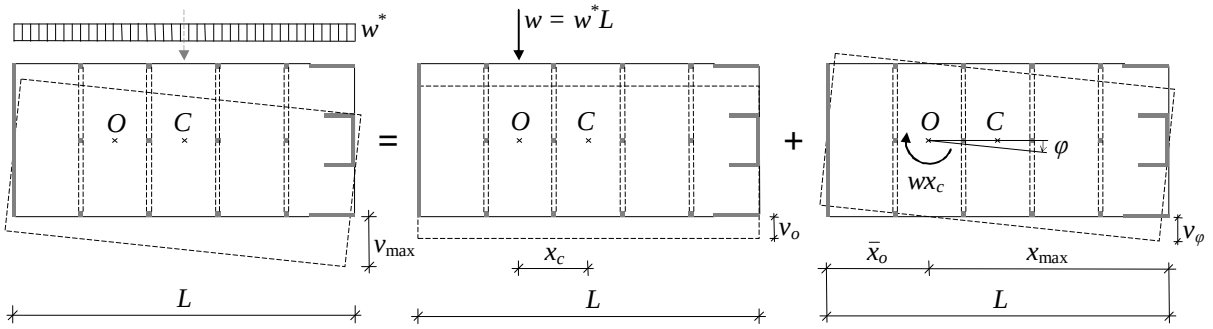
$$N_{cr} = \alpha_s K = \frac{1.0 \cdot 166009}{10^3} = 166.0 \,\text{MN} \qquad \{2.52\}$$

3

A merevítőrendszer viselkedése vízszintes teher hatására

Az első fejezetben tett általános jellegű feltételezéseken túlmenően feltételezzük még azt, hogy a többszintes épületet a magasság mentén egyenletesen megoszló vízszintes teher terheli.

Többszintes épületek vízszintes teher hatására komplex módon viselkednek és általában – aszimmetrikus merevítőrendszer esetében – az épület szintjei az eltolódásokon kívül el is csavarodnak. A két jelenség elkülöníthető és ezáltal viszonylag egyszerűen vizsgálható. A viselkedést a 3.1 ábrán vázoljuk, ahol a vízszintes teher (egységmagasságra vonatkoztatott) eredőjét $w = w^*L$ [kN/m] jelöli, ahol w^* a homlokzat felületegységére jutó vízszintes teher intenzitása. Az alaprajz súlypontját *C*, a merevítőrendszer nyírásközéppontját *O* jelöli. A nyírásközéppontot – a 3.2.1 pontban részletezett módon – a merevítőelemek merevségeinek súlypontjaként definiáljuk. A nyírásközéppont fontos jellemzője az, hogy a rajta áthaladó erő hatására az épület eltolódik, de nem csavarodik el.



a) épület az eredeti terheléssel b) eltolódás *w* hatására c) elcsavarodás $m = wx_c$ hatására

3.1 ábra. Vízszintes terhelésű aszimmetrikus merevítőrendszer.

A vízszintes teher *w* eredője átmegy az alaprajz *C* súlypontján (3.1/a ábra). Ezt az erőt áthelyezzük az *O* nyírásközéppontba (3.1/b ábra), ahol a *w* erő mellett működtetni kell egy $m = wx_c$ csavarónyomatékot is (3.1/c ábra), ahol x_c a súlypont és a nyírásközéppont távolsága. A nyírásközépponton áthaladó *w* erő az épület alaprajzának v_o egyenletes eltolódását okozza, míg az *m* csavarónyomaték hatására az épület a nyírásközéppont körül elcsavarodik és további v_φ eltolódások jönnek létre. Az így elkülönített két hatás segítségével az épület eltolódásait a

$$v = v_o + v_\varphi \tag{3.1}$$

összefüggéssel jellemezhetjük.

Maximális eltolódás a legfelső födémszint egyik sarokpontjánál következik be:

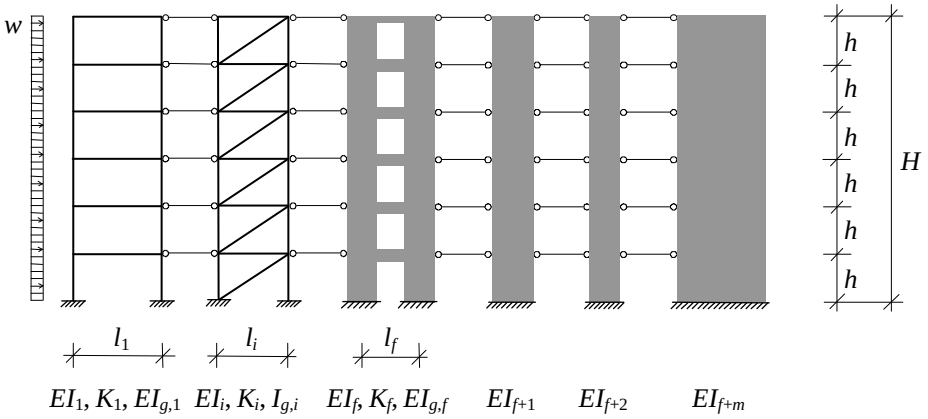
$$v_{\max} = v(H) = v_o(H) + x_{\max}\varphi(H) = v_o(H) + (L - \bar{x}_o)\varphi(H) \tag{3.2}$$

A fenti képletben $x_{\max}$ a sarokpont távolsága a nyírásközépponttól, $\bar{x}_o$ a nyírásközéppont helyzetét rögzítő koordináta (rendszerint az épület bal szélétől mérve) és $\varphi(H)$ a tetőszinti elcsavarodás szöge.

A következőkben a két hatást külön-külön vizsgáljuk. Felhasználjuk és alkalmazzuk a 2.1 pontban már bevezetett jellemző alakváltozásokat és merevségeket az ott már megadott képletekkel együtt.

3.1 Csavarodásmentes merevítőrendszer

Abban az esetben, amikor a vízszintes teher eredője átmegy a merevítőrendszer nyírásközéppontján, a rendszer csak vízszintes eltolódást végez, mégpedig „egyenletes" módon, vagyis az alaprajz minden pontjának ugyanakkora az eltolódása. Ez a helyzet két esetben fordulhat elő. Az egyik eset az, amikor az épület (a vízszintes teherrel szemben) szimmetrikus merevítőrendszerrel rendelkezik. Ekkor a vízszintes teher eredője már eleve átmegy a nyírásközépponton és a probléma megoldása az épület eltolódását eredményezi. A másik esettel akkor találkozhatunk, amikor a merevítőrendszer aszimmetrikus. Ekkor (egy nyomaték kíséretében) a nyírásközéppontba áthelyezett erő egyenletes eltolódásokat eredményez. Ebben az esetben azonban az épület végleges eltolódásait csak a nyomaték okozta elcsavarodás hatásának figyelembe vétele után kapjuk meg.



3.2 ábra. Merevítőrendszer *f* kerettel/nyílásokkal áttört fallal és *m* fallal/maggal.

Vizsgálatunk tárgyát tehát egy olyan többszintes épület képezi, amelynek merevítőrendszerét keretek, nyílásokkal áttört falak, tömör falak és magok alkotják, és a külső teher eredője átmegy a merevítőrendszer nyírásközéppontján. A vízszintes teher a homlokzaton keresztül a födémekre, majd a födémek közvetítésével a merevítőrendszer elemeire adódik át. A síkjukban merev födémek a merevítőrendszer elemeit együttdolgozásra és egyenletes vízszintes elmozdulásra kényszerítik. A vizsgálati modell ilyenkor egy olyan síkbeli rendszer lehet, amelynek elemeit – a merevítőelemeket – a födémek hatását pótló, összenyomhatatlan, két végén csuklós rudak kötik össze (3.2 ábra).

3.1.1 A feladat differenciálegyenletei

Az *f* darab keretet és *m* darab tömör falat tartalmazó rendszer viselkedése összetett. (Az *f* keret magában foglalja a nyílásokkal áttört falakat is, és az *m* tömör fal tartalmazza a magokat is.) A keretek általában vegyes típusú alakváltozást végeznek, ahol a nyírási és hajlítási alakváltozás súlyát az „eredő" alakváltozásban sok tényező befolyásolhatja. A tömör falak és

magok tiszta hajlítási alakváltozást végeznek. A $f + m$ elemet tartalmazó rendszer viselkedését így két csoport differenciálegyenlet jellemzi. Az első csoport azt a keretekre vonatkozó kompatibilitási feltételt fejezi ki, melynek értelmében a gerendák inflexiós pontjaiban folytonosság áll fenn. (Ebben a pillanatban még egynyílású keretekről van szó, de mint a 2.1.3 pontban láttuk, az egynyílású keretekre levezetett összefüggések egyszerűen általánosíthatók többnyílású szerkezetekre.) A második csoport a teljes H magasságú függőleges elemek hajlításával kapcsolatos.

A 2.1.2 pontban részletezett levezetés és a (2.9) differenciálegyenlet felhasználásával f kompatibilitási egyenlet írható fel, melyek közül az egyszerűbb tárgyalhatóság érdekében csak hármat, az első, az i-edik és az utolsó egyenletet soroljuk itt fel:

$$y_1''(z) - \frac{l_1}{K_1} N_1''(z) + \frac{l_1}{EI_{g,1}} N_1(z) = 0 \tag{3.3}$$

$$y_i''(z) - \frac{l_i}{K_i} N_i''(z) + \frac{l_i}{EI_{g,i}} N_i(z) = 0 \tag{3.4}$$

$$y_f''(z) - \frac{l_f}{K_f} N_f''(z) + \frac{l_f}{EI_{g,f}} N_f(z) = 0 \tag{3.5}$$

A fenti egyenletekben $EI_{g,i}$ és K_i az i-edik keret globális hajlítási és nyírási merevsége, l_i a nyílásköz és $N_i(z)$ a gerendák hajlításából származó normálerő az oszlopokon. Az egyenletekben az $y_i(z)$ eltolódásokon kívül az $N_i(z)$ normálerők is ismeretlenek, így a megoldás előállítása érdekében további egyenletekre van szükség.

A függőleges elemek (az f keret teljes H magasságú keretoszlopai és az m tömör fal) hajlításának vizsgálata további $f + m$ egyenletet eredményez:

$$y_1''(z) EI_1 = -M_1(z) + l_1 N_1(z) \tag{3.6}$$

$$y_i''(z) EI_i = -M_i(z) + l_i N_i(z) \tag{3.7}$$

$$y_f''(z) EI_f = -M_f(z) + l_f N_f(z) \tag{3.8}$$

és

$$y_{f+1}''(z) EI_{f+1} = -M_{f+1}(z) \tag{3.9}$$

$$y_{f+2}''(z) EI_{f+2} = -M_{f+2}(z) \tag{3.10}$$

$$y_{f+m}''(z) EI_{f+m} = -M_{f+m}(z) \tag{3.11}$$

ahol a keretek után következő első tömör falat az $f + 1$ index jelöli. (Az m fal közül is csak hármat tüntettünk fel.)

Az $M_i(z)$ nyomatékok a fenti egyenletekben az i-edik merevítőelemre jutó nyomatékokat jelentik (a külső teherből) az

$$M_i(z) = q_i M(z) \tag{3.12}$$

összefüggés szerint, ahol

$$M(z) = \frac{wz^2}{2} \tag{3.13}$$

a teljes külső nyomaték és q_i az i-edik merevítőelemhez tartozó erősztó. [Bár a (3.12) egyenlet nyomatékok szétosztására vonatkozik, a nyomatékok és erők között fennálló egyenes arány miatt a szétosztás nyomatékokra és erőkre ugyanúgy érvényes.] Az erősztó értékét a

$$q_i = \frac{S_i}{\sum_{i=1}^{f+m} S_i} \tag{3.14}$$

összefüggés segítségével határozhatjuk meg. Itt S_i az i-edik merevítőelem merevsége (ahol $1 \le i \le f$ + m). A merevítőelemek merevségét az

$$S_i = \frac{1}{y_i(H)} \tag{3.15}$$

összefüggéssel definiáljuk, ahol $y_i(H)$ az i-edik merevítőelem maximális tetőponti eltolódása.

Az i-edik merevítőelemhez tartozó erősztó ismeretében kifejezhető az i-edik merevítőelemhez tartozó teherhányad is:

$$w_i = q_i w \tag{3.16}$$

A fenti két differenciálegyenlet-rendszer a csavarásmentes merevítőrendszer megoldásához szükséges összes adatot tartalmazza. Maga a megoldás kétféleképpen állítható elő. Az egyik megközelítéssel egy igen egyszerű megoldáshoz jutunk, míg a másik eljárás pontosabb eredményt ad. Mint később látni fogjuk, az általános (aszimmetrikus) eset vizsgálata során mindkét megoldásra szükség lesz, így a következőkben mindkét megoldást bemutatjuk.

3.1.2 Egyszerű megoldás

Az egyszerű megoldás előállítása céljából a merevítőrendszert – és a rendszert jellemző differenciálegyenleteket – újracsoportosítjuk. A merevítőelemek típusa szerint két csoportot hozunk létre: a keretek és a falak csoportját. A két csoporthoz a külső teher bizonyos hányada tartozik. A keretekre jutó terhet a q_1, q_i, ... q_f, a falak által felvett terhet pedig a q_{f+1}, q_{f+2}, ... q_{f+m} tényezők határozzák meg.

Tekintsük először az f keretből álló első csoportot. A (3.3), (3.4) és (3.5) differenciálegyenletek az f keretre vonatkozó kompatibilitási feltételeket fejezik ki és az $y_i(z)$ és $N_i(z)$ ismeretleneket tartalmazzák. Ugyanezeket az ismeretleneket tartalmazzák a keretek függőleges elemeinek (a teljes H magasságú oszlopoknak) a hajlítására vonatkozó (3.6), (3.7) és (3.8) egyenletek. A megoldáshoz szükséges 2f egyenlet így rendelkezésre áll. A hajlításra vonatkozó egyenletek felhasználásával a kompatibilitási egyenletekben szereplő normálerők kiküszöbölhetők. Ekképpen eljárva, az első csoport i-edik keretére vonatkozó egyenlet (ahol $1 \le i \le f$) az alábbiak szerint alakul:

$$y_i''(z) - \frac{1}{K_i}\left[y_i''(z)EI_i + M_i(z)\right]'' + \frac{1}{EI_{g,i}}\left[y_i''(z)EI_i + M_i(z)\right] = 0 \tag{3.17}$$

A (3.12) és (3.13) összefüggések felhasználásával és némi átrendezés után a fenti egyenlet az

$$y_i''''(z) - y_i''(z)\left(\frac{K_i}{EI_i} + \frac{K_i}{EI_{g,i}}\right) = \frac{q_i w}{EI_i}\left(\frac{z^2}{2}\frac{K_i}{EI_{g,i}} - 1\right) \tag{3.18}$$

alakban írható. Merevítőrendszerek vizsgálata során gyakran alkalmazzuk azt a fogást, hogy a merevítőelemek „összetolásával" (és a merevségek valamint a vonatkozó differenciálegyenletek összeadásával) helyettesítő tartót állítunk elő, amely egyszerűbb megoldás előállítását teszi lehetővé. A (3.18) egyenlet szerkezete most viszont világosan mutatja, hogy ebben az esetben nem lehetséges egy olyan helyettesítő tartó létrehozása amelynek az *EI*, EI_g és *K* merevségeit az egyes merevítőelemek megfelelő merevségeinek egyszerű összegzésével állítjuk elő. Ezt azért fontos megemlíteni, mert a frekvencia- és stabilitásvizsgálat során (a későbbi 4. és 5. fejezetekben) pedig éppen ez történik, vagyis a helyettesítő tartót úgy állítjuk majd elő, hogy a megfelelő merevségeket összegezzük.

Az *m* merevítőfalat tartalmazó második csoport elemeit jellemző differenciálegyenletek a (3.9), (3.10) és (3.11) egyenletek (ahol $f + 1 \le i \le m$). Az itteni *i*-edik egyenlet:

$$y_i''(z)EI_i = -\frac{q_i w z^2}{2} \tag{3.19}$$

A két csoport általános elemére vonatkozó (3.18) és (3.19) összesen $f + m$ egyenlet definiálja a merevítőrendszer *teljes* differenciálegyenlet-rendszerét. Az $f + m$ differenciálegyenletből álló rendszer megoldása egy meglehetősen bonyolult eljárást eredményezne, de erre nincs szükség, ha megfontoljuk a következőket:

a) a födémekre vonatkozó feltétel értelmében az összes merevítőelem ugyanazt az alakváltozási görbét veszi fel, vagyis érvényes hogy $y_1(z) = y_i(z) = \ldots = y_{f+m}(z) = y(z)$.

b) az *i*-edik merevítőelemre jutó teher ismeretében [(3.14), (3.15) és (3.16) összefüggések] elegendő az *i*-edik merevítőelemmel foglalkozni.

Ha az *i*-edik merevítőelem keret, akkor a (3.18) differenciálegyenlet megoldása szolgáltatja az épület alakváltozását. A (3.18) egyenlet az

$$y_i''''(z) - \kappa_i^2 y_i''(z) = \frac{q_i w}{EI_i}\left(\frac{a_i z^2}{2} - 1\right) \tag{3.20}$$

tömörebb alakban írható, ahol

$$\kappa_i = \sqrt{a_i + b_i}\,, \qquad a_i = \frac{K_i}{EI_{g,i}}\,, \qquad b_i = \frac{K_i}{EI_i} \tag{3.21}$$

A (3.20) egyenlet formailag azonos a 2.1.2 pontban levezetett, önálló keretre vonatkozó (2.15) egyenlettel, így az ott előállított megoldást itt is használhatjuk. Ennek megfelelően, figyelembe véve hogy az *i*-edik keret alakváltozása azonos az épület alakváltozásával, az

$$y(z) = y_i(z) = \frac{q_i w}{EI_{f,i}}\left(\frac{H^3 z}{6} - \frac{z^4}{24}\right) + \frac{q_i w z^2}{2K_i s_i^2} - \frac{q_i w EI_i}{K_i^2 s_i^3}\left(\frac{\cosh\kappa_i(H-z) + \kappa_i H \sinh\kappa_i z}{\cosh\kappa_i H} - 1\right) \tag{3.22}$$

összefüggésre jutunk, ahol

$$EI_{f,i} = E(I_i + I_{g,i}) \tag{3.23}$$

a lokális és globális hajlítási merevség összege és

$$s_i = 1 + \frac{a_i}{b_i} = \frac{I_{g,i} + I_i}{I_{g,i}} = 1 + \frac{I_i}{I_{g,i}} \tag{3.24}$$

A legnagyobb eltolódás a szerkezet tetején $z = H$-nál jön létre:

$$y_{\max} = y_{i,\max} = \frac{q_i w H^4}{8EI_{f,i}} + \frac{q_i w H^2}{2K_i s_i^2} - \frac{q_i w EI_i}{K_i^2 s_i^3}\left(\frac{1 + \kappa_i H \sinh \kappa_i H}{\cosh \kappa_i H} - 1\right) \tag{3.25}$$

A képletekben szereplő merevségek többnyílású keretekre vonatkozó képleteit a 2.1.3 pontban foglaltuk össze.

Ha az *i*-edik merevítőelem merevítőfal, akkor a (3.19) differenciálegyenlet megoldása szolgáltatja az épület alakváltozását:

$$y(z) = y_i(z) = \frac{q_i w}{EI_i}\left(\frac{H^3 z}{6} - \frac{z^4}{24}\right) \tag{3.26}$$

A maximális tetőponti eltolódás:

$$y_{\max} = y_{i,\max} = \frac{q_i w H^4}{8EI_i} \tag{3.27}$$

Természetesen azt mi döntjük el, hogy melyik merevítőelemet választjuk az *i*-ediknek. Akármelyiket választjuk, ugyanarra az eredményre jutunk. Érdemes tehát egy merevítőfalat választani, hiszen a (3.27) képlet jóval egyszerűbb számítást igényel, mint a (3.25). Azt azért meg kell jegyezni, hogy a képletben szereplő q_i erőosztó meghatározásához az *összes* merevítőelem maximális tetőponti eltolódását ki kell számolni. Ezekhez a számításokhoz egy tetszőleges értékű (például egységnyi) erőosztót lehet alkalmazni, mivel az egyes elemek maximális eltolódásához használt q_i értéke később kiesik a számításokból.

A fent vázolt megoldás előnye az egyszerűségében rejlik. Hátránya viszont az, hogy a két csoport (keretek és falak) szétválasztásával hallgatólagosan elhanyagolja a tisztán hajlítási alakváltozást végző falak és a vegyes alakváltozást végző keretek közötti „közvetlen” egymásrahatást. A módszer pontossága – 198 teszt-szerkezet adatainak tanúsága szerint – még így is megfelel a gyakorlati számításoknál elvárt pontossági igényeknek, de a közvetlen egymásrahatás figyelembevételével a módszer pontossága jelentősen javítható. Ezt mutatjuk be a következő pontban.

3.1.3 Pontosabb megoldás

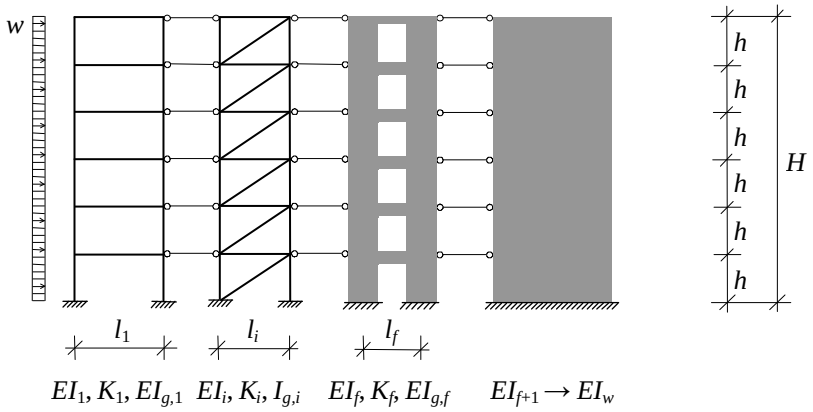
A különböző típusú merevítőelemek differenciálegyenleteinek összehasonlítása és a különböző típusú alakváltozások közötti egymásrahatások (keretek-keretek, falak-falak, keretek-falak) vizsgálata bizonyos következtetések levonására nyújt lehetőséget, amelyek az előző pontban bemutatott módszernél kifinomultabb eljárás kifejlesztését teszik lehetővé.

Amikor különböző merevségekkel rendelkező keretek alkotnak egy rendszert, akkor a különböző merevségek miatt a magasság mentén különböző „lefutású” alakváltozások jönnének létre. De nem ez történik, mert a síkjukban merev födémek közreműködésével kialakul egy „eredő” alakváltozás. Ennek az a következménye, hogy a keretek között egymásrahatás következik be. Amikor a rendszer elemei tömör merevítőfalak, akkor nincs

egymásrahatás, mert minden fal azonos típusú, tiszta hajlítási alakváltozást végez és az alakváltozás „mértéke” arányos a falra jutó teherrel (ami viszont arányos a fal merevségével). A vegyes – falakat és kereteket tartalmazó – rendszerek esetében mindig van egymásrahatás a keretek és a falak között, mert a jellemző alakváltozásuk mindig különböző típusú.

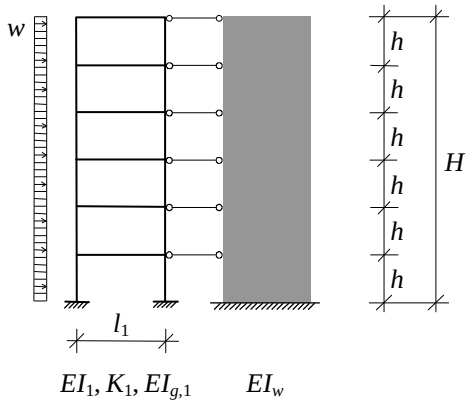
A hajlítással kapcsolatos differenciálegyenlet-rendszer második csoportjának egyenletei [a (3.9), (3.10) és (3.11) egyenletek] azonos szerkezetűek; csak lokális hajlítási merevséget tartalmaznak és ami ennél is fontosabb, nem tartalmazzák az $N_i(z)$ normálerőket, amelyek egyébként szükségesek a megoldás előállításához. Ennek az az egyik következménye, hogy ezek az egyenletek szigorúan véve nem szükségesek a megoldáshoz. (Ezt a tényt az előző pontban fel is használtuk, amikor a két különböző természetű alakváltozást végző merevítőelem-típust elkülönítettük.) A másik következménye ennek a megfigyelésnek az, hogy a tömör merevítőfalak száma nem számít, hiszen ezek a hajlítási merevségük összeadásával összetolhatók egyetlen fallá. Ez abból is következik, hogy a falak terhei arányosak a merevségeikkel, alakváltozási görbéjük azonos *típusú* és így a tiszta hajlítási alakváltozásuk között nincs egymásrahatás.

Az f keretből és m falból álló rendszer így úgy redukálható egy f keretből és egyetlen falból álló rendszerre (3.3 ábra) hogy közben semmiféle elhanyagolást nem teszünk. A rendszert a (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) és (3.9) egyenletek jellemezik. A 3.3 ábrán praktikus okokból az $f + 1$ index alkalmazásáról áttérünk a w index alkalmazására.



3.3 ábra. Merevítőrendszer f kerettel és egy fallal/maggal.

A következő lépésben a két merevítés típus (keret és fal) elkülönítése helyett – amivel „elveszítenénk” az egymásrahatást – a merevítőfalat be fogjuk építeni a keretekből álló rendszerbe. Az egy keretből és egy falból álló rendszer (3.4 ábra) vizsgálata mutatja meg, hogy ezt hogyan lehet megtenni.



3.4 ábra. Egy keretből és egy falból álló merevítőrendszer.

Az egy keretből és egy falból álló rendszer viselkedését a (3.3), (3.6) és (3.9) egyenletek jellemzik. A vízszintes eltolódások azonosságát kifejező $y_1(z) = y_i(z) = y(z)$ összefüggés felhasználásával és a falra vonatkozó *w* index bevezetésével a három egyenlet az

$$y''(z) - \frac{l_1}{K_1} N_1''(z) + \frac{l_1}{EI_{g,1}} N_1(z) = 0 \tag{3.28}$$

$$y''(z) EI_1 = -M_1(z) + l_1 N_1(z) \tag{3.29}$$

$$y''(z) EI_w = -M_w(z) \tag{3.30}$$

alakban írható, ahol $M_1(z)$ és $M_w(z)$ a keretre és a falra jutó nyomatékok. A (3.29) és (3.30) egyenletek kombinálhatók, hiszen mindkettő tiszta hajlítási alakváltozást végző szerkezeti elemre vonatkozik és mindkettő baloldala csak hajlítási merevséget tartalmaz és mindkettő jobboldala csak terheket tartalmaz. Így az

$$y''(z) E(I_1 + I_w) = -M(z) + l_1 N_1(z) \tag{3.31}$$

egyenlethez jutunk, ahol $M(z) = M_1(z) + M_w(z)$ a teljes külső nyomaték.

A (3.28) és (3.31) egyenletek szolgáltatják a megoldás előállításához szükséges két egyenletet.

A két egyenlet jelentése gyakorlati oldalról nézve úgy is megfogalmazható, hogy a falat „betoltuk" a keretbe, oly módon, hogy hajlítási merevségével megnöveltük a keret lokális hajlítási merevségét. Ennek az eljárásnak egy másik igen fontos aspektusa is van. Azzal, hogy a falat „betoltuk" a keretbe, azt is elértük, hogy a keret és a fal közötti egymásrahatást „közvetlenül" figyelembe vesszük a (3.28) és (3.31) egyenletek megoldása során, mivel a fal I_w tehetetlenségi nyomatéka most már része a megoldandó rendszernek. Erre utaltunk a 3.1.2 pont utolsó bekezdésében, amikor az egymásrahatás „közvetlen" figyelembevételéről beszéltünk. (Amikor az előző pontban előállítottuk az „egyszerű" megoldást, akkor ezt a közvetlen egymásrahatást „veszítettük el", mert az I_w tehetetlenségi nyomatékot az elkülönítéssel kivittük a megoldandó rendszerből.)

A két egyenlet a rutinszerűen használt „keret-fal egymásrahatás" pontos(abb) jelentését is megvilágítja. A kifejezés rendszerint a két merevítőelem közötti egymásrahatás jellemzésére használatos. Talán precízebb lenne a hajlítási és nyírási alakváltozások közötti egymásrahatásról beszélni.

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor a merevítőrendszer több keretet és egy tömör falat tartalmaz. (A fal akár több fal összetolásából is keletkezhetett.) A helyzet – bár bonyolultabb, de – a fent tárgyalt esethez hasonló. A megoldáshoz 2*f* egyenletre van szükség. Az egyenletek egy része – *f* egyenlet – magától érthetően a (3.3), (3.4) és (3.5) kompatibilitási feltételekből adódik. A kérdés az, hogy hogyan állítsuk elő a másik *f* egyenletet. Az egy fal-egy keret esetében fent követett gondolatmenetet alkalmazva a fal (3.30) differenciálegyenletét kellene kombinálni a (3.6), (3.7) és (3.8) differenciálegyenletekkel, amelyek a keretek függőleges elemeinek (teljes magasságú oszlopainak) hajlításával kapcsolatosak. Ez nehéz feladatnak tűnik, hiszen egy fal van, de – látszólag – *f* egyenletre van szükség. A különböző típusú merevítőelemek közötti egymásrahatás vizsgálata vezethet a megoldáshoz. A keretek és a fal külön-külön eltérő alakváltozást hajtanának végre, de a födémek összekapcsolják és együttdolgoztatják őket. Ebből az következik, hogy a keretek és a fal között egymásrahatás jön létre és a födémek „kikényszerítik" a közös – és azonos – alakváltozást. Mindegyik keret részt kell hogy vegyen a közös alak kialakításában, hiszen mindegyik keret eredeti alakváltozása különbözik a fal alakváltozásától. Amikor – az egy fal-egy keret mintájára –

„bedolgozzuk” a fal hajlítási merevségét a keretek merevségébe, akkor abból mindegyik keret részesül. Mivel az együttműködés „intenzitása” a keretek relatív merevségétől függ, a fal hajlítási merevségének szétosztása a keretek között azok merevségének arányában történik. Ezt a $\overline{q}_i$ erőosztók segítségével tesszük meg, amikor is az erőosztók meghatározásában csak az első *f* merevítőelem, vagyis az *f* eredeti keret vesz részt:

$$\overline{q}_i = \frac{S_i}{\sum_{i=1}^{f} S_i} \tag{3.32}$$

ahol S_i az *i*-edik keret merevsége a (3.15) összefüggés szerint.

Az *f* keretből és *m* falból álló rendszert így redukáltuk egy olyan rendszerre, amely *f* keretből áll. Ez az *f* keret már nem az eredeti kereteket jelenti, hanem azokat az „új” kereteket, amelyeket úgy kapunk, hogy az eredeti keretek lokális hajlítási merevségéhez rendre hozzáadjuk a merevítőfal(ak) hajlítási merevségének a kérdéses keretre jutó részét. Ennek megfelelően a függőleges elemek hajlításával kapcsolatos egyenletek az

$$y_1''(z)E(I_1 + \overline{q}_1 I_w) = -M_1^*(z) + l_1 N_1(z) \tag{3.33}$$

$$y_i''(z)E(I_i + \overline{q}_i I_w) = -M_i^*(z) + l_i N_i(z) \tag{3.34}$$

$$y_f''(z)E(I_f + \overline{q}_f I_w) = -M_f^*(z) + l_f N_f(z) \tag{3.35}$$

alakban írhatók.

A merevítőfal(ak) I_w tehetetlenségi nyomatékának beépítése a fenti egyenletekbe azt jelenti, hogy a megoldás során a fal(ak) és a keretek közötti egymásrahatást közvetlenül figyelembe vesszük.

Meg kell jegyezni, hogy az egyenletekben szereplő $M_1^*(z), M_i^*(z)$ és $M_f^*(z)$ nyomatékok nem azonosak a (3.6), (3.7) és (3.8) egyenletekben szereplő nyomatékokkal, hiszen a keretek sem azonosak az eredeti keretekkel. Értékük az

$$M_i^*(z) = q_i^* M(z) \tag{3.36}$$

képlet segítségével határozható meg, ahol az új erőosztókat (nyomatékosztókat) a

$$q_i^* = \frac{S_i^*}{\sum_{i=1}^{f} S_i^*} \tag{3.37}$$

összefüggés definiálja. A számításhoz szükséges

$$S_i^* = \frac{1}{y_i^*(H)} \tag{3.38}$$

merevségeket az új keretek adataival számított új $y_i^*(H)$ maximális tetőponti eltolódás felhasználásával határozzuk meg. Az *i*-edik (új) keretre jutó teher:

$$w_i^* = q_i^* w \tag{3.39}$$

A csillag a fenti egyenletekben arra utal, hogy a számításhoz a falak hajlítási merevségével módosított új keretek adatait kell használni.

Most már kombinálhatjuk a két egyenletcsoportot: a kompatibilitási feltételeket tartalmazó (3.3), (3.4) és (3.5) egyenleteket és a függőleges merevítőelemek hajlítását kifejező (3.33), (3.34) és (3.35) egyenleteket. Ez utóbbi egyenletek már figyelembe veszik a merevítőfalak hatását is, oly módon, hogy merevségüket beépítettük a keretekbe. Az *i*-edik (új) keretre vonatkozó differenciálegyenlet az

$$y_i''(z)-\frac{1}{K_i}\left[y_i''(z)EI_i^*+M_i^*(z)\right]''+\frac{1}{EI_{g,i}}\left[y_i''(z)EI_i^*+M_i^*(z)\right]=0 \tag{3.40}$$

alakban írható, ahol

$$I_i^*=I_i+\overline{q}_i I_w \tag{3.41}$$

A fenti egyenletekben K_i, EI_i és $EI_{g,i}$ az *i*-edik (eredeti) keret merevségei és EI_w a merevítőfal (vagy a merevítőfalak összegzett) merevsége.

A (3.40) differenciálegyenlet szerkezetét tekintve azonos a (3.17) egyenlettel és így a megoldásra vonatkozó 3.1.2 pontban vázolt eljárás is alkalmazható. Ez az

$$y_i''''(z)-\kappa_i^{*2}y_i''(z)=\frac{q_i^* w}{EI_i^*}\left(\frac{a_i z^2}{2}-1\right) \tag{3.42}$$

differenciálegyenlethez vezet, ahol

$$\kappa_i^*=\sqrt{a_i+b_i^*}\,,\qquad a_i=\frac{K_i}{EI_{g,i}}\,,\qquad b_i^*=\frac{K_i}{EI_i^*} \tag{3.43}$$

A megfelelő merevségek módosításával a (3.17) egyenlet megoldása is használható. A merevítőrendszer alakváltozására így az

$$y(z)=y_i^*(z)=\frac{q_i^* w}{EI_{f,i}^*}\left(\frac{H^3 z}{6}-\frac{z^4}{24}\right)+\frac{q_i^* w z^2}{2K_i s_i^{*2}}-\frac{q_i^* w EI_i^*}{K_i^2 s_i^{*3}}\left(\frac{\cosh[\kappa_i^*(H-z)]+\kappa_i^* H\sinh\kappa_i^* z}{\cosh\kappa_i^* H}-1\right) \tag{3.44}$$

összefüggést kapjuk, ahol

$$EI_{f,i}^*=E(I_i^*+I_{g,i}) \tag{3.45}$$

a lokális és globális hajlítási merevség összege, és

$$s_i^*=1+\frac{a_i}{b_i^*}=\frac{I_{g,i}+I_i^*}{I_{g,i}}=1+\frac{I_i^*}{I_{g,i}} \tag{3.46}$$

A merevítőrendszer maximális tetőponti eltolódásának értéke $z = H$-nál:

$$y_{\max}=y_i^*(H)=\frac{q_i^* w H^4}{8EI_{f,i}^*}+\frac{q_i^* w H^2}{2K_i s_i^{*2}}-\frac{q_i^* w EI_i^*}{K_i^2 s_i^{*3}}\left(\frac{1+\kappa_i^* H\sinh\kappa_i^* H}{\cosh\kappa_i^* H}-1\right) \tag{3.47}$$

A (3.44) és (3.47) képletek alkalmazása során szükségünk van a q_i^* erősztók értékére. A (3.37) képlettel definiált q_i^* erősztók meghatározásához pedig az *összes* „új” keret maximális tetőponti eltolódását ki kell számolni. Ezekhez a számításokhoz a (3.47) képlet használható, ahol egy tetszőleges értékű, például egységnyi erősztót lehet alkalmazni, mivel az egyes elemek maximális eltolódásához használt q_i^* értéke később kiesik a számításokból.

A fenti levezetés világosan mutatja – mint azt már a 3.1.2 pontban is láttuk – hogy általános esetben nem lehetséges egy olyan helyettesítő tartó létrehozása, amelynek a hajlítási és nyírási merevségeit az egyes merevítőelemek megfelelő merevségeinek egyszerű összegzésével állítjuk elő. Ez alól egyetlen kivétel van: az egyetlen keretből és egy (vagy több) falból álló merevítőrendszer.

Az itt bemutatott pontosabb megoldás alkalmazásával csak kismértékben nő a számítási munka, viszont jelentősen javul az eredmény pontossága, így a síkbeli (csavarodásmentes) probléma megoldásához az itt bemutatott pontosabb módszer alkalmazását javasoljuk.

3.2 A merevítőrendszer elcsavarodása

Abban az esetben amikor az épület szükséges merevségét szimmetrikus elrendezésű merevítőrendszerrel biztosítjuk, a külső vízszintes teher eredője átmegy a merevítőrendszer merevségi középpontján és az épület csak egyenletes eltolódásokat végez, de nem csavarodik el. Ilyenkor az előző pontban bemutatott két módszer az épület végleges eltolódásait szolgáltatja. Az egyszerű módszerrel gyorsabb, a pontosabb módszer alkalmazásával pontosabb eredményt kapunk. Nagyon sok gyakorlati esetben azonban a merevítőrendszer nem szimmetrikus (3.1 ábra) és ilyenkor az épület még el is csavarodik (a nyírásközéppont körül). Ezekben az esetekben meg kell határozni az épület elcsavarodását is és az elcsavarodás értékének ismeretében – a (3.2) összefüggéssel vázolt módon kiegészítve az egyenletes eltolódásokat – meg tudjuk határozni az épület teljes maximális eltolódását.

A csavarási vizsgálathoz feltételezzük, hogy az egyes merevítőelemek saját csavarási merevsége kicsiny a teljes merevítőrendszer globális csavarási merevségéhez képest és így elhanyagolható.

A csavarási vizsgálat két – egymástól alapjaiban különböző – módon hajtható végre. A „hagyományos” módon eljárva, a rendszer egyensúlyának vizsgálata segítségével levezetjük, majd megoldjuk a csavarás differenciálegyenletét. Ez a megközelítés meglehetősen bonyolult és még a csak tömör merevítőelemeket tartalmazó rendszer esetében is egy igen hosszú eljáráshoz vezet. A másik lehetőség az, hogy alkalmazzuk a vékonyfalú rudak elméletében ismert Vlasov-féle analógiát [13], amely a hajlítási és csavarási probléma között teremt kapcsolatot. Ennek értelmében a hajlításnál keletkező elmozdulások, nyomatékok és nyíróerők és a csavarásnál keletkező elfordulások, öblösödési nyomatékok és tiszta csavarási nyomatékok között analógia áll fenn és ezek a jellemzők egymásnak megfeleltethetők. Ezt az analógiát fogjuk használni. Először bevezetjük a vizsgálathoz szükséges csavarási jellemzőket, majd a hajlítási probléma megoldásának ismeretében megadjuk a csavarási probléma megoldását.

3.2.1 Csavarási jellemzők

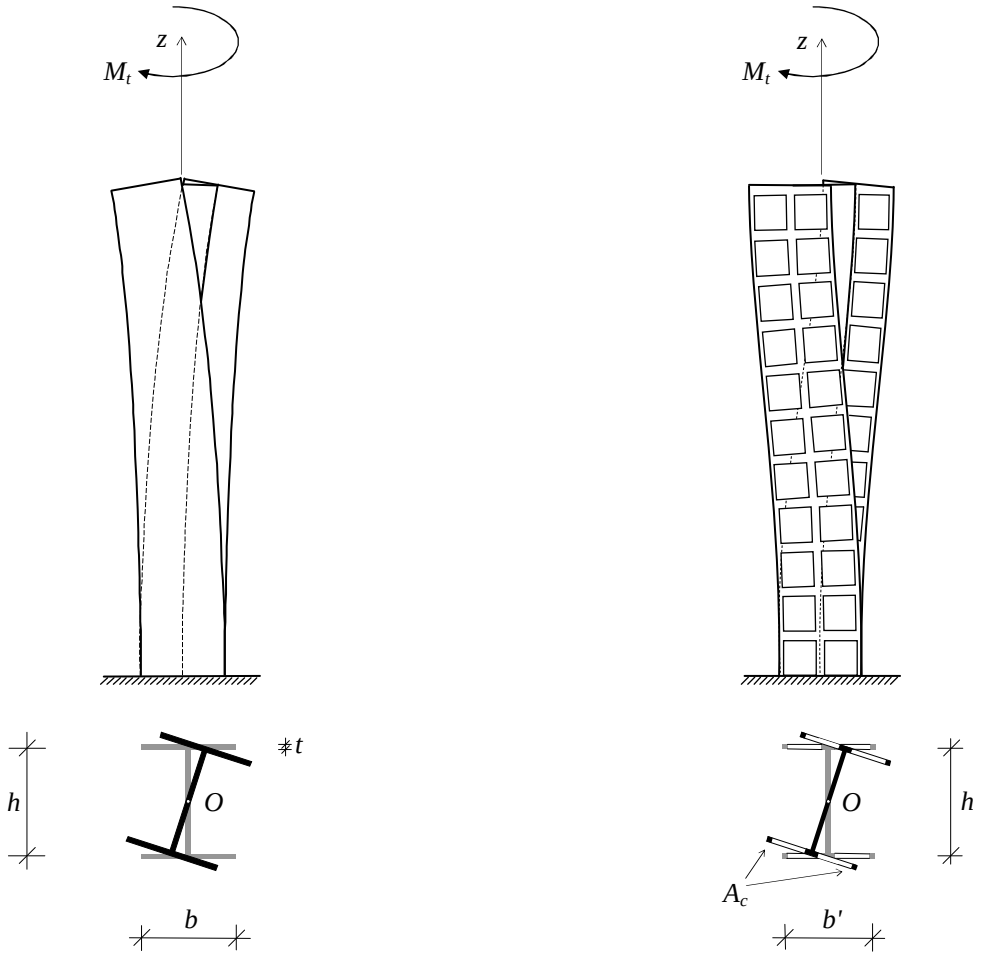
A vékonyfalú rudakhoz hasonlóan a többszintes épületek is a csavarási merevségük felhasználásával állnak ellen a csavaró hatásoknak. A vékonyfalú rudakhoz hasonlóan a többszintes épületek esetében is két fő forrásból származtatjuk a csavarási ellenállást. A gyakorlati esetek nagy részében mind az öblösödési csavarási merevség, mind a Saint-Venant csavarási merevség hozzájárul az épület csavarási ellenállásához. Az öblösödési csavarási ellenállás két forrásból származhat, így összesen három tételt kell vizsgálnunk.

A „vékonyfalú rúd”–„többszintes épület” analógia segítségével, és felhasználva a 3.5 ábrán vázolt I-tartót, szemléletesen bemutatható hogy ezek a csavarási merevségek hogyan működnek a csavarás során. Az I-tartó alul befogott, felül szabad végű, amelyet egy M_t csavaró nyomaték terhel a függőleges z tengely körül. A z tengely a keresztmetszet O nyírásközéppontján megy át.

Tekintsük először azt az esetet, amikor az I-tartó tömör övekkel rendelkezik (3.5/a ábra). A tartó csavarási ellenállását ekkor lényegében a két öv biztosítja. A gerinc együttdolgoztatja a két övet, amelyek a külső csavaró nyomaték hatására saját síkjukban hajlítással „válaszolnak”, amely hajlítás során az övek hajlítási merevségüket csavarási karjukkal aktivizálják. Az így definiálható öblösödési csavarási merevséget úgy kapjuk meg, hogy az övek saját síkjukban működő hajlítási merevségét megszorozzuk az öveknek a keresztmetszet nyírásközéppontjától mért merőleges távolság négyzetével:

$$EI_\omega = EI_{\text{öv}}\left(\frac{h}{2}\right)^2 2 = E\frac{tb^3}{12}\frac{h^2}{4}2 = E\frac{tb^3h^2}{24}$$

A képletben E az oszlop anyagának rugalmassági modulusa és I_ω a lokális öblösödési csavarási nyomaték. A nyírásközéppontot O jelöli (ami most egybeesik a súlyponttal) és a z tengely a csavarási tengely.



a) tömör övekkel

b) nyílásokkal áttört övekkel

3.5 ábra. I-tartó csavarása.

A többszintes épületek esetében a merevítőfalak és magok csavarás közbeni viselkedése összhangban van a leírt jelenséggel. Könnyen belátható, hogy az épület síkjukban merev födémei az I-tartó gerincének szerepét játsszák és együttdolgoztatják a falakat és magokat (mint a gerinc az öveket). Az épületek csavarási viselkedése vizsgálata során az EI_ω merevséget a *lokális öblösödési merevségként* definiáljuk.

Tekintsük ismét az I-tartót, de ezúttal az övek legyenek téglalap alakú nyílásokkal áttörve (3.5/b ábra). Ezek az övek kereteknek tekinthetők. A kereteknek két típusú hajlítási merevsége van: lokális és globális. A keretoszlopok az $EI = E\Sigma I_{c,i}$ lokális merevségükkel pontosan a fent leírt módon – bár sokkal kisebb hatékonysággal – viselkednek.

De a nyílásokkal áttört övek (keretek) I_g globális tehetetlenségi nyomatékkal (és EI_g globális hajlítási merevséggel) is rendelkeznek. Ezt a globális tehetetlenségi nyomatékot – a lokálishoz hasonlóan – a csavarás során szintén a csavarási karjukkal aktivizálják. Az I-tartó csavarási ellenállása ez esetben az

$$EI_{g\omega} = EI_g\left(\frac{h}{2}\right)^2 2 = EA_c\left(\frac{b'}{2}\right)^2 2\left(\frac{h}{2}\right)^2 2 = E\frac{A_c b'^2 h^2}{4}$$

összefüggéssel adható meg, ahol A_c az övek „oszlopainak” keresztmetszeti területe (3.5/b ábra).

A gerinc szerepét többszintes épületek esetében megint a födémek veszik át és az $EI_{g\omega}$ merevséget a *globális öblösödése merevségként* definiáljuk.

Végül nézzük meg a harmadik csavarási jellemzőt. A kereteknek tekinthető nyílásokkal áttört övek (3.5/b ábra) az EI és EI_g lokális és globális hajlítási merevség mellett K nyírási merevséggel is rendelkeznek. A csavarás során ez a nyírási merevség most is a csavarási kar segítségével jelent csavarási ellenállást:

$$(GJ) = K_{\text{öv}}\left(\frac{h}{2}\right)^2 2 = \frac{K_{\text{öv}} h^2}{2}$$

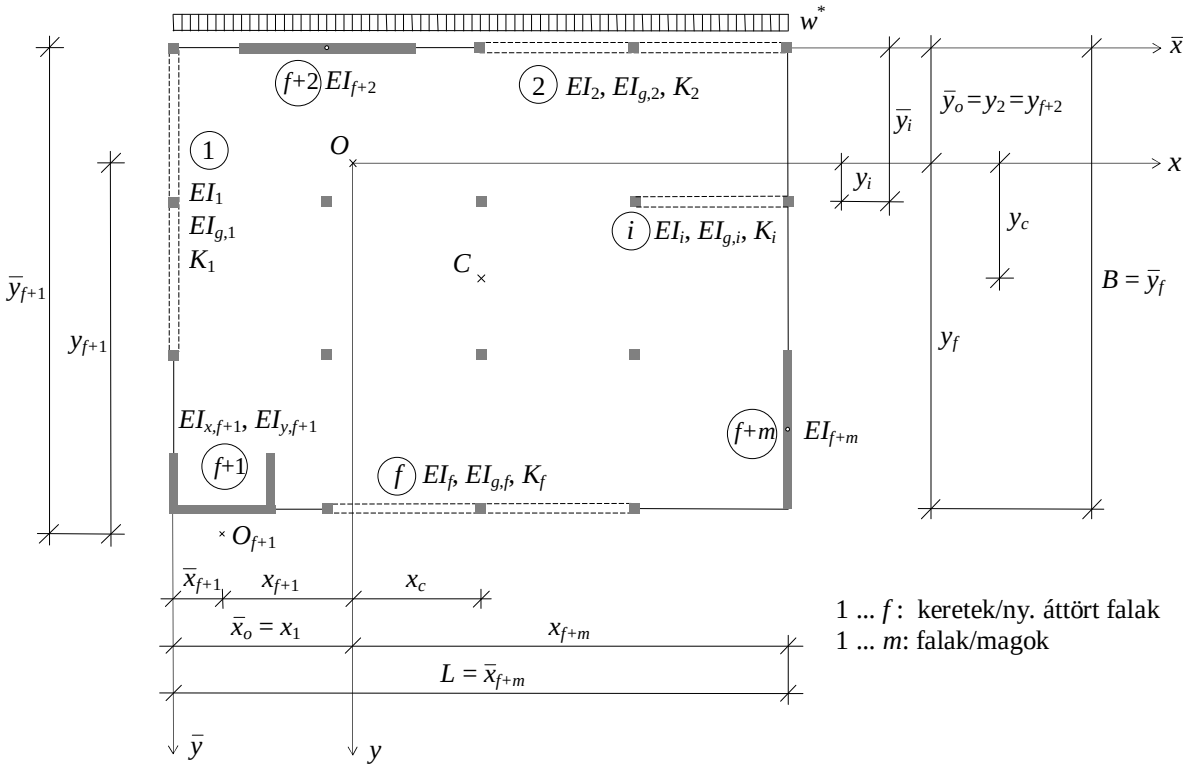
ahol $K_{\text{öv}}$ az övek nyírási merevsége. Többszintes épületeknél az I-tartó gerincének szerepét most is a födémek veszik át és a (GJ) merevséget a *Saint-Venant csavarási merevségként* definiáljuk.

Fentiek alapján látható, hogy többszintes épületek esetén az I-tartó gerincének a szerepét mindhárom rész-merevség esetében a saját síkjukban nagy merevséggel rendelkező födémek veszik át miközben együttdolgoztatják a merevítőrendszer függőleges elemeit.

Az is megállapítható, hogy többszintes épületeknél az egyes merevítőelemek hajlítási és nyírási merevsége valamint a távolságuk a rendszer nyírásközéppontjától alapvetően meghatározzák a csavarási viselkedést.

Keretek (a legjellemzőbb merevítőelemek) esetében a jellemző merevségek a lokális és globális hajlítási merevség [(2.28) és (2.29) összefüggések] valamint a (2.24) képlettel megadott nyírási merevség. Tömör falaknál és magoknál a hajlítási merevség a figyelembeveendő merevség.

A merevítőelemek merevségein túlmenően fontos szerepet játszik az elemek távolsága a rendszer nyírásközéppontjától. A merevítőrendszerek vizsgálata során szokásos módon a merevítőrendszer nyírásközéppontját a merevítőelemek merevségeinek súlypontjaként tekintjük. Mivel a keretek három merevséggel rendelkeznek, a nyírásközéppont meghatározásához szükséges merevségeket az egyes merevítőelemek tetőponti maximális eltolódása reciprokaként definiáljuk.



3.6 ábra. Merevítőrendszer a csavarási vizsgálathoz.

A nyírásközéppont helyének meghatározását célszerűen egy olyan $\bar{x}-\bar{y}$ koordinátarendszerben hajtjuk végre, amelynek kezdőpontja az épület alaprajzának bal felső sarokpontjában van és amelynek tengelyei közrefogják az épület alaprajzát (3.6 ábra). A nyírásközéppont helye ebben a koordinátarendszerben

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{f+m} S_{y,i}\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{f+m} S_{y,i}} \qquad \text{és} \qquad \bar{y}_o = \frac{\sum_{i=1}^{f+m} S_{x,i}\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{f+m} S_{x,i}} \tag{3.48}$$

ahol

$\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$	az i-edik merevítőelem merőleges távolsága az $\bar{y}$, illetve $\bar{x}$ koordinátatengelytől,
f	a keretek és nyílásokkal áttört falak száma,
m	a tömör falak és magok száma,
$S_{x,i}$, $S_{y,i}$	a merevítőelem (3.15) képlettel számított merevsége az x, illetve y irányban.

A nyírásközéppont meghatározásakor a gyakorlatban megszokott módon a kereteknek és a falaknak csak a hajlítás síkjában számított merevségét vesszük figyelembe.

Amint a nyírásközéppont helyzetének meghatározása megtörtént, az $\bar{x}-\bar{y}$ koordinátarendszer betöltötte szerepét és bevezetjük az $x-y$ koordinátarendszert, amelynek kezdőpontja a nyírásközéppont és amelynek tengelyei párhuzamosak az alaprajz oldalaival (3.6 ábra).

Könnyen belátható, hogy abban az esetben amikor a merevítőelemek csak hajlítási merevséggel rendelkeznek – vagyis a merevítőrendszer csak tömör falakat és magokat tartalmaz, de kereteket nem – a (3.48) összefüggések az

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{f+m} I_{x,i}\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{f+m} I_{x,i}} \qquad \text{és} \qquad \bar{y}_o = \frac{\sum_{i=1}^{f+m} I_{y,i}\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{f+m} I_{y,i}} \tag{3.49}$$

képletekre egyszerűsödnek és a nyírásközéppont meghatározásának munkaigénye jelentősen csökken.

3.2.2 A csavarási probléma megoldása

Mivel a hajlítási probléma megoldása a 3.1 pontban megadott összefüggésekkel rendelkezésre áll, a csavarási probléma megoldásához a Vlasov-féle analógiát [13] használhatjuk, amelynek értelmében az eltolódások segítségével az elcsavarodások közvetlenül meghatározhatók, ha a hajlítási jellemzőket a megfelelő csavarási jellemzőkkel helyettesítjük.

Az első lépés tehát a megfelelő csavarási jellemzők azonosítása. A hajlítási problémánál a jellemző merevségi adatok a lokális és globális hajlítási merevség és a nyírási merevség. A csavarási probléma jellemző merevségei a következők szerint adhatók meg.

Az *EI* lokális hajlítási merevség csavarási megfelelője a lokális öblösödési csavarási merevség:

$$EI_\omega = EIt^2 \tag{3.50}$$

ahol *t* a merevítőelem merőleges távolsága a merevítőrendszer nyírásközéppontjától. A *t* távolság falak és keretek esetében *x vagy y* távolságot jelent (3.6 ábra), míg magok esetében *x és y* távolságot (mivel a magok általában mindkét irányban rendelkeznek számottevő tehetetlenségi nyomatékkal).

Az EI_g globális hajlítási merevség csavarási megfelelője a globális öblösödési csavarási merevség:

$$EI_{g\omega} = EI_g t^2 \tag{3.51}$$

A teljes öblösödési csavarási merevség a lokális és globális öblösödési csavarási merevségek összege:

$$EI_{f\omega} = EI_\omega + EI_{g\omega} = E(I + I_g)t^2 = EI_f t^2 \tag{3.52}$$

A *K* nyírási merevség csavarási megfelelője a Saint-Venant csavarási merevség:

$$(GJ) = Kt^2 \tag{3.53}$$

A Saint-Venant csavarási merevséget szokás tiszta csavarási merevségnek is nevezni.

A (3.50), (3.51) és (3.53) összefüggésekkel megadott csavarási merevségeken túlmenően egyes merevítőelemek – főleg a magok – még „saját” öblösödési és Saint-Venant csavarási merevséggel is rendelkezhetnek. Ezek a „saját” csavarási merevségek általában kicsik a fentiekhez képest, így ezeket – összhangban a 3.2 pont elején megfogalmazott feltételezéssel – elhanyagoljuk.

Minden rendelkezésre áll az analógia alkalmazására. A síkbeli (=hajlítási) probléma tárgyalását áttekintve két lehetőséget találunk. A 3.1.2 pontban előállítottunk egy egyszerű megoldást, a 3.1.3 pontban pedig bemutattunk egy pontosabb megoldást. A két megoldás összehasonlítása után és kiterjedt pontosságvizsgálat eredményeire támaszkodva a síkbeli

(csavarodásmentes) eset megoldásához a pontosabb módszer alkalmazását javasoltuk. Felmerül a kérdés, hogy most melyik megoldást alkalmazzuk. A pontosabb módszer előállítása során a falakat és magokat beépítettük a keretekbe, oly módon, hogy a falak és magok hajlítási merevségét hozzáadtuk a keretek lokális hajlítási merevségéhez. Ennek a lépésnek egy formai és két tartalmi következménye volt. Egyrészt (két lépésben) redukáltuk az $f + m$ méretű feladatot f egyenletre, másrészt lehetővé tettük a tömör falak és magok hajlítási alakváltozása és a keretek nyírási alakváltozása között létrejövő egymásrahatás közvetlen figyelembevételét. A harmadik következmény az volt, hogy a tömör falak és magok „áthelyezésével" (beépítésével) megváltoztattuk a merevítőrendszer nyírásközéppontjának a helyét. Mivel a síkbeli (csavarodásmentes) eset vizsgálatánál a nyírásközéppont helye nem játszik szerepet, ez a hátrányos következmény nem jelentett problémát. A csavarási probléma vizsgálatánál viszont a nyírásközéppont helye igen fontos szerepet játszik, így az analógia alkalmazásánál a hajlítási probléma kezelésénél bemutatott egyszerű megoldást kell tekinteni, amely nem változtatja meg a nyírásközéppont helyét. Ennek megfelelően a csavarási problémához az f keretből és m falból/magból álló eredeti rendszert kell használni.

A (3.50), (3.51), (3.52) és (3.53) csavarási merevségek alkalmazásával a hajlítási problémának megfelelő csavarási probléma jellemző differenciálegyenlete – a (3.20) differenciálegyenlet alapján – a

$$\varphi''''(z) - \kappa_i^2 \varphi''(z) = \frac{q_{\omega,i} m}{E I_{\omega,i}} \left(\frac{a_i z^2}{2} - 1 \right) \tag{3.54}$$

alakban írható, ahol az i index az i-edik merevítőelemre utal és $i = 1, 2, \ldots f + m$. A κ_i és a_i segédmennyiségek azonosak a (3.21) összefüggésekkel definiált segédmennyiségekkel. Ez abból következik, hogy amikor végrehajtjuk a merevségek megfeleltetését, a merevítőelemek t_i csavarási karjai kiesnek a segédmennyiségek képletéből.

A külső (hosszegységre jutó) csavarónyomaték általános (ferde) helyzetű külső teher esetén $m = w_x y_c + w_y x_c$. Értéke y irányú vízszintes teher (3.1 és 3.6 ábra) esetében:

$$m = w x_c = w \left(\frac{L}{2} - \bar{x}_o \right) \tag{3.55}$$

A $q_{\omega,i}$ (csavarási) nyomatékosztó a (3.54) differenciálegyenletben ugyanazt a szerepet játssza, mint a q_i erősztó a síkbeli esetben. Értékét a merevítőelemek csavarási merevségének segítségével határozhatjuk meg. Az i-edik merevítőelem csavarási merevségét az

$$S_{\omega,i} = S_i t_i^2 = \frac{t_i^2}{v_i(H)} \tag{3.56}$$

összefüggéssel definiáljuk, ahol $v_i(H)$ az i-edik merevítőelem maximális tetőponti eltolódása.

A merevítőrendszer teljes csavarási merevsége:

$$S_\omega = \sum_{i=1}^{f+m} S_{\omega,i} \tag{3.56a}$$

A gyakorlati számítások során érdemes felfigyelni arra, hogy noha a merevítőelemek száma $f + m$, a (3.56a) összegzés ($f + m$)-nél több tagot is tartalmazhat. Ennek az az oka, hogy a magok általában mindkét főirányban rendelkeznek hajlítási tehetetlenségi nyomatékkal és a merevítőrendszer nyírásközéppontjától mért merőleges távolsággal, így minden mag két

taggal ($S_{\omega,ix}$ és $S_{\omega,iy}$) szerepelhet az összegzésben. Ebből az következik, hogy a $q_{\omega,i}$ nyomatékosztók száma is meghaladhatja az elemek $f + m$ darabszámát.

A csavarási merevségek felhasználásával a nyomatékosztó értékét a

$$q_{\omega,i} = \frac{S_{\omega,i}}{S_\omega} \tag{3.57}$$

összefüggés szolgáltatja.

Az i-edik merevítőelemre jutó csavarónyomaték így

$$m_i = q_{\omega,i} m \tag{3.58}$$

Az összes segédmennyiség ismeretében az analógia kiterjeszthető magára az elcsavarodásra:

$$\varphi_i(z) = \frac{m_i}{EI_{f\omega,i}}\left(\frac{H^3 z}{6} - \frac{z^4}{24}\right) + \frac{m_i z^2}{2(GJ)_i s_i^2} - \frac{m_i EI_{\omega,i}}{(GJ)_i^2 s_i^3}\left(\frac{\cosh[\kappa_i(H-z)] + \kappa_i H \sinh \kappa_i z}{\cosh \kappa_i H} - 1\right) \tag{3.59}$$

ahol az s_i segédmennyiség értékét a (3.24) összefüggés adja meg.

Figyelembe véve hogy az i-edik merevítőelem elcsavarodására vonatkozó fenti összefüggés érvényes magának az épületnek az elcsavarodására is, a maximális elcsavarodás értékét a $z = H$-nál az alábbi képlet szolgáltatja:

$$\varphi_{\max} = \varphi_i(H) = \frac{m_i H^4}{8EI_{f\omega,i}} + \frac{m_i H^2}{2(GJ)_i s_i^2} - \frac{m_i EI_{\omega,i}}{(GJ)_i^2 s_i^3}\left(\frac{1 + \kappa_i H \sinh \kappa_i H}{\cosh \kappa_i H} - 1\right) \tag{3.60}$$

A (3.60) összefüggés természetesen a (3.47) összefüggéssel azonos szerkezetű.

Az elcsavarodási alakot általános esetben az öblösödési és Saint-Venant csavarási merevséghez tartozó két alak határozza meg (első és második tag). A két alakváltozás között jelentkező egymásrahatás (harmadik tag) minden esetben csökkenti az épület elcsavarodását.

Ha egy tömör fal vagy mag segítségével határozzuk meg az épület elcsavarodását, akkor a (3.59) és (3.60) összefüggések az első tagra egyszerűsödnek.

A csavarás szempontjából optimális merevítőrendszer kialakítására a (3.50), (3.51), (3.53) és (3.60) összefüggések vizsgálata ad információt. Az épület elcsavarodása csökkenthető az merevítőelemek hajlítási és nyírási merevségének növelésével. Igen hatékony módon csökkenthető az elcsavarodás a merevítőelemek kedvező elhelyezésével: a nyírásközéppont és az elem közötti merőleges távolság növelésével. Az elcsavarodás csökkentésének a leghatékonyabb módja talán a külső csavarónyomaték csökkentése (esetleg teljes kiküszöbölése), ami a külső teher külpontosságának csökkentése révén érhető el. Optimális helyzetet (zérus elcsavarodást) akkor érünk el, amikor a külső vízszintes teher eredője a nyírásközépponton megy át. Ebben az esetben a merevítőrendszer (a teher irányára merőlegesen) szimmetrikus. – A hatékonyság kérdésével a 3.5 pont bővebben foglalkozik.

3.2.3 Általános megjegyzések; speciális esetek

A (3.59) és (3.60) összefüggések értékelése és nagyszámú numerikus vizsgálat eredményei néhány fontos észrevételhez vezetnek.

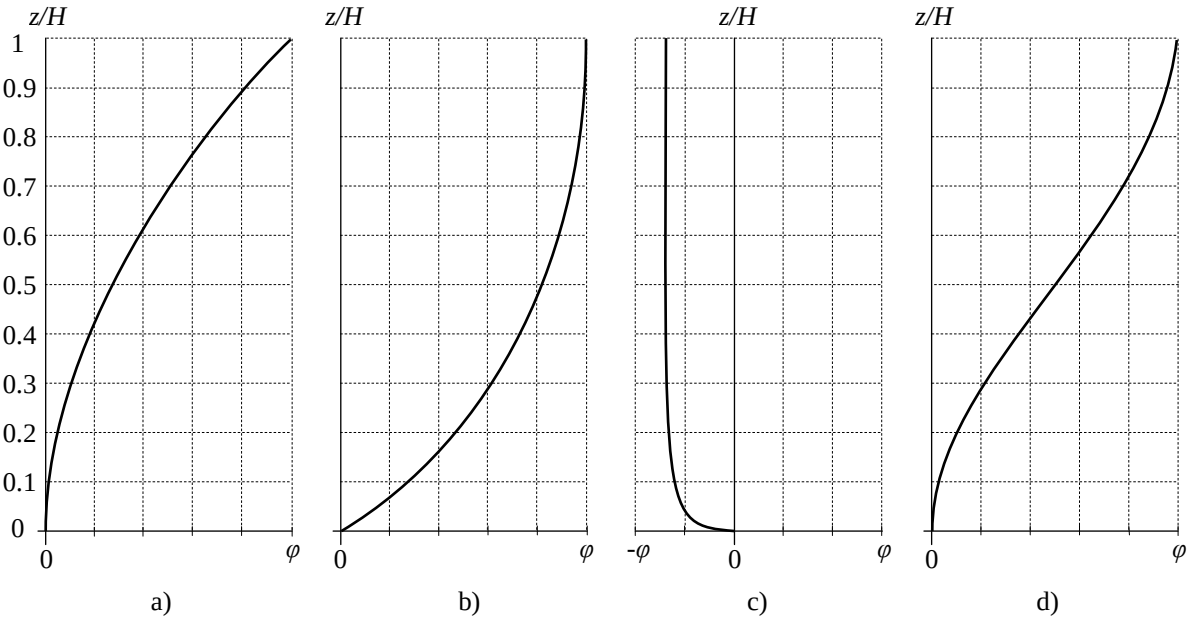
a) Az épület elcsavarodási alakja három jellegzetes részre bontható. A (3.59) és (3.60) összefüggések első tagjával megadott öblösödési csavarás az egyes merevítőelemek

(nyírásközéppont körüli elcsavarodás során aktiválódó) hajlítási merevségéhez köthető (3.7/a ábra). Az összefüggések második tagjával jellemzett Saint-Venant-féle csavarás az egyes merevítőelemek (nyírásközéppont körüli elcsavarodás során aktiválódó) nyírási merevségével kapcsolatos (3.7/b ábra). Ez a két csavarási alak jellegében különböző, de a födémek a merevítőelemeket azonos alakváltozásra kényszerítik (3.7/d ábra). Ennek következtében a két csavarási alak között egymásrahatás jön létre (3.7/c ábra). Ezt az egymásrahatást tükrözi a képletek harmadik tagja. (A 3.7 ábra egy vegyes típusú merevítőelemekkel rendelkező 40-szintes épület jellemző elcsavarodását mutatja, ahol a *z* tengely a szerkezet aljától felfelé mutat.)

b) Az öblösödési és Saint-Venant-féle csavarás közötti egymásrahatás (3.7/c ábra) mindig előnyös, mert csökkenti az épület elcsavarodását.

c) Az egymásrahatás jelentősége a szerkezetek magasságának növekedésével csökken.

d) Adott magasságú szerkezeteknél az egymásrahatás elcsavarodás-csökkentő hatása a magasság mentén hozzávetőlegesen konstansnak tekinthető (3.7/c ábra).



3.7 ábra. 40-szintes vegyes elemekkel rendelkező merevítőrendszer jellemző csavarási alakjai.
a) öblösödési csavarás, b) Saint-Venant-féle csavarás, c) az egymásrahatás, d) az épület csavarási alakja.

Végül néhány speciális esetet vizsgálunk meg, amelyek sok gyakorlati esetben még az elég egyszerűnek tekinthető (3.60) összefüggésnél is egyszerűbb megoldáshoz vezetnek.

A eset: A merevítőrendszer vízszintes elemei (a keretgerendák) olyan kis hajlítási merevséggel rendelkeznek, hogy azt a számítás során elhanyagolhatjuk.

Ezt az esetet a $K_b \to 0$ jellemzi. Ennek megfelelően a rendszer nyírási merevsége is zérushoz tart ($K \to 0$), aminek következtében több segédparaméter szintén zérushoz tart: $a \to 0$, $b \to 0$ és $\kappa \to 0$. A csavarás differenciálegyenlete ekkor a

$$\varphi''''(z) = -\frac{m}{EI_\omega}$$

egyszerűbb alakban írható fel. A megoldás a csavarási alakra

$$\varphi(z) = \frac{m}{EI_\omega}\left(\frac{H^3 z}{6} - \frac{z^4}{24}\right) \tag{3.61}$$

illetve a maximális tetőponti elcsavarodásra

$$\varphi_{\max} = \varphi(H) = \frac{mH^4}{8EI_\omega} \tag{3.62}$$

ahol EI_ω a lokális öblösödési csavarási merevség. A csavarási alakot a 3.7/a ábrán láthatjuk.

A (3.61) és (3.62) összefüggések használata akkor javasolt, amikor a merevítőelemek globális nyírási merevsége elhanyagolhatóan kicsi vagy amikor a merevítőrendszer csak falakat és magokat tartalmaz. Megjegyzendő, hogy (3.61) és (3.62) összefüggésekben *m* a *teljes* csavarónyomaték és EI_ω a *teljes* merevítőrendszer öblösödési csavarási merevségét jelenti.

B eset: Alacsony, többnyílású kereteket tartalmazó merevítőrendszerek általában dominálóan Saint-Venant-féle elcsavarodást végeznek, amikor a lokális öblösödési csavarás elhanyagolhatóan kis szerepet játszik.

Ezt az esetet a segédparaméterek $a \to 0$ és $b \to \infty$ alakulása jellemzi. A (3.54) differenciálegyenlet ekkor nem használható, de az eredeti levezetés némi módosítással igen és előállítható a

$$\varphi''(z) = \frac{m_i}{(GJ)_i}$$

differenciálegyenlet, aminek a megoldása

$$\varphi(z) = \frac{m_i z^2}{2(GJ)_i} \tag{3.63}$$

A maximális tetőponti elcsavarodás innen

$$\varphi_{\max} = \varphi(H) = \frac{m_i H^2}{2(GJ)_i} \tag{3.64}$$

A jellemző csavarási alakot a 3.7/b ábrán láthatjuk. A (3.63) és (3.64) összefüggések alacsony és többnyílású kereteket tartalmazó merevítőrendszerek esetében használhatók.

C eset: Magas, karcsú szerkezetek csavarási viselkedését általában a lokális és globális öblösödési csavarási merevség határozza meg. A (3.59) és (3.60) összefüggések második és harmadik tagja rendszerint elhanyagolhatóan kicsi az első taghoz viszonyítva és így az elcsavarodás összefüggése egyszerűsödik:

$$\varphi(z) = \frac{m_i}{EI_{f\omega,i}}\left(\frac{H^3 z}{6} - \frac{z^4}{24}\right) \tag{3.65}$$

A maximális tetőponti elcsavarodás innen:

$$\varphi_{\max} = \varphi_i(H) = \frac{m_i H^4}{8EI_{f\omega,i}} \tag{3.66}$$

Az erre az esetre jellemző csavarási alakot a 3.7/a ábrán láthatjuk. Megjegyzendő, hogy az A esetet és a C esetet is öblösödési csavarási alak jellemzi.

3.3 A merevítőrendszer maximális tetőponti eltolódása

A fejezet elején elmondottak szerint most már akármilyen elrendezésű merevítőrendszer eltolódásai meghatározhatók és a (3.2) képletből kiszámítható a maximális tetőponti eltolódás:

$$v_{\max} = v(H) = v_o(H) + x_{\max}\varphi(H) = v_o(H) + (L - \bar{x}_o)\varphi(H)$$

Többszintes épületek maximális eltolódásait célszerű korlátozni a nagy alakváltozások elkerülése céljából. Különböző országok különböző mértékű korlátozást javasolnak. Az elfogadható maximális vízszintes eltolódás értéke a különböző javaslatok szerint általában a magasság 0.0016–0.0035-szöröse közé esik, az épület magasságának, a szélnyomás mértékének, stb. függvényében. A „Committee on Wind Bracing of the American Society of Civil Engineers” (ASCE) ajánlása [5] szerint a merevítőrendszer alakváltozás szempontjából megfelelő, ha a maximális eltolódásra vonatkozó

$$y_H \le \frac{H}{500} \tag{3.67}$$

feltétel teljesül, ahol *H* az épület magassága.

3.4 A merevítőrendszer elemeire jutó terhek

A jegyzet feladata a globális vizsgálat végrehajtása, így az egyes merevítőelemek statikai tervezésével nem foglalkozunk. Megadjuk viszont az ehhez szükséges legfontosabb információt. Ez pedig az, hogy a teljes külső teherből mennyi jut az egyes merevítőelemekre. Ezzel a kérdéssel már foglalkoztunk az olyan épületek kapcsán, amelyek merevítőrendszere csak tömör elemeket – falakat és magokat – tartalmazott [17]. Azt tapasztaltuk, hogy az egyes merevítőelemekre jutó teherhányadok értéke az elemek merevségétől és geometriai jellemzőktől függ. Az ottani eredmények most is felhasználhatók, ha figyelembe vesszük hogy a merevségek definiálása során nem elegendő a „hagyományos” értelemben használt hajlítási merevségekkel dolgozni, mert a kereteknek és a nyílásokkal áttört falaknak a „hagyományos” értelmezés szerinti lokális hajlítási merevségen kívül globális hajlítási merevsége és nyírási merevsége is van. Ezzel a jelenséggel már szembesültünk korábban a 3.1.1 pontban (amikor a merevítőrendszer síkbeli viselkedését vizsgáltuk) és a 3.2.1 pontban (ahol a nyírásközéppont helyét határoztuk meg). Feltételezzük hogy $I_{xy} = 0$.

A 3.1.1 pontban bevezetett definíciót használjuk itt is, amely szerint egy elem merevsége a tetőponti eltolódásának reciproka. Az *i*-edik elemre jutó erőhányadok értékét így a

$$w_{x,i} = \frac{S_{x,i}}{S_x} w_x - \frac{S_{x,i} y_i}{S_\omega} m \tag{3.68}$$

$$w_{y,i} = \frac{S_{y,i}}{S_y} w_y + \frac{S_{y,i} x_i}{S_\omega} m \tag{3.69}$$

összefüggésekből határozhatjuk meg, ahol $m = w_x y_c + w_y x_c$ az általános (ferde) helyzetű külső teher csavarónyomatéka a nyírásközéppont körül.

A gyakorlati számítások során ügyelni kell arra, hogy a fenti képletekben szereplő x_i és y_i mennyiségek előjeles mennyiségek! A nyírásközéppont körül forgató m nyomaték előjelét a szokásos előjelszabály szabályozza: a nyomaték előjele akkor pozitív, amikor az óramutató járásával egyezően forgat.

A teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy a csavaró tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező merevítőelemek (magok) a külső csavarónyomatékból csavarómerevségeik arányában részesülnek:

$$m_{t,i} = \frac{J_i}{J} m_t \tag{3.70}$$

és

$$m_{\omega,i} = \frac{I_{\omega,i}}{I_\omega} m_\omega \tag{3.71}$$

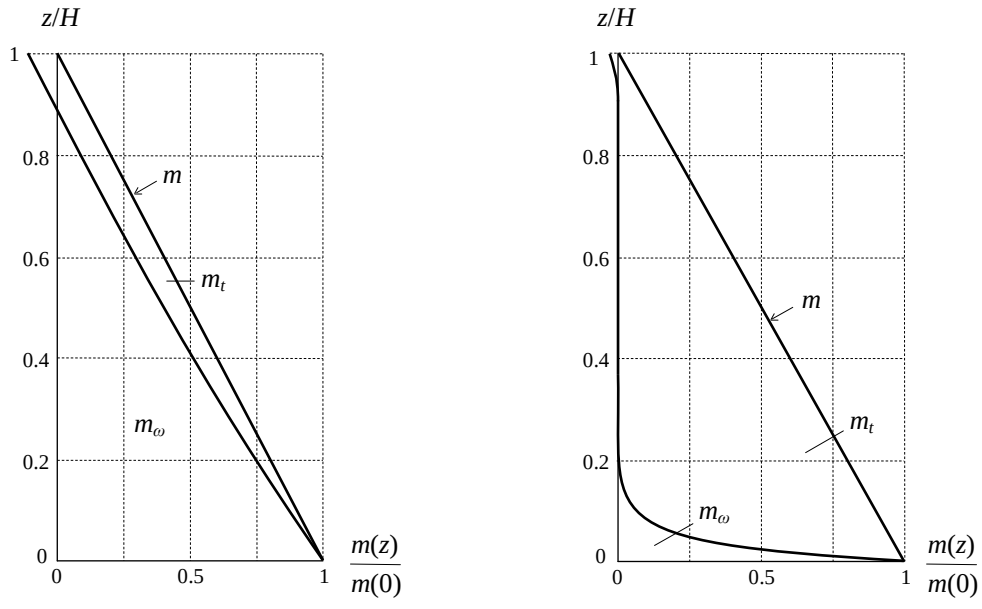
ahol J és I_ω a teljes rendszer csavarási tehetetlenségi nyomatékai és

$$m = m_t + m_\omega$$

A 3.8 ábra jellemző csavarónyomaték eloszlást mutat $k = 1$ és $k = 30$ arányokra [ahol k a (2.77) összefüggéssel definiált dimenziótlan csavarási tényező]. Az ábrák tanúsága szerint már $k = 1$-nél is az öblösödési csavaró nyomaték hatása dominál, így a gyakorlati esetekre jellemző $0 < k < 1$ tartományban elegendő az öblösödési csavaró nyomatékkal foglalkozni. Az öblösödési csavarási nyomaték maximuma a befogási keresztmetszetnél van és így az

$$m_{\omega,\max} = m_\omega(0) = mH \tag{3.72}$$

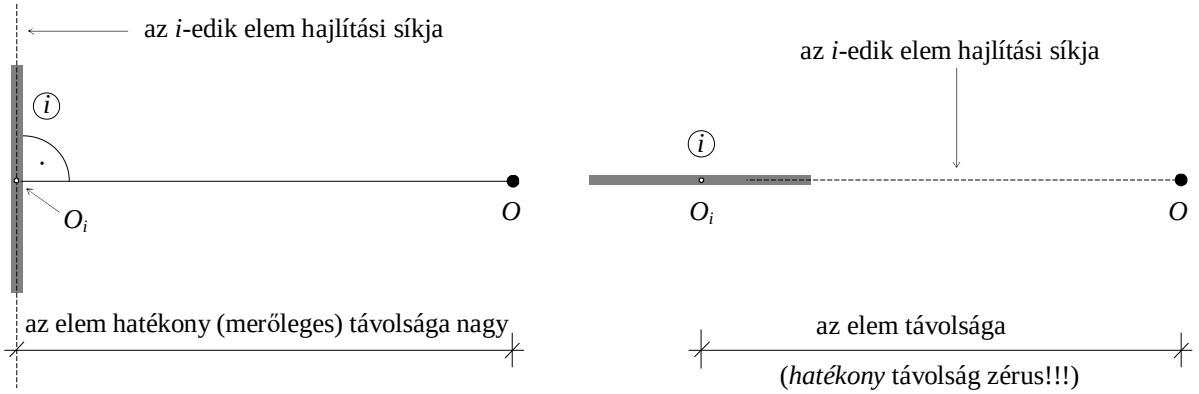
nyomatékot kell szétosztani a (3.71) képlet szerint az öblösödési tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező merevítőelemek között.



a) $k = 1$ b) $k = 30$

3.8 ábra. A csavarónyomatékok alakulása a magasság mentén.

Általában – jól kialakított merevítőrendszerek esetében – ezek a magokra jutó csavarónyomatékok kicsik és a gyakorlati számítások során ezeket el is szokták hanyagolni. Ennek oka könnyen belátható, ha megvizsgáljuk a (3.70) és (3.71) képleteket. A képletek nevezője a J és I_ω csavarási tehetetlenségi nyomatékokat tartalmazza. Ezek összegzett értékek, amelyek tartalmazzák az összes elem hozzájárulását a rendszer csavarási ellenállásához. Amint ezt a részletesebb információt tartalmazó – és később tárgyalandó – (4.21) és (4.22) képletek is mutatják, a magok csavarási tehetetlenségi nyomatéka mellett itt szerepelnek a merevítőelemek csavarási karjuk révén hasznosított csavarási ellenállásai (az úgynevezett Steiner-tagok) is, amelyek jól kialakított merevítőrendszerek esetében jóval – nagyságrenddel/nagyságrendekkel – nagyobbak a magok saját csavarási ellenállásánál. A csavarás szempontjából jól kialakított merevítőrendszer egyik fontos jellegzetessége az, hogy az egyes elemek hatékony távolsága a rendszer nyírásközéppontjától nagy (3.9 ábra).



a) jó elrendezés b) rossz elrendezés

3.9 ábra. Merevítőfal elhelyezése a merevítőrendszer *O* nyírásközéppontjához képest.

A merevítőrendszer elemeinek szilárdsági méretezése nem témája a jegyzetnek, így csak megemlítjük, hogy az erő- és nyomatékhányadok ismeretében a méretezés során a következő igénybevételekkel kell számolni:

- Vízszintes teher → erők → nyírófeszültségek
  → hajlító nyomatékok → normálfeszültségek
  → csavarónyomatékok → nyíró- és normálfeszültségek
  → normálfeszültségek
- Függőleges teher → normálerők → normálfeszültségek (de a függőleges teherrel nem foglalkoztunk)

3.5 A merevítőrendszer viselkedése vízszintes teher hatására

Végezetül a fent bemutatott levezetések és képletek alapján összefoglaljuk a merevítőrendszer viselkedésével kapcsolatos legfontosabb tanulságokat.

A merevítőrendszer viselkedését alapvetően jellemző tényezők:

- a merevítőelemek elhelyezése
- a külső teher külpontossága: x_c, y_c
- a lokális hajlítási merevség: EI_x, EI_y
- a globális hajlítási merevség: EI_g (keretek/nyílásokkal áttört falak esetén)
- a nyírási merevség: K (keretek/nyílásokkal áttört falak esetén)
- a csavarási merevség: EI_ω (általában döntő szerepet játszik)
  GJ (általában nem jelentős)

Hogyan csökkenthetjük a merevítőrendszer (=épület) alakváltozásait és növelhetjük a hatékonyságát?

- a külső teher külpontosságának csökkentésével (→ a csavarás hatásának csökkentésével)
- az EI_ω öblösödési csavarási merevség növelésével. A falelemeket célszerű úgy elhelyezni, hogy merőleges távolságuk a nyírásközépponttól minél nagyobb legyen (3.9 ábra)
- a lokális hajlítási merevség (EI_x, EI_y) növelésével, lehetőleg a külső teher (F_y, F_x) nagyságának megfelelően
- a globális hajlítási merevség (EI_g) növelésével (keretek/nyílásokkal áttört falak esetén)
- a nyírási merevség növelésével (keretek/nyílásokkal áttört falak esetén)
- a hajlítási és nyírási alakváltozások közötti egymásrahatás jótékony hatásának kihasználásával. Máshogyan megfogalmazva: tömör falak és keretek vegyes alkalmazásával. Meg kell jegyezni azonban, hogy az egymásrahatás jótékony szerepe csak alacsony és középmagas épületeknél lehet számottevő!

Az erőhányadokkal kapcsolatos jellegzetességek:

- a merevítőelemek merevségük arányában részesednek a külső teherből {a (3.68), (3.69) képletek első tagja};
- plusz (akár jóval nagyobb) teher jöhet az elcsavarodásból {a (3.68), (3.69) képletek második tagja};
- az erők szétosztása nem függ a külső teher megoszlásától.

3.6 Számpéldák a maximális tetőponti eltolódás meghatározására

Az épület maximális tetőponti eltolódásának meghatározását két gyakorlati példa segítségével mutatjuk be. Az első példa egy magokkal és keretekkel merevített szimmetrikus, a második példa pedig egy tömör falakkal, keretekkel és egy maggal merevített aszimmetrikus épület számítását mutatja be.

A számítások során az elméleti rész sorrendjétől eltérő sorrendet követünk. Ennek az az oka, hogy amíg az elméleti részben a magyarázat érthetősége és szemléletessége volt a fő cél, addig a gyakorlati számítások során a számítási munka egyszerűsítésére és áttekinthetőségére törekszünk.

Mindkét számításnál az alkalmazott képletek számát *kapcsos* zárójelek között a lap jobboldalán adjuk meg.

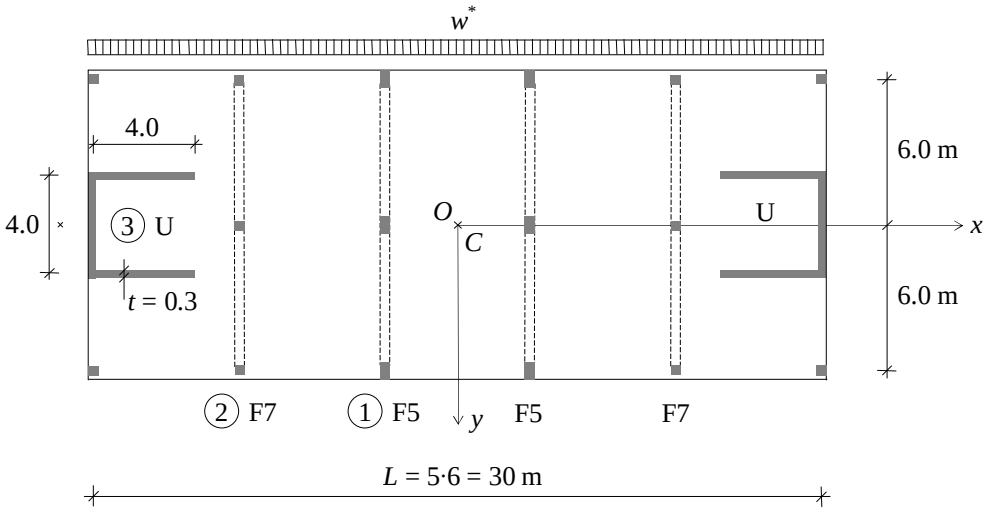
3.6.1 Vízszintes erőkkel terhelt 28-szintes szimmetrikus épület

A 3.10 ábrán alaprajzával vázolt 28-szintes épületre $w^* = 1$ kN/m^2 intenzitású, egyenletesen megoszló vízszintes teher hat az y irányban. A vízszintes teher eredője átmegy a merevítőrendszer O nyírásközéppontján, így csak y irányú „egyenletes” eltolódások jönnek létre és az épület nem csavarodik el. Feladatunk az épület maximális eltolódásának meghatározása. A szimmetriának köszönhetően elegendő az épület felét figyelembe venni, amire a teher fele, $w = w^*L/2 = 15$ kN/m hat. A merevítőrendszer három különböző merevítőelemből áll. Az F5 és F7 keretek és az U-mag adatait a 3.1 táblázat tartalmazza.

3.1 táblázat. Az F5 és F7 keret és az U-mag keresztmetszeti jellemzői.

merevítő elem	oszlop keresztmetszet [m]	gerenda keresztmetszet [m]	$I_{c,i}$ [m^4]	$I_{b,i}$ [m^4]	$I_{g,i}$ [m^4]
1: F5	0.4×0.7	0.4×0.4	0.0343	0.00426̇	20.16
2: F7	0.4×0.4	0.4×0.4	0.0064	0.00426̇	11.52
3: U	$h = b = 4.0$ m, $t = 0.3$ m, $I_x = 11.245$ m^4, $I_y = 6.427$ m^4				

Az emeletmagasság $h = 3$ m és az épület teljes magassága $H = 28 \cdot 3 = 84$ m. A vasbeton merevítőelemek anyagának rugalmassági modulusa $E = 25 \cdot 10^6$ kN/m^2.



3.10 ábra. Egyenletesen megoszló vízszintes terhelésű 28-szintes szimmetrikus épület.

A számítást célszerűen három lépésben végezhetjük el. Először meghatározzuk a keretek erőosztóit, majd az erőosztók segítségével „beépítjük” az U-mag hajlítási merevségét a keretek lokális hajlítási merevségébe és meghatározzuk az új keretek erőosztóit, végül meghatározzuk a tetszőlegesen kiválasztott egyik új keret maximális tetőponti eltolódását a rá jutó erőhányaddal. Ezzel megkapjuk az épület maximális tetőponti eltolódását.

A keretek jellemző merevségei és erőosztói

F5 keret

A globális és lokális nyírási merevségek: {2.25} és {2.26}

$$K_{b,1} = \frac{12 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 0.00426}{6 \cdot 3} = 71111\,\text{kN}, \qquad K_{c,1} = \frac{12 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 0.0343}{3^2} = 1143333\,\text{kN}$$

A nyírási merevség:

$$K_1 = K_{b,1}\frac{K_{c,1}}{K_{b,1}+K_{c,1}} = K_{b,1}r_1 = 71111\frac{1143333}{71111+1143333} = 71111 \cdot 0.9414 = 66947\,\text{kN} \qquad \{2.24\}$$

ahol egyben az r redukciós tényezőt {2.27} is meghatároztuk: $r_1 = 0.9414$.

A lokális hajlítási merevség:

$$EI_1 = EI_{c,1}r_1 = 25 \cdot 10^6 \cdot 0.0343 \cdot 0.9414 = 807250\,\text{kNm}^2 \qquad \{2.28\}$$

A globális hajlítási merevség:

$$EI_{g,1} = E\sum_{j=1}^{n} A_j t_j^2 = 25 \cdot 10^6 \cdot 0.4 \cdot 0.7 \cdot 6^2 \cdot 2 = 504000000\,\text{kNm}^2 \qquad \{2.29\}$$

A lokális és globális hajlítási merevségek összege:

$$EI_{f,1} = EI_1 + EI_{g,1} = 504807250\,\text{kNm}^2 \qquad \{2.21\}$$

A számításhoz szükséges segédmennyiségek:

$$a_1 = \frac{K_1}{EI_{g,1}} = \frac{66947}{504000000} = 0.000133, \qquad b_1 = \frac{K_1}{EI_1} = \frac{66947}{807250} = 0.08293 \qquad \{2.14\}$$

$$s_1 = 1 + \frac{a_1}{b_1} = 1 + \frac{0.000133}{0.08293} = 1.0016\,,\ \kappa_1 = \sqrt{a_1 + b_1} = \sqrt{0.000133 + 0.08293} = 0.288\,,\ \kappa_1 H = 24.2$$

Mivel a cél most a keretek relatív merevségének meghatározása (nem pedig a tényleges tetőponti eltolódásé), a tetőponti eltolódást tetszőleges teherrel – pl. w = 15 kN/m teherrel – számíthatjuk:

$$y_1 = \frac{15 \cdot 84^4}{8 \cdot 504807250} + \frac{15 \cdot 84^2}{2 \cdot 66947 \cdot 1.0016^2} - \frac{15 \cdot 807250}{66947^2 \cdot 1.0016^3}\left(\frac{1 + 24.2 \sinh 24.2}{\cosh 24.2} - 1\right) =$$

$$= 0.185 + 0.788 - 0.063 = 0.910\,\text{m} \qquad \{2.22\}$$

A keret merevsége így:

$$S_1 = \frac{1}{y_1(H)} = \frac{1}{0.91} = 1.10\,\text{m}^{-1} \qquad \{3.15\}$$

F7 keret

A fentivel azonos módon végrehajtott számítás adja az F7 keret merevségét.

A globális és lokális nyírási merevségek: {2.25} és {2.26}

$$K_{b,2} = \frac{12EI_b}{lh} = \frac{12 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 0.00426}{6 \cdot 3} = 71111\,\text{kN}, \qquad K_{c,2} = \frac{12 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 0.0064}{3^2} = 213333\,\text{kN}$$

A nyírási merevség:

$$K_2 = K_{b,2}\frac{K_{c,2}}{K_{b,2} + K_{c,2}} = K_{b,2} r_2 = 71111\frac{213333}{71111 + 213333} = 71111 \cdot 0.75 = 53333\,\text{kN} \qquad \{2.24\}$$

ahol egyben az r redukciós tényezőt {2.27} is meghatároztuk: r_2 = 0.75.

A lokális hajlítási merevség:

$$EI_2 = EI_{c,2} r_2 = 25 \cdot 10^6 \cdot 0.0064 \cdot 0.75 = 120000\,\text{kNm}^2 \qquad \{2.28\}$$

A globális hajlítási merevség:

$$EI_{g,2} = E\sum_{j=1}^{n} A_j t_j^2 = 25 \cdot 10^6 \cdot 0.4 \cdot 0.4 \cdot 6^2 \cdot 2 = 288000000\,\text{kNm}^2 \qquad \{2.29\}$$

A lokális és globális hajlítási merevségek összege:

$$EI_{f,2} = EI_2 + EI_{g,2} = 288120000\,\text{kNm}^2 \qquad \{2.21\}$$

A számításhoz szükséges segédmennyiségek:

$$a_2 = \frac{K_2}{EI_{g,2}} = \frac{53333}{288000000} = 0.000185\,, \qquad b_2 = \frac{K_2}{EI_2} = \frac{53333}{120000} = 0.44444 \qquad \{2.14\}$$

$$s_2 = 1 + \frac{a_2}{b_2} = 1 + \frac{0.000185}{0.44444} = 1.000416\,, \quad \kappa_2 = \sqrt{0.000185 + 0.44444} = 0.6668\,, \quad \kappa_2 H = 56.0$$

Mivel a cél most is a keret relatív merevségének meghatározása (nem pedig a tényleges tetőponti eltolódásé), a tetőponti eltolódást ismét a fent már alkalmazott teherrel, a w = 15 kN/m értékkel számítjuk ki:

$$y_2 = \frac{15 \cdot 84^4}{8 \cdot 288120000} + \frac{15 \cdot 84^2}{2 \cdot 53333 \cdot 1.000416^2} - \frac{15 \cdot 120000}{53333^2 \cdot 1.000416^3}\left(\frac{1 + 56\sinh 56}{\cosh 56} - 1\right) =$$

$$= 0.324 + 0.991 - 0.035 = 1.28\,\text{m} \qquad \{2.22\}$$

A keret merevsége így:

$$S_2 = \frac{1}{y_2(H)} = \frac{1}{1.28} = 0.78\,\text{m}^{-1} \qquad \{3.15\}$$

A második lépésben az U-mag hajlítási merevségét a keretek relatív merevségeinek arányában „beépítjük” a két keret lokális hajlítási merevségébe és így két „új” keretet (F5* és F7*) hozunk létre. Az új kereteknek is meghatározzuk a merevségét.

F5* keret

Az új lokális hajlítási merevség:

$$EI_1^* = E(I_1 + \bar{q}_1 I_w) = 25 \cdot 10^6 (0.0343 \cdot 0.9414 + \frac{1.1}{1.1 + 0.78} 11.245) = 165295282\,\text{kNm}^2 \qquad \{3.41\}$$

Az új segédmennyiségek:

$$b_1^* = \frac{K_1}{EI_1^*} = \frac{66947}{165295282} = 0.000405\,,\ \kappa_1^* = \sqrt{a_1 + b_1^*} = \sqrt{0.000133 + 0.000405} = 0.0232 \qquad \{3.43\}$$

$$s_1^* = 1 + \frac{a_1}{b_1^*} = 1 + \frac{0.000133}{0.000405} = 1.328 \qquad \text{és} \qquad \kappa_1^* H = 1.948 \qquad \{3.46\}$$

A lokális és globális hajlítási merevségek összege:

$$EI_{f,1}^* = EI_1^* + EI_{g,1} = 165295282 + 504000000 = 669295282\,\text{kNm}^2 \qquad \{3.45\}$$

Az F5* keret maximális tetőponti eltolódása (w = 15 kN/m-el számolva): {3.44}

$$y_1^* = \frac{15 \cdot 84^4}{8 \cdot 669295282} + \frac{15 \cdot 84^2}{2 \cdot 66947 \cdot 1.328^2} - \frac{15 \cdot 165295282}{66947^2 \cdot 1.328^3}\left(\frac{1+1.948\sinh 1.948}{\cosh 1.948} - 1\right) = 0.316\,\text{m}$$

Az F5* keret merevsége:

$$S_1^* = \frac{1}{y_1^*} = \frac{1}{0.316} = 3.164\ \text{m}^{-1} \qquad \{3.38\}$$

F7 keret*
Az új lokális hajlítási merevség:

$$EI_2^* = E(I_2 + \overline{q}_2 I_w) = 25 \cdot 10^6 (0.0064 \cdot 0.75 + \frac{0.78}{1.1 + 0.78} 11.245) = 116756968\,\text{kNm}^2 \qquad \{3.41\}$$

Az új segédmennyiségek:

$$b_2^* = \frac{K_2}{EI_2^*} = \frac{53333}{116756968} = 0.000457\,,\ \kappa_2^* = \sqrt{a_2 + b_2^*} = \sqrt{0.000185 + 0.000457} = 0.0253 \qquad \{3.43\}$$

$$s_2^* = 1 + \frac{a_2}{b_2^*} = 1 + \frac{0.000185}{0.000457} = 1.405 \qquad \text{és} \qquad \kappa_2^* H = 2.128 \qquad \{3.46\}$$

A lokális és globális hajlítási merevségek összege:

$$EI_{f,2}^* = EI_2^* + EI_{g,2} = 116756968 + 288000000 = 404756968\,\text{kNm}^2 \qquad \{3.45\}$$

Az F7* keret maximális tetőponti eltolódása (w = 15 kN/m-el számolva): {3.44}

$$y_2^* = \frac{15 \cdot 84^4}{8 \cdot 404756968} + \frac{15 \cdot 84^2}{2 \cdot 53333 \cdot 1.405^2} - \frac{15 \cdot 116756968}{53333^2 \cdot 1.405^3}\left(\frac{1+2.128\sinh 2.128}{\cosh 2.128} - 1\right) = 0.443\,\text{m}$$

Az F7* keret merevsége:

$$S_2^* = \frac{1}{y_2^*} = \frac{1}{0.443} = 2.257\ \text{m}^{-1} \qquad \{3.38\}$$

Minden rendelkezésre áll az épület tetőponti eltolódásának meghatározásához. Ehhez bármelyik keretet felhasználhatjuk. Az F5* keretet választva, a keretre jutó teherhányad:

$$q_1^* = \frac{S_1^*}{\sum_{i=1}^{f} S_i^*} = \frac{3.164}{3.164 + 2.257} = 0.584 \qquad \{3.37\}$$

Mivel az új keretek maximális tetőponti eltolódását a fél épületre jutó tényleges teher w = 15 kN/m értékével számítottuk ki, nincs más tennivaló, csak alkalmazni ezt a teherhányadot az F5* keretre kiszámított eltolódásra. Az épület maximális eltolódása az y irányú teher hatására így

$$y_{\max} = q_1^* y_1^*(H) = 0.584 \cdot 0.316 = 0.184\,\text{m} \qquad \text{a } \{3.47\} \text{ alapján}$$

Megjegyezzük, hogy a fenti eltolódás nem az abszolút maximum, ami a kétszeresen szimmetrikus elrendezésű épületünk esetében létre jöhet. A $w^* = 1$ kN/m^2 intenzitású, de x irányú vízszintes teher hatására ugyanis a tetőponti eltolódás értéke:

$$u_{\max} = u(H) = \frac{w_x H^4}{8EI_y} = \frac{12 \cdot 1 \cdot 84^4}{8 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 6.427} = 0.232\,\text{m} \qquad \{2.73\}$$

Az épület tetőponti eltolódása mindkét irányban meghaladja az ASCE által javasolt

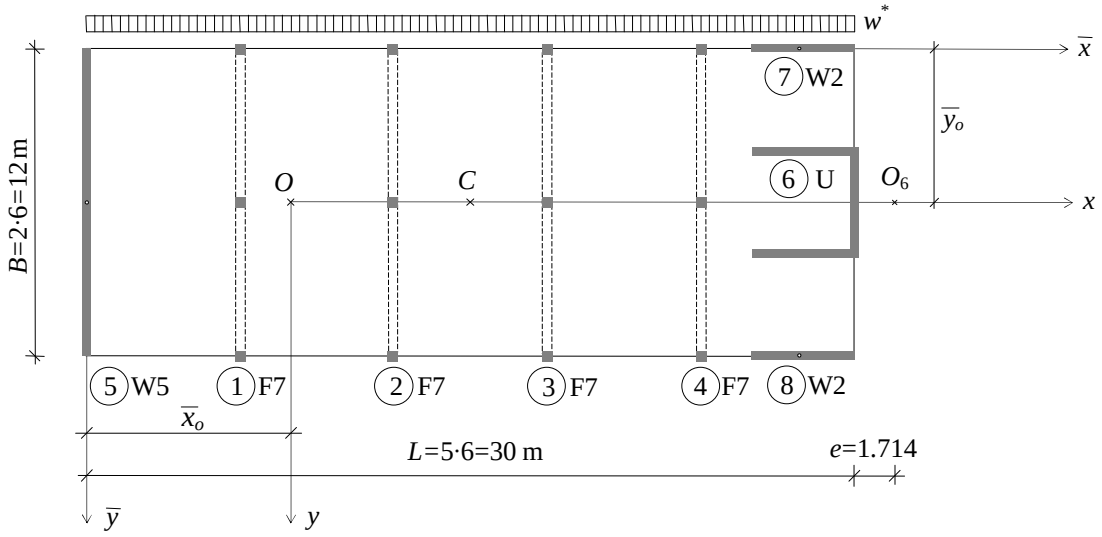
$$y_H = \frac{H}{500} = \frac{84}{500} = 0.168\,\text{m} \qquad \{3.67\}$$

maximális értéket.

A 4. és 5. fejezet tanulmányozása után gyakorlásképpen érdemes elvégezni a frekvencia- és stabilitásvizsgálatot is. Az eredményeket a 7. fejezetben adjuk meg.

3.6.2 Vízszintes erőkkel terhelt 28-szintes aszimmetrikus épület

Tekintsük a 3.11 ábrán alaprajzával vázolt 28-szintes épületet, amelyre $w^* = 1$ kN/m^2 intenzitású, y irányú vízszintes teher hat. A merevítésről négy F7 jelű keret, két W2 jelű tömör merevítőfal, egy W5 jelű tömör merevítőfal és egy U jelű mag gondoskodik. A merevítőelemek keresztmetszeti jellemzőit a 3.2 táblázat tartalmazza. A síkbeli merevítőelemek esetében csak a saját síkjukban dolgozó merevségeket vesszük figyelembe.



3.11 ábra. Vízszintes erőkkel terhelt 28-szintes aszimmetrikus épület.

3.2 táblázat. A merevítőelemek keresztmetszeti jellemzői.

merevítő elem	oszlop keresztmetszet [m]	gerenda keresztmetszet [m]	$I_{c,i}$ [m^4]	$I_{b,i}$ [m^4]	$I_{g,i}$ [m^4]
F7	0.4×0.4	0.4×0.4	0.0064	0.00426̇	11.52
W2	0.2×4.0	–	1.066̇	–	–
W5	0.3×12.0	–	43.2	–	–
U	$h = b = 4.0$, $t = 0.3$, $e = 1.714$, $I_x = 11.245$, $I_y = 6.427$				

A vasbeton merevítőelemek anyagának rugalmassági modulusa $E = 25 \cdot 10^6$ kN/m^2. Az emeletmagasság $h = 3$ m és az épület teljes magassága $H = 28 \cdot 3 = 84$ m.

Az épület az *y* irányú vízszintes teher irányára merőlegesen aszimmetrikus és a teher eredője nem megy át a merevítőrendszer *O* nyírásközéppontján (amit ugyan még nem határoztunk meg, de nyilvánvalóan nem esik egybe az alaprajz *C* geometriai középpontjával). Ennek az a következménye, hogy az épület eltolódásainak meghatározásánál az elcsavarodás hatását is figyelembe kell venni. Az elméleti háttérrel a fejezet elején és a 3.2 pontban foglalkoztunk és most azt mutatjuk be, hogy a gyakorlati számítást hogyan kell végrehajtani. A számítást célszerűen négy lépésben hajthatjuk végre:

1) Meghatározzuk mindegyik merevítőelem tetőponti eltolódását, majd az S_i merevségét;
2) Kiszámítjuk az épület v_o egyenletes tetőponti eltolódását a vízszintes teher irányában működő merevítőelemek figyelembevételével;
3) A nyírásközéppont helyének meghatározása után kiszámítjuk az épület elcsavarodását;
4) Összegezzük a v_o egyenletes és az elcsavarodás következtében bekövetkező v_φ eltolódást.

A számításnál az alkalmazott képletek számát *kapcsos* zárójelek között a lap jobboldalán adjuk meg.

A merevítőelemek tetőponti eltolódása és merevsége

F7 keret (az 1., 2., 3. és 4. merevítőelem)

Az F7 keret már az előző számpélda épületénél is szerepelt és a 3.6.1 pontban meghatároztuk a tetőponti eltolódását és az ebből számított merevségét. Felhasználva az ott kapott eredményt, de az ott alkalmazott (tetszőlegesen választott) $w = 15$ kN/m teher helyett annak kétszeresével, $w = 30$ kN/m-el számolva:

$$y_1 = 2 \cdot 1.28 = 2.56\,\text{m} \qquad \rightarrow \qquad S_1 = \frac{1}{y_1(H)} = \frac{1}{2.56} = 0.39\,\text{m}^{-1} \qquad \{3.15\}$$

Mivel az 1., 2., 3. és 4. keretek azonosak,

$$S_2 = S_3 = S_4 = 0.39\,\text{m}^{-1} \qquad \{3.15\}$$

W5 merevítőfal (az 5. merevítőelem)

A tetőponti eltolódás $w = 30$ kN/m-el számolva:

$$y_5 = \frac{wH^4}{8EI_5} = \frac{30 \cdot 84^4}{8 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 43.2} = 0.1729\,\text{m} \qquad \{2.63\}$$

Az elem merevsége:

$$S_5 = \frac{1}{y_5(H)} = \frac{1}{0.1729} = 5.784\,\text{m}^{-1} \qquad \{3.15\}$$

U-mag (a 6. merevítőelem)

A nyírásközéppontjával az *x* tengelyen elhelyezkedő elemnek csak az *x* tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka játszik szerepet.

A tetőponti eltolódás $w = 30$ kN/m-el számolva:

$$y_6 = \frac{wH^4}{8EI_{6,x}} = \frac{30 \cdot 84^4}{8 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 11.245} = 0.6641\,\text{m} \qquad \{2.74\}$$

Az elem merevsége:

$$S_6 = \frac{1}{y_6(H)} = \frac{1}{0.6641} = 1.506\,\text{m}^{-1} \qquad \{3.15\}$$

W2 merevítőfal (a 7. és 8. merevítőelem)

A tetőponti eltolódás w = 30 kN/m-el számolva:

$$x_7 = \frac{wH^4}{8EI_{7,y}} = \frac{30 \cdot 84^4}{8 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 1.066} = 7.0\,\text{m} \qquad \{2.63\}$$

Mivel a 7. és 8. elemek azonosak,

$$x_8 = 7.0\,\text{m} \qquad \{2.63\}$$

Az épület v_o egyenletes tetőponti eltolódása

A nyírásközéppontba áthelyezett w = 30 kN/m külső teher hatására az épület eltolódik, de nem csavarodik el. A figyelembeveendő merevítőelemek a négy keret (1, 2, 3 és 4), az épület balszélén lévő fal (5) és az U-mag (6). Mivel a négy keret azonos kialakítású, nem szükséges az erősztókat meghatározni. Elegendő egy keretet tekinteni, és amikor a tömör fal és a mag hajlítási merevségét beépítjük a keretekbe, akkor egy keretre a fal és mag összegzett hajlítási merevségének egynegyede jut. Legyen ez a keret az 1-es jelű F7*, aminek a lokális hajlítási merevsége így:

$$EI_1^* = E\left(I_1 + \frac{1}{4}(I_5 + I_{6,x}) \right) = 120000 + 25 \cdot 10^6 \frac{1}{4}(43.2 + 11.245) = 340.4 \cdot 10^6\,\text{kNm}^2 \qquad \{3.41\}$$

Itt felhasználtuk és a következőkben is felhasználjuk az F7 keretre vonatkozó adatokat, amelyeket a 3.6.1 pontban már kiszámítottunk. A globális hajlítási merevség és a nyírási merevség változatlan:

$$EI_{g,1} = 288000000\ \text{kNm}^2 \qquad \text{és} \qquad K_1 = 53333\,\text{kN} \qquad \{2.29\}\ \text{és}\ \{2.24\}$$

A lokális és globális hajlítási merevség összege:

$$EI_{f,1}^* = EI_1^* + EI_{g,1} = (340.4 + 288)10^6 = 628.4 \cdot 10^6\,\text{kNm}^2 \qquad \{3.45\}$$

Az új segédparaméterek (a változatlan a_1-el):

$$b_1^* = \frac{K_1}{EI_1^*} = \frac{53333}{340.4 \cdot 10^6} = 0.000157\,, \quad \kappa_1^* = \sqrt{a_1 + b_1^*} = \sqrt{0.000185 + 0.000157} = 0.0185 \qquad \{3.43\}$$

$$s_1^* = 1 + \frac{a_1}{b_1^*} = 1 + \frac{0.000185}{0.000157} = 2.178\,, \qquad \kappa_1^* H = 1.553 \qquad \{3.46\}$$

A tetőponti eltolódás $q_1 = 0.25$ teherhányaddal most már meghatározható: {3.47}

$$v_o = \frac{0.25 \cdot 30 \cdot 84^4}{8 \cdot 628.4 \cdot 10^6} + \frac{0.25 \cdot 30 \cdot 84^2}{2 \cdot 53333 \cdot 2.178^2} - \frac{0.25 \cdot 30 \cdot 340.4 \cdot 10^6}{53333^2 \cdot 2.178^3}\left(\frac{1+1.553\sinh 1.553}{\cosh 1.553} - 1\right) = 0.107\,\text{m}$$

A nyírásközéppont körüli elcsavarodás

Az első lépés a nyírásközéppont helyének meghatározása. Az *x* tengely szimmetria tengely, ebből következik, hogy

$$\bar{y}_o = 6\,\text{m} \qquad \{3.48\}$$

és csak az *x* koordináta igényel számítást:

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{f+m} S_{y,i}\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{f+m} S_{y,i}} = \frac{S_1(6+12+18+24) + S_6(L+e)}{S_5 + 4S_1 + S_6} = \frac{0.39 \cdot 60 + 1.506 \cdot 31.714}{5.784 + 4 \cdot 0.39 + 1.506} = 8.04\,\text{m} \qquad \{3.48\}$$

Az elcsavarodás meghatározásához szükségünk van a nyírásközéppont körül forgató csavarónyomaték értékére:

$$m = w\left(\frac{L}{2} - \bar{x}_o\right) = 30(15 - 8.04) = 208.8\,\text{kNm/m} \qquad \{3.55\}$$

A csavarási merevségeket az egyes merevítőelemek nyírásközépponttól mért merőleges távolsága segítségével kapjuk meg:

$$S_{\omega,1} = \frac{x_1^2}{v_1} = \frac{2.04^2}{2.561} = 1.625\,\text{m}, \quad S_{\omega,2} = \frac{x_2^2}{v_2} = \frac{3.96^2}{2.561} = 6.123\,\text{m} \qquad \{3.56\}$$

$$S_{\omega,3} = \frac{x_3^2}{v_3} = \frac{9.96^2}{2.561} = 38.73\,\text{m}, \quad S_{\omega,4} = \frac{x_4^2}{v_4} = \frac{15.96^2}{2.561} = 99.46\,\text{m}, \quad S_{\omega,5} = \frac{x_5^2}{v_5} = \frac{8.04^2}{0.1729} = 373.87\,\text{m}$$

$$S_{\omega,6} = \frac{x_6^2}{v_6} = \frac{23.674^2}{0.6641} = 843.94\,\text{m}, \quad S_{\omega,7} = \frac{y_7^2}{v_7} = \frac{6.0^2}{7.0} = 5.14\,\text{m}, \quad S_{\omega,8} = \frac{y_8^2}{v_8} = \frac{6.0^2}{7.0} = 5.14\,\text{m}$$

A csavarási merevségek összege:

$$S_\omega = \sum_{i=1}^{f+m} S_{\omega,i} = 1374.0\,\text{m} \qquad \{3.56a\}$$

Az épület elcsavarodása bármelyik merevítőelem segítségével meghatározható, ha rendelkezésre áll az illető elem nyomatékhányada. Legyen ez az elem az 5. merevítőelem, melynek nyomatékhányada

$$q_{\omega,5} = \frac{S_{\omega,5}}{S_\omega} = \frac{373.87}{1374.0} = 0.2721 \qquad \{3.57\}$$

Az épület elcsavarodása így a (3.60) képlet segítségével határozható meg. A képlet az első tagra egyszerűsödik, mivel az 5. merevítőelem tömör fal, amely esetében a második és harmadik tag nem létezik:

$$\varphi_{\max} = \varphi_5(H) = \frac{q_{\omega,5} m H^4}{8 E I_{\omega,5}} = \frac{0.2721 \cdot 208.8 \cdot 84^4}{8 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 43.2 \cdot 8.04^2} = 0.005065\,\text{rad} \qquad \{3.60\}$$

Az épület maximális eltolódása

A maximális eltolódás a jobboldali sarokpontnál következik be és értékét a két hatás (illetve v_o és v_φ) összegzésével kapjuk meg:

$$v_{\max} = v_o(H) + (L - \bar{x}_o)\varphi(H) = 0.107 + (30 - 8.04) \cdot 0.005065 = 0.218\,\text{m} \qquad \{3.2\}$$

Megjegyezzük, hogy a fenti eltolódás nem az abszolút maximum, ami az épületünk esetében létre jöhet. A $w^* = 1$ kN/m^2 intenzitású, de x irányú vízszintes teher hatására ugyanis a tetőponti eltolódás értéke:

$$u_{\max} = u(H) = \frac{w_x H^4}{8 E I_y} = \frac{12 \cdot 1 \cdot 84^4}{8 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot (6.427 + 2 \cdot 1.0667)} = 0.349\,\text{m} \qquad \{2.73\}$$

Az épület tetőponti eltolódása mindkét irányban meghaladja az ASCE által javasolt

$$y_H = \frac{H}{500} = \frac{84}{500} = 0.168\,\text{m} \qquad \{3.67\}$$

maximális értéket.

A 4. és 5. fejezet tanulmányozása után gyakorlásképpen érdemes elvégezni a frekvencia- és stabilitásvizsgálatot is. Az eredményeket a 7. fejezetben adjuk meg.

4

A merevítőrendszer sajátfrekvenciája

A keretekkel foglalkozó 2.2 pontban láthattuk, hogy már egyetlen egy merevítőelem esetében is komplex egymásrahatás jelentkezik a keret elemei (gerendái és oszlopai) között, illetve a különböző lehetséges (hajlítási és nyírási) alakváltozás-típusok között. A térbeli viselkedés következtében a merevítőrendszer viselkedése tovább bonyolódik, hiszen az egymásrahatás kiterjed az egyes merevítőelemek közötti kölcsönhatásra. Ezen túlmenően, az egymásrahatás nemcsak síkban, hanem most már térben is jelentkezik. A dinamikai vizsgálat során így a síkbeli rezgések általában kombinálódnak a csavarási rezgésekkel.

Ebben a fejezetben egy olyan analitikus módszert mutatunk be, amelynek segítségével viszonylag egyszerűen meghatározhatjuk a merevítőrendszer első három sajátfrekvenciáját. A módszer figyelembe veszi a keretek, falak és magok összes fontos geometriai és merevségi jellemzőjét, a keretek elemei közötti egymásrahatást és maguk a merevítőelemek közötti egymásrahatást, mind a síkbeli mind pedig a csavarási rezgések tekintetében.

Az első fejezetben megfogalmazott feltételeken túlmenően feltételezzük még, hogy az épület tömege a födémszinteken egyenletesen oszlik meg.

A vizsgálathoz a kontinuum módszert alkalmazzuk és egy helyettesítő tartót fogunk használni. A helyettesítő tartó merevségeit a merevítőelemek hajlítási és nyírási alakváltozásainak figyelembevételével állapítjuk meg. A keretek esetében figyelembe vesszük az oszlopok hosszváltozásának a hatását is. Zárt alakú megoldásokat adunk az alaprezgések (a síkbeli és tiszta csavaró rezgések) legkisebb sajátfrekvenciájára, majd figyelembe vesszük ezek kombinálódását is.

Az alkalmazott módszer egyszerű, de megfelelő pontosságú a gyakorlati alkalmazások céljára [18], mind az előtervezés során, mind pedig a végső ellenőrzésekhez. A bizonyított pontosság különösen fontos, mert épületeken végrehajtott frekvenciamérések [3] sok az irodalomban található közelítő módszer esetében jelentős – esetenként elfogadhatatlan mértékű – pontatlanságot mutattak ki.

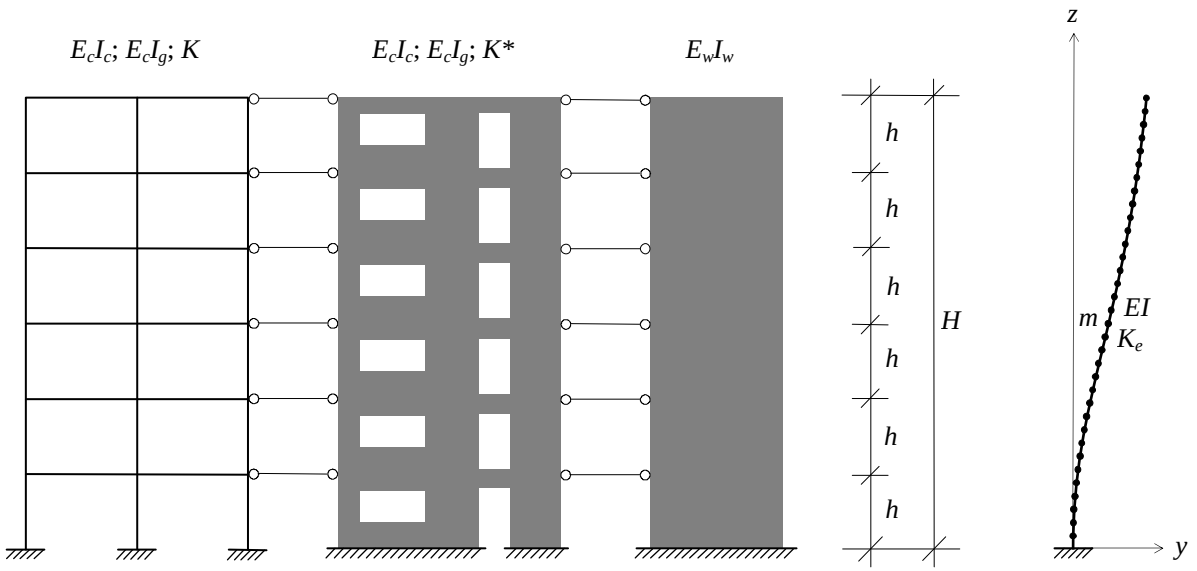
A probléma eltérő megközelítése miatt a kontinuum módszer különösen alkalmas a véges elemes módszeren alapuló – általában pontosnak tekintett – számítógépes vizsgálatok ellenőrzésére is, ahol a nagyszámú adat kezelése és kiértékelése mindig jelentős hibaforrást jelenthet.

Egy többszintes épület rezgéseket végezhet a két tehetetlenségi fősíkban és tiszta csavarás formájában a nyírásközépponti függőleges tengely körül. Ezeket tekintjük a három alaprezgésnek. Mindhárom alaprezgés legkisebb frekvenciájának értékére szükség van, mielőtt a kombinálódásukat figyelembe tudnánk venni.

A vizsgálatokat a síkbeli esettel kezdjük és felhasználjuk a 2.2 pontban tárgyalt egyedülálló keretre vonatkozó eredményeket.

4.1 Síkbeli rezgés

Tekintsük a 4.1/a ábrán vázolt síkbeli rendszert, amely egy tetszőleges ($i = 1...f$) számú keretekből és nyílásokkal áttört falakból valamint ($k = 1...m$) tömör falakból és magokból álló merevítőrendszert jellemez. Az egyes merevítőelemeket a födémek kapcsolják össze, amelyeket összenyomhatatlan, két végén csuklós rudakkal modellezünk. A 2.2 pontban részletezett és egyetlen keretre vonatkozó vizsgálatok szerint a teljes rendszer jellemezhető a keretek és nyílásokkal áttört falak nyírási merevségével, a keretek és nyílásokkal áttört falak globális hajlítási merevségével és a keretoszlopok/falszakaszok, tömör falak és magok lokális hajlítási merevségével.



a) keretekből, nyílásokkal áttört falakból, falakból és magokból álló merevítőrendszer b) helyettesítő oszlop

4.1 ábra. Síkbeli rezgés.

A födémekkel összekapcsolt merevítőelemek egyetlen helyettesítő oszloppá tolhatók össze, mely művelet során szükség van a merevítőelemek jellemző merevségeire. Ezek a K nyírási merevség, az EI_g globális hajlítási merevség és az EI lokális hajlítási merevség. A nyírási merevség és a globális hajlítási merevség nem függetlenek egymástól és egy hatékony nyírási merevséggé kombinálhatók. Ily módon egy olyan helyettesítő konzolhoz jutunk, amelyet a K_e hatékony nyírási merevség és az EI lokális hajlítási merevség jellemez (4.1/b ábra). A következőkben ezeket a merevségeket állítjuk elő.

A nyírási merevség a keretek és nyílásokkal áttört falak nyírási merevségéből származik. A (2.24), (2.25) és (2.26) összefüggések alapján az i-edik keret nyírási merevsége

$$K_i = K_{b,i} r_i = K_{b,i} \frac{K_{c,i}}{K_{b,i} + K_{c,i}} \tag{4.1}$$

ahol a nyírási merevség két összetevője

$$K_{b,i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{12 E_b I_{b,j}}{l_j h} \tag{4.2}$$

és

$$K_{c,i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{12 E_c I_{c,j}}{h^2} \tag{4.3}$$

A fenti képletekben

E_c az oszlopok rugalmassági modulusa,
E_b a gerendák rugalmassági modulusa,
$I_{b,j}$ az *i*-edik keret *j*-edik gerendájának tehetetlenségi nyomatéka,
$I_{c,j}$ az *i*-edik keret *j*-edik oszlopának tehetetlenségi nyomatéka,
h az emeletmagasság,
l_j az *i*-edik keret *j*-edik nyílásköze,
n az *i*-edik keret oszlopainak száma.

A (4.1) összefüggésben szerepel az

$$r_i = \frac{K_{c,i}}{K_{b,i} + K_{c,i}} \tag{4.4}$$

redukciós tényező, amely a későbbiekben is még szerepet játszik.

A teljes rendszer „eredeti" nyírási merevsége az egyes keretek/nyílásokkal áttört falak nyírási merevségeinek összege:

$$K = \sum_{i=1}^{f} K_i \tag{4.5}$$

Amikor a rendszer nyílásokkal áttört falakat is tartalmaz, akkor azok is beletartoznak az *f*-ig terjedő összegzésbe, de a nyílásokkal áttört falak esetében a nyírási merevséget a (2.61) és (2.62) összefüggések szerint kell kiszámítani.

Az *i*-edik keret eredeti nyírási merevségéhez tartozó rezgés frekvenciája az

$$f_{s',i}^2 = \frac{1}{(4H)^2} \frac{r_f^2 K_i}{m} \tag{4.6}$$

összefüggés segítségével határozható meg, ahol m [kg/m] az egységhosszra jutó tömeg.

Az egységhosszra jutó tömeg a magasság mentén változatlan jellemzőkkel rendelkező többszintes épület esetén az

$$m = \rho A \tag{4.7}$$

képlettel adható meg, ahol

$$\rho = \frac{\gamma}{g}$$

a térfogategységre jutó tömeg. A g konstans a nehézségi gyorsulást [g = 9.81 m/s^2] jelzi és γ [kN/m^3] az épület térfogategységre jutó súlya.

A (4.6) összefüggés tartalmazza az r_f tényezőt is. E tényező segítségével vesszük figyelembe azt, hogy az épület tömege födémszinteken koncentrált és nem a magasság mentén egyenletesen megoszló (4.1/b ábra), ahogyan azt a frekvenciára vonatkozó eredeti levezetés feltételezte. Az r_f tényező értékeit a 4.1 táblázat tartalmazza. A táblázat utolsó

rublikájában az $n > 50$-re megadott $r_f = [n/(n + 2.06)]^{1/2}$ képlet valójában minden $n \geq 3$ esetben használható.

4.1 táblázat. Az r_f tényező értékei az n (szintszám) függvényében.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_f	0.493	0.653	0.770	0.812	0.842	0.863	0.879	0.892	0.902	0.911	0.918
n	12	13	14	15	16	18	20	25	30	50	>50
r_f	0.924	0.929	0.934	0.938	0.941	0.947	0.952	0.961	0.967	0.980	$\sqrt{n/(n+2.06)}$

Az i-edik keret vagy nyílásokkal áttört fal teljes magasságú globális hajlítási rezgése tiszta hajlítási rezgésnek tekinthető és a hozzá tartozó sajátfrekvencia az

$$f_{g,i}^2 = \frac{0.313 r_f^2 E_c I_{g,i}}{H^4 m} \tag{4.8}$$

összefüggés segítségével határozható meg, ahol

$$I_{g,i} = \sum_{j=1}^{n} A_{c,j} t_j^2 \tag{4.9}$$

az i-edik keret globális tehetetlenségi nyomatéka és

$A_{c,j}$ az i-edik keret j-edik oszlopának keresztmetszeti területe,
t_j a j-edik oszlop távolsága az oszlopkeresztmetszetek súlypontjától.

A 2.2 pontban bemutatott dinamikai vizsgálat tanúsága szerint a nyírási és a globális hajlítási rezgésmódok között egymásrahatás van. Ez az egymásrahatás felfogható úgy is, mint ami csökkenti a nyírási merevség hatékonyságát. A két érintett sajátfrekvencia négyzetének felhasználásával minden merevítőelemre bevezethető az $s_{f,i}$ hatékonysági tényező, az

$$s_{f,i}^2 = \frac{f_{g,i}^2}{f_{g,i}^2 + f_{s',i}^2} \tag{4.10}$$

összefüggés szerint. A hatékonysági tényező segítségével előállítható a teljes rendszer hatékony nyírási merevsége:

$$K_e = \sum_{i=1}^{f} s_{f,i}^2 K_i \tag{4.11}$$

Az eredeti és a hatékony nyírási merevségek segítségével kifejezhető a teljes rendszer nyírási hatékonysági mutatója:

$$s_f = \sqrt{\frac{K_e}{K}} \tag{4.12}$$

A hatékony nyírási merevség ismeretében most már megadható a rendszer nyírási merevséggel kapcsolatos tényleges legkisebb sajátfrekvenciája:

$$f_s^2 = \frac{1}{(4H)^2}\frac{r_f^2 K_e}{m} \tag{4.13}$$

Ha magasabb frekvenciákra is szükség van, akkor a (4.13) összefüggésben szereplő 4-es konstans helyére 4/3, illetve 4/5 értéket írva megkapjuk a második, illetve a harmadik frekvenciát.

A lokális hajlítási rezgések vizsgálatához a résztvevő elemek (keretoszlopok, a nyílásokkal áttört falak falsávjai, tömör falak és magok) hajlítási merevségeit kell összegezni:

$$EI = E_c I_c + E_w I_w = E_c \sum_{i=1}^{f} I_{c,i} r_i + E_w \sum_{k=1}^{m} I_{w,k} \tag{4.14}$$

ahol

E_w a falak és magok rugalmassági modulusa,
$I_{c,i}$ az *i*-edik keret oszlopainak összegzett tehetetlenségi nyomatéka,
r_i az *i*-edik keret redukciós tényezője [(4.4) képlet],
$I_{w,k}$ a *k*-adik fal/mag tehetetlenségi nyomatéka.

Amikor a merevítőrendszer kereteket és tömör falakat/magokat is tartalmaz, akkor a keretoszlopok hatása [a (4.14) képlet első tagja] a falak/magok hatásához viszonyítva általában nagyon kicsi és elhanyagolható.

A fenti hajlítási merevségekkel a lokális hajlítási merevséghez tartozó sajátfrekvencia az

$$f_b^2 = f_f^2 + f_w^2 = \frac{0.313 r_f^2}{H^4 m}\left(E_c \sum_{i=1}^{f} I_{c,i} r_i + E_w \sum_{k=1}^{m} I_{w,k} \right) = \frac{0.313 r_f^2 EI}{H^4 m} \tag{4.15}$$

összefüggésből határozható meg, ahol

f_f a keretek és nyílásokkal áttört falak legkisebb sajátfrekvenciája,
f_w a falak és magok legkisebb sajátfrekvenciája.

Ha magasabb frekvenciákra van szükség, akkor a (4.15) összefüggésben szereplő 0.313 konstans helyére 12.3, illetve 96.4 értéket írva megkapjuk a második, illetve a harmadik frekvenciát.

A (4.14) és (4.15) képletekben az oszlopok tehetetlenségi nyomatékát az r_i redukciós tényezővel módosítottuk. Erre azért volt szükség, hogy elkerüljük az oszlopok tehetetlenségi nyomatékának „túlértékelését”, mivel azok szerepelnek a K_e hatékony nyírási merevség összefüggésében is [v.ö. (4.3) és (4.11) összefüggésekkel].

A merevítőrendszert így a 4.1/b ábrán vázolt helyettesítő tartóval modellezhetjük a síkbeli vizsgálathoz. A helyettesítő tartó merevségeit a (4.11) és (4.14) összefüggések adják meg. A helyettesítő tartó egy elemi szakaszának egyensúlyát vizsgálva előállítható a síkbeli rezgések

$$r_f^2 EIv''''(z,t) - r_f^2 K_e v''(z,t) + m\ddot{v}(z,t) = 0$$

differenciálegyenlete, ahol a vesszők és pontok a *z* (hely) és *t* (idő) szerinti differenciálást jelölik. A megoldás $v(z,t) = v_1(z)v_2(t)$ szorzat formában állítható elő, melynek során a változók elkülöníthetők és az időtől függő függvények kiküszöbölhetők. Így az

$$r_f^2 EIv_1''''(z) - r_f^2 K_e v_1''(z) - \omega^2 m v_1(z) = 0 \tag{4.16}$$

peremérték-feladathoz jutunk, ahol ω a körfrekvencia és $v_1(z)$ a síkbeli mozgásokat jelöli. Az alul befogott és felül szabad végű konzolhoz (4.1/b ábra) a következő peremfeltételek tartoznak:

$$v_1(0) = 0$$

$$v_1'(0) = 0$$

$$v_1''(H) = 0$$

és

$$EIv_1'''(H) - K_e v_1'(H) = 0$$

A (4.16) differenciálegyenlet formailag azonos a (2.37) differenciálegyenlettel. Mivel a peremfeltételek is azonosak, használható a 2.2 pontban közölt megoldás, annak szem előtt tartásával, hogy a merevségek most a teljes merevítőrendszerre vonatkoznak (nem pedig egyetlen keretre). Felhasználva a körfrekvenciára vonatkozó

$$\omega = \frac{2\pi\eta}{H^2}\sqrt{\frac{EIr_f^2}{m}}$$

összefüggést és a 2. fejezetben már bevezetett

$$k = H\sqrt{\frac{K_e}{EI}} \tag{4.17}$$

dimenziótlan tényezőt, a megoldás zárt formában előállítható:

$$f^2 = \left(\frac{\eta^2}{0.313} - \frac{k^2}{5}\right) f_b^2 + f_s^2$$

Ez a megoldás némi módosítást igényel. Az első tag ugyanis két jelenséget tartalmaz, egyszerre, de ezek közül csak az egyik „teljes értékű”. Az első tagban együtt szerepel a (lokális) hajlítási merevséghez tartozó frekvencia és a hajlítási és nyírási rezgések közötti egymásrahatáshoz tartozó frekvencia. Az egymásrahatás viszont csak a hatékonysági mutatónak megfelelő mértékben érvényesül, de ezt a képlet a fenti formában nem tudja figyelembe venni. A 2.2 pontban vázolt módon eljárva a két jelenséget szét kell választani és az egymásrahatás érvényesülését szabályozni kell a hatékonysági mutatóval. Ennek megfelelően, és *y*-*z* síkú rezgéseket feltételezve, a legkisebb sajátfrekvenciára az

$$f_y = \sqrt{f_b^2 + f_s^2 + \left(\frac{\eta^2}{0.313} - \frac{k^2}{5} - 1\right) s_f\, f_b^2} \tag{4.18}$$

összefüggést kapjuk, ahol az f_b, f_s, η, k és s_f értékeit a megfelelő irány, jelen esetben az y irány figyelembevételével kell meghatározni.

Az y index/irány x-re történő cseréjével a (4.18) összefüggés felhasználható az x irányú rezgések legkisebb sajátfrekvenciájának meghatározására is.

Az η frekvenciaparaméter értékei a $k = 0…10$ tartományra a 2.1 ábrán, a teljes tartományra pedig a 4.2 táblázatban találhatók, k függvényében. (A 4.2 táblázatban adjuk meg a következő pontban tárgyalandó tiszta csavaró rezgések η_φ frekvenciaparaméterét is.) A második és harmadik sajátfrekvencia értékének meghatározásához szükséges η frekvenciaparaméter értékeit a [16] irodalom tartalmazza.

4.2 táblázat. Az η és η_φ frekvenciaparaméterek értékei k, illetve k_φ függvényében.

k vagy k_φ	η vagy η_φ	k vagy k_φ	η vagy η_φ	k vagy k_φ	η vagy η_φ	k vagy k_φ	η vagy η_φ	k vagy k_φ	η vagy η_φ
0.00	0.5596	4.5	1.465	9.5	2.680	14.5	3.913	20	5.278
0.10	0.5606	5.0	1.586	10.0	2.803	15.0	4.036	30	7.769
0.50	0.5851	5.5	1.706	10.5	2.926	15.5	4.160	40	10.26
1.00	0.6542	6.0	1.827	11.0	3.049	16.0	4.284	50	12.76
1.50	0.7511	6.5	1.949	11.5	3.172	16.5	4.408	60	15.26
2.00	0.8628	7.0	2.070	12.0	3.295	17.0	4.532	70	17.76
2.50	0.9809	7.5	2.192	12.5	3.418	17.5	4.656	80	20.26
3.00	1.1014	8.0	2.313	13.0	3.542	18.0	4.781	90	22.76
3.50	1.2226	8.5	2.435	13.5	3.665	18.5	4.905	100	25.26
4.00	1.3437	9.0	2.558	14.0	3.789	19.0	5.029	>100	$\frac{k}{4}$ vagy $\frac{k_\varphi}{4}$

Érdemes megfigyelni a megoldás előállításához felhasznált két differenciálegyenlet szerkezetét [(2.37) és (4.16) egyenletek]. Az egyetlen keretet jellemző (2.37) egyenlet szerkezete jelzi, hogy több – merev födémmel összekapcsolt – szerkezet esetén az egyenletek (és a merevségek) összeadhatók. Az azonos (v_1) mozgások együtthatói csak egyfajta merevséget tartalmaztak, lehetővé téve a merevségek egyszerű összegzését több (födémmel) sorba kapcsolt szerkezet esetében. Nem ez volt a helyzet az alakváltozások vizsgálata során, amikor az y vízszintes eltolódás második deriváltjának együtthatója mindhárom jellemző merevséget tartalmazta, mégpedig olyan (törtalakú) formában, amely általános esetben kizárta az egyszerű összegzés lehetőségét [v.ö. a (2.14) és (2.15) egyenleteket]. Ez az oka annak, hogy amíg a frekvenciavizsgálatnál a merevségek egyszerű összegzésével előállítható egy helyettesítő tartó, a vízszintes eltolódások vizsgálata során ez az út nem követhető.

4.2 Tiszta csavaró rezgés

A tiszta csavaró rezgés vizsgálata bonyolult feladat, de a hajlítás és csavarás között fennálló analógia felhasználásával a megoldás viszonylag egyszerű módon előállítható. Az analógia szerint az eltolódások, hajlítónyomatékok és nyíróerők, és az elcsavarodások, öblösödési nyomatékok és csavarónyomatékok megfeleltethetők egymásnak. Ha ismerjük az egyik csoport elemeit, akkor a másik csoport elemei már analóg módon előállíthatók.

A tiszta csavaró rezgések vizsgálatához egy olyan vékonyfalú, nyitott keresztmetszetű helyettesítő tartót használunk, amely az épület teljes merevítőrendszerét modellezi (4.2 ábra). A helyettesítő tartó a nyírásközéppontban helyezkedik el és $(GJ)_e$ hatékony Saint-Venant csavarási merevséggel valamint EI_ω öblösödési csavarási merevséggel rendelkezik. A tartó födémszinteken koncentrált M_i tömegeit a magasság mentén egyenletesen elosztott m

intenzitású tömeggel helyettesítjük (4.3 ábra).

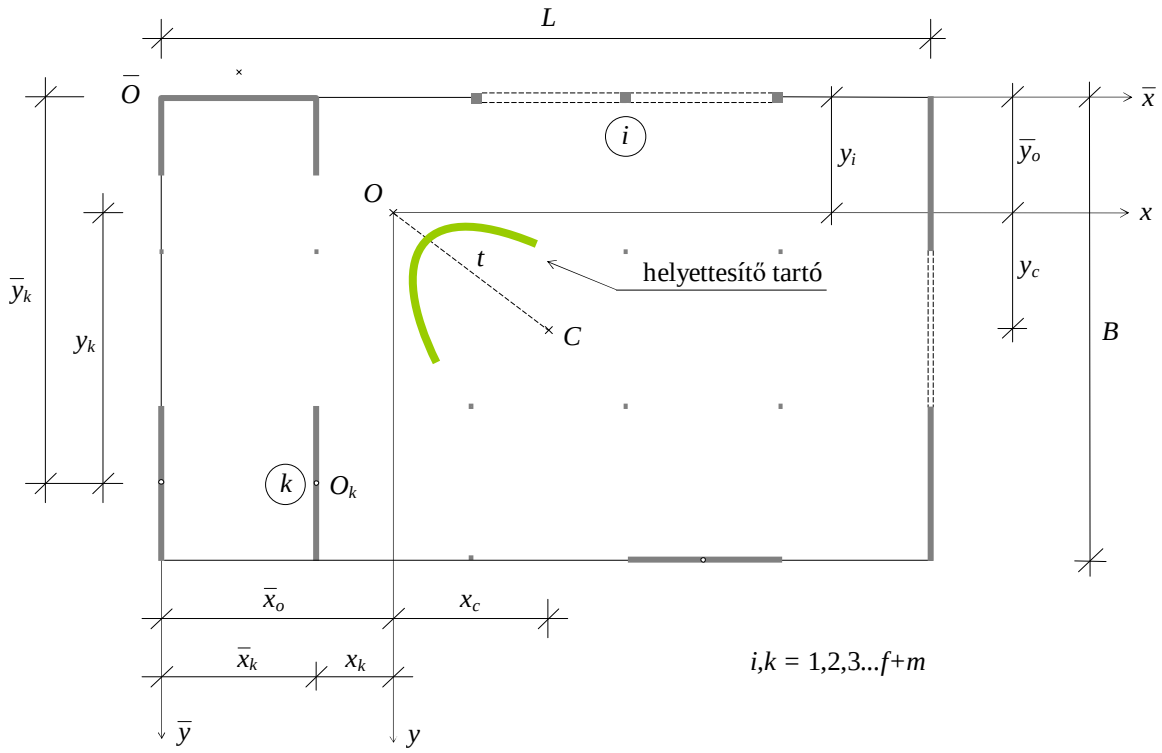
A helyettesítő tartó egy elemi szakaszának vizsgálata az

$$r_f^2 EI_\omega \varphi''''(z,t) - r_f^2 (GJ)_e \varphi''(z,t) + i_p^2 m \ddot{\varphi}(z,t) = 0$$

differenciálegyenlethez vezet, ahol a vesszők és pontok a z és t (idő) szerinti differenciálást jelölik és i_p az inerciasugár. A megoldás most is szorzat formában állítható elő, melynek során a változók elkülöníthetők és az időtől függő függvények kiküszöbölhetők. Így az

$$\frac{r_f^2 EI_\omega}{i_p^2} \varphi_1''''(z) - \frac{r_f^2 (GJ)_e}{i_p^2} \varphi_1''(z) - \omega^2 m \varphi_1(z) = 0 \qquad (4.19)$$

peremérték-feladathoz jutunk, ahol ω a körfrekvencia és $\varphi_1(z)$ a csavarási rezgéseket jelöli.



4.2 ábra. Tipikus épületalaprajz a vékonyfalú, nyitott keresztmetszetű helyettesítő tartóval.

Abban a koordinátarendszerben amelynek a kezdőpontja a helyettesítő tartó alsó befogási keresztmetszetében van (4.3 ábra), a peremfeltételek a következők:

$$\varphi_1(0) = 0$$

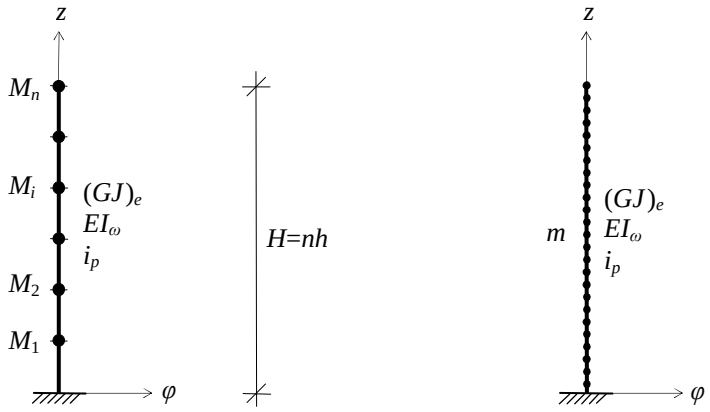
$$\varphi_1'(0) = 0$$

$$\varphi_1''(H) = 0$$

és

$$EI\varphi_1'''(H) - (GJ)_e \varphi_1'(H) = 0$$

A (4.19) differenciálegyenlet szerkezetében azonos a (4.16) egyenlettel és a peremfeltételek is megfelelnek egymásnak. Az *EI* hajlító merevség és a K_e hatékony nyírási merevség megfelel az EI_ω öblösödési merevségnek és a $(GJ)_e$ hatékony Saint-Venant csavarási merevségnek (osztva i_p^2-el).



a) M_i koncentrált tömegekkel b) egyenletesen megoszló *m* tömeggel

4.3 ábra. A helyettesítő tartó.

A tiszta csavarási probléma eredeti levezetése során kiderül, hogy az inerciasugár a teher (tömeg) eloszlásához kötődik. Egyszerű téglalap alakú, a födémeken egyenletesen megoszló tömegű épületek esetén az inerciasugár az

$$i_p = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} \tag{4.20}$$

összefüggés segítségével határozható meg, ahol *L* és *B* a két alaprajzi méret és *t* az alaprajz területének súlypontja és a merevítőrendszer nyírásközéppontjának távolsága (4.2 ábra). Bonyolultabb alakú alaprajz és/vagy az egyenletestől eltérő tömegeloszlás esetén az inerciasugár meghatározása bonyolultabb összefüggések segítségével lehetséges [4].

A (4.20) képlettel megadott inerciasugárral kapcsolatban fontos kiemelni, hogy értéke az alaprajz geometriai jellemzőitől függ (nem pedig a merevítőrendszer jellemzőitől).

A (4.16) differenciálegyenlet megoldása akkor használható a tiszta csavarási probléma megoldásának felírásához, ha rendelkezésünkre állnak a helyettesítő tartó $(GJ)_e$ és EI_ω merevségei. A következőkben ezeket írjuk fel.

A merevítőrendszer hatékony Saint-Venant csavarási merevsége két forrásból származik. Saját tiszta csavarási merevséggel rendelkeznek a tömör merevítőfalak és a magok – ezek teljes egészében „hatékonyak”. A másik forrás a keretek és nyírásokkal áttört falak hatékony nyírási merevsége, ami az érintett elemek csavarási karján keresztül érvényesül. A teljes hatékony Saint-Venant csavarási merevség így

$$(GJ)_e = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f} \left((K_{e,i})_x y_i^2 + (K_{e,i})_y x_i^2 \right) \tag{4.21}$$

ahol

J_k a *k*-adik fal/mag Saint-Venant-féle tiszta csavarási tehetetlenségi nyomatéka,
G a falak és magok nyírási rugalmassági modulusa,

$(K_{e,i})_x$, $(K_{e,i})_y$ az *i*-edik keret/nyílásokkal áttört fal hatékony nyírási merevsége az *x* és *y* irányban,

x_i, y_i az *i*-edik keret/nyílásokkal áttört fal merőleges távolsága a nyírásközépponttól az *x* és *y* irányban.

A kereteket, nyílásokkal áttört falakat, falakat és nyitott keresztmetszetű magokat is tartalmazó merevítőrendszerek esetében a (4.21) képlet első tagja általában elhanyagolhatóan kicsi a keretek/nyílásokkal áttört falak hatásához (a második taghoz) képest.

A merevítőrendszer öblösödési csavarási merevsége rendszerint három forrásból származik: a magok saját öblösödési ellenállásából, a magok és a falak hajlításához és a keretoszlopok és a nyílásokkal áttört falak falszakaszainak hajlításához köthető öblösödési csavarási ellenállásból:

$$EI_\omega = E_w \sum_{k=1}^{m} \left(I_{\omega,k} + (I_{w,k})_x y_k^2 + (I_{w,k})_y x_k^2 \right) + E_c \sum_{i=1}^{f} \left((I_{c,i} r_i)_x y_i^2 + (I_{c,i} r_i)_y x_i^2 \right) \tag{4.22}$$

ahol

$I_{\omega,k}$ a *k*-adik mag öblösödési csavarási tehetetlenségi nyomatéka,

$E_w(I_{w,k})_x$, $E_w(I_{w,k})_y$ a *k*-adik fal/mag hajlítási merevsége az *x* és *y* irányban,

$E_c(I_{c,i}r_i)_x$, $E_c(I_{c,i}r_i)_y$ az *i*-edik keret/nyílásokkal áttört falszakasz hajlítási merevsége az *x* és *y* irányban,

x_k, y_k a *k*-adik fal/mag merőleges távolsága a nyírásközépponttól az *x* és *y* irányban,

x_i, y_i az *i*-edik keret/nyílásokkal áttört fal merőleges távolsága a nyírásközépponttól az *x* és *y* irányban.

Egy szerkezetileg jól kialakított merevítőrendszer öblösödési csavarási merevségét általában a falak és magok határozzák meg (feltéve hogy a merőleges távolságuk a nyírásközépponttól elég nagy). A magok hozzájárulása a saját öblösödési merevségük révén – a (4.22) képlet első tagja – rendszerint jóval kisebb és a keretoszlopok által képviselt rész – az utolsó két tag – általában elhanyagolható.

Merevítőmagok csavarási jellemzőinek meghatározásával a 2.7.1 pont foglalkozik. A leggyakrabban alkalmazott magok öblösödési tehetetlenségi nyomatékának meghatározására a 2.4 táblázat ad zárt képleteket. A táblázat a *J* és I_ω csavarási tehetetlenségi nyomatékok képletei mellett zárt képleteket ad a magok saját nyírásközéppontja helyének (*e*) meghatározásához is. Ez azért fontos, mert amikor egy magot elhelyezünk a merevítőrendszerben és megadjuk a helyzetét, akkor az x_k és y_k koordináták a magok saját nyírásközéppontjára kell hogy vonatkozzanak. Néhány összetettebb mag csavarási jellemzőit tartalmazza a [17] irodalom 8. fejezete. Speciális (szabálytalan) alakú merevítőmagok esetében nem létezik zárt alakú megoldás az öblösödési csavarási tehetetlenségi nyomatékra. Ilyenkor valamely kereskedelmi forgalomban elérhető programot alkalmazhatunk.

A fenti merevségek ismeretében alkalmazható már a hajlítás-csavarás analógia, melynek segítségével a (4.18) összefüggés alapján felírható a tiszta csavarási rezgések legkisebb sajátfrekvenciája:

$$f_\varphi = \sqrt{f_\omega^2 + f_t^2 + \left(\frac{\eta_\varphi^2}{0.313} - \frac{k_\varphi^2}{5} - 1 \right) s_\varphi f_\omega^2} \tag{4.23}$$

A fenti összefüggésben az öblösödési csavarási merevséghez tartozó frekvencia négyzete az

$$f_\omega^2 = \frac{0.313 r_f^2 EI_\omega}{i_p^2 H^4 m} \tag{4.24}$$

és a Saint-Venant csavarási merevséggel kapcsolatos frekvencia négyzete az

$$f_t^2 = \frac{r_f^2 (GJ)_e}{i_p^2 (4H)^2 m} \tag{4.25}$$

összefüggés segítségével határozható meg. A Saint-Venant-féle csavarási merevség hatékonysági mutatója:

$$s_\varphi = \sqrt{\frac{(GJ)_e}{(GJ)}} \tag{4.26}$$

ahol az eredeti Saint-Venant-féle csavarási merevség értékét a

$$(GJ) = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f} \left((K_i)_x y_i^2 + (K_i)_y x_i^2 \right) \tag{4.27}$$

összefüggés adja meg.

Az η_φ frekvenciaparaméter értékét a 4.2 táblázat tartalmazza a

$$k_\varphi = H \sqrt{\frac{(GJ)_e}{EI_\omega}} \tag{4.28}$$

dimenziótlan csavarási paraméter függvényében.

A második és harmadik sajátfrekvencia értékének meghatározásához szükséges η_φ frekvenciaparaméter értékeit a [16] irodalom tartalmazza.

4.3 Az alaprezgések kombinálódása: a merevítőrendszer sajátfrekvenciája

Amikor az épület tömegközéppontja és a merevítőrendszer nyírásközéppontja egybeesik (kétszeresen szimmetrikus elrendezésnél), akkor a három alapfrekvencia (f_x, f_y és f_φ) egymástól függetlenek és a legkisebb az épület sajátfrekvenciája.

Amikor az elrendezés nem kétszeresen szimmetrikus és a nyírásközéppont nem esik egybe a tömegközépponttal, két dolgot kell figyelembe venni. A tiszta csavarási rezgés frekvenciájának kiszámításához először a nyírásközéppont helyét kell meghatározni. (Erre a síkbeli rezgések frekvenciájának meghatározásakor nincs szükség.) A három alapfrekvencia ismeretében foglalkozni kell a kombinálódásukkal.

A hajlítási alakváltozást végző merevítőrendszerek esetében a nyírásközéppont helyének meghatározása az egyes merevítőelemek hajlítási merevsége segítségével történik [(3.49) összefüggések]. Vegyes merevítőrendszerek esetében viszont a kereteknek és nyílásokkal áttört falaknak jelentős nyírási merevsége is lehet. A viselkedés ekkor meglehetősen bonyolult és a nyírásközéppont helye a magasság mentén is változhat. Erre az esetre nem ismert zárt alakú megoldás, de jó közelítésként alkalmazható a következő eljárás.

Mivel egy merevítőelem síkbeli frekvenciája mind a hajlítási mind pedig a nyírási merevség hatását figyelembe veszi, a nyírásközéppont helyének meghatározása történhet ezen frekvenciák (f_x és f_y) segítségével:

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{f+m} f_{y,i}^2 \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{f+m} f_{y,i}^2} \qquad \text{és} \qquad \bar{y}_o = \frac{\sum_{i=1}^{f+m} f_{x,i}^2 \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{f+m} f_{x,i}^2} \tag{4.29}$$

ahol $\bar{x}_i$ és $\bar{y}_i$ a keretek, nyílásokkal áttört falak, tömör falak és magok merőleges távolsága az $\bar{y}$ és $\bar{x}$ tengelyektől (4.2 ábra). A fenti képletekben szereplő frekvenciák meghatározása történhet például a (4.18) összefüggés felhasználásával. A Southwell-tétel és a Föppl-Papkovics tétel ismételt alkalmazása még egyszerűbb lehetőséget nyújt a síkbeli frekvenciák (közelítő) meghatározására:

$$f = \sqrt{f_b^2 + \frac{f_g^2 f_{s'}^2}{f_g^2 + f_{s'}^2}} \tag{4.30}$$

A (4.30) képlet a síkbeli frekvencia egy alsó korlátját szolgáltatja. A képletben $f_{s'}$, f_g és f_b az eredeti nyírási merevséghez, a globális hajlítási merevséghez és a lokális hajlítási merevséghez tartozó frekvenciák. Értéküket a (2.30), (2.31) és (2.35) képletek segítségével határozhatjuk meg.

A nyírásközéppont helyének ismeretében a Saint-Venant és öblösödési csavarási merevségek értéke meghatározható a (4.21) és (4.22) összefüggések segítségével abban a koordinátarendszerben, amelynek a kezdőpontja a nyírásközéppont (4.2 ábra). A tiszta csavaró rezgés legkisebb sajátfrekvenciáját a (4.23) képlet szolgáltatja.

Amennyiben a merevítőrendszer aszimmetrikus elrendezésű, az alapfrekvenciák kombinálódnak egymással. A kombinálódás figyelembevétele történhet közelítő módon, illetve „pontosan”. A „pontos” módszer automatikusan kezeli a három kombinálódási lehetőséget, vagyis a hármas és kettes kombinálódást, illetve azt az esetet amikor az alapesetek egymástól függetlenek és nem jön létre kombinálódás. (A „pontos” megoldás idézőjele azt jelzi, hogy a megoldás valójában nem pontos; a hibatartomány 0-2%.)

Először a „pontos” megoldást ismertetjük.

A három alapfrekvencia ismeretében a kombinálódást az

$$\left(f^2\right)^3 + a_2\left(f^2\right)^2 + a_1 f^2 - a_0 = 0 \tag{4.31}$$

(frekvencia-négyzetre nézve) harmadfokú egyenlet segítségével tudjuk figyelembe venni, amelynek a legkisebb gyöke az épület legkisebb sajátfrekvenciája. A megoldáshoz szükséges három együttható:

$$a_0 = \frac{f_x^2 f_y^2 f_\varphi^2}{1-\tau_x^2-\tau_y^2}, \quad a_1 = \frac{f_x^2 f_y^2 + f_\varphi^2 f_x^2 + f_\varphi^2 f_y^2}{1-\tau_x^2-\tau_y^2}, \quad a_2 = \frac{f_x^2\tau_x^2 + f_y^2\tau_y^2 - f_x^2 - f_y^2 - f_\varphi^2}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} \tag{4.32}$$

ahol a τ_x és τ_y a két külpontossági paraméter:

$$\tau_x = \frac{x_c}{i_p} \qquad \text{és} \qquad \tau_y = \frac{y_c}{i_p} \tag{4.33}$$

A (4.33) képletekben i_p az inerciasugár [a (4.20) képlet szerint] és x_c és y_c a C geometriai középpont koordinátái (4.2 ábra):

$$x_c = \frac{L}{2} - \bar{x}_o \qquad \text{és} \qquad y_c = \frac{B}{2} - \bar{y}_o \tag{4.34}$$

A kombinálódással kapcsolatban bizonyítható, hogy a kombinálódás minden esetben csökkenti a frekvenciát, vagyis az eredő sajátfrekvencia a kombinálódó alapfrekvenciák kisebbikénél is kisebb.

Ha az alapfrekvenciák kombinálására egy gyors megoldást szeretnénk, vagy nem áll rendelkezésre eljárás a harmadfokú egyenlet megoldására, vagy a kombinálódó frekvenciák egyike sokkal kisebb mint a másik (kettő), akkor az alábbi – a Föppl-Papkovics képletre épülő – közelítő eljárás használható.

Ha az aszimmetrikus elrendezésű épület tömegközéppontja nem esik rá a merevítőrendszer egyik tehetetlenségi főtengelyére sem, hármas kombinálódás következik be. Az épület eredő sajátfrekvenciája az

$$\frac{1}{f^2} = \frac{1}{f_x^2} + \frac{1}{f_y^2} + \frac{1}{f_\varphi^2}$$

reciprok összegzés alapján az

$$f = \left(\frac{1}{f_x^2} + \frac{1}{f_y^2} + \frac{1}{f_\varphi^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.35}$$

képletből határozható meg.

Egyszeresen szimmetrikus esetben amikor az épület tömegközéppontja ráesik a merevítőrendszer egyik tehetetlenségi főtengelyére, mondjuk az x tengelyre, akkor két dolog történhet. Az épület az x-z síkban végez rezgéseket (ekkor f_x a jellemző sajátfrekvencia), vagy y-z síkú rezgések keletkeznek (f_y) de ezek a rezgések kombinálódnak a z tengely körüli tiszta csavarási rezgésekkel (f_φ). A kapcsolt rezgések frekvenciája:

$$f_{y\varphi} = \left(\frac{1}{f_y^2} + \frac{1}{f_\varphi^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.36}$$

Az épület legkisebb sajátfrekvenciája a két frekvencia közül a kisebb:

$$f = \min\,(f_x,\ f_{y\varphi}) \tag{4.37}$$

Ha az elrendezés kétszeresen szimmetrikus és a merevítőrendszer nyírásközéppontja egybeesik az épület tömegközéppontjával, akkor az alaprezgések egymástól függetlenül jöhetnek létre és az épület legkisebb sajátfrekvenciája a három frekvencia (f_x, f_y, f_φ) közül a legkisebb lesz:

$$f = \min\,(f_x,\ f_y,\ f_\varphi) \tag{4.38}$$

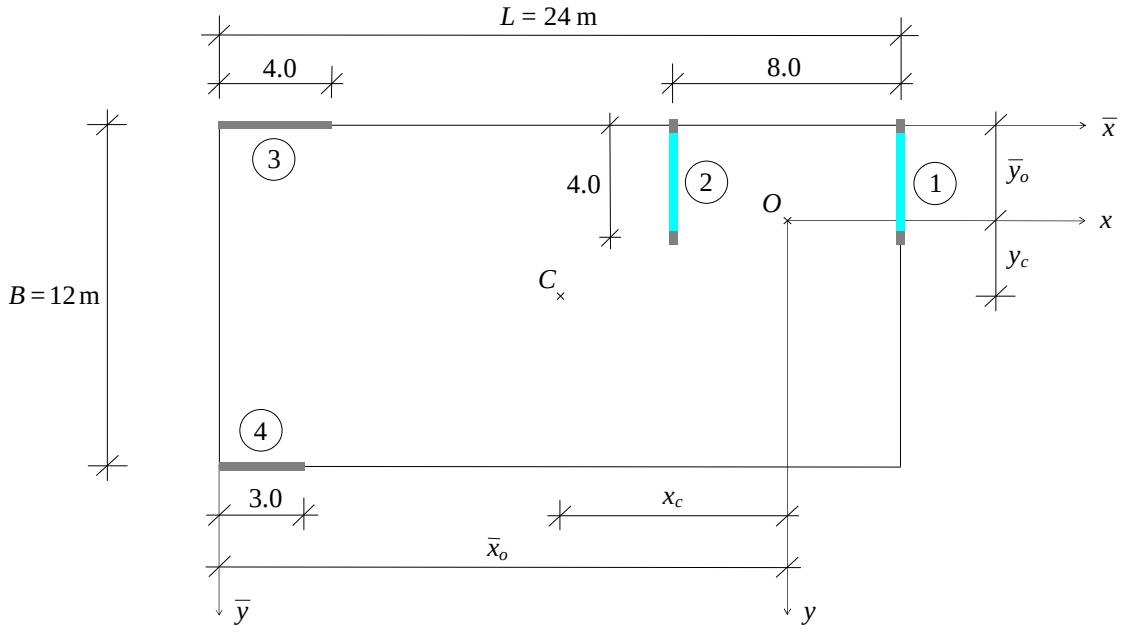
Az épület sajátfrekvenciája alapvetően két tényezőtől függ: az f_x, f_y és f_φ alapfrekvenciák nagyságától és az alapfrekvenciák kombinálódásától. A kombinálódás a merevítőrendszer „külpontosságától” függ. Minél nagyobb a külpontosság (τ_x és τ_y) – vagyis minél nagyobb a merevítőrendszer O nyírásközéppontja és a C tömegközéppont közötti távolság – annál

nagyobb a kombinálódás (frekvenciacsökkentő) hatása.

Az összegzési tételek alkalmazásának kedvezőtlen oldala az, hogy nem veszik figyelembe a merevítőrendszer külpontosságát. Ha a külpontosság viszonylag kicsi, akkor az összegzési tételek alkalmazásával kiszámított kapcsolt sajátfrekvencia értéke jelentős mértékben közelítő lehet.

4.4 Számpélda: vasbeton falakkal és falazattal kitöltött vasbeton keretekkel merevített 6-szintes aszimmetrikus épület

Határozzuk meg a 4.4 ábrán alaprajzával vázolt 6-szintes épület legkisebb sajátfrekvenciáját. Az épület térfogategységre vonatkoztatott súlya γ = 2.5 kN/m^3 értékű és feltételezzük hogy az épület tömege a födémszinteken egyenletesen oszlik meg. Az épületet két tömör vasbeton fal és két falazattal kitöltött vasbeton keret merevíti. A falak, a keretoszlopok, a keretgerendák és a kitöltő falazat vastagsága 0.30 m. A keretoszlopok és a keretgerendák (keretsíkban mért) magassága 0.50 m és 0.30 m. A vasbeton szerkezetek rugalmassági modulusa E = 30000 MN/m^2 és a kitöltő falazat rugalmassági modulusa E_d = 3000 MN/m^2. A vasbeton falak nyírási rugalmassági modulusa G = 12500 MN/m^2. Az emeletmagasság h = 3 m és az épület teljes magassága H = 18 m. A merevítőelemek merevségi és geometriai alapadatait a 4.3 táblázatban foglaljuk össze, ahol az utolsó két oszlop adatait csak a nyírásközéppont helyének 4.4.3 pontban történő meghatározása után számíthatjuk ki.



4.4 ábra. A 6-szintes épület alaprajza.

Az épület γ = 2.5 kN/m^3 értékű térfogategységre vonatkoztatott súlya

$$m = \rho A = \frac{\gamma}{g} LB = \frac{2.5}{9.81} 24 \cdot 12 = 73.4 \text{ kg/m} \qquad \{4.7\}$$

egységhosszra jutó tömeget jelent. A tömegeloszlással kapcsolatos redukciós tényező értéke a 4.1 táblázatból kapható:

$$r_f = 0.863 \qquad \{4.1 \text{ táblázat}\}$$

A négy elemből álló merevítőrendszer nem szimmetrikus és minden számítás nélkül látszik, hogy a merevítőrendszer *O* nyírásközéppontja nem esik egybe a *C* tömegközépponttal (4.4 ábra). Ez azt jelenti, hogy a számítást két lépésben hajtjuk végre: először kiszámítjuk a három alapfrekvenciát, majd figyelembe vesszük az alapfrekvenciák kombinálódását.

4.3 táblázat. Merevségi és geometriai jellemzők.

merevítő-elem	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$I_{x,i}$	$I_{y,i}$	J	$x_i = \bar{x}_i - \bar{x}_o$	$y_i = \bar{y}_i - \bar{y}_o$
1	24.00		0.00625			4.0	
2	16.00		0.00625			-4.0	
3		0.0		1.6	0.036		-3.56
4		12.0		0.675	0.027		8.44
Σ			0.0125	2.275	0.063		

4.4.1 Rezgés *x* irányban

Az *x* irányú rezgés vizsgálatához csak a 3. és a 4. jelű merevítőfalakat vesszük figyelembe, mert a két falazattal kitöltött keret az *x* irányban elhanyagolhatóan kis merevséggel rendelkezik. A két falhoz tartozó hajlítási merevség felhasználásával

$$f_b^2 = f_w^2 = \frac{0.313 r_f^2 E_w \sum_{k=1}^{m} I_{w,k}}{H^4 m} = \frac{0.313 \cdot 0.863^2 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 2.275}{18^4 \cdot 73.4} = 2.065\,\mathrm{Hz}^2 \qquad \{4.15\}$$

ahonnan az *x* irányú frekvencia:

$$f_x = f_b = \sqrt{2.065} = 1.437\,\mathrm{Hz}$$

4.4.2 Rezgés *y* irányban

Az *y* irányú vizsgálatnál a merevítőfalak síkjukra merőleges merevségét hanyagoljuk el a két falazattal kitöltött keret merevsége mellett. A falazattal kitöltött keretet keresztmerevítéssel ellátott kerettel modellezzük, ahol a diagonális rúd keresztmetszetét az

$$A_d = 0.15dt \qquad \{2.57\} \text{ és } \{2.58\}$$

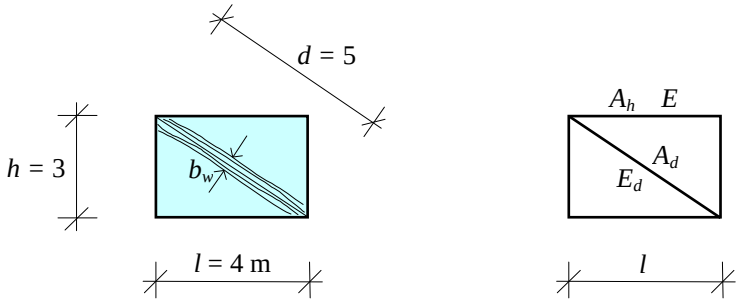
összefüggéssel határozzuk meg, ahol *t* a falazat vastagsága és 0.15*d* a falazat hatékony szélessége (a 4.5/a ábrán b_w-vel jelölve).

Az 1. jelű merevítőelem nyírási merevsége így: {2.59}

$$K_1 = \left(\frac{d^3}{A_d E_d h l^2} + \frac{l}{A_h E_h h} \right)^{-1} = \left(\frac{5^3}{0.3 \cdot 0.15 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 4^2} + \frac{4}{0.09 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 3} \right)^{-1} = 229787\,\mathrm{kN}$$

A rendszer teljes eredeti nyírási merevsége:

$$K = \sum_{i=1}^{f} K_i = 2 \cdot 229787 = 459574\,\text{kN} \qquad \{4.5\}$$



a) b)

4.5 ábra. A falazattal kitöltött keret-panel modellje.

Az 1. merevítőelem eredeti nyírási merevségéhez tartozó frekvencia négyzete:

$$f_{s',1}^2 = \frac{1}{(4H)^2}\frac{r_f^2 K_1}{m} = \frac{0.863^2 \cdot 229787}{(4 \cdot 18)^2 \cdot 73.4} = 0.4498\,\text{Hz}^2 \qquad \{4.6\}$$

Az oszlopok globális tehetetlenségi nyomatéka:

$$I_{g,1} = \sum_{j=1}^{n} A_{c,j} t_j^2 = 0.3 \cdot 0.5 \cdot 2^2 \cdot 2 = 1.2\,\text{m}^4 \qquad \{4.9\}$$

Az ehhez tartozó frekvencia négyzete:

$$f_{g,1}^2 = \frac{0.313 r_f^2 E I_{g,1}}{H^4 m} = \frac{0.313 \cdot 0.863^2 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 1.2}{18^4 \cdot 73.4} = 1.0891\,\text{Hz}^2 \qquad \{4.8\}$$

Az eredeti nyírási és a globális hajlítási frekvenciák segítségével meghatározható az 1. merevítőelem nyírási hatékonysági tényezőjének négyzete:

$$s_{f,1}^2 = \frac{f_{g,1}^2}{f_{g,1}^2 + f_{s',1}^2} = \frac{1.0891}{1.0891 + 0.4498} = 0.7077 \qquad \{4.10\}$$

A rendszer hatékony nyírási merevsége így:

$$K_e = \sum_{i=1}^{2} s_{f,i}^2 K_i = 0.7077 \cdot 229787 \cdot 2 = 325241\,\text{kN} \qquad \{4.11\}$$

A teljes rendszer nyírási hatékonysági tényezője:

$$s_f = \sqrt{\frac{K_e}{K}} = \sqrt{\frac{325241}{459574}} = 0.8412 \qquad \{4.12\}$$

A hatékony nyírási merevséghez tartozó frekvencia négyzete:

$$f_s^2 = \frac{1}{(4H)^2}\frac{r_f^2 K_e}{m} = \frac{0.863^2 \cdot 325241}{(4\cdot 18)^2 \cdot 73.4} = 0.6366\,\mathrm{Hz}^2 \qquad \{4.13\}$$

A keretek lokális hajlítási merevsége:

$$EI = 3\cdot 10^7 \cdot 0.0125 = 375000\,\mathrm{kNm}^2 \qquad \{4.14\}$$

A lokális hajlítási merevséghez tartozó frekvencia négyzete:

$$f_b^2 = \frac{0.313 r_f^2 EI}{H^4 m} = \frac{0.313\cdot 0.863^2 \cdot 375000}{18^4 \cdot 73.4} = 0.011345\,\mathrm{Hz}^2 \qquad \{4.15\}$$

A dimenziótlan paraméter

$$k = H\sqrt{\frac{K_e}{EI}} = 18\sqrt{\frac{325241}{375000}} = 16.76 \qquad \{4.17\}$$

segítségével a frekvenciaparaméter a 4.2 táblázatból kapható:

$$\eta = 4.408 + \frac{4.532 - 4.408}{17 - 16.5}(16.76 - 16.5) = 4.472 \qquad \{4.2\ \text{táblázat}\}$$

Minden rendelkezésre áll az *y* irányú rezgés frekvenciájának meghatározásához:

$$f_y = \sqrt{f_b^2 + f_s^2 + \left(\frac{\eta^2}{0.313} - \frac{k^2}{5} - 1\right) s_f\, f_b^2} \qquad \{4.18\}$$

$$= \sqrt{0.011345 + 0.6366 + \left(\frac{4.472^2}{0.313} - \frac{16.76^2}{5} - 1\right) 0.8412\cdot 0.011345} = 0.844\,\mathrm{Hz}$$

4.4.3 Tiszta csavaró rezgés

A számítás a nyírásközéppont helyének meghatározásával kezdődik. A négy merevítőelem geometriai és merevségi alapadatait a 4.3 táblázat tartalmazza.

A két azonos kialakítású 1. és 2. jelű merevítőelemhez képest a 3. és 4. merevítőelem *x* tengelyre vonatkozó merevsége elhanyagolhatóan kicsi, így a nyírásközéppont *x* irányban jó közelítéssel a két falazattal kitöltött keret között félúton helyezkedik el:

$$\bar{x}_o = 20\,\mathrm{m}$$

Az *y* irányú számítás során az 1. és 2. merevítőelemek merevségeit hanyagolhatjuk el. A nyírásközéppont helyét így a két fal merevségének arányában kapjuk meg:

$$\bar{y}_o = \frac{\sum_{i=1}^{m} I_{y,i}\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{m} I_{y,i}} = \frac{0.675 \cdot 12}{2.275} = 3.56\,\text{m} \qquad \{3.49\}$$

A nyírásközéppont helyének ismeretében a 4.3 táblázatban az utolsó két oszlop adatait is kiszámíthatjuk és meghatározhatjuk a *C* geometriai középpont helyét abban a koordináta-rendszerben amelynek a nyírásközéppont az origója (4.4 ábra):

$$x_c = \frac{L}{2} - \bar{x}_o = \frac{24}{2} - 20 = -8\,\text{m} \qquad \text{és} \qquad y_c = \frac{B}{2} - \bar{y}_o = \frac{12}{2} - 3.56 = 2.44\,\text{m} \qquad \{4.34\}$$

A két koordináta segítségével meghatározhatjuk az inerciasugár értékét:

$$i_p = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} = \sqrt{\frac{24^2 + 12^2}{12} + 8^2 + 2.44^2} = \sqrt{129.95} = 11.4\,\text{m} \qquad \{4.20\}$$

A következő lépésben a 4.3 táblázatban található merevségi adatok és távolságok ($I_{x,i}$, $I_{y,i}$, J_i, x_i és y_i) segítségével meghatározzuk a csavarási merevségeket.

Az eredeti Saint-Venant csavarási merevség:

$$(GJ) = \sum_{k=1}^{2} GJ_k + \sum_{i=1}^{2} (K_i)_y x_i^2 = 0.063 \cdot 1.25 \cdot 10^7 +$$

$$+ 229787 \cdot 4^2 \cdot 2 = 787500 + 7353184 = 8140684\,\text{kNm}^2 \qquad \{4.27\}$$

A hatékony Saint-Venant csavarási merevséget a két keretre vonatkozó (azonos) hatékonysági mutató segítségével határozhatjuk meg:

$$(GJ)_e = \sum_{k=1}^{2} GJ_k + \sum_{i=1}^{2} (K_{e,i})_y x_i^2 = 0.063 \cdot 1.25 \cdot 10^7 +$$

$$+ 229787 \cdot 0.7077 \cdot 4^2 \cdot 2 = 787500 + 5203848 = 5991348\,\text{kNm}^2 \qquad \{4.21\}$$

Az eredeti és hatékony Saint-Venant csavarási merevség segítségével meghatározható a rendszer hatékonysági mutatója:

$$s_\varphi = \sqrt{\frac{(GJ)_e}{(GJ)}} = \sqrt{\frac{5991348}{8140684}} = 0.8579 \qquad \{4.26\}$$

Az öblösödési csavarási merevség kiszámításánál csak a merevítőfalakat vesszük figyelembe (és a keretoszlopok hatását elhanyagoljuk):

$$EI_\omega = E\sum_{k=1}^{m} (I_{w,k})_x y_k^2 = 3 \cdot 10^7 (1.6 \cdot 3.56^2 + 0.675 \cdot 8.44^2) = 2.0508 \cdot 10^9\,\text{kNm}^4 \qquad \{4.22\}$$

A tiszta csavaró rezgés legkisebb sajátfrekvenciájának meghatározásához szükségünk van a hatékony Saint-Venant és az öblösödési merevségekhez tartozó frekvenciák négyzeteire.

A hatékony Saint-Venant merevséghez tartozó frekvencia négyzete:

$$f_t^2 = \frac{r_f^2 (GJ)_e}{16 i_p^2 H^2 m} = \frac{0.863^2 \cdot 5991348}{16 \cdot 11.4^2 \cdot 18^2 \cdot 73.4} = 0.09024\,\text{Hz}^2 \qquad \{4.25\}$$

Az öblösödési merevséghez tartozó frekvencia négyzete:

$$f_\omega^2 = \frac{0.313 r_f^2 EI_\omega}{i_p^2 H^4 m} = \frac{0.313 \cdot 0.863^2 \cdot 2.0508 \cdot 10^9}{11.4^2 \cdot 18^4 \cdot 73.4} = 0.4774\,\text{Hz}^2 \qquad \{4.24\}$$

A dimenziótlan csavarási paraméter:

$$k_\varphi = H \sqrt{\frac{(GJ)_e}{EI_\omega}} = 18 \sqrt{\frac{5991348}{2.0508 \cdot 10^9}} = 0.9729 \qquad \{4.28\}$$

A csavarási paraméter függvényében a 4.2 táblázatból kapjuk meg a frekvenciaparaméter értékét:

$$\eta_\varphi = 0.5851 + \frac{0.6542 - 0.5851}{1.0 - 0.5}(0.9729 - 0.5) = 0.650 \qquad \{4.2\ \text{táblázat}\}$$

A tiszta csavaró rezgés sajátfrekvenciája most már meghatározható:

$$f_\varphi = \sqrt{f_\omega^2 + f_t^2 + \left(\frac{\eta_\varphi^2}{0.313} - \frac{k_\varphi^2}{5} - 1\right) s_\varphi f_\omega^2}$$

$$= \sqrt{0.4774 + 0.09024 + \left(\frac{0.65^2}{0.313} - \frac{0.9729^2}{5} - 1\right) 0.8579 \cdot 0.4774} = 0.796\,\text{Hz} \qquad \{4.23\}$$

4.4.4 Az épület legkisebb sajátfrekvenciája

Az épület tömegközéppontja nem esik rá egyik tehetetlenségi főtengelyre sem, így az alaprezgések hármas kombinálódásával kell számolni. A három alapfrekvencián kívül szükségünk van a két külpontossági paraméterre is:

$$\tau_x = \frac{x_c}{i_p} = \frac{8.0}{11.4} = 0.7018 \qquad \text{és} \qquad \tau_y = \frac{y_c}{i_p} = \frac{2.44}{11.4} = 0.214 \qquad \{4.33\}$$

Az épület legkisebb sajátfrekvenciáját a (frekvencia négyzetére nézve) harmadfokú egyenlet

$$\left(f^2\right)^3 + a_2 \left(f^2\right)^2 + a_1 f^2 - a_0 = 0 \qquad \{4.31\}$$

legkisebb gyöke szolgáltatja. Az

$$a_0 = \frac{f_x^2 f_y^2 f_\varphi^2}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2} = \frac{1.437^2 \cdot 0.844^2 \cdot 0.796^2}{1 - 0.7018^2 - 0.214^2} = 2.0188 \qquad \{4.32\}$$

$$a_1 = \frac{f_x^2 f_y^2 + f_\varphi^2 f_x^2 + f_\varphi^2 f_y^2}{1-\tau_x^2-\tau_y^2} = \frac{1.437^2 \cdot 0.844^2 + 0.796^2 \cdot 1.437^2 + 0.796^2 \cdot 0.844^2}{1-0.7018^2-0.214^2} = 6.998$$

és

$$a_2 = \frac{f_x^2\tau_x^2 + f_y^2\tau_y^2 - f_x^2 - f_y^2 - f_\varphi^2}{1-\tau_x^2-\tau_y^2}$$

$$= \frac{1.437^2 \cdot 0.7018^2 + 0.844^2 \cdot 0.214^2 - 1.437^2 - 0.844^2 - 0.796^2}{1-0.0277^2-0.0617^2} = -5.115$$

együtthatókkal az egyenlet megoldása, vagyis az épület legkisebb sajátfrekvenciája:

$$f = 0.626\,\text{Hz}$$

A Föppl-Papkovics közelítő képlettel igen egyszerűen juthatunk a sajátfrekvencia közelítő értékéhez:

$$f = \left(\frac{1}{f_x^2}+\frac{1}{f_y^2}+\frac{1}{f_\varphi^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{1.437^2}+\frac{1}{0.844^2}+\frac{1}{0.796^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 0.537\,\text{Hz} \qquad \{4.35\}$$

Az 5. fejezet tanulmányozása után gyakorlásképpen érdemes elvégezni a stabilitás- és eltolódásvizsgálatot is. Az eredményeket a 7. fejezetben adjuk meg.

5

A merevítőrendszer stabilitásvizsgálata; globális kritikus teher

Épületek stabilitásvizsgálata során biztosítani kell, hogy az egyes szerkezeti elemek külön-külön stabil állapotban legyenek – lokális stabilitás – és meg kell győződni arról is, hogy az egész épület egységes egészként megfelelő stabilitással rendelkezik – globális stabilitás. A nemzeti szabványok általában megfelelő részletességgel foglalkoznak a lokális stabilitással és rendszerint részletes útmutatást is adnak a feladat elvégzéséhez. A globális stabilitással kapcsolatban már jóval kevesebb információ áll rendelkezésre, így ebben a fejezetben a globális stabilitással foglalkozunk. A globális stabilitási probléma megoldására két alapvetően különböző utat választhatunk: a véges elemes módszert alkalmazzuk (célszerűen számítógépes program felhasználásával) vagy valamely analitikus módszer segítségével egyszerűbb – általában közelítő – összefüggések segítségével hajtjuk végre a vizsgálatot. Ebben a fejezetben az analitikus módszert mutatjuk be.

Az analitikus megoldás során a kontinuum módszer alkalmazásával egy helyettesítő tartót hozunk létre, ami megfelelő pontossággal modellezi a merevítőrendszert. A nehézséget az okozza, hogy többszörös egymásrahatást kell figyelembe vennünk. Nem csak egy keret egyes elemei (oszlopai és gerendái) között van egymásrahatás, de még egy keret esetében is egymásrahatás jelentkezik a különböző típusú (hajlítási és nyírási) alakváltozások között. Ezen túlmenően, a különböző típusú merevítőelemek (keretek, nyílásokkal áttört falak, tömör falak és magok) is hatnak egymásra. Ez az egymásrahatás jelentkezik a két tehetetlenségi fősíkban és a tiszta elcsavarodás során is. Végül, de nem utolsó sorban, a három alap (síkbeli- és tiszta elcsavarodó) kihajlás általános esetben kombinálódik egymással.

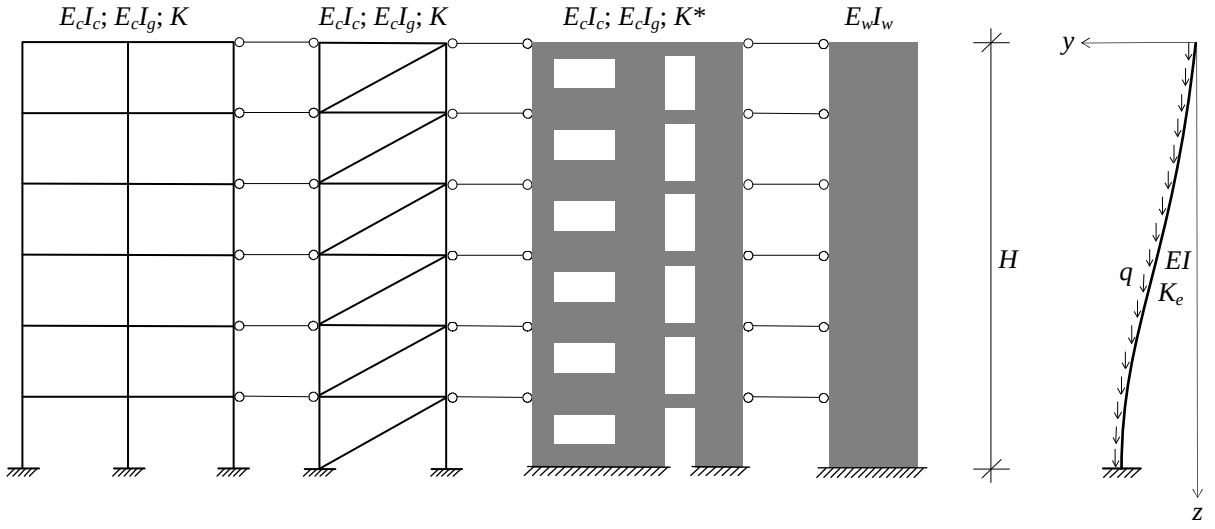
A komplex viselkedés miatt a közelítő módszerek különböző egyszerűsítő feltételek bevezetésére kényszerülnek. A cél olyan feltételek alkalmazása, amelyek egyszerűsítik ugyan a feladat megoldását, de nem hanyagolnak el fontos jelenséget, nem korlátozzák jelentős mértékben a módszer alkalmazhatóságát és a pontosságuk is elfogadható.

Az első fejezetben alkalmazott feltételezéseken túlmenően most feltételezzük még azt, hogy az épület terhe a födémeken egyenletesen megoszló teher. A kritikus teher az egyensúly elágazásához tartozó teher.

A következő pontokban bemutatásra kerülő eljárás nagyon hasonló az előző fejezetben a dinamikai vizsgálatnál alkalmazott eljáráshoz. Először a jellemző merevségeket vezetjük be. Létrehozzuk a hatékony nyírási merevséget, amely lehetővé teszi – csak úgy mint az előző fejezetben – hogy a merevségek egyszerű összegzésével kialakítsunk egy viszonylag egyszerűen kezelhető helyettesítő tartót. Második lépésben a helyettesítő tartó síkbeli és tiszta elcsavarodó kihajlását vizsgáljuk. Felírjuk a feladatok differenciálegyenleteit és megadjuk a vonatkozó sajátértékfeladatok megoldásait. Végül, úgy állítjuk elő az épület globális kritikus terhét, hogy figyelembe vesszük az alapmódok (síkbeli kihajlás a tehetetlenségi fősíkokban és tiszta elcsavarodó kihajlás) kombinálódását.

5.1 Keretekből, falakból és magokból álló merevítőrendszer síkbeli kihajlása

Tekintsük az 5.1/a ábrán vázolt merevítőrendszert, amely *f* keretből és nyílásokkal áttört falból ($i = 1...f$) és *m* falból és magból ($k = 1...m$) áll. A merevítőelemeket a síkjukban merevnek és síkjukra merőlegesen hajlékonynak feltételezett födémek kötik össze. Az egész merevítőrendszert jellemezhetjük a keretek és nyílásokkal áttört falak nyírási merevségével, a keretek és nyílásokkal áttört falak globális hajlítási merevségével és a keretoszlopok, a nyílásokkal áttört falak falszakaszainak, a tömör falaknak és a magoknak a lokális hajlítási merevségével. Ezen jellemző merevségek összegzésével egy helyettesítő tartó állítható elő (5.1/b ábra), amely segítségével egy viszonylag egyszerű vizsgálat végrehajtására nyílik lehetőség.



a) keretek, nyílásokkal áttört falak, falak és magok b) helyettesítő tartó

5.1 ábra. Síkbeli merevítőrendszer.

Első lépésben a nyírási merevséget határozzuk meg, amely a keretek nyírási alakváltozásával kapcsolatos (5.2/c ábra). Az „eredeti” nyírási merevségnek két komponense van. Az *i*-edik keret *globális* nyírási merevsége a keret teljes magasságára kiterjedő nyírási ellenállásával kapcsolatos. Ez az ellenállás a keretgerendáknak köszönhető, amelyek – kontinuumként kezelve – a teljes magasság mentén folytonosan elosztva fejtik ki hatásukat. Így a teljes magasság mentén „egyenletes” nyírási alakváltozás jön létre (5.2/a ábra). Ezt a részmerevséget a

$$K_{b,i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{12 E_b I_{b,j}}{l_j h} \tag{5.1}$$

összefüggés definiálja, ahol

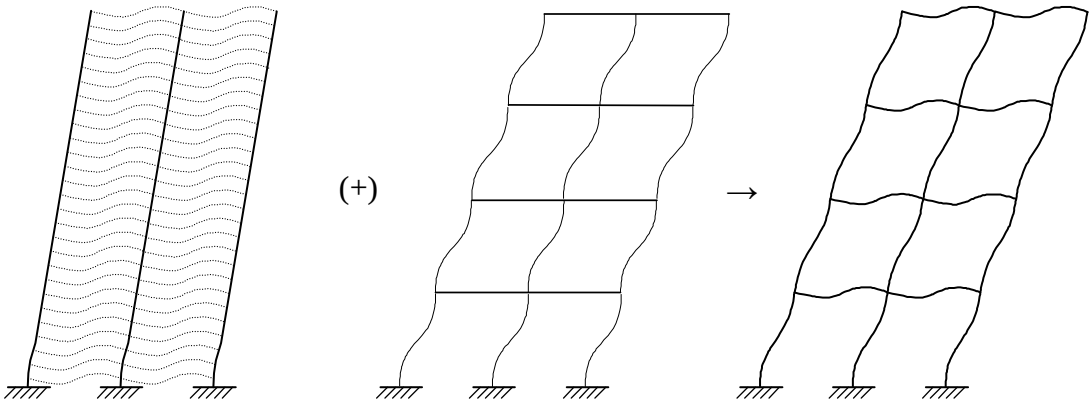
E_b	a keretgerendák rugalmassági modulusa,
$I_{b,j}$	az *i*-edik keret *j*-edik gerendájának tehetetlenségi nyomatéka,
h	az emeletmagasság,
l_j	az *i*-edik keret *j*-edik mezőköze,
n	az *i*-edik keret oszlopainak száma.

A keret gerendái azonban nem folytonosan vannak elosztva a magasság mentén, hanem szintenként kötik össze az oszlopokat és így csak szintenként tudják kifejteni nyírási ellenállásukat. Két gerenda között az oszlopokra hárul az a feladat, hogy az oldalirányú kilendülésnek ellenálljanak. Ez a keret egésze szempontjából *lokálisnak* tekinthető nyírási ellenállás így az emeletmagas oszlopokkal kapcsolatos (5.2/b ábra) és – fix megtámasztású kereteket feltételezve – a

$$K_{c,i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi^2 E_c I_{c,j}}{h^2} \tag{5.2}$$

összefüggésből határozható meg, ahol

E_c a keretoszlopok rugalmassági modulusa,
$I_{c,j}$ az *i*-edik keret *j*-edik oszlopának tehetetlenségi nyomatéka.



a) globális (teljes magasságú) komponens

b) lokális (emeletmagas) komponens

c) tényleges nyírási alakváltozás

5.2 ábra. Keret nyírási alakváltozása.

Az (5.2) összefüggéssel kapcsolatban érdekes megfigyelni, hogy egy *h* magasságú, alul-felül befogott, de felül vízszintes elmozdulás ellen nem megtámasztott *EI* merevségű oszlop kritikus terhe éppen $\pi^2 EI/h^2$. Más megfogalmazásban: a lokális nyírási merevség az emeletek közötti kihajlás kritikus terhével definiálható. Ez a tény lehetővé teszi, hogy más „nem-szabályos" (pl. eltérő földszinti magasságú és/vagy csuklós megtámasztású) keretek esetében is viszonylag egyszerűen járhassunk el – lásd a 2.4.2 és 2.4.3 pontokat.

A globális és lokális nyírási merevség komponensek ismeretében az *i*-edik keret nyírási merevségét a Föppl-Papkovics tétel alkalmazásával

$$\frac{1}{K_i} = \frac{1}{K_{b,i}} + \frac{1}{K_{c,i}}$$

alakban írhatjuk fel, ahonnan

$$K_i = K_{b,i} r_i = K_{b,i} \frac{K_{c,i}}{K_{b,i} + K_{c,i}} \tag{5.3}$$

Itt – későbbi használatra – bevezettük az r_i redukciós tényezőt is:

$$r_i = \frac{K_{c,i}}{K_{b,i} + K_{c,i}} \tag{5.4}$$

Az f keret teljes „eredeti” nyírási merevsége egyszerű összegzéssel állítható elő:

$$K = \sum_{i=1}^{f} K_i \tag{5.5}$$

Az ezzel a nyírási merevséggel kapcsolatos alakváltozás a 2.1/a és 5.2/c ábrán látható. Az (5.3) összefüggés egyben definiálja a keret „eredeti” nyírási kritikus terhét is. Az „eredeti” jelző arra utal, hogy a későbbi számítások során nem ez a nyírási merevség/kritikus teher szerepel majd. Ennek az az oka, hogy a kihajlás során a keret más alakváltozást is végez. Ezek közül most a globális hajlítási alakváltozással foglalkozunk, mivel a globális hajlítási alakváltozás és az „eredeti” nyírási merevséghez köthető nyírási alakváltozás között egymásrahatás jön létre és ez az egymásrahatás felfogható úgy is, mint egy a nyírási merevséget csökkentő hatás. [Ha a merevítőrendszer nyílásokkal áttört falakat is tartalmaz, akkor a globális nyírási merevség meghatározásához az (5.1) összefüggés helyett a (2.62) összefüggést kell használni.]

A teljes H magasságra kiterjedő globális hajlítási alakváltozás az oszlopok globális másodrendű tehetetlenségi nyomatékával kapcsolatos. Ennek értéke az i-edik keret esetében – a korábbi fejezetekben tárgyalt módon – az

$$I_{g,i} = \sum_{j=1}^{n} A_{c,j} t_j^2 \tag{5.6}$$

összefüggéssel adható meg, ahol

$A_{c,j}$ a j-edik keretoszlop keresztmetszeti területe,
t_j a j-edik keretoszlop távolsága az oszlopkeresztmetszetek súlypontjától.

A globális másodrendű tehetetlenségi nyomaték segítségével meghatározható az i-edik keret globális hajlítási kritikus terhe:

$$N_{g,i} = \frac{7.837 r_s E_c I_{g,i}}{H^2} \tag{5.7}$$

ahol H a szerkezet magassága és r_s a teher magasság menti eloszlásával kapcsolatos redukciós tényező. Az r_s redukciós tényező azonos a 2.3 pontban már bevezetett tényezővel és azt a – kedvezőtlen – hatást veszi figyelembe, hogy az épület terhe nem a magasság mentén egyenletesen megoszló teher, hanem a födémeken egyenletesen megoszló teher, ami a helyettesítő tartó szempontjából szintenként koncentrált erőket jelent (2.11/b ábra; 5.4/b ábra).

5.1 táblázat. Az r_s redukciós tényező az n szintszám függvényében.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_s	0.315	0.528	0.654	0.716	0.759	0.791	0.815	0.834	0.850	0.863	0.874
n	12	13	14	15	16	18	20	25	30	50	>50
r_s	0.883	0.891	0.898	0.904	0.910	0.919	0.926	0.940	0.950	0.969	$n/(n+1.588)$

Az r_s tényező értékét a 2.12 ábra diagramjáról vehetjük maximum húsz szintes szerkezetek esetén. Az 5.1 táblázat magasabb szerkezetekre is ad értékeket. A táblázat utolsó rublikájában az $n > 50$-re megadott $r_s = n/(n + 1.588)$ képlet valójában minden $n \geq 3$ esetben használható.

A kihajlás során a nyírási és a globális hajlítási mód között egymásrahatás van. A globális hajlítás úgy is tekinthető, mint egy erodáló hatás, amely csökkenti a nyírási merevséget. A globális hajlítás közben bekövetkező oszlopösszenyomódás és megnyúlás ugyanis csökkenti a gerendák „S-alakú" meggörbülésének lehetőségét, vagyis a nyírási alakváltozás mértékét. Ez az egymásrahatás tehát kedvezőtlen, és az eredő kritikus teher mind a nyírási, mind a globális hajlítási kritikus tehernél kisebb. Figyelembevétele a Föppl-Papkovics tétel segítségével

$$\frac{1}{K_{e,i}} = \frac{1}{K_i} + \frac{1}{N_{g,i}}$$

alakban lehetséges, ahol $K_{e,i}$ az *i*-edik keret eredő kritikus terhe, amit a *hatékony* nyírási kritikus teherként – illetve *hatékony* nyírási merevségként – definiálunk. Értékét a Föppl-Papkovics tétel átrendezésével

$$K_{e,i} = K_i \frac{N_{g,i}}{K_i + N_{g,i}} = K_i s_i \tag{5.8}$$

formában írhatjuk fel, ahol bevezettük az *i*-edik keret nyírási merevségéhez tartozó hatékonysági mutatót:

$$s_i = \frac{N_{g,i}}{K_i + N_{g,i}} \tag{5.9}$$

A hatékonysági mutató segítségével előállítható most már a teljes merevítőrendszer (és a helyettesítő tartó) hatékony nyírási merevsége:

$$K_e = \sum_{i=1}^{f} K_i s_i \tag{5.10}$$

A teljes rendszer hatékonysági mutatója (a nyírási merevség vonatkozásában):

$$s = \frac{K_e}{K} \tag{5.11}$$

ahol K a teljes rendszer eredeti nyírási merevsége [(5.5) képlet].

A merevítőrendszer (és a helyettesítő tartó) másik jellemző merevsége a lokális hajlítási merevség. A keretek oszlopai, a nyílásokkal áttört falak falsávjai, a tömör falak és a magok mind rendelkeznek hajlítási merevséggel és ezeket a szerkezeti elemeket a keretgerendák és a födémek együttdolgoztatják. A teljes rendszer lokális hajlítási merevségét így a H magasságú függőleges elemek hajlítási merevségeinek összegzésével kapjuk meg:

$$EI = E_c I_c + E_w I_w = E_c \sum_{i=1}^{f} I_{c,i} r_i + E_w \sum_{i=1}^{m} I_{w,i} \tag{5.12}$$

ahol

E_w a falak és magok rugalmassági modulusa,
$I_{w,i}$ az i-edik fal/mag tehetetlenségi nyomatéka.

Amikor a rendszer keretekkel és falakkal/magokkal is rendelkezik, akkor a keretoszlopok részesedése [az (5.12) összefüggés első tagja] rendszerint igen kicsi a falak/magok részesedéséhez képest és így ezt a részt a gyakorlatban el is szokták hanyagolni. Az (5.12) képlet ekkor megmaradó második tagja azonos a frekvenciaszámításnál alkalmazott hajlítási merevséggel.

Az (5.12) összefüggésben a keretoszlopok tehetetlenségi nyomatékát az r_i redukciós tényezővel módosítottuk. Erre azért volt szükség, hogy elkerüljük az oszlopok tehetetlenségi nyomatékának „túlértékelését", mivel azok szerepelnek a K_e hatékony nyírási merevség összefüggésében is [v.ö. (5.3) és (5.10) összefüggésekkel].

A fenti hajlítási merevséggel a keretekből, nyílásokkal áttört falakból, tömör falakból és magokból álló rendszer lokális hajlítási kritikus terhe már meghatározható:

$$N_l = N_f + N_w = \sum_{i=1}^{f} N_{f,i} r_i + \sum_{i=1}^{m} N_{w,i} = \frac{7.837 r_s}{H^2}\left(E_c \sum_{i=1}^{f} I_{c,i} r_i + E_w \sum_{i=1}^{m} I_{w,i} \right) = \frac{7.837 r_s EI}{H^2} \qquad (5.13)$$

A rendszert jellemző két merevség (EI és K_e) és a két rész kritikus teher (N_l és K_e) ismeretében – K_e definíció szerint merevség és kritikus teher is – egy igen egyszerű közelítő képlet adható meg a rendszer kritikus terhére. A Southwell tétel értelmében csak össze kell adni a két rész kritikus terhet:

$$N_{cr} = N_l + K_e \qquad (5.14)$$

A képlet szépségét az egyszerűsége adja és az a tény hogy a biztonság javára közelít. Nem veszi viszont figyelembe a lokális hajlítási és nyírási módok között létrejövő egymásrahatást.

A pontos megoldás előállítása során ezt az egymásrahatást is figyelembe fogjuk venni. Tekintsük az EI és K_e merevségekkel jellemzett, alul befogott és felül szabad végű helyettesítő tartót (5.1/b ábra). A tartó egy elemi szakaszának egyensúlyát vizsgálva az

$$r_s EI y''''(z) + \left[\left(N(z) - K_e \right) y'(z) \right]' = 0 \qquad (5.15)$$

differenciálegyenlethez jutunk, ahol $N(z) = qz$ a függőleges teher értéke z-nél, abban a koordinátarendszerben amelynek a kezdőpontja a tartó tetőpontjához rögzítve helyezkedik el. A peremfeltételek ebben a koordinátarendszerben:

$$y(0) = 0\,, \qquad y'(H) = 0$$

és

$$y''(0) = 0\,, \qquad y'''(H) = 0$$

Az (5.15) típusú sajátértékfeladat viszonylag egyszerűen megoldható az általánosított hatványsoros megoldással. (Az általánosított hatványsoros megoldási módszer részletes ismertetése a [17]-ben megtalálható.) A számítás végrehajtása után az

$$\alpha = \frac{N_{cr}}{N_l} \qquad (5.16)$$

kritikus teherparaméter és a

$$\beta = \frac{K_e}{N_l} \tag{5.17}$$

rész kritikus teher arány bevezetésével a helyettesítő tartó síkbeli kihajlását jellemző kritikus teher az

$$N_{cr} = (\alpha - \beta) N_l + K_e$$

formában adható meg. Az α kritikus teherparaméter értékeit az 5.2 táblázat tartalmazza a β rész kritikus teher arány függvényében. (Az 5.2 táblázat az 5.3 pontban tárgyalt tiszta elcsavarodó kihajlás α_φ kritikus teherparaméterét is tartalmazza.)

5.2 táblázat. Kritikus teherparaméter α és α_φ a rész kritikus teher arány β és β_φ függvényében.

β vagy β_φ	α vagy α_φ	β vagy β_φ	α vagy α_φ	β vagy β_φ	α vagy α_φ	β vagy β_φ	α vagy α_φ
0.0000	1.0000	0.05	1.1487	2	5.624	80	106.44
0.0005	1.0015	0.06	1.1782	3	7.427	90	118.38
0.001	1.0030	0.07	1.2075	4	9.100	100	130.25
0.002	1.0060	0.08	1.2367	5	10.697	200	246.24
0.003	1.0090	0.09	1.2659	6	12.241	300	359.51
0.004	1.0120	0.10	1.2949	7	13.749	400	471.29
0.005	1.0150	0.20	1.5798	8	15.227	500	582.06
0.006	1.0180	0.30	1.8556	9	16.682	1000	1127.5
0.007	1.0210	0.40	2.1226	10	18.118	2000	2199.1
0.008	1.0240	0.50	2.3817	20	31.820	5000	5360.5
0.009	1.0270	0.60	2.6333	30	44.862	10000	10567
0.010	1.0300	0.70	2.8780	40	57.545	100000	102579
0.020	1.0598	0.80	3.1163	50	69.991	1000000	1011864
0.030	1.0896	0.90	3.3488	60	82.265	2000000	2018802
0.040	1.1192	1.00	3.5758	70	94.405	>2000000	β vagy β_φ

Mielőtt azonban ezt a megoldást az egész merevítőrendszer síkbeli stabilitásvizsgálatára alkalmaznánk, egy kis módosítást kell végrehajtani. A megoldás első tagja tartalmazza a keretoszlopok, a nyílásokkal áttört falak falszakaszai, a tömör falak és a magok hajlítási merevségéhez tartozó kritikus terhet *és* tartalmazza a hajlítási és nyírási alakváltozás közötti egymásrahatás következtében létrejövő kritikus teher növekedést is. Ez utóbbi rész nagysága valójában korlátozott, mégpedig a nyírási merevség hatékonysága miatt. A nyírási merevség hatékonysága pedig rendszerint 100%-nál kisebb [lásd az (5.11) képletet, amely szerint $s \leq 1$]. Ebből az következik, hogy a két jelenséget el kell különíteni – ez az ($N_l - N_l$) zérusértékű tag jobboldalhoz történő hozzáadása segítségével történhet – és az egymásrahatással kapcsolatos részt a hatékonysági mutatóval meg kell szorozni. Ekképpen eljárva a kritikus teher értékére

az

$$N_{cr} = N_l + K_e + (\alpha - \beta - 1)sN_l \tag{5.18}$$

összefüggést kapjuk.

Az (5.18) képlet jobboldalán az első két tag a lokális hajlítási és a hatékony nyírási merevséghez tartozó kritikus terheket jelöli – lásd az (5.14) közelítő megoldást – míg a harmadik tag azt a kritikus teher növekményt adja meg, amely a két különböző típusú alakváltozás egymásrahatása következtében jön létre. Ugyanúgy mint a vízszintes terhekkel terhelt épületek esetében, az egymásrahatás előnyös: ebben az esetben növeli a kritikus teher értékét. Az 5.2 táblázat adatainak kiértékelése azt mutatja, hogy a maximális növekedés a β = 2.1 értékhez tartozik és értéke 87%.

A most bemutatott eljárás akkor is alkalmazható, amikor a szerkezetet koncentrált tetőponti erő terheli – pl. az épület tetején többletterhet okozó víztartály vagy úszómedence van. A levezetés eredményének tanúsága szerint ekkor a vonatkozó N_l és N_g kritikus terheket a megfelelő helyeken ki kell cserélni az Euler-féle értékekre. Érdekes megfigyelni, hogy a koncentrált tetőteher esetében az egymásrahatás nem növeli a szerkezet kritikus terhének értékét; az (5.18) összefüggés zárójeles tagja zérussá válik így az (5.14) közelítő összefüggés – a megfelelő Euler terhekkel – a pontos kritikus terhet adja. Az 5.5 pont részletesebben foglalkozik ezzel az esettel.

Az épület oldalirányú kihajlást végezhet a két tehetetlenségi fősíkban és mindkét kritikus terhet meg kell határozni. Ez az (5.18) összefüggés segítségével történhet, ahol az N_l, K_e, α, β és s értékeit a megfelelő (pl. x vagy y) irányban lévő merevítőelemek figyelembevételével kell meghatározni.

5.2 Síkbeli kihajlás: speciális merevítőrendszerek

Ebben a pontban néhány – részben idealizált – speciális esettel foglalkozunk. A kereteket és nyílásokkal áttört falakat az egyszerűség kedvéért keretnek jelöljük meg, míg amikor falakról beszélünk akkor a megnevezés a tömör falak mellett a magokat is tartalmazza.

5.2.1 Csak tömör falakat és magokat tartalmazó merevítőrendszer

Ebben az esetben a merevítőrendszer nem rendelkezik a fejezet terminológiája szerinti nyírási merevséggel. Ennek megfelelően K = 0, β = 0 és α = 1. Mivel az (5.13) képletben N_f = 0, az (5.18) képlet egyszerűsödik:

$$N_{cr} = N_l = N_w = \frac{7.837 r_s E_w I_w}{H^2} \tag{5.19}$$

Összhangban korábbi tanulmányainkkal [17], ez a jól ismert megoldás a csak hajlítási merevséggel rendelkező merevítőrendszerek esetében.

5.2.2 Csak kereteket tartalmazó merevítőrendszer

Az (5.13) és (5.18) képletek érvényesek, de az $E_w I_w = 0$ miatt a kritikus teher számítása némileg egyszerűsödik.

Ha a keretgerenda/keretoszlop merevségarány nagyon nagy, akkor a számítás tovább egyszerűsödik. Mivel $K_b >> K_c$, érvényes hogy $r_i \approx 0$, $K \approx K_c$, $s_i \approx 1$, $K_e \approx K_c$ és $s \approx 1$. Ezen összefüggések érvényesítésével a kritikus teher képlete az

$$N_{cr} = \sum_{i=1}^{f} K_{c,i} = \sum_{i=1}^{f} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\pi^2 E_c I_{c,j}}{h^2} \right) \tag{5.20}$$

alakra egyszerűsödik, ami azt mutatja, hogy az épület emeletmagas kilendülés következtében veszíti el stabilitását (ami az egész épület szempontjából lokális nyírási alakváltozást jelent). A stabilitásvesztés ellen az emeletmagas oszlopok dolgoznak. Az (5.20) képlet abban a gyakorlati esetben is jól alkalmazható, amikor valamely szinten merevségvesztés miatt – például több oszlop elhagyása miatt – az épület „érzékenyebbé válik” helyi stabilitásvesztésre.

5.2.3 Falak és nagy gerenda/oszlop merevségarányú keretek

A falakból és nagy gerenda/oszlop merevségarányú keretekből álló merevítőrendszereknél három alesetet különböztethetünk meg.

Tételezzük fel először, hogy az oszlopok tengelyirányú alakváltozása elhanyagolható. Az ide tartozó gyakorlati eset az alacsony épületek kategóriája. Ebben az esetben érvényes, hogy $K_b >> K_c$ és $N_g \approx \infty$. Ennek megfelelően $r_i \approx 0$, $K \approx K_c$, $s_i \approx 1$, $K_e \approx K_c$ és $s \approx 1$, továbbá $\beta \approx K_c/N_w > 0$ és $\alpha > 1$. A kritikus teher így

$$N_{cr} = (\alpha - \beta) N_w + K_c = \alpha N_w = \alpha \frac{7.837 E_w I_w r_s}{H^2} \tag{5.21}$$

Ez az összefüggés azt mutatja, hogy a rendszer kritikus terhét alapvetően a tömör falak és magok szolgáltatják a hajlítási merevségük révén. A falak/magok hajlítási alakváltozása és a (merev gerendákkal rendelkező) keretek nyírási alakváltozása között létrejövő egymásrahatás viszont „jótékonyan” befolyásolja a helyzetet: az 1-nél nagyobb α tényező növeli a kritikus terhet. A nyírási merevség nagyságát a két összetevő közül a kisebbik értéke (az oszlopmerevség) határozza meg.

A következő esethez tételezzük fel, hogy az oszlopok tengelyirányú alakváltozása nem hanyagolható el. Általában középmagas épületek esnek ebbe a kategóriába. Ebben az esetben $K_b >> K_c$ és $N_g \neq \infty$. Ennek megfelelően $r_i \approx 0$, $K \approx K_c$, $s_i < 1$, $K_e \approx \sum K_{c,i} s_i < K_c$ és $s < 1$, továbbá $\beta \approx sK_c/N_w > 0$ és $\alpha > 1$. A kritikus teher így:

$$N_{cr} = N_l + sK_c + (\alpha - \beta - 1) sN_l = [s(\alpha - \beta - 1) + 1 + \beta] \frac{7.837 E_w I_w r_s}{H^2} \tag{5.22}$$

Mivel az $[s(\alpha - \beta - 1) + 1 + \beta] > 1$ egyenlőtlenség mindig érvényes, a keret nyírási merevségének köszönhető kritikus teher növekedés mindig bekövetkezik és a rendszer kritikus terhe itt is nagyobb mint a falak/magok hajlítási merevségéhez tartozó kritikus teher. A különbséget azonban itt jóval nehezebb megbecsülni mint az előző esetben. Az oszlopok tengelyirányú alakváltozása – az s tényezőn keresztül – tovább árnyalja a képet (csökkentve az egymásrahatás jótékony közreműködését).

Nézzük meg végül azt az esetet, amikor az oszlopok tengelyirányú alakváltozásának nagy a hatása. Ide általában viszonylag kis oszlopkeresztmetszettel rendelkező épületek és középmagas/magas épületek tartoznak. Ebben az esetben $K_b >> K_c$ és $N_g \approx 0$. Ennek megfelelően $r_i \approx 0$, $K \approx K_c$, $s_i \approx 0$, $K_e \approx 0$ és $s \approx 0$, továbbá $\beta \approx 0$ és $\alpha \approx 1$. A kritikus teher így

$$N_{cr} = [s(\alpha - \beta) + 1 - s] N_w = N_w = \frac{7.837 E_w I_w r_s}{H^2} \tag{5.23}$$

Az oszlopok nagymértékű tengelyirányú alakváltozása gyakorlatilag „felőrli” a rendszer

nyírási merevségét és a falak és magok gyakorlatilag egymástól független (de a födémekkel együttműködésre kényszerített módon) saját hajlítási merevségeik révén fejtik ki stabilizáló hatásukat. Érdemes az 5.2.1 pontban tárgyalt esetet, illetve az (5.19) képletet összehasonlítani ezzel az esettel.

5.2.4 Falak és nagy oszlop/gerenda merevségarányú keretek

A falakból és nagy oszlop/gerenda merevségarányú keretekből álló merevítőrendszereknél is három alesetet különböztethetünk meg.

Tételezzük fel először, hogy az oszlopok tengelyirányú alakváltozásának hatása elhanyagolható. Gyakorlati eset: alacsony és középmagas épületek.

Ebben az esetben érvényes, hogy $K_b << K_c$ és $N_g \to \infty$. Ennek megfelelően $r_i \to 1$, $K \to K_b$, $s_i \to 1$, $K_e \to K_b$ és $s \to 1$, továbbá $\beta \approx K_b/N_l > 0$ és $\alpha > 1$. A kritikus teher így

$$N_{cr} = (\alpha - \beta)N_l + K_b = \alpha(N_f + N_w) = \alpha \frac{7.837 r_s (E_c I_c + E_w I_w)}{H^2} \tag{5.24}$$

Az (5.24) képlet az mutatja, hogy a kritikus teher alapvetően a keretoszlopok/falsávok és a tömör falak hajlítási merevségéből származtatható (ahol várhatóan az utóbbi a domináló tényező). Az értéket (valószínűleg kismértékben) növeli a keretek nyírási alakváltozása és a falak/magok hajlítási alakváltozása között létrejövő egymásrahatás (az $\alpha > 1$ következtében). A nyírási merevség értékét a két összetevő közül a kisebbik értéke (a gerendamerevség) határozza meg.

A következő esethez tételezzük fel, hogy az oszlopok tengelyirányú alakváltozása nem hanyagolható el. Ebbe a kategóriába középmagas épületek eshetnek. Ebben az esetben $K_b << K_c$ és $N_g \neq \infty$. Ennek megfelelően $r_i \to 1$, $K \to K_b$, $s_i < 1$, $K_e \approx \sum K_{b,i} s_i < K_b$ és $s < 1$, továbbá $\beta \approx sK_b/N_l > 0$ és $\alpha > 1$. A kritikus teher így

$$N_{cr} = [s(\alpha - \beta - 1) + 1 + \beta] \frac{7.837 r_s (E_c I_c + E_w I_w)}{H^2} \tag{5.25}$$

Mivel a $[s(\alpha - \beta - 1) + 1 + \beta] > 1$ egyenlőtlenség mindig érvényes, a keret nyírási merevségének köszönhető kritikus teher növekedés mindig bekövetkezik és a rendszer kritikus terhe itt is nagyobb mint a falak/magok/keretoszlopok/falsávok hajlítási merevségéhez tartozó kritikus teher. A különbséget azonban itt jóval nehezebb megbecsülni mint az előző esetben. Az oszlopok tengelyirányú alakváltozása – az s tényezőn keresztül – tovább árnyalja a képet (csökkentve az egymásrahatás jótékony közreműködését). A keretoszlopok hatása a falakhoz/magokhoz képest rendszerint elenyésző.

Tételezzük fel végül, hogy az oszlopok tengelyirányú alakváltozásának nagy a hatása. Gyakorlati eset: magas, nagy globális karcsúsággal rendelkező szerkezetek. Ebben az esetben $K_b << K_c$ és $N_g \to 0$. Ennek megfelelően $r_i \to 1$, $K \to K_b$, $s_i \to 0$, $K_e \to 0$ és $s \to 0$, továbbá $\beta \to 0$ és $\alpha \to 1$. A kritikus teher így

$$N_{cr} = [s(\alpha - \beta) + 1 - s](N_f + N_w) = \frac{7.837 r_s (E_c I_c + E_w I_w)}{H^2} \tag{5.26}$$

Az oszlopok nagymértékű tengelyirányú alakváltozása gyakorlatilag „felőrli” a rendszer nyírási merevségét és a falak és magok gyakorlatilag egymástól független (de a födémekkel együttműködésre kényszerített módon) saját hajlítási merevségei révén fejtik ki stabilizáló hatásukat.

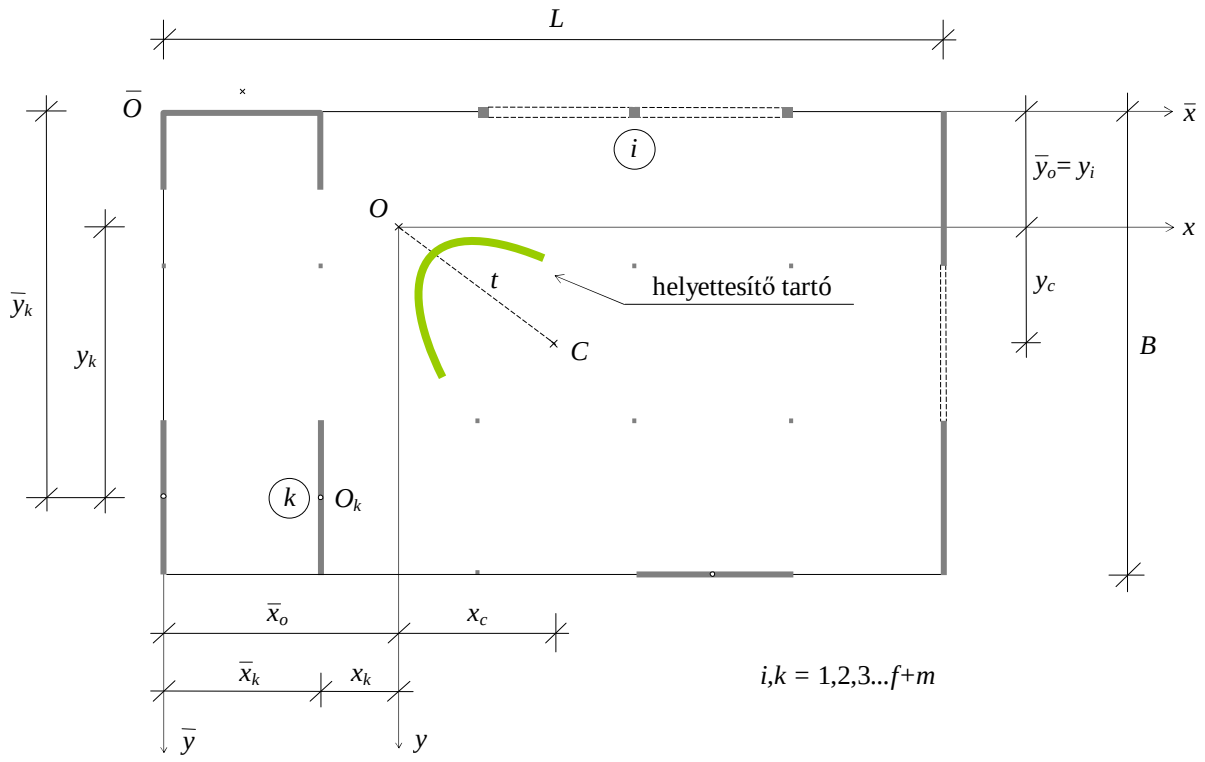
5.3 Tiszta elcsavarodó kihajlás

Bár a csavarási probléma megfogalmazása és megoldása hagyományos eszközökkel jóval komplikáltabb eljáráshoz vezet mint a síkbeli problémáé, viszonylag egyszerű módon juthatunk megoldáshoz, ha alkalmazzuk a vékonyfalú rudak elméletében jól ismert analógiát, amely fennáll a síkbeli és a csavarási feladat között. (Ugyanezt az analógiát alkalmaztuk a 3.2 és 4.2 pontokban az elcsavarodás vizsgálatához és a dinamikai feladat megoldásához.) Az analógia szerint az eltolódások, a hajlító nyomatékok és nyíróerők megfelelnek az elcsavarodásoknak, öblösödési nyomatékoknak és tiszta csavarási nyomatékoknak.

A tiszta elcsavarodó kihajlás vizsgálatához az 5.3 ábrán vázolt, a teljes merevítőrendszert pótló, vékonyfalú, nyitott keresztmetszetű helyettesítő tartót használjuk. A helyettesítő tartó a merevítőrendszer nyírásközéppontjában van és EI_ω öblösödési csavarási és $(GJ)_e$ hatékony Saint-Venant csavarási merevséggel rendelkezik. A helyettesítő tartó egy elemi szakaszának egyensúlyát vizsgálva előállítható a tiszta elcsavarodó kihajlás differenciálegyenlete:

$$\frac{r_s EI_\omega}{i_p^2}\varphi''''(z)+\left[\left(N(z)-\frac{(GJ)_e}{i_p^2}\right)\varphi'(z)\right]'=0 \qquad (5.27)$$

ahol $N(z) = qz$ a függőleges teher és i_p az inerciasugár.



5.3 ábra. Merevítőrendszer a vékonyfalú, nyitott keresztmetszetű helyettesítő tartóval.

A helyettesítő tartó tetőpontjához rögzített kezdőpontú koordinátarendszerben (5.4/d ábra) a feladathoz a következő peremfeltételek tartoznak:

$$\varphi(0)=0\,, \qquad \varphi'(H)=0$$

és

$$\varphi''(0) = 0\,, \qquad \varphi'''(H) = 0$$

Az (5.27) sajátértékfeladat a peremfeltételeivel együtt analóg az (5.15) sajátértékfeladattal. Az (5.27) differenciálegyenletben szereplő EI_ω öblösödési csavarási merevség és $(GJ)_e$ hatékony Saint-Venant csavarási merevség (osztva i_p^2-el) megfelel az (5.15) differenciálegyenletben szereplő EI hajlítómerevségnek és K_e hatékony nyírási merevségnek.

A tiszta elcsavarodás részletes vizsgálata (pl. [4]-ben és [17]-ben) rámutat arra a fontos tényre, hogy az i_p inerciasugár az épület függőleges terhével – és annak megoszlásával – kapcsolatos. Szabályos, téglalap alakú alaprajzzal rendelkező és a födémeken egyenletesen megoszló teherrel terhelt épületek esetében az inerciasugár értékére igen egyszerű összefüggés adható meg:

$$i_p = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} \tag{5.28}$$

Hasonló volt a helyzet a dinamikai vizsgálat során a 4.2 pontban, amikor a függőleges tehernek az épület tömege felelt meg.

Az (5.28) képletben L és B az alaprajz két mérete és t az alaprajz C geometriai középpontja és a merevítőrendszer O nyírásközéppontja közötti távolság (5.3 ábra). A téglalapnál összetettebb alaprajz és/vagy az egyenletestől eltérő tehereloszlás esetében az eredeti levezetéshez kell visszatérni, amely ekkor a fentinél bonyolultabb képletekhez vezet [4].

Igen fontos rámutatni arra, hogy a helyettesítő tartó többi jellemzőjétől (5.4/b ábra) eltérő módon az i_p inerciasugár az épület alaprajzának geometriai jellemzőitől függ (nem pedig a merevítőrendszer jellemzőitől).

Ahhoz, hogy az analógia kihasználásával felhasználhassuk az (5.15) egyenlet megoldását, elő kell először állítani a megfelelő merevségeket. A merevítőrendszer hatékony Saint-Venant csavarási merevsége két forrásból származhat: a tömör falak és magok saját Saint-Venant csavarási merevségéből és a keretek és nyílásokkal áttört falak hatékony nyírási merevségéhez tartozó Saint-Venant csavarási merevségből:

$$(GJ)_e = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f} \left((K_{e,i})_x y_i^2 + (K_{e,i})_y x_i^2 \right) \tag{5.29}$$

A fenti képletben:

J_k	a k-adik fal/mag Saint-Venant tehetetlenségi nyomatéka,
G	a falak és magok nyírási rugalmassági modulusa,
$(K_{e,i})_x$, $(K_{e,i})_y$	az i-edik keret/nyílásokkal áttört fal hatékony nyírási merevsége x, illetve y irányban,
x_i, y_i	az i-edik keret/nyílásokkal áttört fal merőleges távolsága a nyírásközépponttól az x, illetve y irányban.

Amikor a merevítőrendszer kereteket és/vagy nyílásokkal áttört falakat, tömör falakat és nyitott keresztmetszetű magokat tartalmaz, akkor az (5.29) képlet első tagja rendszerint elhanyagolhatóan kicsi a keretek/nyílásokkal áttört falak hozzájárulásához képest.

Figyelmet érdemel az (5.29) és a (4.21) összefüggések hasonlósága. A Saint-Venant csavarási merevség két képlete formailag azonos, de tartalmilag nem. Ezt a K_e hatékony nyírási merevség megfelelő képleteinek összehasonlításával könnyen beláthatjuk.

A rendszer öblösödési csavarási merevsége három forrásból származhat: a magok saját

öblösödési merevségéből, a tömör falak és magok hajlítási merevségéhez és a keretoszlopok és falszakaszok hajlítási merevségéhez tartozó öblösödési csavarási merevségből:

$$EI_\omega = E_w \sum_{k=1}^{m} \left(I_{\omega,k} + (I_{w,k})_x y_k^2 + (I_{w,k})_y x_k^2 \right) + E_c \sum_{i=1}^{f} \left((I_{c,i} r_i)_x y_i^2 + (I_{c,i} r_i)_y x_i^2 \right) \tag{5.30}$$

A fenti képletben:

$I_{\omega,k}$	a *k*-adik mag öblösödési tehetetlenségi nyomatéka,
$E_w(I_{w,k})_x$, $E_w(I_{w,k})_y$	a *k*-adik fal/mag hajlítási merevsége *x*, illetve *y* irányban,
$E_c(I_{c,i}r_i)_x$, $E_c(I_{c,i}r_i)_y$	az *i*-edik keret/nyílásokkal áttört fal oszlopainak/falsávjainak hajlítási merevsége *x*, illetve *y* irányban,
x_k, y_k	a *k*-adik fal/mag merőleges távolsága a nyírásközépponttól *x*, illetve *y* irányban,
x_i, y_i	az *i*-edik keret/nyílásokkal áttört fal merőleges távolsága a nyírás-középponttól *x*, illetve *y* irányban.

Egy jól kialakított merevítőrendszer esetében az öblösödési csavarási merevség nagy részét a tömör falak és magok biztosítják hajlítási merevségük révén (feltéve hogy merőleges távolságuk a nyírásközépponttól elegendően nagy). A magok hozzájárulása az öblösödési csavarási merevséghez a saját öblösödési merevségük révén [a (5.30) képlet első tagja] általában jóval kisebb és a keretoszlopok hatása (utolsó két tag) rendszerint elhanyagolhatóan kicsi.

Merevítőmagok csavarási jellemzőinek meghatározásával a 2.7.1 pont foglalkozik. A leggyakrabban alkalmazott magok öblösödési tehetetlenségi nyomatékának meghatározására a 2.4 táblázat ad zárt képleteket. A táblázat a *J* és I_ω csavarási tehetetlenségi nyomatékok képletei mellett zárt képleteket ad a magok saját nyírásközéppontja helyének (*e*) meghatározásához is. Ez azért fontos, mert amikor egy magot elhelyezünk a merevítőrendszerben és megadjuk a helyzetét, akkor az x_k és y_k koordináták a magok saját nyírásközéppontjára kell hogy vonatkozzanak. Néhány összetettebb mag csavarási jellemzőit tartalmazza a [17] irodalom 8. fejezete. Speciális (szabálytalan) alakú merevítőmagok esetében nem léteznek zárt alakú megoldások az öblösödési tehetetlenségi nyomaték meghatározására. Ilyenkor valamely kereskedelmi forgalomban elérhető programot alkalmazhatunk.

A fenti merevségek ismeretében alkalmazható már a hajlítás-csavarás analógia, melynek segítségével az (5.18) összefüggés alapján felírható a tiszta elcsavarodó kihajlás kritikus terhe:

$$N_{cr,\varphi} = N_\omega + N_t + (\alpha_\varphi - \beta_\varphi - 1) s_\varphi N_\omega \tag{5.31}$$

A fenti összefüggésben két rész kritikus teher szerepel: az öblösödési csavarási kritikus teher

$$N_\omega = \frac{7.837 r_s EI_\omega}{i_p^2 H^2} \tag{5.32}$$

és a Saint-Venant csavarási kritikus teher

$$N_t = \frac{(GJ)_e}{i_p^2} \tag{5.33}$$

Érdekes megfigyelni, hogy a Saint-Venant csavarási kritikus teher értéke nem függ a magasságtól.

A Saint-Venant csavarási merevség hatékonyságát az

$$s_\varphi = \frac{(GJ)_e}{(GJ)} \tag{5.34}$$

hatékonysági tényező jellemzi, ahol

$$(GJ) = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f} \left((K_i)_x y_i^2 + (K_i)_y x_i^2 \right) \tag{5.35}$$

az eredeti Saint-Venant csavarási merevség.

A kritikus teherparaméter α_φ értékeit az 5.2 táblázat tartalmazza a

$$\beta_\varphi = \frac{N_t}{N_\omega} \tag{5.36}$$

tényező függvényében.

Az analógia felhasználásával az 5.2 pontban részletezett síkbeli speciális esetekhez hasonló módon a tiszta csavarási esetek speciális esetei is tárgyalhatók.

Abban a speciális esetben amikor az épületet egyetlen öblösödési csavarási merevséggel nem rendelkező mag merevíti – például egy zárt vagy részben zárt U-mag – a fenti eljárás nem használható, mert az (5.36) képlet nevezője zérussá válik. Ezzel az esettel a 2.7.3 pont foglalkozik.

5.4 Az alapesetek kombinálódása: elcsavarodó kihajlás

Amikor a merevítőrendszer nyírásközéppontja és a függőleges teher súlypontja egybeesik, az $N_{cr,x}$, $N_{cr,y}$ és $N_{cr,\varphi}$ három alap kritikus teher független egymástól és a három közül a legkisebb az épület kritikus terhe.

Amikor az elrendezés nem kétszeresen szimmetrikus és a nyírásközéppont nem esik egybe az alaprajz geometriai középpontjával, két dolgot kell figyelembe venni. A tiszta csavarási kritikus teher meghatározásához először a nyírásközéppontot kell meghatározni. (A síkbeli kihajlások kritikus terhének meghatározásakor erre nincs szükség.) Mivel a két síkbeli és a tiszta elcsavarodó kihajlás kombinálódik (5.4/d ábra), ezután a három alap kritikus teher kombinálódásával kell foglalkozni.

A csak hajlítási alakváltozást végző merevítőrendszerek esetében a nyírásközéppont meghatározása az egyes merevítőelemek hajlítási merevsége segítségével történik [(3.49) összefüggések]. Vegyes merevítőrendszerek esetében viszont a kereteknek és nyílásokkal áttört falaknak jelentős nyírási merevsége is lehet. A viselkedés ekkor meglehetősen bonyolult és a nyírásközéppont helye a magasság mentén is változhat. Erre az esetre nem ismert zárt alakú megoldás, de jó közelítésként alkalmazható az következő eljárás.

Mivel egy merevítőelem síkbeli kritikus terhe mind a hajlítási mind pedig a nyírási merevség hatását figyelembe veszi, a nyírásközéppont meghatározása történhet ezen kritikus terhek segítségével:

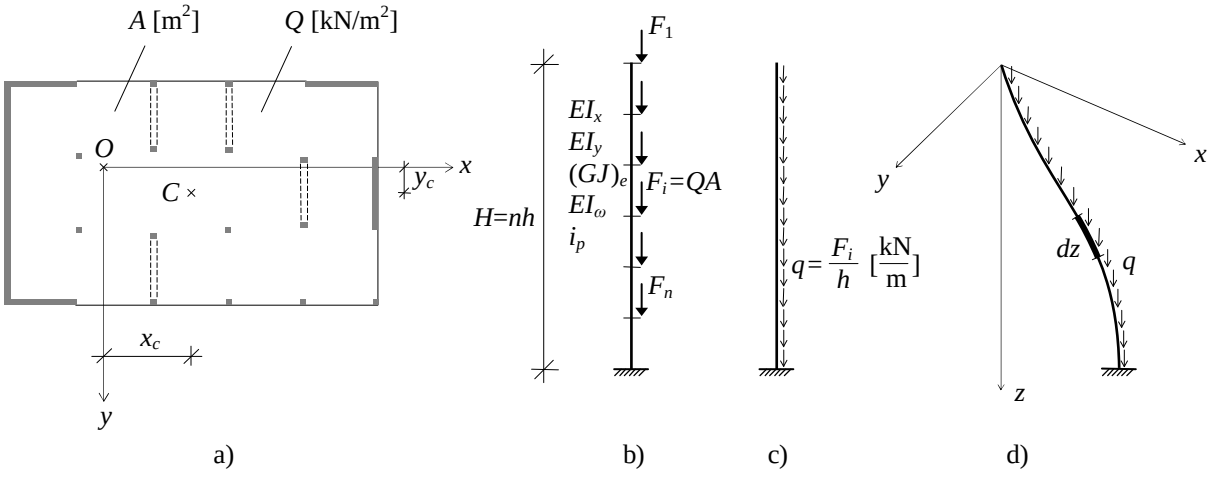
$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{f+m} N_{y,i}\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{f+m} N_{y,i}} \qquad \text{és} \qquad \bar{y}_o = \frac{\sum_{i=1}^{f+m} N_{x,i}\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{f+m} N_{x,i}} \tag{5.37}$$

ahol $\bar{x}_i$ és $\bar{y}_i$ a keretek, nyílásokkal áttört falak, tömör falak és magok merőleges távolsága az $\bar{y}$ és $\bar{x}$ tengelyektől (5.3 ábra), f és m pedig a keretek és nyílásokkal áttört falak, illetve a tömör falak és magok száma. Az (5.37) képletekben szereplő síkbeli kritikus terhek meghatározása történhet az (5.18) összefüggés segítségével.

Amikor a merevítőrendszer csak tömör falakat és magokat tartalmaz, az (5.37) képletek egyszerűsödnek és a nyírásközéppont meghatározása a vonatkozó hajlítási merevségek segítségével történhet:

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{m} I_{x,i}\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} I_{x,i}} \qquad \text{és} \qquad \bar{y}_o = \frac{\sum_{i=1}^{m} I_{y,i}\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{m} I_{y,i}} \tag{5.38}$$

Az (5.38) képletek használhatók a frekvencia- és alakváltozás számításhoz is, ha a merevítőrendszer csak tömör falakat és magokat tartalmaz.



5.4 ábra. Elcsavarodó kihajlás. a) alaprajz, b) helyettesítő tartó a jellemző merevségekkel és szintenkénti koncentrált teherrel, c) helyettesítő tartó egyenletesen megoszló teherrel, d) az elméleti modell.

A nyírásközéppont helyének ismeretében az (5.29) és (5.30) képletek segítségével a Saint-Venant és öblösödési csavarási merevségek már meghatározhatók abban az *x*-*y* koordináta-rendszerben amelynek kezdőpontja a nyírásközéppontban van. A tiszta elcsavarodó kihajlás kritikus terhét az (5.31) képlet adja.

Aszimmetrikus elrendezésű merevítőrendszer esetén a két síkbeli és a tiszta elcsavarodó kihajlás egyszerre jön létre. A helyzet nagyon hasonló a frekvenciavizsgálatnál tárgyalt háromszoros kombinálódás esetéhez és az eljárás is az ott elmondottakat követi.

Két lehetőség áll rendelkezésre: a kombinálódást figyelembe vehetjük pontosan vagy közelítően. A pontos eljárás a három kombinálódási lehetőséget automatikusan figyelembe veszi. Ezek a kombinálódási lehetőségek a hármas és a kettős kombinálódás, illetve az az eset, amikor nincs kombinálódás. A pontos eljárást mutatjuk be először.

A kritikus terhet az

$$N^3 + b_2 N^2 + b_1 N - b_0 = 0 \tag{5.39}$$

harmadfokú egyenlet legkisebb gyökeként kapjuk meg. Abban az esetben amikor az épület terhe a födémeken egyenletesen megoszló teher, az (5.39) egyenlet megoldása – a kombinálódás szempontjából – a pontos megoldást szolgáltatja.

Az egyenletben szereplő együtthatók

$$b_0 = \frac{N_{cr,x} N_{cr,y} N_{cr,\varphi}}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2}, \qquad b_1 = \frac{N_{cr,x} N_{cr,y} + N_{cr,\varphi} N_{cr,x} + N_{cr,\varphi} N_{cr,y}}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2}$$

$$b_2 = \frac{N_{cr,x} \tau_x^2 + N_{cr,y} \tau_y^2 - N_{cr,x} - N_{cr,y} - N_{cr,\varphi}}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2} \tag{5.40}$$

ahol τ_x és τ_y a merevítőrendszer külpontosságát definiáló paraméterek:

$$\tau_x = \frac{x_c}{i_p} \qquad \text{és} \qquad \tau_y = \frac{y_c}{i_p} \tag{5.41}$$

Az i_p inerciasugár az (5.28) képlet szerint számítható, az x_c és y_c pedig a geometriai középpont koordinátái:

$$x_c = \frac{L}{2} - \bar{x}_o \qquad \text{és} \qquad y_c = \frac{B}{2} - \bar{y}_o \tag{5.42}$$

A kombinálódással kapcsolatban bizonyítható, hogy a kombinálódás minden esetben csökkenti a kritikus terhet, vagyis az eredő kritikus teher a kombinálódó alap kritikus terhek kisebbikénél is kisebb.

Ha az alap kritikus terhek kombinálódására egy gyors megoldást szeretnénk, vagy nem áll rendelkezésre eljárás a harmadfokú egyenlet megoldására, akkor az alábbi – a Föppl-Papkovics képletre épülő – közelítő eljárás használható. (Különösen előnyös a közelítő eljárás használata abban az esetben, amikor a kombinálódó alap kritikus terhek egyike sokkal kisebb mint a másik (kettő); ekkor ugyanis a közelítés mértéke kicsi.)

Ha a merevítőrendszer elrendezése aszimmetrikus és a függőleges terhek eredője nem esik rá a merevítőrendszer egyik tehetetlenségi főtengelyére sem, hármas kombinálódás következik be. Az épület eredő kritikus terhe az

$$N_{cr} = \left(\frac{1}{N_{cr,x}} + \frac{1}{N_{cr,y}} + \frac{1}{N_{cr,\varphi}} \right)^{-1} \tag{5.43}$$

összefüggésből számítható ki.

Egyszeresen szimmetrikus esetben amikor a függőleges teher eredője ráesik a merevítőrendszer egyik tehetetlenségi főtengelyére, mondjuk az *x* tengelyre, akkor két dolog történhet. Az épület vagy az *x*-*z* síkban veszti el stabilitását (ekkor $N_{cr,x}$ a kritikus teher), vagy *y*-*z* síkú kihajlás következik be ($N_{cr,y}$), de ez a kihajlás kombinálódik a *z* tengely körüli tiszta elcsavarodó kihajlással ($N_{cr,\varphi}$). A kombinált kritikus teher:

$$N_{y\varphi} = \left(\frac{1}{N_{cr,y}} + \frac{1}{N_{cr,\varphi}} \right)^{-1} \tag{5.44}$$

Az épület kritikus terhe a két kritikus teher közül a kisebb:

$$N_{cr} = \min\ (N_{cr,x}, N_{y\varphi}) \tag{5.45}$$

Ha az elrendezés kétszeresen szimmetrikus és a merevítőrendszer nyírásközéppontja egybeesik a függőleges terhet súlypontjával, akkor a két síkbeli és a tiszta elcsavarodó kihajlás egymástól függetlenül jönnek létre és az épület kritikus terhe a három alap kritikus teher ($N_{cr,x}$, $N_{cr,y}$, $N_{cr,\varphi}$) közül a legkisebb lesz:

$$N_{cr} = \min\ (N_{cr,x}, N_{cr,y}, N_{cr,\varphi}) \tag{5.46}$$

A Föppl-Papkovics-féle közelítő képletek használata mellett szól az egyszerűségük és az a tény hogy mindig a biztonság javára közelítenek. Hátrányuk viszont, hogy egyes esetekben meglehetősen gazdaságtalan szerkezetekhez vezethetnek, különösen akkor, amikor a merevítőrendszer külpontossága kicsi. Az (5.43) képlet hibatartománya 0-67%.

Az épület kritikus terhének ismeretében képezhető a globális kritikus teher arány (a globális kritikus teher és az épület teljes függőleges terhének hányadosa), amely jól használható a merevítőrendszer hatékonyságának becslésére. Annak megállapítására is alkalmas, hogy szükség van-e a helyettesítő tartónál komplexebb (esetleg másodrendű hatásokat is figyelembevevő) modell alkalmazására. A globális kritikus teher arány alkalmazásával a következő fejezet részletesebben foglalkozik; itt most csak annyit említünk meg, hogy a globális kritikus teher arány értékének növekedésével az épület stabilitással kapcsolatos biztonsága is nő.

5.5 Koncentrált tetőteher

Bizonyos esetekben szükséges lehet koncentrált tetőteher figyelembevétele. Egy (a tetőszinten elhelyezkedő) úszómedence, panoráma étterem vagy egy víztartály olyan többletterhet jelenthet, amit a szintenként egyenlő nagyságú, egyenletesen megoszló födémteherrendszerrel nem tudunk kezelni.

A síkbeli kihajlás kritikus terhe könnyen megadható az 5.1 pontban már tárgyalt megoszló eset képleteinek kismértékű módosításával. A kritikus teher az (5.18) képlet alapján, és figyelembe véve hogy koncentrált tetőteher esetében az egymásrahatás jelensége nem jelentkezik, az

$$F_{cr} = F_l + K_e \tag{5.47}$$

alakban írható, ahol F_l a lokális hajlítási merevséghez tartozó kritikus teher és K_e a koncentrált tetőteher esetéhez tartozó hatékony nyírási merevség. A hatékony nyírási merevség a

$$K_e = \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{F_g} \right)^{-1} \tag{5.48}$$

képlettel adható meg, ahol F_g a globális hajlítási merevséghez tartozó kritikus teher. Az F_l és F_g rész kritikus terheket az alul befogott és a tetőponton szabad végű oszlopra vonatkozó Euler-féle képlet [11] alapján határozzuk meg:

$$F_l = \frac{\pi^2 EI}{4H^2} \tag{5.49}$$

és

$$F_g = \frac{\pi^2 EI_g}{4H^2} \tag{5.50}$$

Az (5.47) képlet most már felhasználható a síkbeli kihajlás két kritikus terhének ($F_{cr,x}$ és $F_{cr,y}$) meghatározására az *x* és *y* tehetetlenségi fősíkokban. Ehhez a vizsgált síkokban működő merevítőelemeket (illetve merevségeiket) kell figyelembe venni.

A tiszta elcsavarodó kihajlás meghatározásához az (5.31) képletet használjuk fel. Mivel az egymásrahatás a koncentrált teher esetében nem játszik szerepet, az (5.31) képlet alapján azonnal felírható a kritikus teher képlete:

$$F_{cr,\varphi} = F_\omega + F_t \tag{5.51}$$

A tiszta elcsavarodó kihajlás két összetevő kritikus terhe az öblösödési csavarási kritikus teher és a Saint-Venant csavarási merevséghez tartozó kritikus teher. Az öblösödési csavarási kritikus teher az

$$F_\omega = \frac{\pi^2 EI_\omega}{4H^2 i_p^2} \tag{5.52}$$

összefüggésből számítható, ahol az EI_ω öblösödési csavarási merevség értékét az (5.30) képlet szolgáltatja.

A Saint-Venant csavarási merevséghez tartozó kritikus teher értékét az

$$F_t = \frac{(GJ)_e}{i_p^2} \tag{5.53}$$

képlet adja meg, ahol a hatékony Saint-Venant csavarási merevséget az (5.29) képlet segítségével határozzuk meg. Az (5.29) képlet két tagból áll. Az első tagot változtatás nélkül használhatjuk, de a második tag esetében (amelyik a keretek hatását veszi figyelembe) a K_e értékeket (a vonatkozó irányok figyelembevételével) az (5.48) képlettel kell meghatározni.

Az $F_{cr,x}$, $F_{cr,y}$ és $F_{cr,\varphi}$ alap kritikus terhek ismeretében a kombinálódást kell figyelembe venni. Ez pontosan az 5.4 pontban leírtak szerint történik, vagyis a pontos eljáráshoz az (5.39), (5.40), (5.41) és (5.42) összefüggéseket, a közelítő eljáráshoz pedig az (5.43), (5.44), (5.45) és (5.46) összefüggéseket használjuk, de az Euler-féle rész kritikus terhekkel.

5.6 Számpélda: keretekkel és falakkal merevített 22-szintes aszimmetrikus épület

Az 5.5 ábrán alaprajzával vázolt 22-szintes épület stabilitását hét vasbeton merevítőelem hivatott biztosítani. Feladatunk a globális kritikus teher és biztonsági tényező meghatározása. (A globális biztonsági tényezővel a 6. fejezet foglalkozik.) A négy *F* jelű egynyílású keret azonos kialakítású. A nyílásköz $l = 6$ m és az oszlopok és gerendák keresztmetszete 0.40 m/0.40 m. A három *W* jelű merevítőfal is azonos kialakítású. A falvastagság 0.30 m és a falak szélessége 6.0 m. A jellemző tehetetlenségi nyomatékok: $I = 5.4$ m^4 és $J = 0.054$ m^4.

Az emeletmagasság $h = 3.0$ m és az épület teljes magassága $H = 66.0$ m. A vasbeton szerkezetek rugalmassági modulusa $E = 25000$ MN/m^2 és a nyírási rugalmassági modulus

G = 10420 MN/m^2. Az épület függőleges terhét Q = 10.0 kN/m^2 a födémeken egyenletesen megoszló intenzitású teherrel vesszük figyelembe.

Az n szintszám függvényében a 22-szintes épület r_s redukciós tényezője:

$$r_s = \frac{n}{n+1.588} = 0.9327 \qquad \{5.1 \text{ táblázat}\}$$

Először kiszámítjuk a merevítőelemek jellemző adatait és a merevítőrendszer nyírásközéppontját, majd meghatározzuk az alap kritikus terheket, végül figyelembe vesszük az alap kritikus terhek kombinálódását.

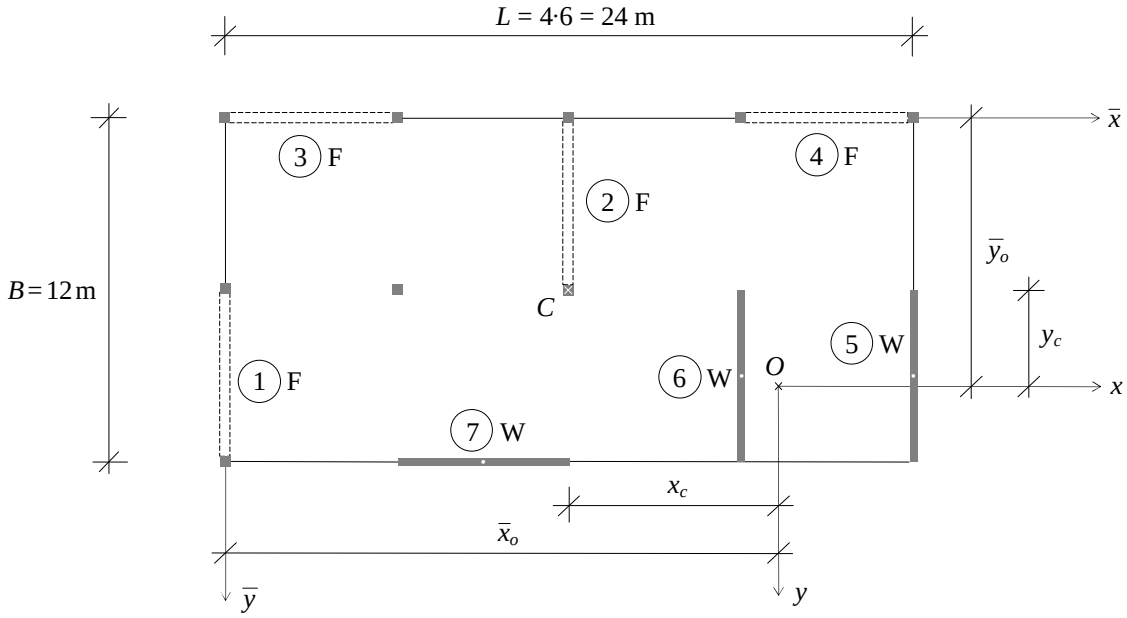
5.6.1 A merevítőelemek kritikus terhei; nyírásközéppont

F jelű keret (1., 2., 3. és 4. merevítőelem)

Az 1. jelű merevítőelem adatai azonosak a 2., 3. és 4. jelű merevítőelem adataival.

A keretgerendákhoz köthető globális nyírási merevség:

$$K_{b,1} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{12EI_{b,j}}{l_j h} = \frac{12 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 0.4^4}{12 \cdot 6 \cdot 3} = 35556\,\text{kN} \qquad \{2.43\}$$



5.5 ábra. 22-szintes, négy kerettel és három fallal merevített épület.

A keretoszlopokhoz tartozó lokális nyírási merevség:

$$K_{c,1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi^2 EI_{c,j}}{h^2} = 2\frac{\pi^2 25 \cdot 10^6 \cdot 0.4^4}{12 \cdot 3^2} = 116973\,\text{kN} \qquad \{2.44\}$$

Az r redukciós tényező:

$$r_1 = \frac{K_{c,1}}{K_{b,1} + K_{c,1}} = \frac{116973}{35556 + 116973} = 0.7669 \qquad \{2.46\}$$

A nyírási merevség:

$$K_1 = K_{b,1} r_1 = 35556 \cdot 0.7669 = 27268\,\text{kN} \qquad \{2.45\}$$

Az oszlopok lokális tehetetlenségi nyomatéka:

$$I_1 = r_1 \sum_{j=1}^{n} I_{c,j} = 0.7669 \cdot 2 \cdot \frac{0.4^4}{12} = 0.00327\,\text{m}^4 \qquad \{2.48\}$$

A globális hajlítási tehetetlenségi nyomaték:

$$I_{g,1} = \sum_{j=1}^{n} A_{c,j} t_j^2 = 0.4 \cdot 0.4 \cdot 3^2 \cdot 2 = 2.88\,\text{m}^4 \qquad \{2.47\}$$

A kritikus teherparaméter meghatározásához szükséges két merevségarány:

$$\frac{I_1}{I_1 + I_{g,1}} = \frac{0.00327}{0.00327 + 2.88} = 0.00113 \qquad \{2.50\}$$

és

$$\frac{K_1 H^2}{E(I_1 + I_{g,1}) r_s} = \frac{27268 \cdot 66^2}{25 \cdot 10^6 (0.00327 + 2.88) 0.9327} = 1.7667 \qquad \{2.51\}$$

A két merevségarány felhasználásával a 2.1 táblázatból megkapjuk a kritikus teherparamétert:

$$c_1 = 2.047 \qquad \{2.1\ \text{táblázat}\}$$

A keret kritikus terhe – meganewton-ra áttérve – így

$$N_{cr,1} = c_1 \frac{E(I_1 + I_{g,1}) r_s}{H^2} = 2.047 \frac{25 \cdot 10^3 (0.00327 + 2.88) 0.9327}{66^2} = 31.59\,\text{MN} \qquad \{2.49\}$$

A globális hajlítási kritikus teher

$$N_{g,1} = \frac{7.837 r_s E_c I_{g,1}}{H^2} = \frac{7.837 \cdot 0.9327 \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 2.88}{66^2} = 120.8\,\text{MN} \qquad \{5.7\}$$

segítségével meghatározzuk még a keret nyírási hatékonysági mutatóját

$$s_1 = \frac{N_{g,1}}{N_{g,1} + K_1} = \frac{120.8}{120.8 + 27.27} = 0.8158 \qquad \{5.9\}$$

és a hatékony nyírási merevséget:

$$K_{e,1} = s_1 K_1 = 0.8158 \cdot 27.27 = 22.25\,\text{MN} \qquad \{5.8\}$$

W jelű merevítőelem (5., 6. és 7. merevítőelem)
Az 5. jelű tömör merevítőfal adatai azonosak a 6. és 7. jelű merevítőfal adataival.

A merevítőfal kritikus terhe

$$N_{cr,5} = \frac{7.837 EIr_s}{H^2} = \frac{7.837 \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 5.4 \cdot 0.9327}{66^2} = 226.5\,\text{MN} \qquad \{2.65\}$$

A nyírásközéppont helye
A nyírásközéppont koordinátáit a kritikus terhek segítségével határozhatjuk meg:

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{f+m} N_{y,i}\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{f+m} N_{y,i}} = \frac{31.59 \cdot 12 + 226.5(18+24)}{2(31.59+226.5)} = 19.16\,\text{m} \qquad \{5.37\}$$

és

$$\bar{y}_o = \frac{\sum_{i=1}^{f+m} N_{x,i}\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{f+m} N_{x,i}} = \frac{226.5 \cdot 12}{2 \cdot 31.59 + 226.5} = 9.38\,\text{m} \qquad \{5.37\}$$

5.6.2 Síkbeli kihajlás az *x* és *y* irányban

Először az *x* iránnyal foglalkozunk. A közreműködő elemek a 3. és 4. keret és a 7. merevítőfal.

A fal és a keretek különböző típusú alakváltozása miatt egymásrahatás történik a két merevítőelem-típus között. A rendszer eredeti nyírási merevsége a keretektől származik:

$$K = \sum_{i=1}^{f} K_i = 2K_1 = 2 \cdot 27.27 = 54.54\,\text{MN} \qquad \{5.5\}$$

A hatékony nyírási merevség:

$$K_e = \sum_{i=1}^{f} K_{e,i} = 2K_{e,1} = 2 \cdot 22.25 = 44.5\,\text{MN} \qquad \{5.8\} \text{ és } \{5.10\}$$

A rendszer nyírási hatékonysági mutatója:

$$s = \frac{K_e}{K} = \frac{44.5}{54.54} = 0.8158 \qquad \{5.11\}$$

A rendszer lokális hajlítási merevsége a fal és (jóval kisebb mértékben) a keretoszlopok hajlítási merevségéből származik:

$$EI = E_c I_c + E_w I_w = 25 \cdot 10^3 (2 \cdot 0.00327 + 5.4) = 135164\,\text{MNm}^2 \qquad \{5.12\}$$

A lokális hajlítási kritikus teher így:

$$N_l = \frac{7.837 r_s EI}{H^2} = \frac{7.837 \cdot 0.9327 \cdot 135164}{66^2} = 226.8\,\text{MN} \qquad \{5.13\}$$

A β kritikus teherarány

$$\beta = \frac{K_e}{N_l} = \frac{44.5}{226.8} = 0.196 \qquad \{5.17\}$$

segítségével a kritikus teherparaméter az 5.2 táblázatból kapható meg:

$$\alpha = 1.2949 + \frac{1.5798 - 1.2949}{0.2 - 0.1}(0.196 - 0.1) = 1.568 \qquad \{5.2\ \text{táblázat}\}$$

Minden rendelkezésre áll az *x* irányú kritikus teher meghatározásához:

$$N_{cr,x} = N_l + K_e + (\alpha - \beta - 1) s N_l \qquad \{5.18\}$$

$$= 226.8 + 44.5 + (1.568 - 0.196 - 1)0.8158 \cdot 226.8 = 226.8 + 44.5 + 68.8 = 340.1\,\text{MN}$$

A hajlítási és nyírási módok közötti egymásrahatás (68.8 MN) jótékony szerepet játszik és a teljes kritikus teher 20%-át teszi ki.

Hasonló a helyzet az *y* irányban, ahol az oldalirányú kilendülést az 1. és 2. jelű keret és az 5. és 6. jelű fal gátolja.

A rendszer eredeti nyírási merevsége a keretektől származik:

$$K = \sum_{i=1}^{f} K_i = 2K_1 = 2 \cdot 27.27 = 54.54\,\text{MN} \qquad \{5.5\}$$

A hatékony nyírási merevség:

$$K_e = \sum_{i=1}^{f} K_{e,i} = 2K_{e,1} = 2 \cdot 22.25 = 44.5\,\text{MN} \qquad \{5.8\}\ \text{és}\ \{5.10\}$$

A rendszer nyírási hatékonysági mutatója:

$$s = \frac{K_e}{K} = \frac{44.5}{54.54} = 0.8158 \qquad \{5.11\}$$

A rendszer lokális hajlítási merevsége a falak és (sokkal kisebb mértékben) a keretoszlopok hajlítási merevségéből származik:

$$EI = E_c I_c + E_w I_w = 25 \cdot 10^3 (2 \cdot 0.00327 + 2 \cdot 5.4) = 270164\,\text{MNm}^2 \qquad \{5.12\}$$

A lokális hajlítási kritikus teher így:

$$N_l = \frac{7.837 r_s EI}{H^2} = \frac{7.837 \cdot 0.9327 \cdot 270164}{66^2} = 453.3\,\text{MN} \qquad \{5.13\}$$

A β kritikus teherarány

$$\beta = \frac{K_e}{N_l} = \frac{44.5}{453.3} = 0.098 \qquad \{5.17\}$$

segítségével a kritikus teherparaméter az 5.2 táblázatból kapható:

$$\alpha = 1.2659 + \frac{1.2949 - 1.2659}{0.1 - 0.09}(0.098 - 0.09) = 1.29 \qquad \{5.2 \text{ táblázat}\}$$

Az *y* irányú kritikus teher értéke így:

$$N_{cr,y} = N_l + K_e + (\alpha - \beta - 1)sN_l \qquad \{5.18\}$$

$$= 453.3 + 44.5 + (1.29 - 0.098 - 1)0.8158 \cdot 453.3 = 453.3 + 44.5 + 71.0 = 568.8\,\text{MN}$$

A hajlítási és nyírási módok közötti egymásrahatás (71 MN) most a teljes kritikus teher 12%-át teszi ki.

5.6.3 Tiszta elcsavarodó kihajlás

Mind a hét merevítőelem rendelkezik a nyírásközépponttól mért merőleges távolsággal, így mind a hét merevítőelem szerepet játszik az elcsavarodás során. Először ezeket a merőleges távolságokat kell meghatározni:

$$t_1 = \bar{x}_o - 12 = 7.16\,\text{m}, \qquad t_2 = \bar{x}_o = 19.16\,\text{m}, \qquad t_3 = t_4 = \bar{y}_o = 9.38\,\text{m}$$

$$t_5 = L - \bar{x}_o = 4.84\,\text{m}, \qquad t_6 = \bar{x}_o - 18 = 1.16\,\text{m}, \qquad t_7 = B - \bar{y}_o = 2.62\,\text{m}$$

A geometriai középpont

$$x_c = \frac{L}{2} - \bar{x}_o = \frac{24}{2} - 19.16 = -7.16\,\text{m} \quad \text{és} \quad y_c = \frac{B}{2} - \bar{y}_o = \frac{12}{2} - 9.38 = -3.38\,\text{m} \qquad \{5.42\}$$

koordinátáinak ismeretében meghatározható az inerciasugár értéke:

$$i_p = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} = \sqrt{\frac{24^2 + 12^2}{12} + 7.16^2 + 3.38^2} = 11.08\,\text{m} \qquad \{5.28\}$$

Az eredeti Saint-Venant csavarási merevség két részből áll. Tartalmazza a falak saját csavarási ellenállását és a keretek hozzájárulását:

$$(GJ) = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f}\left((K_i)_x y_i^2 + (K_i)_y x_i^2\right) = 3GJ_5 + K_1(t_1^2 + t_2^2 + 2t_3^2) \qquad \{5.35\}$$

$$= 3 \cdot 10420 \cdot 0.054 + 27.27(7.16^2 + 19.16^2 + 2 \cdot 9.38^2) = 17896\,\text{MNm}^2$$

Ha a fenti képletben az eredeti nyírási merevségeket lecseréljük a hatékony nyírási merevségekre, akkor megkapjuk a hatékony Saint-Venant csavarási merevséget:

$$(GJ)_e = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f} \left((K_{e,i})_x y_i^2 + (K_{e,i})_y x_i^2 \right) = 3GJ_5 + K_{e1}(t_1^2 + t_2^2 + 2t_3^2) \qquad \{5.29\}$$

$$= 3 \cdot 10420 \cdot 0.054 + 22.25(7.16^2 + 19.16^2 + 2 \cdot 9.38^2) = 14912 \text{ MNm}^2$$

A Saint-Venant csavarási hatékonysági tényező értéke:

$$s_\varphi = \frac{(GJ)_e}{(GJ)} = \frac{14912}{17896} = 0.8332 \qquad \{5.34\}$$

Az öblösödési csavarási merevség három forrásból származhat, de a falak saját öblösödési ellenállása zérus, míg a keretoszlopok hajlítási merevségével kapcsolatos rész elhanyagolhatóan kicsi. Így marad a falak saját hajlítási merevségéből származó rész:

$$EI_\omega = E_w \sum_{k=1}^{m} \left(I_{\omega,k} + (I_{w,k})_x y_k^2 + (I_{w,k})_y x_k^2 \right) + E_c \sum_{i=1}^{f} (I_{c,i} r_i)_x y_i^2 = EI_5(t_5^2 + t_6^2 + t_7^2) \qquad \{5.30\}$$

$$= 25 \cdot 10^3 \cdot 5.4(4.84^2 + 1.16^2 + 2.62^2) = 4270806 \text{ MNm}^4$$

A két csavarási merevség birtokában előállítható a hozzájuk tartozó rész kritikus teher. Az öblösödési csavarási kritikus teher:

$$N_\omega = \frac{7.837 r_s EI_\omega}{i_p^2 H^2} = \frac{7.837 \cdot 0.9327 \cdot 4.27 \cdot 10^6}{11.08^2 \cdot 66^2} = 58.4 \text{ MN} \qquad \{5.32\}$$

A Saint-Venant csavarási merevséghez tartozó kritikus teher:

$$N_t = \frac{(GJ)_e}{i_p^2} = \frac{14912}{11.08^2} = 121.5 \text{ MN} \qquad \{5.33\}$$

A két rész kritikus teher aránya

$$\beta_\varphi = \frac{N_t}{N_\omega} = \frac{121.5}{58.4} = 2.08 \qquad \{5.36\}$$

segítségével az 5.2 táblázatból megkapjuk a kritikus teher paramétert:

$$\alpha_\varphi = 5.624 + \frac{7.427 - 5.624}{3.0 - 2.0}(2.08 - 2.0) = 5.77 \qquad \{5.2 \text{ táblázat}\}$$

A tiszta csavarási kritikus teher így

$$N_{cr,\varphi} = N_\omega + N_t + (\alpha_\varphi - \beta_\varphi - 1) s_\varphi N_\omega \qquad \{5.31\}$$

$$= 58.4 + 121.5 + (5.77 - 2.08 - 1)0.8332 \cdot 58.4 = 58.4 + 121.5 + 130.9 = 310.8 \text{ MN}$$

Az öblösödési és Saint-Venant csavarási módok között létrejövő jótékony egymásrahatás – 130.9 MN – figyelemreméltó 42%-ot jelent a kritikus teher értékében.

5.6.4 Az épület kritikus terhe és globális biztonsági tényezője

A függőleges teher súlypontja – az alaprajz geometriai középpontja – nem esik rá egyik tehetetlenségi főtengelyre sem. Ebből az következik, hogy az $N_{cr,x}$, $N_{cr,y}$ és $N_{cr,\varphi}$ alap kritikus terhek hármas kombinálódásával kell számolni. Ez azért fontos, mert a kombinálódás minden esetben hátrányosan érinti a szerkezet globális kritikus terhét, ami minden esetben kisebb mint a három kapcsolódó kritikus teher bármelyike.

A kombinálódás mértéke a merevítőrendszer külpontosságától is függ. Ennek értéke a két főirányban:

$$\tau_x = \frac{x_c}{i_p} = \frac{-7.16}{11.08} = -0.646 \qquad \text{és} \qquad \tau_y = \frac{y_c}{i_p} = \frac{-3.38}{11.08} = -0.305 \qquad \{5.41\}$$

A kritikus teher értékét az

$$N^3 + b_2 N^2 + b_1 N - b_0 = 0 \qquad \{5.39\}$$

harmadfokú egyenlet megoldása szolgáltatja.

Az egyenlet együtthatói:

$$b_0 = \frac{N_{cr,x} N_{cr,y} N_{cr,\varphi}}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2} = \frac{340.1 \cdot 568.8 \cdot 310.8}{1 - 0.646^2 - 0.305^2} = 122.8 \cdot 10^6 \qquad \{5.40\}$$

$$b_1 = \frac{N_{cr,x} N_{cr,y} + N_{cr,\varphi} N_{cr,x} + N_{cr,\varphi} N_{cr,y}}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2} = \frac{340.1 \cdot 568.8 + 310.8 \cdot 340.1 + 310.8 \cdot 568.8}{1 - 0.646^2 - 0.305^2} = 972 \cdot 10^3$$

$$b_2 = \frac{N_{cr,x} \tau_x^2 + N_{cr,y} \tau_y^2 - N_{cr,x} - N_{cr,y} - N_{cr,\varphi}}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2}$$

$$= \frac{340.1 \cdot 0.646^2 + 568.8 \cdot 0.305^2 - 340.1 - 568.8 - 310.8}{1 - 0.646^2 - 0.305^2} = -2093$$

A harmadfokú egyenlet legkisebb gyöke az épület globális kritikus terhe:

$$N_{cr} = 218 \,\text{MN}$$

{A kritikus teher meghatározásának egy gyorsabb – bár kevésbé pontos – lehetősége a Föppl-Papkovics közelítő képlet

$$N_{cr} = \left(\frac{1}{N_{cr,x}} + \frac{1}{N_{cr,y}} + \frac{1}{N_{cr,\varphi}} \right)^{-1} \qquad \{5.43\}$$

alkalmazása, ami N_{cr} = 126 MN értéket ad.}

A globális biztonsági tényezővel kapcsolatos elméleti háttér és a vonatkozó képletek a következő 6.-ik fejezetben találhatók.

A födémszinteken egyenletesen megoszló Q = 10 kN/m^2 teherrel számolva az épület teljes

függőleges terhe

$$N = nLBQ = 22 \cdot 24 \cdot 12 \cdot 0.01 = 63.36\,\text{MN} \qquad \{6.2\}$$

ahol n a szintek száma és L és B az alaprajz méretei.

Az épület globális biztonsági tényezője (a „pontos” kritikus teherrel számolva):

$$\lambda = \frac{N_{cr}}{N} = \frac{218}{63.36} = 3.44 \qquad \{6.3\}$$

ami azt jelzi, hogy a merevítőrendszer ugyan stabil ($\lambda > 1$), de merevsége elmarad a javasolt értéktől ($\lambda < 10$).

Gyakorlásképpen érdemes elvégezni a részletes frekvencia és eltolódás számítást is. A végeredményeket a 7. fejezetben adjuk meg. A frekvencia- és eltolódás-vizsgálat eredményei (a 7.1 táblázatban) hasonló következtetéshez vezetnek.

6

A merevítőrendszer globális biztonsági tényezője

Többszintes épületek stabilitása két szinten vizsgálható. Végrehajtható egy lokális, elemekre épülő vizsgálat, amelynek során egyenként végezzük el bizonyos – kulcsfontosságú – szerkezeti elemek stabilitásvizsgálatát. A szabványok rendszerint ezt az utat követik és részletes útmutatást adnak a vizsgálat elvégzéséhez. Ez a megközelítés lehetővé teszi a stabilitásvizsgálat viszonylag egyszerű végrehajtását, de az eljárásnak hátrányai is vannak. Az egyik lehetséges hátrány az, hogy a tervezőnek kell kiválasztani a „kulcsfontosságú" elemeket. A lokális megközelítés másik hátránya az, hogy nem tudja kezelni a többszintes épület teljes magasságra kiterjedő, térbeli viselkedését. A lokális megközelítés gyakran gazdaságtalan megoldásokhoz vezethet, mert a szerkezeti elemek közötti együttműködést a vizsgált elem közvetlen környezetére korlátozza és nem tudja figyelembe venni azt a tényt hogy rendszerint a teljes szerkezet részt vesz az erőjátékban.

A másik lehetőség a globális megközelítés. A globális kritikus teher arány koncepciója régóta ismert. Ismert, de nem nagyon használt. Vagy legalábbis nem olyan mértékben, amilyenben célszerű lenne használni. Az alábbiakban bemutatott illusztratív számpélda eredményei nyilvánvalóvá teszik, hogy a globális kritikus teher arány több, mint egy egyszerű stabilitási paraméter; ez egy széleskörűen alkalmazható, általános értékű paraméter, amelynek segítségével a tervező az egész merevítőrendszer működését figyelemmel kísérheti, illetve ellenőrizni tudja. Ezen túlmenően, a paraméter kapcsolatot teremt a szerkezet viselkedésének három jellegzetes területe között, vagyis összekapcsolja a szilárdsági, dinamikai és stabilitási vizsgálatot. A paraméter automatikusan figyelembe veszi, hogy a szerkezet milyen – síkbeli vagy térbeli – módon reagál a terhekre és ezt egyértelműen jelzi a tervező felé. Itt különösen a térbeli viselkedés jelentőségét érdemes kiemelni, egyrészt mert igen fontos, másrészt mert a tervezők jelentős része nem rendelkezik elegendő ismeretekkel a térbeli viselkedést illetően. Ezt részben magyarázhatta az a tény hogy a számítógépek széleskörű elterjedése előtt a tervező lehetőségei eléggé korlátozottak voltak átfogó háromdimenziós vizsgálat végrehajtására. Ez a helyzet azonban napjainkra teljesen megváltozott. Nagyteljesítményű számítógépek, mindentudó szoftverek és komplex szerkezetek modellezésével foglalkozó kézikönyvek segítségével a tervező könnyűszerrel elvégezheti a globális térbeli vizsgálatot.

A globális vizsgálat végrehajtása alapvetően két módon lehetséges. Végrehajthatunk egy széleskörű, minden részletre kiterjedő bár meglehetősen időigényes és hatalmas adathalmazt felhasználó számítógépes vizsgálatot, vagy kevésbé „pontos", de jóval egyszerűbb és szemléletesebb közelítő módszereket alkalmazunk. A közelítő módszerek bizonyos elhanyagolások segítségével egyszerűsítő feltételrendszert és ennélfogva egyszerűbb statikai modellt használnak. A jól megválasztott egyszerűsítő feltételek a kevésbé fontos tényezőket és jelenségeket hanyagolják el és a gyakorlat számára elegendő pontosságú eredményeket szolgáltatnak. Ilyen megközelítést mutattunk be az 5. fejezetben.

6.1 Globális biztonsági tényező – hatékonyságmutató

Attól függően, hogy mit viszonyítunk mihez, a globális kritikus teher arányt kétféleképpen fogalmazhatjuk meg. Definiálhatjuk az épületen működő teljes függőleges teher és az épület kritikus terhének hányadosaként

$$\frac{N}{N_{cr}} \tag{6.1}$$

ahol

$$N = LBQn \tag{6.2}$$

az épület teljes függőleges terhe, és

N_{cr} az épület globális kritikus terhe egyenletesen megoszló födémteher esetén,
L, B az épületalaprajz két szélességi mérete,
Q az egyenletesen megoszló födémteher intenzitása [kN/m^2],
n az emeletek száma.

Gyakorló statikusokhoz inkább az a reciprok definíció áll közelebb, amely szerint a globális kritikus teher arány az épület kritikus terhének és az épületen működő teljes függőleges tehernek a hányadosa:

$$\lambda = \frac{N_{cr}}{N} \tag{6.3}$$

Ez a hányados közvetlen kapcsolatba hozható az épület biztonságával. Némileg zavaró módon a szabványokban mindkét definíció megtalálható. Mi ezt a reciprok definíciót használjuk és a (6.3) képlettel meghatározott hányadost az épület globális biztonsági tényezőjének nevezzük.

Azokban az esetekben amikor az épület tetőszintjén jelentős többletteher van (például egy víztartály vagy egy úszómedence formájában), akkor ez a hátrányos hatás nem hanyagolható el, de nem is kezelhető a szintenként azonos, egyenletesen megoszló intenzitású födémteher feltételezésével levezetett összefüggésekkel. Ilyen esetekben a (6.3) képlet bővítésével az épület globális biztonsági tényezőjét az

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{N}{N_{cr}} + \frac{F}{F_{cr}} \tag{6.4}$$

képlet segítségével lehet meghatározni, ahol

F az extra koncentrált tetőteher,
F_{cr} az épület kritikus terhe tetőteher esetében.

Az N_{cr} és F_{cr} globális kritikus terheket meghatározhatjuk minden részletre kiterjedő számítógépes vizsgálattal vagy alkalmazhatjuk az 5. fejezetben bemutatott közelítő módszereket.

A globális biztonsági tényező különböző módokon használható. A szabványok általában arra használják az arányt, hogy a tervező mérlegelhesse a másodrendű hatások figyelembevételének szükségességét. Ha a

$$\lambda \geq 10 \tag{6.5}$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor a merevítőrendszer alkalmassága bizonyítottnak tekinthető és a függőleges terheket hordó szerkezeti elemek megtámasztottnak tekinthetők (a merevítőrendszer által). A másodrendű hatások elhanyagolása ekkor maximum 10%-os hibát okozhat.

Ha a (6.5) feltétel nem teljesül, akkor a merevítőrendszer még mindig megfelelő lehet, de ezt a másodrendű hatásokat is figyelembe vevő vizsgálattal kell bizonyítani. Itt jegyezzük meg, hogy – a statikus gyakorlatban széleskörűen elfogadott elv szerint – a globális biztonsági tényező értékének abszolút minimuma négy.

Bizonyos esetekben hasznos lehet a globális biztonsági tényező „összetevőit" meghatározni. Semmilyen többletmunkát nem igényel külön is megvizsgálni a síkbeli és csavarási viselkedést, vagyis kiszámítani a síkbeli viselkedést jellemző

$$\lambda_x = \frac{N_{cr,x}}{N} \tag{6.6}$$

és

$$\lambda_y = \frac{N_{cr,y}}{N} \tag{6.7}$$

globális biztonsági tényező összetevőket és a csavarási viselkedést meghatározó

$$\lambda_\varphi = \frac{N_{cr,\varphi}}{N} \tag{6.8}$$

összetevőt, ahol az $N_{cr,x}$ és $N_{cr,y}$ a síkbeli kihajlás kritikus terhei és $N_{cr,\varphi}$ a tiszta elcsavarodó kihajlás kritikus terhe, egyenletesen megoszló födémteher feltételezésével. Jól kialakított és kiegyensúlyozott viselkedést produkáló merevítőrendszer esetében a λ_x, λ_y és λ_φ összetevők hasonló nagyságúak. Ha valamelyik összetevő (jóval) kisebb mint a másik (kettő), akkor ez biztos jele annak, hogy a kérdéses tényező által képviselt jelenségnek (síkbeli, illetve csavarási viselkedésnek) nincsen meg a megfelelő merevségi „támogatottsága". Ha például a λ_x értéke jóval kisebb mint a másik két érték – és nem teljesül a (6.5) feltétel sem – akkor ez azt jelzi, hogy a merevítőrendszer az *x* irányban nem rendelkezik megfelelő merevséggel és ez okozza a merevítőrendszer gyenge teljesítményét. – Lásd a 6.2.2 pont utolsó bekezdését a fentieket illusztráló számpéldával.

Ki kell itt hangsúlyozni, hogy a λ_x, λ_y és λ_φ összetevők segítségével végrehajtott vizsgálat az alapmódokhoz tartozó (síkbeli hajlítási és tiszta csavarási) merevségek *relatív* nagyságának megállapítására alkalmas, de a kihajlási módok kombinálódását semmilyen formában nem tudja figyelembe venni és így a merevítőrendszer végleges alkalmasságának megállapítására általában nem használható.

A λ globális biztonsági tényező felhasználható hatékonyságmutatóként is. Mivel a globális kritikus teher értékét a (síkbeli és tiszta csavarási) alapesetek értéke valamint a kombinálódásuk mértéke befolyásolja, a biztonsági tényező minden gyengeséget automatikusan „észrevesz", legyen az a hajlítási vagy csavarási merevség gyengesége vagy az elrendezés nem (elég) hatékony módja. A stabilitásvizsgálat során jelentkező és a kritikus terhet csökkentő akármilyen gyengeség hasonlóan hátrányos következményekkel jár amikor a szerkezet sajátfrekvenciáját vagy a maximális tetőponti eltolódását határozzuk meg. Ezt a következőkben mutatjuk be, amikor egy épület merevítőrendszerének hatékonyságát a globális biztonsági tényező segítségével vizsgáljuk meg.

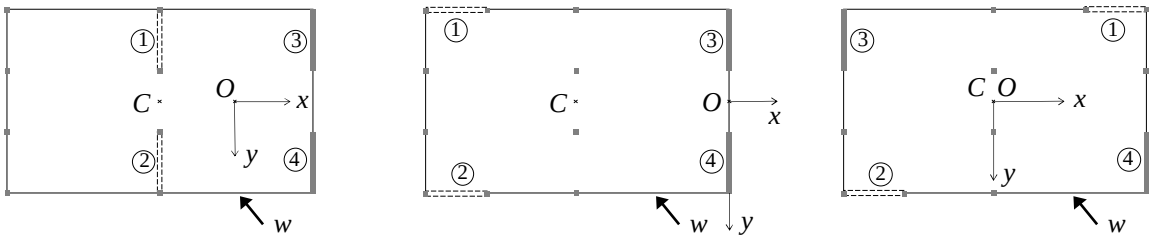
A vizsgálat tárgyát képező 10-szintes épület (6.1 ábra) részletes számítását a 6.2 pontban

mutatjuk majd be, itt most csak a főbb eredményeket foglaljuk össze. Az alaprajz két mérete 15 és 9 méter és a területe 135 m^2.

Az épület merevítésére négy merevítőelem áll rendelkezésre: két keresztmerevítéssel ellátott acél keret és két vasbeton merevítőfal (6.2 ábra). A merevítőelemek elhelyezése az alaprajzon belül tetszőleges. Három különböző elrendezést fogunk vizsgálni (6.1 ábra). Mindhárom elrendezéshez három vizsgálatot hajtunk végre. A maximális tetőponti eltolódás meghatározásához $w = 17$ kN/m intenzitású, a függőleges mentén egyenletes megoszlású vízszintes terhet tételezünk fel, amelynek eredője 50 fokot zár be az x tengellyel. A stabilitásvizsgálat során a födémenként egyenletesen megoszló $Q = 10$ kN/m^2 teherrel számolunk. A legkisebb sajátfrekvencia meghatározásához az épület súlyát $\gamma = 3$ kN/m^3 értékkel vesszük figyelembe. Mindhárom elrendezésnél a következő jellemzőket határozzuk meg:

φ_{max}	az épület maximális tetőponti elcsavarodása [°],
d_{max}	az épület maximális tetőponti eltolódása [m],
d_{max}/d_{ASCE}	a tényleges és az ajánlott maximális eltolódás aránya ($d_{ASCE} = H/500$),
f	az épület legkisebb sajátfrekvenciája [Hz],
N_{cr}	a globális kritikus teher [MN],
λ	az épület globális biztonsági tényezője.

A főbb eredményeket a 6.1 táblázatban foglaljuk össze.



a) 1. elrendezés b) 2. elrendezés c) 3. elrendezés

6.1 ábra. Tízszintes épület négy merevítőelemmel.

Az „1. elrendezés” (6.1/a ábra) egy nyilvánvalóan elfogadhatatlan kialakítású merevítő-rendszert mutat. A rendszer instabil voltát és elfogadhatatlanságát látványosan jelzi a globális biztonsági tényező is (ami 1.0-nál kisebb). A kis értékű globális biztonsági tényező mellett az épület számított tetőponti maximális eltolódása óriási, a legkisebb sajátfrekvencia és a kritikus teher értéke pedig igen kicsi. A merevítőrendszer végzetes gyengesége elsősorban annak tulajdonítható, hogy az x irányban gyakorlatilag nem rendelkezik merevséggel. Ezen túlmenően, a rendszer csavarási ellenállása is messze van az optimálistól.

A két keret 90 fokkal történő elforgatása („2. elrendezés” a 6.1/b ábrán) orvosolja az előző elrendezés legfontosabb gyengeségét és kellő x irányú merevséget ad a rendszernek. Az eredmények jól mutatják a javulást. A globális biztonsági tényező stabilis merevítőrendszert jelez, bár értéke nem éri el a statikus gyakorlat által elfogadott minimális értéket. A maximális tetőponti eltolódás értéke jóval kisebb mint az előző esetben volt és a legkisebb sajátfrekvencia és a kritikus teher értéke is jelentősen nőtt. A 6.2.3 pontban részletezett számítás tanúsága szerint viszont a merevítőrendszer csavarási ellenállása meglehetősen kicsi. Ennek az a fő oka, hogy a két merevítőfal merőleges távolsága a nyírásközépponttól zérus és így ezek nem játszhatnak szerepet az elcsavarodás során.

6.1 táblázat. A globális biztonsági tényező mint hatékonyságmutató.

	1. elrendezés	2. elrendezés	3. elrendezés
$\varphi_{\max}$ [º]	–	1.0	0
$d_{\max}$ [m]	5.65	0.313	0.061
$\frac{d_{\max}}{d_{\mathrm{ASCE}}}$	94	5.2	1.0
f [Hz]	0.039	0.213	0.468
N_{cr} [MN]	1.5	41.6	211.4
λ	0.1	3.1	15.7

Az 1. és 3. jelű merevítőelem felcserélésével a merevítőrendszer nyírásközéppontja az épületalaprajz geometriai középpontjába kerül („3. elrendezés” a 6.1/c ábrán), anélkül hogy a rendszer vízszintes merevsége az *x* és *y* irányban megváltozna. Ez a módosítás azzal a jelentős előnnyel jár, hogy most már mind a négy merevítőelem hozzájárul a rendszer csavarási ellenállásához, mivel mind a négy elem rendelkezik a nyírásközépponttól mért merőleges távolsággal. Nemcsak rendelkeznek merőleges távolsággal, de mivel az alaprajz határára kerültek *és* a lehető legtávolabb a nyírásközépponttól, a csavarási karjuk és ezzel a hatékonyságuk a csavarással szemben a lehető legnagyobb lett. Az eredmények látványosan tükrözik az elrendezés előnyös megváltozását. A merevítőrendszer nemcsak stabilis, de a globális biztonsági tényező értéke meghaladja a javasolt alsó határt ($\lambda = 15.7 > 10$). Az épület maximális tetőponti eltolódása jóval kisebb mint az előző esetben volt és most már csak egy hajszállal (1 milliméterrel) lépi túl a javasolt maximális értéket (H/500). A legkisebb sajátfrekvencia és a globális kritikus teher értéke szintén számottevően nőtt.

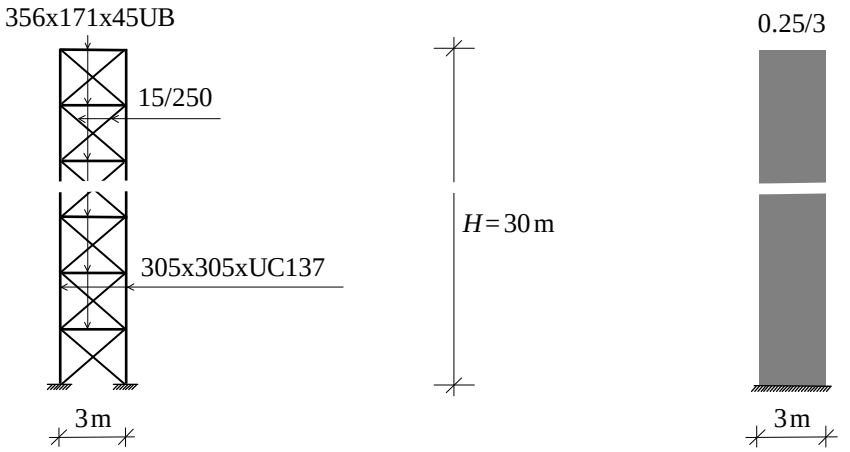
A 6.1 táblázatban összegyűjtött fontosabb eredmények (valamint a 6.2 pontban közölt részletes számítások) és több tucat egyéb számpélda tanúsága szerint a globális biztonsági tényező egy megbízható és érzékeny mutató a merevítőrendszer hatékonyságát illetően. Az előtervezés stádiumában célszerű lehet a globális biztonsági tényező értékét különböző elrendezésekre meghatározni. A legnagyobb értékhez tartozó elrendezés általában a maximális tetőponti eltolódás és a legkisebb sajátfrekvencia szempontjából is az optimális megoldást adja. Nem szabad természetesen a globális biztonsági tényező minden határon túl való növelésére törekedni: a túlságosan nagy globális biztonsági tényező (a 10.0 értékhez viszonyítva) gazdaságtalan szerkezetekhez vezethet.

6.2 Számpéldák: keresztmerevítéses acél keretekkel és vasbeton falakkal merevített 10-szintes épület három különböző merevítőrendszer elrendezéssel

Az előző pontban bevezettük a globális biztonsági tényező fogalmát és egy 10-szintes épület merevítőrendszerének különböző elrendezésével bemutattuk, hogy a globális biztonsági tényező hogyan használható hatékonyságmutatóként. Ebben a pontban a számítás részleteit adjuk meg.

A $15 \cdot 9 = 135$ m^2 alapterületű, $h = 3$ m emeletmagasságú épület teljes magassága $H = 30$ m. A merevítőrendszert két acélszerkezetű, keresztmerevítéssel ellátott keret és két vasbeton fal alkotja. A merevítőelemeket a 6.2 ábra mutatja, jellemző geometriai és merevségi adataikat pedig a 6.2 táblázatban foglaltuk össze. Az acél keret oszlopainak, gerendáinak és a

keresztmerevítés hevederjeinek a rugalmassági modulusa $E = 2 \cdot 10^5$ MN/m^2. A vasbeton falak rugalmassági modulusa és nyírási rugalmassági modulusa $E = 25 \cdot 10^3$ MN/m^2 és $G = 10.42 \cdot 10^3$ MN/m^2. A négy merevítőelem mellett vasbeton oszlopok is a függőleges teherviselő rendszer részét képezik. Ezek hozzájárulása az épület vízszintes és csavarási merevségéhez azonban igen kicsi, ezért a tervezői gyakorlatban szokásos módon ezek hatását elhanyagoljuk. Feltételezzük, hogy a falak csak hajlítási alakváltozást végeznek.



a) Acél keret keresztmerevítéssel

b) Vasbeton merevítőfal

6.2 ábra. A tízszintes épület acél és vasbeton merevítőelemei.

A négy merevítőelem elhelyezése tetszőleges. Három különböző elrendezés vizsgálatával azt mutatjuk be, hogy a merevítőelemek elhelyezése hogyan befolyásolja a merevítőrendszer viselkedését és hogyan érhetünk el optimális megoldást. A frekvenciavizsgálathoz az épület súlyát $\gamma = 3$ kN/m^3 értékkel vesszük figyelembe. A födémenként egyenletesen megoszló $Q = 10$ kN/m^2 nagyságú teherrel számolunk a kritikus teher és a globális biztonsági tényező kiszámítása során.

6.2 táblázat. Az acél és vasbeton merevítőelemek keresztmetszeti jellemzői.

keresztmetszeti jellemzők	acél keret kettős keresztmerevítéssel			vasbeton merevítőfal
	oszlopok	gerendák	diagonálisok	
keresztmetszet	305×305UC137	356×171×45UB	15/250 [mm]	0.25 m×3 m
A [m^2]	$1.74 \cdot 10^{-2}$	$5.73 \cdot 10^{-3}$	$3.75 \cdot 10^{-3}$	0.75
I_1 [m^4]	$3.281 \cdot 10^{-4}$	$1.207 \cdot 10^{-4}$	$1.953 \cdot 10^{-5}$	0.5625
I_2 [m^4]	-	-	-	$3.906 \cdot 10^{-3}$
J [m^4]	-	-	-	$1.5625 \cdot 10^{-2}$

Az épület elcsavarodása és maximális tetőponti eltolódása meghatározásához $w = 17$ kN/m intenzitású, a függőleges mentén egyenletes megoszlású vízszintes terhet tételezünk fel, amelynek eredője 50 fokot zár be az x tengellyel. Ennek a tehernek a komponensei

$$w_x = 17 \cdot \cos 50^\circ = 10.9\,\text{kN/m} \qquad \text{és} \qquad w_y = 17 \cdot \sin 50^\circ = 13.0\,\text{kN/m}$$

és ez a teher egy F = 510 kN eredőjű teljes vízszintes terhet jelent, amelynek komponensei

$$F_x = 327\,\text{kN} \qquad \text{és} \qquad F_y = 390\,\text{kN}$$

Mielőtt a három különböző elrendezés vizsgálatát elkezdjük, célszerű kiszámítani a merevítőelemek kritikus terheit, amelyekre a későbbiek során ismételten szükség lesz.

6.2.1 A merevítőelemek kritikus terhe

Az r_s redukciós tényező értéke azonos a keretek és a falak esetében, hiszen csak a szintek számától függ. Értéke az 5.1 táblázatból:

$$r_s = 0.863 \qquad \{5.1\ \text{táblázat}\}$$

Merevítőfal
A merevítőfal kritikus terhe:

$$N_{cr} = \frac{7.837 EIr_s}{H^2} = \frac{7.837 \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 0.5625 \cdot 0.863}{30^2} = 105.7\,\text{MN} \qquad \{2.65\}$$

Keret kettős keresztmerevítéssel
A keresztmerevítéssel ellátott keretek kritikus terhe a 2.4.1 pontban leírtak szerint határozható meg. Először a keret nyírási merevségét kell kiszámítani:

$$K = 2A_d E_d \frac{hl^2}{d^3} = 2 \cdot 3.75 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5 \frac{3 \cdot 3^2}{4.243^3} = 530.2\,\text{MN} \qquad \{2.2\ \text{táblázat}\}$$

A globális hajlítási kritikus teher meghatározásához szükség van a globális tehetetlenségi nyomaték értékére:

$$I_g = \sum_{j=1}^{2} A_{c,j} t_j^2 = 1.74 \cdot 10^{-2} \cdot 1.5^2 \cdot 2 = 0.0783\ \text{m}^4 \qquad \{2.29\}$$

Ezzel a globális hajlítási kritikus teher:

$$N_g = \frac{7.837 r_s E I_g}{H^2} = \frac{7.837 \cdot 0.863 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0.0783}{30^2} = 117.7\,\text{MN} \qquad \{2.54\}$$

A β_s kritikus teher arány

$$\beta_s = \frac{K}{N_g} = \frac{530.2}{117.7} = 4.5 \qquad \{2.53\}$$

segítségével a kritikus teherparaméter a 2.3 táblázatból kapható:

$$\alpha_s = 0.2006 \qquad \{2.3\ \text{táblázat}\}$$

A keret kritikus terhe így:

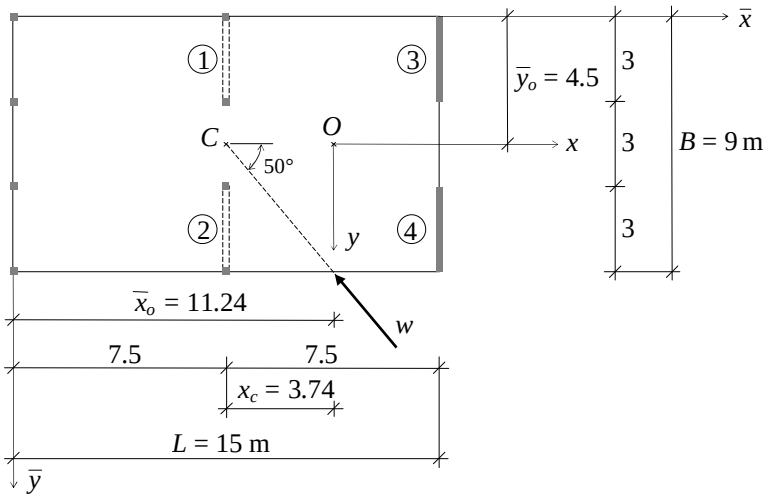
$$N_{cr} = \alpha_s K = 0.2006 \cdot 530.2 = 106.4\,\text{MN} \qquad \{2.52\}$$

A nyírási merevség hatékonysági mutatója:

$$s = \frac{N_g}{K + N_g} = \frac{117.7}{530.2 + 117.7} = 0.1817 \qquad \{5.9\}$$

6.2.2 Egy elfogadhatatlan merevítőrendszer: 1. elrendezés

A 6.3 ábrán vázolt merevítőrendszer elrendezése szándékosan olyan, ami nyilvánvalóan alkalmatlan egy 10-szintes épület merevítésére. Azért választottuk, hogy segítségével látványosan bemutathassuk, hogy a globális biztonsági tényező alkalmas a merevítőrendszer hátrányos tulajdonságainak kimutatására.



6.3 ábra. 1. elrendezés: egy elfogadhatatlan merevítőrendszer.

A merevítőelemek kritikus terheinek ismeretében az első lépés a nyírásközéppont helyének meghatározása. A szimmetriának köszönhetően csak az *x* irányú koordináta igényel számítást:

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{f+m} N_{y,i}\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{f+m} N_{y,i}} = \frac{2 \cdot 106.4 \cdot 7.5 + 2 \cdot 105.7 \cdot 15}{2 \cdot 106.4 + 2 \cdot 105.7} = 11.24\,\text{m} \qquad \text{és} \qquad \bar{y}_o = 4.5\,\text{m} \qquad \{5.37\}$$

Stabilitásvizsgálat

Először meghatározzuk a három alap kritikus terhet ($N_{cr,x}$, $N_{cr,y}$ és $N_{cr,\varphi}$), majd figyelembe vesszük a kombinálódásukat.

Y-irány
A rendszer hatékony nyírási merevsége (a két kerettel számolva):

$$K_e = \sum_{i=1}^{2} K_i s_i = 2 \cdot 530.2 \cdot 0.1817 = 192.7\,\text{MN} \qquad \{5.10\}$$

A rendszer (nyírási) hatékonysági mutatója:

$$s = \frac{K_e}{K} = \frac{192.7}{2 \cdot 530.2} = 0.1817 \qquad \{5.11\}$$

A rendszer lokális hajlítási merevségét a merevítőelemek lokális hajlítási merevségeinek összege adja:

$$EI = E_c I_c + E_w I_w = \left(2 \cdot 3.281 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^5 + 0.5625 \cdot 25 \cdot 10^3\right) 2 = 28387\ \text{MNm}^2 \qquad \{5.12\}$$

Az oszlopok részesedése (az első tag) kisebb mint 1%.
A rendszer lokális hajlítási kritikus terhe:

$$N_l = \frac{7.837 r_s EI}{H^2} = \frac{7.837 \cdot 0.863 \cdot 28387}{30^2} = 213.3\ \text{MN} \qquad \{5.13\}$$

A β kritikus teher arány

$$\beta = \frac{K_e}{N_l} = \frac{192.7}{213.3} = 0.90 \qquad \{5.17\}$$

segítségével a kritikus teherparaméter az 5.2 táblázatból kapható:

$$\alpha = 3.3488 \qquad \{5.2\ \text{táblázat}\}$$

és így az *y* irányú kihajlás kritikus terhe:

$$N_{cr,y} = N_l + K_e + (\alpha - \beta - 1) s N_l \qquad \{5.18\}$$

$$= 213.3 + 192.7 + (3.3488 - 0.9 - 1) 0.1817 \cdot 213.3 = 462.2\ \text{MN}$$

A hajlítási és nyírási kihajlási módok közötti egymásrahatás (a harmadik tag) a teljes kritikus teher 12.1%-át jelenti.

X-irány
Az épület nincs merevítve az *x* irányban, így csak a két merevítőfal kisebbik tehetetlenségi nyomatékával számolhatunk – amit a gyakorlati számítások során általában el szoktunk hanyagolni. Nem is kapunk számottevő kritikus terhet:

$$N_{cr,x} = \frac{7.837 EI_y r_s}{H^2} = \frac{7.837 \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0.003906 \cdot 0.863}{30^2} = 1.5\ \text{MN} \qquad \{2.65\}$$

Tiszta csavarási kihajlás
A csavarási vizsgálathoz szükségünk van a nyírásközéppont és a geometriai középpont távolságára:

$$t = x_c = \frac{L}{2} - \bar{x}_o = \frac{15}{2} - 11.24 = -3.74\ \text{m} \qquad \{5.42\}$$

Ezzel a távolsággal az inerciasugár értéke már meghatározható:

$$i_p = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} = \sqrt{\frac{15^2 + 9^2}{12} + 3.74^2} = \sqrt{39.49} = 6.28\,\text{m} \qquad \{5.28\}$$

A rendszer eredeti Saint-Venant csavarási merevsége a falaktól és a keretektől származik:

$$(GJ) = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f} \left((K_i)_x y_i^2 + (K_i)_y x_i^2 \right) \qquad \{5.35\}$$

$$= 2 \cdot 10.42 \cdot 10^3 \cdot 0.015625 + 2 \cdot 530.2 \cdot 3.74^2 = 15158 \ \text{MNm}^2$$

A falak saját Saint-Venant csavarási merevsége (az első tag) mindössze 2.1%-a a teljes értéknek.

A hatékony Saint-Venant csavarási merevség:

$$(GJ)_e = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f} \left((K_{e,i})_x y_i^2 + (K_{e,i})_y x_i^2 \right) \qquad \{5.29\}$$

$$= 2 \cdot 10.42 \cdot 10^3 \cdot 0.015625 + 2 \cdot 530.2 \cdot 0.1817 \cdot 3.74^2 = 3021 \ \text{MNm}^2$$

A rendszer hatékonysági tényezője:

$$s_\varphi = \frac{(GJ)_e}{(GJ)} = \frac{3021}{15158} = 0.1993 \qquad \{5.34\}$$

A hatékony Saint-Venant csavarási merevséghez tartozó kritikus teher:

$$N_t = \frac{(GJ)_e}{i_p^2} = \frac{3021}{39.49} = 76.50\,\text{MN} \qquad \{5.33\}$$

Az öblösödési csavarási merevség a két faltól és a keretoszlopoktól származik. Az elhanyagolhatóan kicsi oszlopoktól függő tagot figyelmen kívül hagyva, értéke

$$EI_\omega = E_w \sum_{k=1}^{m} \left((I_{w,k})_x y_k^2 + (I_{w,k})_y x_k^2 \right) = 25000 \cdot 0.5625 \cdot 3.76^2 \cdot 2 = 397620 \ \text{MNm}^4 \qquad \{5.30\}$$

Az öblösödési merevséghez tartozó kritikus teher:

$$N_\omega = \frac{7.837 r_s EI_\omega}{i_p^2 H^2} = \frac{7.837 \cdot 0.863 \cdot 397620}{39.49 \cdot 30^2} = 75.7\,\text{MN} \qquad \{5.32\}$$

A β_φ kritikus teher arány

$$\beta_\varphi = \frac{N_t}{N_\omega} = \frac{76.5}{75.7} = 1.01 \qquad \{5.36\}$$

segítségével a kritikus teher paramétert az 5.2 táblázat szolgáltatja:

$$\alpha_\varphi = 3.5758 + \frac{5.624 - 3.5758}{2.0 - 1.0}(1.01 - 1.0) = 3.596 \qquad \{5.2 \text{ táblázat}\}$$

A tiszta csavarási kritikus teher így

$$N_{cr,\varphi} = N_\omega + N_t + (\alpha_\varphi - \beta_\varphi - 1)s_\varphi N_\omega \qquad \{5.31\}$$

$$= 75.7 + 76.5 + (3.596 - 1.01 - 1)0.1993 \cdot 75.7 = 176.1\,\text{MN}$$

A Saint-Venant és öblösödési csavarási módok közötti egymásrahatás (a harmadik tag) a teljes kritikus teher 13.6%-a.

A három alap kritikus teher ismeretében a kihajlási módok kombinálódását kell figyelembe vennünk.

A kombinálódás

A merevítőrendszer egyszeresen szimmetrikus és a függőleges teher eredője az *x* tengelyre esik. Ebben az esetben két dolog történhet. Síkbeli kihajlás jöhet létre az *x* irányban (amelyet az $N_{cr,x}$ kritikus teher jellemez), vagy pedig a síkbeli kihajlás az *y* síkban ($N_{cr,y}$) kombinálódik a tiszta elcsavarodó kihajlással ($N_{cr,\varphi}$). Ez utóbbi kombinált kritikus teher – a Föppl-Papkovics tétellel – közelítően:

$$N_{y\varphi} = \left(\frac{1}{N_{cr,y}} + \frac{1}{N_{cr,\varphi}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{462.2} + \frac{1}{176.1}\right)^{-1} = 127.5\,\text{MN} \qquad \{5.44\}$$

Az épület globális kritikus terhe az $N_{cr,x}$ és $N_{y\varphi}$ közül a kisebbik, vagyis

$$N_{cr} = \min\,(N_{cr,x}, N_{y\varphi}) = 1.5\,\text{MN} \qquad \{5.45\}$$

A kombinálódást a „pontos” harmadfokú egyenlet megoldásának segítségével is kezelhettük volna, de jóval hosszabb számítás után ugyanarra az eredményre – kritikus teherre – jutottunk volna. Ezt az igen kicsi $N_{cr,x}$ birtokában előre lehetett látni, így elkerülhető volt a jóval hosszabb számítás.

Az épület teljes függőleges terhe

$$N = LBQn = 15 \cdot 9 \cdot 0.01 \cdot 10 = 13.5\,\text{MN} \qquad \{6.2\}$$

és így a globális biztonsági tényező értéke

$$\lambda = \frac{N_{cr}}{N} = \frac{1.5}{13.5} = 0.11 \qquad \{6.3\}$$

ami egy instabil, teljesen elfogadhatatlan merevítőrendszert jelez.

Vizsgálat a globális biztonsági tényező összetevőinek segítségével

A 6.1 pontban bevezetett globális biztonsági tényező összetevőinek segítségével részletesebb képet kaphatunk a merevítőrendszer viselkedéséről. Ezek az értékek rendre

$$\lambda_x = \frac{N_{cr,x}}{N} = \frac{1.5}{13.5} = 0.11 \qquad \{6.6\}$$

$$\lambda_y = \frac{N_{cr,y}}{N} = \frac{412.2}{13.5} = 34.2 \qquad \{6.7\}$$

és

$$\lambda_\varphi = \frac{N_{cr,\varphi}}{N} = \frac{176.1}{13.5} = 13.0 \qquad \{6.8\}$$

Az első két érték a síkbeli, a harmadik érték pedig a csavarási viselkedéssel kapcsolatos merevítés minőségét jellemzi. Az első érték az *x* irányú merevítés elégtelenségét bizonyítja. (Ez persze ebben a szándékosan kiválasztott egyszerű esetben a 6.3 ábráról az első pillanatban látható; nagyon sok olyan merevítőrendszerrel találkozhatunk viszont a gyakorlatban, ahol a helyzet nem ilyen egyértelműen egyszerű és a globális biztonsági tényező összetevői értékes segítséget nyújtanak a merevítőrendszer kiegyensúlyozottan hatékony megtervezéséhez.)

A legkisebb sajátfrekvencia

A stabilitásvizsgálathoz hasonlóan a három alap (síkbeli az *x* és *y* irányban és tiszta csavaró) frekvenciát határozzuk meg először, majd figyelembe vesszük az alapmódok kombinálódását. (A rész-számításokhoz a frekvenciák négyzeteivel kell dolgozni.)

Az r_f tömegeloszlási redukciós tényezőt a szintszám függvényében a 4.1 táblázatból kapjuk:

$$r_f = 0.911 \qquad \{4.1 \text{ táblázat}\}$$

A frekvenciaszámításokhoz szükségünk van az egységhosszra jutó tömeg értékére is:

$$m = \rho A = \frac{\gamma}{g} A = \frac{3}{9.81} 15 \cdot 9 = 41.28 \text{ kg/m} \qquad \{4.7\}$$

Ez az érték az egész épületre vonatkozik, de felhasználható az egyes merevítőelemek frekvenciájának meghatározása során is, hiszen ezeket a részeredményeket végül az egész épület sajátfrekvenciájának meghatározására használjuk fel.

Mielőtt rátérnénk az egész épület vizsgálatára, célszerű meghatározni a keretek nyírási merevségének hatékonysági tényezőjét (ami nem azonos a stabilitásvizsgálatnál kiszámított hatékonysági tényezővel). E célból elő kell állítani az eredeti nyírási merevséghez és a globális hajlítási merevséghez tartozó részfrekvenciákat (illetve a négyzetüket):

$$f_{s'}^2 = \frac{1}{(4H)^2} \frac{r_f^2 K}{m} = \frac{0.911^2 \cdot 530200}{(4 \cdot 30)^2 \cdot 41.28} = 0.7402 \text{ Hz}^2 \qquad \{4.6\}$$

és

$$f_g^2 = \frac{0.313 r_f^2 E_c I_g}{H^4 m} = \frac{0.313 \cdot 0.911^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 0.0783}{30^4 \cdot 41.28} = 0.1217 \text{ Hz}^2 \qquad \{4.8\}$$

A hatékonysági tényező négyzete ezek segítségével:

$$s_f^2 = \frac{f_g^2}{f_g^2 + f_{s'}^2} = \frac{0.1217}{0.1217 + 0.7402} = 0.1412 \qquad \{4.10\}$$

Fentiek birtokában rátérhetünk a síkbeli rezgés vizsgálatára.

Az y irányú rezgés frekvenciája

A rendszer teljes hajlítási merevségének ismeretében [{5.12} képlet a 6.2.2 pont elején] meghatározható az *y* irányú rezgés hajlítási merevséghez tartozó frekvenciája:

$$f_b^2 = \frac{0.313 r_f^2 EI}{H^4 m} = \frac{0.313 \cdot 0.911^2 \cdot 28387 \cdot 10^3}{30^4 \cdot 41.28} = 0.2205\,\mathrm{Hz}^2 \qquad \{4.15\}$$

A rendszer hatékony nyírási merevsége:

$$K_e = \sum_{i=1}^{f} s_{f,i}^2 K_i = 0.1412 \cdot 530200 \cdot 2 = 149728\,\mathrm{kN} \qquad \{4.11\}$$

A hatékony nyírási merevséghez tartozó frekvencia négyzete most már meghatározható:

$$f_s^2 = \frac{1}{(4H)^2} \frac{r_f^2 K_e}{m} = \frac{0.911^2 \cdot 149728}{(4 \cdot 30)^2 \cdot 41.28} = 0.2090\,\mathrm{Hz}^2 \qquad \{4.13\}$$

A rendszer hatékonysági tényezője:

$$s_f = \sqrt{\frac{K_e}{K}} = \sqrt{\frac{149728}{2 \cdot 530200}} = 0.3758 \qquad \{4.12\}$$

A

$$k = H\sqrt{\frac{K_e}{EI}} = 30\sqrt{\frac{149728}{28387 \cdot 10^3}} = 2.179 \qquad \{4.17\}$$

dimenziótlan paraméter függvényében meghatározható a frekvenciaparaméter:

$$\eta = 0.8628 + \frac{0.9809 - 0.8628}{2.5 - 2.0}(2.179 - 2.0) = 0.905 \qquad \{4.2\ \text{táblázat}\}$$

A *y* irányú rezgés frekvenciája így

$$f_y = \sqrt{f_b^2 + f_s^2 + \left(\frac{\eta^2}{0.313} - \frac{k^2}{5} - 1\right) s_f f_b^2} \qquad \{4.18\}$$

$$= \sqrt{0.2205 + 0.209 + \left(\frac{0.905^2}{0.313} - \frac{2.179^2}{5} - 1\right) 0.3758 \cdot 0.2205} = 0.696\,\mathrm{Hz}$$

Az x irányú rezgés frekvenciája

A stabilitásvizsgálat során már tapasztaltuk, hogy a merevítőrendszer igen gyenge az *x*

irányban. Most is ez a helyzet, amikor az *x* irányú rezgés frekvenciáját a két fal síkjukra merőleges irányban számított merevsége határozza meg. (Ez az a merevség, amit a gyakorlatban „normális” esetekben el szokás hanyagolni.)

Az *x* irányú rezgés frekvenciája:

$$f_x = \frac{0.56 r_f}{H^2}\sqrt{\frac{EI_y}{m}} = \frac{0.56 \cdot 0.911}{30^2}\sqrt{\frac{25 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0.003906}{41.28}} = 0.039\,\text{Hz} \qquad \{2.64\}$$

A tiszta csavarási rezgés frekvenciája

A számítás a nyírásközéppont helyének meghatározásával kezdődik. Ezt a merevítőelemek sajátfrekvenciájának felhasználásával kell végrehajtani, de most, az *x* irányban igen gyenge rendszer esetében, közelítően felhasználhatjuk a nyírásközéppont stabilitásvizsgálatnál már meghatározott koordinátáit. (Ez a közelítés nem befolyásolja a számítás végeredményét.)

Az eredeti Saint-Venant csavarási merevség a falakból és a keretekből származik. Értéke ebben az esetben azonos a frekvencia- és stabilitásvizsgálatnál:

$$(GJ) = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f}\left((K_i)_x y_i^2 + (K_i)_y x_i^2\right) \qquad \{5.35\} \text{ vagy } \{4.27\}$$

$$= 2 \cdot 10.42 \cdot 10^3 \cdot 0.015625 + 2 \cdot 530.2 \cdot 3.74^2 = 15158\,\text{MNm}^2$$

A kereteknek fent már kiszámított hatékonysági mutatójával a rendszer hatékony Saint-Venant csavarási merevsége:

$$(GJ)_e = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f}\left((K_{e,i})_x y_i^2 + (K_{e,i})_y x_i^2\right) \qquad \{4.21\}$$

$$= 2 \cdot 10.42 \cdot 10^3 \cdot 0.015625 + 2 \cdot 530.2 \cdot 0.1412 \cdot 3.74^2 = 2420\,\text{MNm}^2$$

A teljes rendszer hatékonysági mutatója:

$$s_\varphi = \sqrt{\frac{(GJ)_e}{(GJ)}} = \sqrt{\frac{2420}{15158}} = 0.3996 \qquad \{4.26\}$$

A rendszer öblösödési csavarási merevsége is azonos a frekvencia- és stabilitás-vizsgálatnál. Értéke – a keretoszlopok közreműködésének elhanyagolásával:

$$EI_\omega = E_w \sum_{k=1}^{m}\left((I_{w,k})_x y_k^2 + (I_{w,k})_y x_k^2\right) \qquad \{4.22\} \text{ vagy } \{5.30\}$$

$$= 25000 \cdot 0.5625 \cdot 3.76^2 \cdot 2 = 397620\,\text{MNm}^4$$

A stabilitásvizsgálatnál már kiszámított inerciasugár értékét felhasználva a frekvencia két összetevője már meghatározható:

$$f_\omega^2 = \frac{0.313 r_f^2 EI_\omega}{i_p^2 H^4 m} = \frac{0.313 \cdot 0.911^2 \cdot 3.9762 \cdot 10^8}{39.49 \cdot 30^4 \cdot 41.28} = 0.0782\,\text{Hz}^2 \qquad \{4.24\}$$

és

$$f_t^2 = \frac{r_f^2 (GJ)_e}{16 i_p^2 H^2 m} = \frac{0.911^2 \cdot 2420 \cdot 10^3}{16 \cdot 39.49 \cdot 30^2 \cdot 41.28} = 0.0856\,\mathrm{Hz}^2 \qquad \{4.25\}$$

A

$$k_\varphi = H\sqrt{\frac{(GJ)_e}{EI_\omega}} = 30\sqrt{\frac{2420}{397620}} = 2.34 \qquad \{4.28\}$$

dimenziótlan csavarási tényező függvényében a frekvenciaparaméter már meghatározható:

$$\eta_\varphi = 0.8628 + \frac{0.9809 - 0.8628}{2.5 - 2.0}(2.34 - 2.0) = 0.943 \qquad \{4.2\ \text{táblázat}\}$$

A tiszta csavarási rezgés frekvenciájának értéke így

$$f_\varphi = \sqrt{f_\omega^2 + f_t^2 + \left(\frac{\eta_\varphi^2}{0.313} - \frac{k_\varphi^2}{5} - 1\right) s_\varphi f_\omega^2} \qquad \{4.23\}$$

$$= \sqrt{0.0782 + 0.0856 + \left(\frac{0.943^2}{0.313} - \frac{2.34^2}{5} - 1\right) 0.3996 \cdot 0.0782} = 0.433\,\mathrm{Hz}$$

Az alaprezgések kombinálódása: az épület legkisebb sajátfrekvenciája
Az *y* irányú rezgés kombinálódik a tiszta csavarási rezgéssel. A kapcsolt rezgés frekvenciája közelítően a Föppl-Papkovics tétellel határozható meg:

$$f_{y\varphi} = \left(\frac{1}{f_y^2} + \frac{1}{f_\varphi^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{0.696^2} + \frac{1}{0.433^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 0.368\,\mathrm{Hz} \qquad \{4.36\}$$

Mivel az *x* irányú rezgés frekvenciája ennél az értéknél (jóval) kisebb, az épület sajátfrekvenciája ez a kisebb érték:

$$f = f_x = 0.039\,\mathrm{Hz} \qquad \{2.64\}$$

A maximális tetőponti eltolódás

Az előző két pontban meghatározott eredmények alapján biztonsággal kijelenthető, hogy a merevítőrendszer gyengeségének fő oka az *x* irányú merevség elégtelen volta. A maximális tetőponti eltolódás meghatározásánál, közelítő módon, ennélfogva csak az *x* irányú eltolódásokkal foglalkozunk. A merevítőfalakhoz viszonyítva a keretek merevsége *x* irányban kicsi és így a keretek ellenállását elhanyagoljuk.

Az épület számított maximális eltolódása így:

$$x_{\max} = x(H) = \frac{w_x H^4}{8EI_y} = \frac{10.9 \cdot 30^4}{8 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 3.906 \cdot 10^{-3}} = 5.65\,\mathrm{m} \qquad \{2.63\}$$

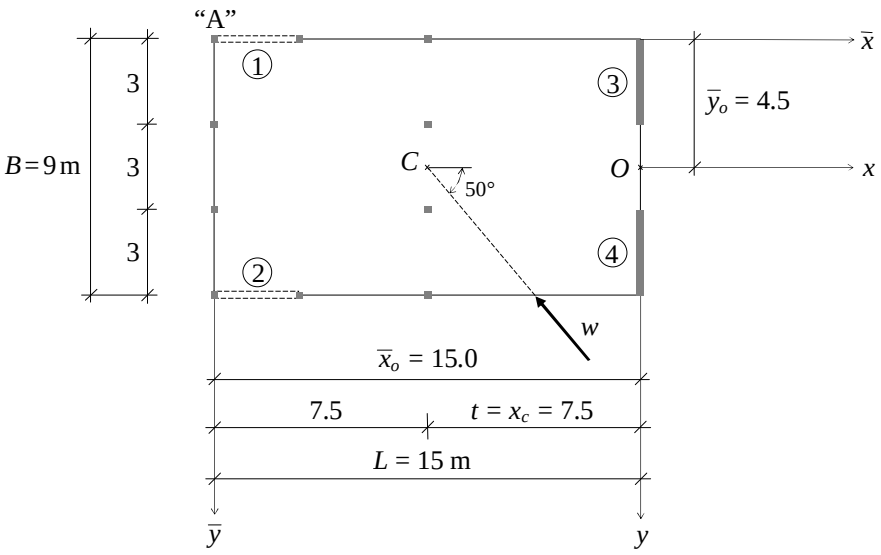
Ez természetesen csak egy – az illusztráció érdekében – számított érték, hiszen ilyen mértékű eltolódás egy tényleges szerkezet esetén szóba sem jöhet.

A számítások eredményeit összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a merevítőrendszer teljesen elfogadhatatlan. A maximális (számított) eltolódás túl nagy, a sajátfrekvencia túl kicsi és, ami a legfontosabb, az épület nem stabil. A merevítőrendszer alkalmatlanságát a globális biztonsági tényező értéke ($\lambda = 0.11$) minden kétséget kizáróan jelzi. Egy elméletileg stabil épület esetében ennek az értéknek egynél nagyobbnak kellene lenni, de a javasolt alsó határ 10.0.

A rendszer fő gyengeségét az okozza, hogy *x* irányban az épület gyakorlatilag nem rendelkezik merevséggel. Hogy javítsuk a merevítőrendszer hatékonyságát, a két keretet 90 fokkal elfordítjuk és áttoljuk az épület bal oldalára (6.4 ábra). Ez az elrendezés egy kiegyensúlyozottabb merevítőrendszert eredményez. A következő pontban ezt az elrendezést vizsgáljuk meg.

6.2.3 Egy jobb szerkezeti megoldás: 2. elrendezés

A 6.4 ábrán vázolt elrendezés orvosolja az előző elrendezés végzetes gyengeségét, nevezetesen ennél az új elrendezésnél az épületnek *x* irányban is van számottevő merevsége. Az majd a részletes számításokból derül ki, hogy a módosított elrendezés elegendő mértékben javítja-e a merevítőrendszer teljesítményét.



6.4 ábra. 2. elrendezés: egy jobb elrendezésű merevítőrendszer.

Stabilitásvizsgálat

Először meghatározzuk a három alap kritikus terhet ($N_{cr,x}$, $N_{cr,y}$ és $N_{cr,\varphi}$), majd figyelembe vesszük a kombinálódásukat.

Y-irány

Az *y* irányú kihajlás ellen a 3. és 4. jelű fal dolgozik, amelyek kritikus terhét a 6.2.1 pontban már meghatároztuk. A merevítőrendszer kritikus terhe így

$$N_{cr,y} = 2 \cdot 105.7 = 211.4\,\text{MN} \qquad \{2.65\} \text{ a 6.2.1 pont elején}$$

X-irány

Az *x* irányban az 1. és 2. jelű, azonos kialakítású keret merevíti az épületet. A keretek kritikus terhét is kiszámítottuk már a 6.2.1 pontban. Az épület kritikus terhe az *x* irányban így

$$N_{cr,x} = 2 \cdot 106.4 = 212.8\,\text{MN} \qquad \{2.52\} \text{ a 6.2.1 pont végén}$$

Tiszta elcsavarodó kihajlás

A két keret és két fal szimmetrikus elrendezésének köszönhetően a nyírásközéppont helye számítás nélkül rendelkezésre áll:

$$\bar{x}_o = 15.0\,\text{m} \qquad \text{és} \qquad \bar{y}_o = 4.5\,\text{m}$$

Az inerciasugár:

$$i_p = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} = \sqrt{\frac{15^2 + 9^2}{12} + 7.5^2} = \sqrt{81.75} = 9.04\,\text{m} \qquad \{5.28\}$$

A falak saját Saint-Venant csavarási merevsége mellett a két keret a nyírási merevségével járul hozzá a rendszer csavarási ellenállásához. A két fal merőleges távolsága a nyírásközép-ponttól zérus.

A rendszer eredeti Saint-Venant csavarási merevsége:

$$(GJ) = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f} \left((K_i)_x y_i^2 + (K_i)_y x_i^2 \right) \qquad \{5.35\}$$

$$= 2 \cdot 10.42 \cdot 10^3 \cdot 0.015625 + 2 \cdot 530.2 \cdot 4.5^2 = 21799\,\text{MNm}^2$$

A falak részesedése (az első tag) mindössze 1.5%.

A 6.2.1 pontban már kiszámolt hatékonysági mutatóval {5.9} a hatékony Saint-Venant csavarási merevség:

$$(GJ)_e = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f} \left((K_{e,i})_x y_i^2 + (K_{e,i})_y x_i^2 \right) \qquad \{5.29\}$$

$$= 2 \cdot 10.42 \cdot 10^3 \cdot 0.015625 + 2 \cdot 530.2 \cdot 0.1817 \cdot 4.5^2 = 4227\,\text{MNm}^2$$

Mivel a keretoszlopok hatása elhanyagolhatóan kicsi és a falak merőleges távolsága a nyírásközépponttól zérus, az öblösödési csavarási merevség értéke gyakorlatilag zérus:

$$EI_\omega \cong 0 \qquad \{5.30\}$$

A tiszta csavarás kritikus terhe így csak a Saint-Venant merevséghez tartozó összetevőt tartalmazza:

$$N_{cr,\varphi} = N_t = \frac{(GJ)_e}{i_p^2} = \frac{4227}{81.75} = 51.7\,\text{MN} \qquad \{5.31\} \text{ és } \{5.33\}$$

A merevítőrendszer egyszeresen szimmetrikus és a függőleges teher eredője az *x* tengelyre esik. Az *y* irányú kihajlás ($N_{cr,y}$) így kombinálódik a tiszta elcsavarodó kihajlással ($N_{cr,\varphi}$). A kombinált kritikus teher – közelítően

$$N_{y\varphi} = \left(\frac{1}{N_{cr,y}} + \frac{1}{N_{cr,\varphi}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{211.4} + \frac{1}{51.7} \right)^{-1} = 41.5\,\text{MN} \qquad \{5.44\}$$

Az épület globális kritikus terhe az $N_{cr,x}$ és az $N_{y\varphi}$ közül a kisebb, vagyis:

$$N_{cr} = \min\,(N_{cr,x}, N_{y\varphi}) = 41.5\,\text{MN} \qquad \{5.45\}$$

Az épület teljes függőleges terhe $N = LBQn$ =13.5 MN. A globális biztonsági tényező így

$$\lambda = \frac{N_{cr}}{N} = \frac{41.5}{13.5} = 3.1 \qquad \{6.3\}$$

ami stabil épületet jelez, de a globális biztonsági tényező értéke nem éri el a javasolt minimális értéket. Ami a stabilitást illeti, az előző elrendezéshez képest a javulás jelentős mértékű, de nem elegendő. (Ha a kombinálódást pontosan, az {5.39} harmadfokú egyenlettel vesszük figyelembe, akkor a kritikus teherre N_{cr} = 43.8 MN, a biztonsági tényezőre pedig λ = 3.25 értékeket kapunk.)

Vizsgálat a globális biztonsági tényező összetevőinek segítségével

A globális biztonsági tényező összetevői az előző elrendezésnél jóval kiegyensúlyozottabb merevítőrendszert jeleznek. A jellemző értékek rendre

$$\lambda_x = \frac{N_{cr,x}}{N} = \frac{212.8}{13.5} = 15.8 \qquad \{6.6\}$$

$$\lambda_y = \frac{N_{cr,y}}{N} = \frac{211.4}{13.5} = 15.7 \qquad \{6.7\}$$

és

$$\lambda_\varphi = \frac{N_{cr,\varphi}}{N} = \frac{51.7}{13.5} = 3.8 \qquad \{6.8\}$$

Látható, hogy a merevítőrendszer „gyenge pontja” a viszonylag kis ellenállása az elcsavarodással szemben.

A következő két pontban azt nézzük meg, hogy hogyan alakul a sajátfrekvencia és a maximális tetőponti eltolódás értéke.

A legkisebb sajátfrekvencia

Először a három alapfrekvenciát (*x* és *y* irányú síkbeli és tiszta csavarási) számoljuk ki, majd figyelembe vesszük az alapmódok kombinálódását. Az épület viselkedése nagyon hasonló a stabilitásvizsgálatnál tapasztaltakhoz.

Y-irány

Az *y* irányú rezgés frekvenciáját a két azonos méretű fal merevsége határozza meg. A síkbeli frekvencia:

$$f_y = \frac{0.56 r_f}{H^2} \sqrt{\frac{EI_x}{m}} = \frac{0.56 \cdot 0.911}{30^2} \sqrt{\frac{25 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0.5625}{41.28}} = 0.468\,\text{Hz} \qquad \{2.64\}$$

X-irány

A *x* irányú rezgést a két azonos kialakítású keret szabályozza. Először a hatékonysági tényezőt kell meghatározni. Ezt az eredeti nyírási merevséghez tartozó

$$f_{s'}^2 = \frac{1}{(4H)^2}\frac{r_f^2 K}{m} = \frac{0.911^2 \cdot 530200}{(4\cdot 30)^2 \cdot 41.28} = 0.7402\,\mathrm{Hz}^2 \qquad \{4.6\}$$

és a globális hajlítási merevséghez tartozó

$$f_g^2 = \frac{0.313 r_f^2 E_c I_g}{H^4 m} = \frac{0.313 \cdot 0.911^2 \cdot 2\cdot 10^8 \cdot 0.0783}{30^4 \cdot 41.28} = 0.1217\ \mathrm{Hz}^2 \qquad \{4.8\}$$

frekvenciák négyzete segítségével tehetjük meg:

$$s_f^2 = \frac{f_g^2}{f_g^2 + f_{s'}^2} = \frac{0.1217}{0.1217 + 0.7402} = 0.1412 \qquad \{4.10\}$$

A rendszer hatékony nyírási merevsége így:

$$K_e = \sum_{i=1}^{f} s_{f,i}^2 K_i = 0.1412 \cdot 530.2 \cdot 2 = 149.728\,\mathrm{MN} \qquad \{4.11\}$$

A hatékony nyírási merevséghez tartozó frekvencia négyzete:

$$f_s^2 = \frac{1}{(4H)^2}\frac{r_f^2 K_e}{m} = \frac{0.911^2 \cdot 149728}{(4\cdot 30)^2 \cdot 41.28} = 0.209\,\mathrm{Hz}^2 \qquad \{4.13\}$$

Az eredeti és a hatékony nyírási merevségek segítségével meghatározhatjuk a rendszer hatékonysági mutatóját:

$$s_f = \sqrt{\frac{K_e}{K}} = \sqrt{\frac{149.728}{2\cdot 530.2}} = 0.3758 \qquad \{4.12\}$$

A két keret lokális hajlítási merevsége:

$$EI = E_c I_c = 2(2\cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 3.281\cdot 10^{-4}) = 262480\,\mathrm{kNm}^2 \qquad \{4.14\}$$

A lokális hajlítási merevséghez tartozó frekvencia:

$$f_b^2 = \frac{0.313 r_f^2 EI}{H^4 m} = \frac{0.313 \cdot 0.911^2 \cdot 262480}{30^4 \cdot 41.28} = 0.00204\,\mathrm{Hz}^2 \qquad \{4.15\}$$

A

$$k = H\sqrt{\frac{K_e}{EI}} = 30\sqrt{\frac{149728}{262480}} = 22.66 \qquad \{4.17\}$$

dimenziótlan paraméter segítségével a frekvenciaparaméter értéke:

$$\eta = 5.278 + \frac{7.769 - 5.278}{10}(22.66 - 20.0) = 5.941 \qquad \{4.2 \text{ táblázat}\}$$

Minden rendelkezésre áll az *x* irányú rezgés frekvenciájának meghatározásához:

$$f_x = \sqrt{f_b^2 + f_s^2 + \left(\frac{\eta^2}{0.313} - \frac{k^2}{5} - 1\right) s_f \, f_b^2} \qquad \{4.18\}$$

$$= \sqrt{0.00204 + 0.209 + \left(\frac{5.941^2}{0.313} - \frac{22.66^2}{5} - 1\right) 0.3758 \cdot 0.00204} = 0.467 \text{ Hz}$$

Tiszta csavarási rezgés

A szimmetriaviszonyoknak köszönhetően számítás nélkül rendelkezésünkre áll a nyírásközéppont két helykoordinátája, amelyek megegyeznek a stabilitásvizsgálatnál használt értékekkel:

$$\bar{x}_o = 15.0 \text{ m} \qquad \text{és} \qquad \bar{y}_o = 4.5 \text{ m}$$

A merevítőrendszer viselkedése hasonló a stabilitásvizsgálat során tapasztaltakhoz: a csavarási ellenállás most is gyakorlatilag a két keret ellenállásából származik. Az eredeti Saint-Venant csavarási merevség azonos a stabilitásvizsgálatnál már kiszámított értékkel:

$$(GJ) = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f} \left((K_i)_x \, y_i^2 + (K_i)_y \, x_i^2 \right) \qquad \{4.27\}$$

$$= 2 \cdot 10.42 \cdot 10^3 \cdot 0.015625 + 2 \cdot 530.2 \cdot 4.5^2 = 21799 \text{ MNm}^2$$

A hatékony Saint-Venant csavarási merevség (az *x* iránynál {4.11} alatt kiszámított K_e értékkel számolva):

$$(GJ)_e = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f} \left((K_{e,i})_x \, y_i^2 + (K_{e,i})_y \, x_i^2 \right) \qquad \{4.21\}$$

$$= 2 \cdot 10.42 \cdot 10^3 \cdot 0.015625 + 149.728 \cdot 4.5^2 = 3358 \text{ MNm}^2$$

Amint azt már a stabilitásvizsgálatnál megállapítottuk, a keretoszlopok ellenállásából számítható öblösödési csavarási ellenállás elhanyagolhatóan kicsi, a merevítőfalak merőleges távolsága a nyírásközépponttól zérus, így az öblösödési csavarási merevség értéke gyakorlatilag zérus:

$$EI_\omega \cong 0 \qquad \{4.22\}$$

Az inerciasugár értéke azonos a stabilitásvizsgálat során már kiszámított értékkel, így a tiszta csavarási rezgés frekvenciája:

$$f_\varphi = f_t = \frac{r_f}{4 i_p H}\sqrt{\frac{(GJ)_e}{m}} = \frac{0.911}{4 \cdot 9.04 \cdot 30}\sqrt{\frac{3358000}{41.28}} = 0.2395\,\text{Hz} \qquad \{4.23\} \text{ és } \{4.25\}$$

Egyenletes tömegeloszlást feltételezve a tömeg súlypontja az *x* tengelyre esik és így az *y* irányú rezgés kombinálódik a tiszta csavarási rezgéssel. Az eredő frekvencia:

$$f_{y\varphi} = \left(\frac{1}{f_y^2} + \frac{1}{f_\varphi^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{0.468^2} + \frac{1}{0.2395^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 0.213\,\text{Hz} \qquad \{4.36\}$$

Ez az érték kisebb, mint az *x* irányú rezgés $f_x = 0.467$ Hz frekvenciája, így az épület legkisebb sajátfrekvenciája:

$$f = \min\,(f_x,\ f_{y\varphi}) = 0.213\,\text{Hz} \qquad \{4.37\}$$

A fentiekből nyilvánvaló, hogy a csavarási ellenállás viszonylag kis értéke eredményezte ezt a kis értéket.

A maximális tetőponti eltolódás

A szélteher két komponensét külön-külön kezeljük, majd az eredményeket összegezzük.

Az *x* irányú szélterhet a két azonos kialakítású keretből álló szimmetrikus merevítő-rendszer ellensúlyozza. Elegendő a rendszer felét (egy keretet) figyelembe venni (a teher felével):

$$w_x = \frac{1}{2}(17 \cdot \cos 50^\circ) = 5.46\,\text{kN/m}$$

A számításhoz szükséges segédmennyiségek: $\{2.14\}$

$$a = \frac{K}{EI_g} = \frac{530.2}{2 \cdot 10^5 \cdot 7.83 \cdot 10^{-2}} = 0.033857, \quad b = \frac{K}{EI} = \frac{530.2}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 3.281 \cdot 10^{-4}} = 4.04$$

$$s = 1 + \frac{a}{b} = 1 + \frac{0.033857}{4.04} = 1.00838 \cong 1.0, \qquad \kappa H = H\sqrt{a+b} = 60.6$$

A lokális és globális tehetetlenségi nyomatékok összege:

$$I_f = I + I_g = 2 \cdot 3.281 \cdot 10^{-4} + 7.83 \cdot 10^{-2} = 0.079\,\text{m}^4 \qquad \{2.21\}$$

A maximális *x* irányú tetőponti eltolódás:

$$u_{\max} = u(H) = \frac{wH^4}{8EI_f} + \frac{wH^2}{2Ks^2} - \frac{wEI}{K^2 s^3}\left(\frac{1 + \kappa H \sinh \kappa H}{\cosh \kappa H} - 1\right) \qquad \{2.22\}$$

$$= \frac{5.46 \cdot 30^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 0.079} + \frac{5.46 \cdot 30^2}{2 \cdot 530200} - \frac{5.46 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 3.281 \cdot 10^{-4}}{530200^2}\left(\frac{1 + 60.6 \sinh 60.6}{\cosh 60.6} - 1\right) =$$

$$= 0.0350 + 0.0046 - 0.00015 = 0.0395\,\text{m}$$

Az y irányú $w_y = 13$ kN/m szélteher komponens esetében a maximális eltolódást két lépésben kapjuk meg. Először a nyírásközépponton áthaladó teher hatására keletkező eltolódást határozzuk meg, majd kiszámítjuk és hozzáadjuk a nyírásközéppont körül forgató csavarónyomaték hatására keletkező többlet-eltolódást.

A nyírásközépponton áthaladó teher esetében a két merevítőfalat vehetjük figyelembe és a maximális tetőponti eltolódás értéke:

$$v_o = \frac{13 \cdot 30^4}{8 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0.5625} = 0.0468\,\text{m} \qquad \{2.63\}$$

Felhasználva a nyírásközéppont korábban már megállapított helyét, a nyírásközéppont körül forgató csavarónyomaték értéke:

$$m = w_y x_c = 17 \cdot \sin 50° \cdot 7.5 = 97.67\,\text{kNm/m} \qquad \{3.55\}$$

Ez a csavarónyomaték az épület nyírásközéppont körüli elcsavarodását okozza, amely további eltolódásokat eredményez. A csavarónyomatékot az épület csavarási merevségei révén egyensúlyozza, melyeket a két keret szolgáltat. (A merevítőfalak a nyírásközépponttól mért zérus merőleges távolságuk miatt nem fejtenek ki számottevő csavarási ellenállást.)

Mivel a két keret azonos kialakítású, távolsága a nyírásközépponttól szintén azonos (4.5 m), a két keret azonos mértékben veszi ki a részét a csavarási ellenállásból, vagyis a csavarónyomaték-osztó mindkét keretre nézve $q_{\omega,1} = 0.5$. Az 1. jelű keretre így

$$m_1 = q_{\omega,1} m = 0.5 \cdot 97.67 = 48.835\,\text{kNm/m} \qquad \{3.58\}$$

csavarónyomaték jut.

A kerethez tartozó globális öblösödési csavarási merevség:

$$EI_{g\omega} = EI_g t^2 = 2 \cdot 10^5 \cdot 7.83 \cdot 10^{-2} \cdot 4.5^2 = 317115\,\text{MNm}^4 \qquad \{3.51\}$$

A kerethez tartozó Saint-Venant csavarási merevség:

$$(GJ) = Kt^2 = 530.2 \cdot 4.5^2 = 10737\,\text{MNm}^2 \qquad \{3.53\}$$

Lokális öblösödési csavarási merevség a falakból nem származik (a nyírásközépponttól mért zérus merőleges távolság miatt). A falak másik irányú hajlításából elvileg származik, de ez kicsi és elhanyagolható. Hasonló a helyzet a keretek oszlopaival. A lokális öblösödési csavarási merevség így:

$$EI_\omega \cong 0 \qquad \{3.50\}$$

és

$$EI_{f\omega} = EI_{g\omega} = 317115\ \text{MNm}^4 \qquad \{3.52\}$$

Az épület nyírásközéppont körüli elcsavarodása az 1. jelű keret fenti adataival számolva:

$$\varphi_{\max} = \varphi_1(H) = \frac{m_1 H^4}{8EI_{f\omega}} + \frac{m_1 H^2}{2(GJ)s^2} - \frac{m_1 EI_\omega}{(GJ)^2 s^3}\left(\frac{1+\kappa H \sinh \kappa H}{\cosh \kappa H} - 1\right) \qquad \{3.60\}$$

$$= \frac{48.835 \cdot 30^4}{8 \cdot 317115000} + \frac{48.835 \cdot 30^2}{2 \cdot 10737000} - 0 = 0.0156 + 0.0020 = 0.0176 \text{ rad} \quad (=0.0176 \times 57.3 = 1.0 \text{ fok})$$

Az épület maximális *y* irányú tetőponti eltolódása az alaprajz bal oldali sarokpontjánál jön létre („A”-val jelölve a 6.4 ábrán). Értéke:

$$v_{\max} = v(H) = v_o + \varphi x_{\max} = 0.0468 + 0.0176 \cdot 15 = 0.311 \text{ m} \qquad \{3.2\}$$

ahol $x_{\max}$ a sarokpont távolsága a nyírásközépponttól. A {3.2} képlet tanúsága szerint az eltolódás túlnyomó része az épület elcsavarodása következtében keletkezik.

Az épület maximális eltolódása:

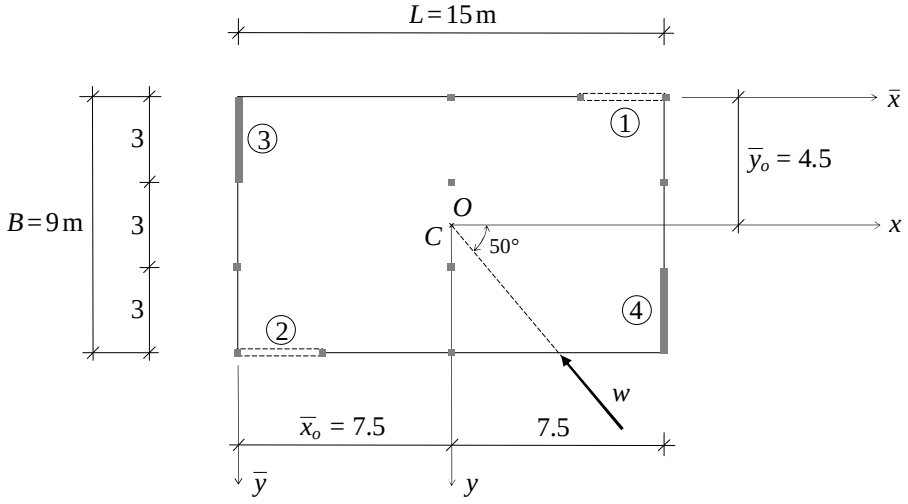
$$d_{\max} = \sqrt{0.0395^2 + 0.311^2} = 0.313 \text{ m}$$

Ahogyan azt már a kritikus teher megnövekedett értéke jelezte, a merevítőrendszer viselkedése drasztikusan javult az előző elrendezéshez képest. Jelentősen nőtt a sajátfrekvencia értéke és csökkent a tetőponti eltolódás is. A tetőponti eltolódás értéke azonban még mindig messze túllépi a javasolt maximális értéket (H/500 = 0.06 m).

A következő pontban látni fogjuk, hogy lehetséges a merevítőrendszer hatékonyságának további javítása.

6.2.4 Egy hatékony merevítőrendszer: 3. elrendezés

Az előző elrendezés eredményei azt mutatják, hogy a merevítőrendszer hatékonyságát a viszonylag kis csavarási ellenállása korlátozta. A merevítőelemek újabb átrendezése során tehát arra törekszünk, hogy a csavarási ellenállást növeljük. E célból az 1. és 3. jelű merevítőelemet felcseréljük (6.5 ábra). Az így keletkező merevítőrendszer kétszeresen szimmetrikus és mindkét főirányban jelentékeny merevséggel rendelkezik. A rendszer csavarási ellenállása megnőtt, mert most már mind a négy merevítőelem rendelkezik „csavarási karral” (vagyis a nyírásközépponttól mért merőleges távolsággal).



6.5 ábra. 3. elrendezés: egy hatékony elrendezésű merevítőrendszer.

Stabilitásvizsgálat

Először meghatározzuk a három alap (a két síkbeli és a tiszta csavarási) kritikus terhet, majd foglalkozunk az alap kritikus terhek kombinálódásával.

Y-irány
Ugyanúgy mint az előző esetben, az *y* irányú kihajlást most is a két fal akadályozza. A kritikus teher értéke:

$$N_{cr,y} = 2 \cdot 105.7 = 211.4\,\text{MN} \qquad \{2.65\} \text{ a 6.2.1 pont elején}$$

X-irány
Az *x* irányban is azonos a helyzet az előző pontban vázolt viselkedéssel: a kihajlást a két keret akadályozza. A kritikus teher így

$$N_{cr,x} = 2 \cdot 106.4 = 212.8\,\text{MN} \qquad \{2.52\} \text{ a 6.2.1 pont végén}$$

Tiszta elcsavarodó kihajlás
A falak és keretek kétszeresen szimmetrikus elrendezése miatt a nyírásközéppont helye számítás nélkül rendelkezésre áll:

$$\bar{x}_o = 7.5\,\text{m} \qquad \text{és} \qquad \bar{y}_o = 4.5\,\text{m}$$

Az inerciasugár:

$$i_p = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} = \sqrt{\frac{15^2 + 9^2}{12}} = \sqrt{25.5} = 5.05\,\text{m} \qquad \{5.28\}$$

A két kerettel kapcsolatos eredeti és a hatékony Saint-Venant csavarási merevség azonos az előző esetnél kiszámított értékekkel:

$$(GJ) = 2 \cdot 10.42 \cdot 10^3 \cdot 0.015625 + 2 \cdot 530.2 \cdot 4.5^2 = 21799\,\text{MNm}^2 \qquad \{5.35\}$$

és

$$(GJ)_e = 2 \cdot 10.42 \cdot 10^3 \cdot 0.015625 + 2 \cdot 530.2 \cdot 0.1817 \cdot 4.5^2 = 4227\,\text{MNm}^2 \qquad \{5.29\}$$

A Saint-Venant csavarási merevség hatékonysági mutatója:

$$s_\varphi = \frac{(GJ)_e}{(GJ)} = \frac{4227}{21799} = 0.194 \qquad \{5.34\}$$

Ellentétben az előző elrendezéssel, a falak most rendelkeznek „csavarási karral”, így az öblösödési csavarási merevség:

$$EI_\omega = E_w \sum_{k=1}^{m} \left(I_{\omega,k} + (I_{w,k})_x y_k^2 + (I_{w,k})_y x_k^2 \right)$$

$$= 25 \cdot 10^3 \cdot 0.5625 \cdot 7.5^2 \cdot 2 = 1582031\,\text{MNm}^4 \qquad \{5.30\}$$

Az

$$N_\omega = \frac{7.837 r_s EI_\omega}{i_p^2 H^2} = \frac{7.837 \cdot 0.863 \cdot 1582031}{25.5 \cdot 30^2} = 466.2\,\text{MN} \qquad \{5.32\}$$

és

$$N_t = \frac{(GJ)_e}{i_p^2} = \frac{4227}{25.5} = 165.8\,\text{MN} \qquad \{5.33\}$$

rész kritikus terhekkel meghatározható a

$$\beta_\varphi = \frac{N_t}{N_\omega} = \frac{165.8}{466.2} = 0.3556 \qquad \{5.36\}$$

arány, aminek függvényében a kritikus teherparamétert az 5.2 táblázatból kapjuk:

$$\alpha_\varphi = 1.8556 + \frac{2.1226 - 1.8556}{0.4 - 0.3}(0.3556 - 0.3) = 2.00 \qquad \{5.2\ \text{táblázat}\}$$

A tiszta elcsavarodás kritikus terhe így:

$$N_{cr,\varphi} = N_\omega + N_t + (\alpha_\varphi - \beta_\varphi - 1) s_\varphi N_\omega \qquad \{5.31\}$$

$$= 466.2 + 165.8 + (2.0 - 0.3556 - 1)0.194 \cdot 466.2 = 690.3\,\text{MN}$$

Mivel merevítőrendszer elrendezése kétszeresen szimmetrikus és a függőleges teher eredője átmegy a nyírásközépponton, az alap kritikus terhek nem kombinálódnak és az épület globális kritikus terhe a három alap kritikus teher közül a legkisebb:

$$N_{cr} = \min\,(N_{cr,x}, N_{cr,y}, N_{cr,\varphi}) = 211.4\,\text{MN} \qquad \{5.46\}$$

Az épület teljes függőleges terhe (N = 13.5 MN) segítségével meghatározhatjuk az épület globális biztonsági tényezőjét:

$$\lambda = \frac{N_{cr}}{N} = \frac{211.4}{13.5} = 15.7 > 10 \qquad \{6.3\}\ \text{és}\ \{6.5\}$$

A globális biztonsági tényező értéke stabilis épületet jelez ($\lambda > 1.0$) és meghaladja az ajánlott minimális értéket ($\lambda > 10.0$). Az érték a merevítőrendszer hatékonyságának jelentős javulását mutatja (az előző elrendezéshez képest).

Vizsgálat a globális biztonsági tényező összetevőinek segítségével

A globális biztonsági tényező összetevői egy kiegyensúlyozott merevítőrendszert mutatnak. A merevítőrendszer síkbeli ellenállása a két főirányban gyakorlatilag azonos és sikeresen orvosoltuk az előző elrendezés gyengeségét (a viszonylag kis csavarási ellenállást). A jellemző értékek rendre

$$\lambda_x = \frac{N_{cr,x}}{N} = \frac{212.8}{13.5} = 15.8 \qquad \{6.6\}$$

$$\lambda_y = \frac{N_{cr,y}}{N} = \frac{211.4}{13.5} = 15.7 \qquad \{6.7\}$$

és

$$\lambda_\varphi = \frac{N_{cr,\varphi}}{N} = \frac{690.3}{13.5} = 51.1 \qquad \{6.8\}$$

A következő két pontban megvizsgáljuk, hogy ez a javulás hogyan realizálódik az épület sajátfrekvenciájának és maximális tetőponti eltolódásának az értékében.

A legkisebb sajátfrekvencia

Először a három alapfrekvenciát határozzuk meg, majd figyelembe vesszük az alapmódok kombinálódását.

Síkbeli rezgések
Az épület viselkedése nagyon hasonló a stabilitásvizsgálatnál tapasztaltakhoz. A két síkbeli rezgés frekvenciája változatlan az előző esethez képest:

$$f_x = 0.467\,\text{Hz} \qquad \{4.18\} \text{ a 6.2.3 pontban}$$

$$f_y = 0.468\,\text{Hz} \qquad \{2.64\} \text{ a 6.2.3 pontban}$$

Tiszta csavarási rezgés
Az eredeti Saint-Venant csavarási merevség (amit egyébként a stabilitásvizsgálatnál már kiszámoltunk):

$$(GJ) = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f} \left((K_i)_x y_i^2 + (K_i)_y x_i^2 \right) \qquad \{4.27\}$$

$$= 2 \cdot 10.42 \cdot 10^3 \cdot 0.015625 + 2 \cdot 530.2 \cdot 4.5^2 = 21799\,\text{MNm}^2$$

A hatékony Saint-Venant csavarási merevség (a 6.2.3 pontban {4.11} alatt már kiszámított K_e értékét felhasználva):

$$(GJ)_e = \sum_{k=1}^{m} GJ_k + \sum_{i=1}^{f} \left((K_{e,i})_x y_i^2 + (K_{e,i})_y x_i^2 \right) \qquad \{4.21\}$$

$$= 2 \cdot 10.42 \cdot 10^3 \cdot 0.015625 + 149.728 \cdot 4.5^2 = 3358\,\text{MNm}^2$$

A Saint-Venant csavarási merevség hatékonysági tényezője:

$$s_\varphi = \sqrt{\frac{(GJ)_e}{(GJ)}} = \sqrt{\frac{3358}{21799}} = 0.392 \qquad \{4.26\}$$

A két fal közreműködésével az öblösödési csavarási merevség értéke (amit már szintén

kiszámítottunk a stabilitásvizsgálatnál):

$$EI_\omega = E_w \sum_{k=1}^{m} \left(I_{\omega,k} + (I_{w,k})_x y_k^2 + (I_{w,k})_y x_k^2 \right) \qquad \{4.22\}$$

$$= 25 \cdot 10^3 \cdot 0.5625 \cdot 7.5^2 \cdot 2 = 1582031 \text{ MNm}^4$$

A tiszta csavarási frekvencia értékét a két részfrekvencia (illetve a négyzetük) segítségével határozhatjuk meg. Ezek az öblösödési merevséghez tartozó rész

$$f_\omega^2 = \frac{0.313 r_f^2 EI_\omega}{i_p^2 H^4 m} = \frac{0.313 \cdot 0.911^2 \cdot 1.582 \cdot 10^9}{25.5 \cdot 30^4 \cdot 41.28} = 0.482 \text{ Hz}^2 \qquad \{4.24\}$$

és a hatékony Saint-Venant csavarási merevséghez tartozó rész

$$f_t^2 = \frac{r_f^2 (GJ)_e}{16 i_p^2 H^2 m} = \frac{0.911^2 \cdot 3358000}{16 \cdot 25.5 \cdot 30^2 \cdot 41.28} = 0.184 \text{ Hz}^2 \qquad \{4.25\}$$

A

$$k_\varphi = H \sqrt{\frac{(GJ)_e}{EI_\omega}} = 30 \sqrt{\frac{3358}{1582031}} = 1.382 \qquad \{4.28\}$$

dimenziótlan csavarási paraméter segítségével a frekvenciaparaméter értéke a 4.2 táblázatból vehető ki:

$$\eta_\varphi = 0.6542 + \frac{0.7511 - 0.6542}{1.5 - 1.0} (1.382 - 1.0) = 0.728 \qquad \{4.2 \text{ táblázat}\}$$

A tiszta csavarási rezgés frekvenciája így:

$$f_\varphi = \sqrt{f_\omega^2 + f_t^2 + \left(\frac{\eta_\varphi^2}{0.313} - \frac{k_\varphi^2}{5} - 1 \right) s_\varphi f_\omega^2} \qquad \{4.23\}$$

$$= \sqrt{0.482 + 0.184 + \left(\frac{0.728^2}{0.313} - \frac{1.382^2}{5} - 1 \right) 0.392 \cdot 0.482} = 0.851 \text{ Hz}$$

Mivel a merevítőrendszer kétszeresen szimmetrikus és a tömeg súlypontja egybeesik a nyírásközépponttal, a három alapfrekvencia nem kombinálódik és a legkisebb az épület sajátfrekvenciája:

$$f = \min (f_x,\ f_y,\ f_\varphi) = 0.467 \text{ Hz} \qquad \{4.38\}$$

A maximális tetőponti eltolódás

Az *y* irányú szélteher esetében a két szimmetrikusan elhelyezett fal fejt ki ellenállást. A tetőponti eltolódás értéke:

$$y_{\max} = y(H) = \frac{q_y H^4}{8EI_x} = \frac{13.0 \cdot 30^4}{8 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0.5625} = 0.0468\,\text{m} \qquad \{2.63\}$$

A *x* irány vizsgálatakor is szimmetrikus az elrendezés és az épület vízszintes merevségét a két szimmetrikusan elhelyezett keret szolgáltatja. A helyzet azonos a 2. elrendezésnél tárgyalt helyzettel és átvehetjük az ottani eredményt:

$$x_{\max} = 0.0395\,\text{m} \qquad \{2.22\} \text{ a 6.2.3 pontban}$$

Az épület maximális tetőponti eltolódása a széliránybanban:

$$d_{\max} = \sqrt{0.0468^2 + 0.0395^2} = 0.0612\,\text{m}$$

Az eredeti elrendezés (6.3 ábra) két gyengeségét két lépésben kiküszöböltük. Az *x* irányban hiányzó merevséget a két keret 90 fokkal történő elforgatásával pótoltuk (6.4 ábra), majd a rendszer meglehetősen kis csavarási ellenállását az 1. és 3. jelű merevítőelem felcserélésével megnöveltük (6.5 ábra). Az épület viselkedését jellemző főbb eredményeket a 6.1 táblázatban foglaltuk össze.

Az adatok tanúsága szerint a λ globális biztonsági tényező látványosan követi a merevítőrendszer viselkedését és egyfajta hatékonysági mutatónak is tekinthető. A globális biztonsági tényező λ_x, λ_y és λ_φ összetevői további hasznos részleteket szolgáltatnak a rendszer hatékonyságát illetően.

7

A gyakorló feladatok eredményei

A 6.2 pontban egy négy merevítőelemet tartalmazó merevítőrendszer teljes számítását bemutattuk, minden részletre kiterjedően és mindhárom jellemző vizsgálat elvégzésével. Meghatároztuk a maximális tetőponti eltolódás, a legkisebb sajátfrekvencia és a globális kritikus teher és biztonsági tényező értékét. Ez a három különböző elrendezés esetében három komplett számpéldát jelent.

További teljes épületre vonatkozó számpéldák találhatók a 3.6.1, 3.6.2, 4.4 és 5.6 pontokban, de ezek csak egy-egy vizsgálatot mutatnak be – vagy a maximális eltolódás vagy a legkisebb sajátfrekvencia vagy pedig a globális kritikus teher és biztonsági tényező meghatározásával. Gyakorlás céljából célszerű ezeket a vizsgálatokat is kiterjeszteni és a másik két jellemző globális adatot is meghatározni:

3.6.1 épület → legkisebb sajátfrekvencia és globális kritikus teher és biztonsági tényező
3.6.2 épület → legkisebb sajátfrekvencia és globális kritikus teher és biztonsági tényező
4.4 épület → maximális eltolódás és globális kritikus teher és biztonsági tényező
5.6 épület → maximális eltolódás és legkisebb sajátfrekvencia

Ezeket a számítási eredményeket a négy épület esetében – a már kiszámított eredmények megismétlésével – a következő pontban adjuk meg.

7.1 Két 28-szintes épület; 6-szintes épület; 22-szintes épület

A maximális tetőponti eltolódás kiszámításához $w^* = 1$ kN/m^2 intenzitású y irányú vízszintes terhet tételeztünk fel. A legkisebb sajátfrekvenciát $\gamma = 2.5$ kN/m^3 térfogategységre vonatkoztatott súly feltételezésével határoztuk meg. A stabilitásvizsgálat során $Q = 10$ kN/m^2 intenzitású, a födémeken egyenletesen megoszló függőleges teherrel számoltunk. Az eredményeket a 7.1 táblázat tartalmazza.

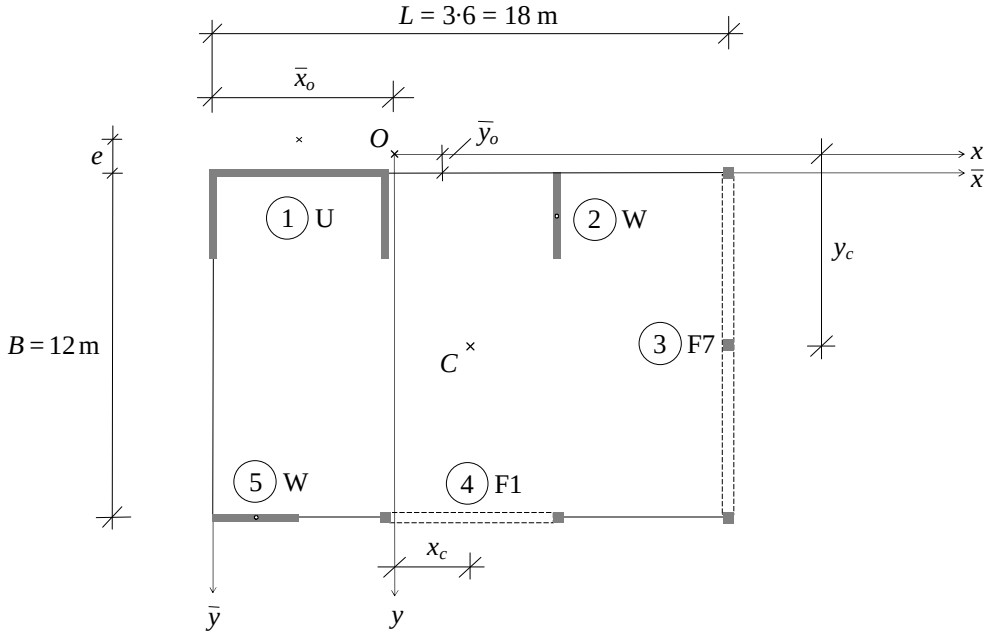
7.1 táblázat. A gyakorló feladatok eredményei.

épület/ alfejezet	maximális tető-ponti eltolódás [m]	legkisebb saját-frekvencia [Hz]	globális kritikus teher [MN]	globális biztonsági tényező [-]
3.6.1	y irány: **0.184** (x irány: **0.232**)	0.143	337.6	3.3
3.6.2	y irány: **0.218** (x irány: **0.349**)	0.117	224.9	2.2
4.4	0.023	**0.626**	254.6	14.7
5.6	0.593	0.163	**217.8**	**3.4**

A vastagon szedett eredményekhez tartozó részletes számítások az első oszlopban megadott alfejezetben megtalálhatók.

7.2 10-szintes épület

Végrehajtottuk a 7.1 ábrán alaprajzával vázolt F1-F7-W-W-U jelű 10-szintes épület globális statikai vizsgálatát is. Az emeletmagasság $h = 3$ m és az épület teljes magassága $H = 10 \cdot 3 = 30$ m.



7.1 ábra. F1-F7-W-W-U jelű 10-szintes épület alaprajzi elrendezése.

A 10-szintes épületet szükséges merevségét öt merevítőelem – az F1 és F7 jelű keretek, két W jelű merevítőfal és az U jelű merevítőmag – biztosítja. A merevítőelemek keresztmetszeti jellemzőit a 7.2 táblázat tartalmazza.

7.2 táblázat. A merevítőelemek keresztmetszeti jellemzői.

merevítő-elem	oszlop kereszt-metszet [m]	gerenda kereszt-metszet [m]	$I_{c,i}$ [m^4]	$I_{b,i}$ [m^4]	$I_{g,i}$ [m^4]
F1	0.4×0.4	0.4×0.4	$0.00426\dot{}$	$0.00213\dot{}$	2.88
F7	0.4×0.4	0.4×0.4	0.00640	$0.00426\dot{}$	11.52
W	0.2×3.0	–	$I = 0.45$, $J = 0.008$		
U	$b = 6$, $h = 3$, $t = 0.2$; $e = 1.125$, $I_x = 2.257$, $I_y = 14.416$, $J = 0.032$, $I_\omega = 14.27$				

A vasbeton merevítőelemek anyagának rugalmassági modulusa $E = 25 \cdot 10^6$ kN/m^2. A nyírási rugalmassági modulus $G = 10.4 \cdot 10^6$ kN/m^2.

Az épület maximális tetőponti eltolódása meghatározásához $w^* = 1$ kN/m^2 intenzitású egyenletesen megoszló y irányú vízszintes terhet tételeztünk fel. A frekvenciavizsgálathoz az épület súlyát $\gamma = 2.5$ kN/m^3 értékkel vettük figyelembe. A födémenként egyenletesen

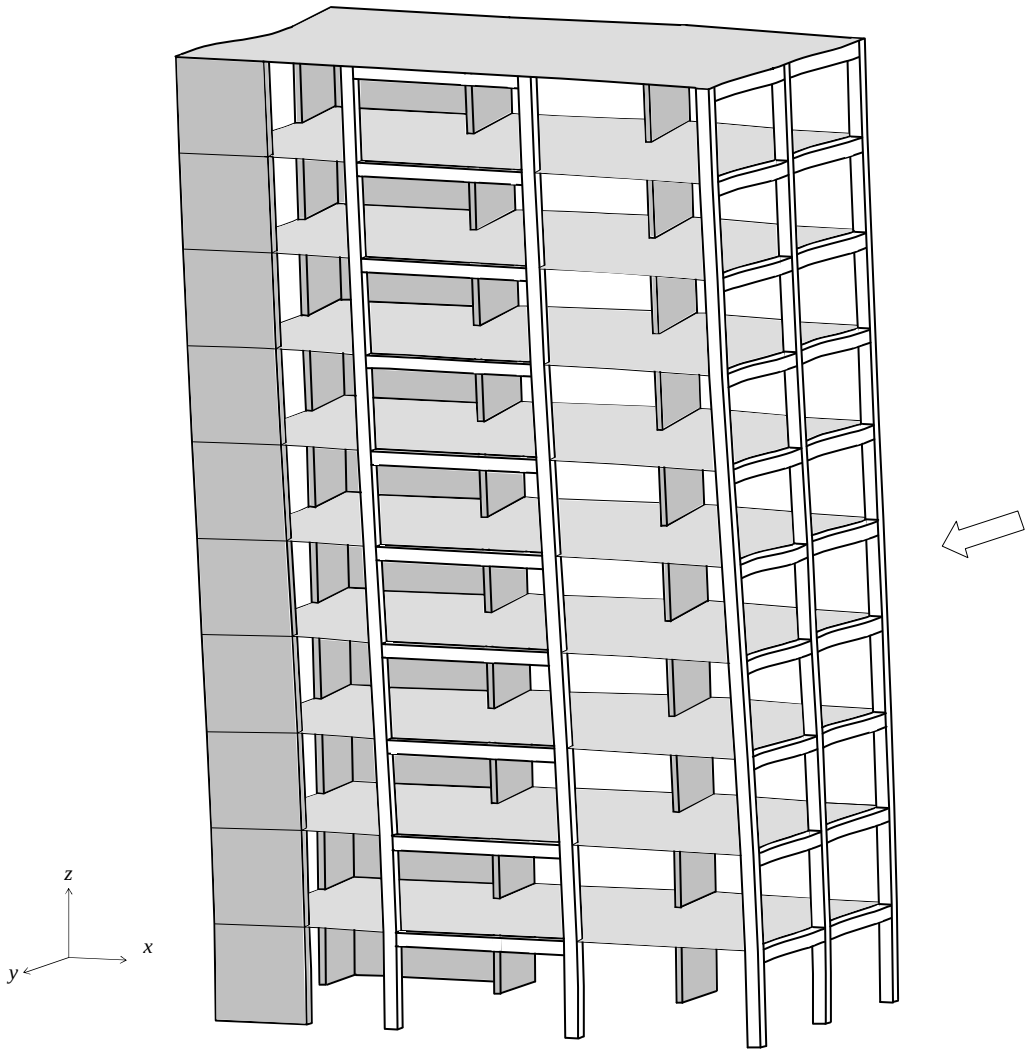
megoszló $Q = 10$ kN/m^2 teherrel számoltunk a kritikus teher és a globális biztonsági tényező kiszámítása során.

A végeredményeket a 7.3 táblázatban adjuk meg. Az épület térbeli viselkedése (*y* irányú vízszintes teher hatására) a 7.2 ábrán látható.

7.3 táblázat. A 7.1 ábrán alaprajzával vázolt épület globális számításának eredményei.

maximális tetőponti eltolódás [m]	legkisebb saját-frekvencia [Hz]	globális kritikus teher [MN]	globális biztonsági tényező [-]
0.0301*	0.595	462	21.4

*Az ajánlott maximális tetőponti eltolódás értéke $H/500 = 0.06$ m.



7.2 ábra. Az F1-F7-W-U jelű 10-szintes épület térbeli viselkedése *y* irányú szélteher hatására.

Irodalomjegyzék

1. Chitty, Letitia: On the cantilever composed of a number of parallel beams interconnected by cross bars. *Philosophical Magazine*, London. Ser. 7, Vol. XXXVIII, 1947, 685-699

2. Hegedűs István – Kollár László P.: Szendvicsrúdmodell alkalmazása mérnöki szerkezetek stabilitásvizsgálatában. 6. fejezet „A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái" c. könyvben (Szerkesztő: Kollár Lajos). Akadémiai Kiadó, Budapest, 2006

3. Jeary, A. P. and Ellis, B. R.: The accuracy of mathematical models of structural dynamics. PD112/81, Building Research Establishment, Watford, UK, 1981

4. Kollár Lajos (szerk.): A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái. 2. kiadás. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2006. {1. kiadás: Akadémiai Kiadó, 1991}

5. Schuller, W.: High-rise building structures. John Wiley & Sons, New York, 1977

6. Stafford Smith, B.: The composite behaviour of infilled frames. A "Proceedings of a Symposium on Tall Buildings with particular reference to shear wall structures" c. könyvben (Editor: A. Coull and B. Stafford Smith). University of Southampton, Pergamon Press, Oxford, 1966

7. Stafford Smith, B. – Coull, A.: Tall building structures. Analysis and design. John Wiley & Sons, New York, 1991

8. Szmodits Kázmér: Útmutató panelépületek statikai tervezéséhez. Építéstudományi Intézet, Budapest, 1975

9. Tarnai Tibor: Az elágazási kritikus teherre vonatkozó összegzési tételek. 2. fejezet „A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái" c. könyvben (Szerkesztő: Kollár Lajos). Akadémiai Kiadó, Budapest, 2006

10. Timoshenko, S.: Vibration problems in engineering. D. Van Nostrand Company, Inc., London, 1928

11. Timoshenko, S. – Gere, J.: Theory of elastic stability. 2nd edition. McGraw-Hill, New York, 1961

12. Vértes, G.: Structural dynamics. Elsevier, New York, 1985

13. Vlasov, V. Z.: Thin-walled elastic beams. 2nd edition. Moscow, 1959; Israeli Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961

14. Zalka, K. A.: Buckling of a cantilever subjected to distributed normal loads, taking the shearing deformation into account. *Acta Technica Hung*. **89**, 3-4, 1979, 497-508

15. Zalka, K. A.: Dynamic analysis of core supported buildings. N127/94, Building Research Establishment, Watford, UK, 1994

16. Zalka, K. A.: Global structural analysis of buildings. E & FN Spon, London & New York, 2000

17. Zalka Károly: Épületek komplex statikai vizsgálata. Második, e-kiadás. Budapest, 2025

18. Zalka, K. A.: Structural analysis of multi-storey buildings. 2nd edition. CRC Press, Boca Raton, London & New York, 2020