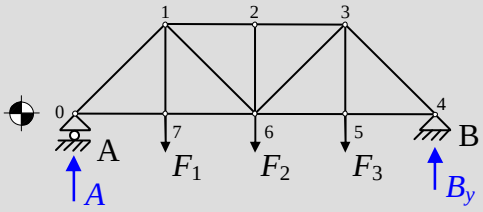
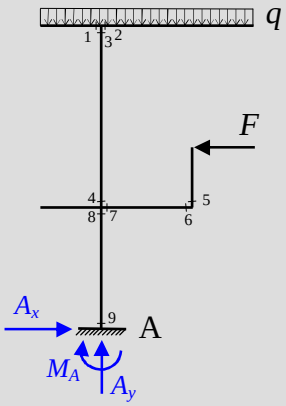
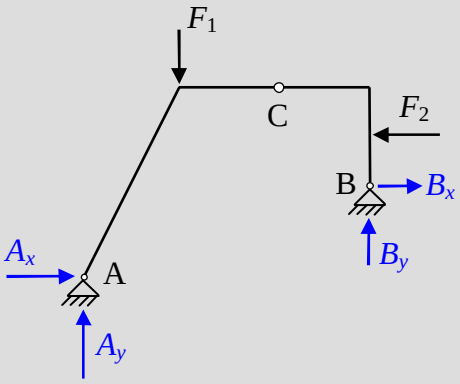
Mechanika I

Statika

Zalka Károly







Budapest, e-kiadás
2024

© Zalka Károly, 1983; 2016-2024, Második kiadás

Szabad ezt a kiadványt sokszorosítani, terjeszteni és elektronikus vagy bármely formában tárolni.
Tilos viszont a kiadványt bármely formában megváltoztatni és bármely formában értékesíteni.

Lektorok:

Horváth Lászlóné Fazakas Margit
okl. építőmérnök

Lőrincz György PhD
okl. építőmérnök

v1.19, 2024 október 28

Tartalomjegyzék

Előszó **1**

1. Bevezetés **2**
1.1 Alapfogalmak 2
1.1.1 Erő 2
1.1.2 Erőrendszer 3
1.1.3 Eredő erő; erőösszetétel; erőfelbontás 3
1.1.4 Egyensúly 3
1.1.5 Egyenértékűség 4
1.1.6 Erő vetülete 4
1.1.7 Erő nyomatéka 5
1.2 A statika alaptételei 5
1.2.1 Az első axióma 6
1.2.2 A második axióma 7
1.2.3 A harmadik axióma 8
1.2.4 A negyedik axióma 9
1.3 Közös metszéspontú két erő összetétele 10
1.3.1 Közös hatásvonalon működő két erő összetétele 10
1.3.2 Végesben metsződő két erő összetétele 10

2. Síkbeli erőrendszer **12**
2.1 Síkbeli erőrendszer összetétele eredővé 12
2.1.1 Megoldás szerkesztéssel 12
2.1.2 Megoldás számítással 15
2.1.3 Gyakorló feladat 19
2.1.4 Síkbeli erőrendszer összetételének különleges esetei 22
2.2 Egyensúlyban lévő síkbeli erőrendszer 28
2.2.1 Az egyensúly feltételei 28
2.2.2 Az egyensúly feltételi egyenleteinek alkalmazása síkbeli erőrendszer általános vizsgálatára 31
2.2.3 Gyakorló feladat 33
2.3 Síkbeli erőrendszer egyensúlyozása 35
2.3.1 Egyensúlyozás egy erővel 35
2.3.2 Egyensúlyozás két erővel 35
2.3.3 Egyensúlyozás három erővel 38
2.3.4 Gyakorló feladatok 41
2.4 Síkbeli tartók 44
2.4.1 A tartók alakja 44
2.4.2 A tartók alátámasztása 45
2.4.3 Tartószerkezetek osztályozása 47

2.4.4 A terhelő erők 48
2.4.5 Gyakorló feladatok 49

3. Rácsos tartók 59
3.1 Bevezetés 59
3.2 A rúderők meghatározása a csomóponti módszerrel 60
3.3 Gyakorló feladatok: a rúderők meghatározása a csomóponti módszerrel 63
3.4 A hármas átmetszés módszere 71
3.5 Gyakorló feladatok: a rúderők meghatározása a hármas átmetszés módszerével 72
3.6 Rudakon is terhelt rácsos tartók 79

4. Statikailag határozott gerendatartók igénybevételi ábrái 80
4.1 Definíciók és előjelszabályok 80
4.2 Alapesetek 86
4.2.1 Középen koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó 86
4.2.2 Egyenletesen megoszló teherrel terhelt kéttámaszú tartó 87
4.2.3 Koncentrált erővel terhelt konzoltartó 89
4.2.4 Egyenletesen megoszló teherrel terhelt konzoltartó 90
4.2.5 Végnyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó 91
4.2.6 Két, ellenkező előjelű végnyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó 92
4.2.7 Két, azonos előjelű végnyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó 94
4.2.8 Megoszló teherrel szakaszosan terhelt kéttámaszú tartó 95
4.2.9 Két, szimmetrikusan elhelyezett koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó 96
4.2.10 Mezőben nyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó 97
4.2.11 Konzolon nyomatékkal terhelt kéttámaszú konzolos tartó 98
4.2.12 Háromszög megoszlású teherrel terhelt kéttámaszú tartó 99
4.2.13 Másodfokú parabola megoszlású teherrel terhelt kéttámaszú tartó 101
4.2.14 Másodfokú parabola megoszlású teherrel terhelt konzoltartó 102
4.3 Összefüggés a teher-, a nyíróerő- és a nyomatékfüggvény között 104
4.4 Kéttámaszú tartók igénybevételi ábrái 107
4.5 Konzolos tartók igénybevételi ábrái 113
4.6 Ferde helyzetű és törttengelyű tartók 122
4.7 Az előjeles összegzés (szuperpozíció) elve 132

5. Statikailag határozott összetett tartók 137
5.1 Csuklós többtámaszú (Gerber-féle) gerendatartók 137
5.2 Csuklós többtámaszú (Gerber-féle) rácsos tartók 147
5.3 Háromcsuklós gerendatartók 153
5.4 Háromcsuklós rácsos tartók 167
5.5 Csuklós többtámaszú törttengelyű gerendatartók 171

6. Síkidomok keresztmetszeti tényezői 175
6.1 Bevezetés 175
6.2 Másodrendű nyomatékok 176
6.3 Gyakorló feladatok 180

Irodalom 185

Előszó

Az építő- és építészmérnöki mechanikai tanulmányaink során hatalmas ismeretanyagot kell elsajátítani. Ez az anyag eloszthető négy félévre és ennek megfelelően négy jegyzetre. Jelen jegyzet tárgya a Mechanika I (Statika), amely merev testek statikájával foglalkozik. (A Mechanika II a szilárdságtant, a Mechanika III a határozatlan tartókat, a Tartók statikája pedig a statika néhány válogatott fejezetét tárgyalja.) A Mechanika I (Statika) által ismertetett anyag nem tekinthető különösebben nehéznek. Sok hallgatónak mégis gondot okoz a tárgy teljesítése. Ennek valószínűleg az a fő oka, hogy a középfokú oktatásból a felsőfokú oktatásba átkerült hallgatók talán figyelmen kívül hagyják azt a tényt, hogy a „középfokról" a tanulás tekintetében is „felsőfokra" kell(ene) váltani. Ez különösen igaz a mechanika tárgy esetében, amikor a gyakran szorosan egymásra épülő anyagrészek megkövetelik a folyamatos tanulást és az elsajátított anyag rendszeres gyakorlását.

A Mechanika I (Statika) kurzus elsődleges feladata a mechanikai alapfogalmak ismertetése. A jegyzet a statika alaptételeinek tárgyalása után síkbeli erőrendszerek vizsgálatának legfontosabb kérdéseit tárgyalja. A gyakran alkalmazott tartószerkezeteink közül azokkal foglalkozik, amelyek a határozott tartókra vonatkozó már megszerzett ismeretek birtokában viszonylag egyszerűen kezelhetők. Bemutatjuk így a rácsos tartók számítási módszereit és megismerkedünk a határozott gerendatartókra vonatkozó általános elvekkel, valamint a gerendatartók egyszerűbb gyakorlati eseteivel.

A jegyzet befejező fejezete síkidomok keresztmetszeti tényezőivel foglalkozik és ismerteti a szilárdságtani tanulmányaink során oly fontos szerepet játszó első és másodrendű keresztmetszeti tényezők számítási módszereit.

A jegyzet alapvető feladata jelenségek bemutatása és alapelvek ismertetése. A végső cél azonban az, hogy a megszerzett ismeretek gyakorlati alkalmazáshoz vezethessenek. A tárgy így a gyakorlati alkalmazásokhoz is igyekszik hátteret biztosítani és ehhez a célhoz 48 részletesen kidolgozott számpélda bemutatásával járul hozzá.

A Mechanika I (Statika) jegyzet a négyrészes jegyzetsorozat első tagja, amely érdekes módon sorrendben utolsónak készült el elektronikus formában. A lektorok Horváth Lászlóné Fazakas Margit és Lőrincz György voltak, akik már más, korábban elkészült jegyzetek lektorálása során is igen nagy és hasznos munkát végeztek. Gondos és lelkiismeretes munkájukért ezúton is szeretném hálás köszönetemet kifejezni.

Budapest, 2016 július

Előszó a 2. kiadáshoz

A 2. kiadás (v1.13; 2018) abban különbözik az 1. kiadástól, hogy az anyag lektori javaslatra kiegészült két alfejezettel: 5.2 Csuklós többtámaszú (Gerber-féle) rácsos tartók és 5.4 Háromcsuklós rácsos tartók. A 2. kiadás lektorai is Horváth Lászlóné Fazakas Margit és Lőrincz György voltak, akiknek lelkiismeretes munkáját ezúton is hálásan köszönöm.

Jelen v1.19 verzió néhány kisebb módosítást tartalmaz.

Budapest, 2024 október Zalka Károly

1

Bevezetés

A mechanika egy igen széles tartományt lefedő tudomány. Foglalkozik kinematikával, amikor a mozgások puszta leírása a cél, és foglalkozik dinamikával, amikor a vizsgálatok a mozgások okainak feltárására koncentrálnak. A dinamika ismét két fontos területet érint. Ezek a kinetika és a *statika*. A kinetika tényleges mozgásokat vizsgál, a statikai vizsgálatok során pedig nyugalmi állapotot tételezünk fel. Ez összhangban van az építő-/építészmérnöki gyakorlattal, amikor is alapvető fontosságúnak tekintjük azt a követelményt, hogy tartószerkezeteink minden körülmények között nyugalomban maradjanak.

Tartószerkezeteink *terheket* hordanak és különböző *hatásoknak* vannak kitéve. A terhek és hatások következtében a tartószerkezetekben *igénybevételek* keletkeznek. Feladatunk ezen igénybevételeknek a meghatározása. Az első megközelítésben azt tételezzük fel, hogy a vizsgált tartószerkezet *merev testként* viselkedik. A merev testeket az jellemzi, hogy méret- és alakváltozásokat nem szenvednek. Máshogyan megfogalmazva, a merev testek esetében a test bármely két pontjának távolsága állandó. Ez ugyan szigorúan véve nem igaz, de

- az alakváltozások mérnöki szerkezeteink esetében kicsinyek, így a közelítés hibája kicsi, és
- merevnek feltételezett szerkezetek esetében viszonylag egyszerű vizsgálatokhoz jutunk.

Szilárdságtani tanulmányaink során (a következő félévben) majd foglalkozunk azzal a ténnyel, hogy a szerkezetek alakváltozást szenvednek.

1.1 Alapfogalmak

Tanulmányaink során ismetelten szükség lesz néhány alapfogalomra. Ezeket a következő pontokban foglaljuk össze.

1.1.1 Erő

A terhek és hatások jellemzése során az *erő* fontos szerepet játszik. Azt a hatást, amely a test mozgásállapotát (irány vagy nagyság szerint) megváltoztatja, erőnek nevezzük. A szerkezetekre ható erők lehetnek koncentráltak, illetve megoszlóak. A *koncentrált erők* viszonylag kis felületen hatnak, olyannyira kis felületen, hogy a hatás helyét ponttal adhatjuk meg (1.1 ábra). Ez a pont az erő támadáspontja. A koncentrált erőt vektorral jellemezzük és négy adattal egyértelműen megadhatjuk. Ezek a következők:

- nagyság (N, kN vagy MN dimenzióval),
- támadáspont (két koordinátával),
- hatásvonal (amely az erő támadáspontján megy át),
- irány (értelem), amelyet előjellel adunk meg.

A hatásvonal megadása során gyakran használjuk a hatásvonal valamelyik koordinátatengellyel – például az x tengellyel – bezárt (például φ-vel jelölt) hajlásszögét.

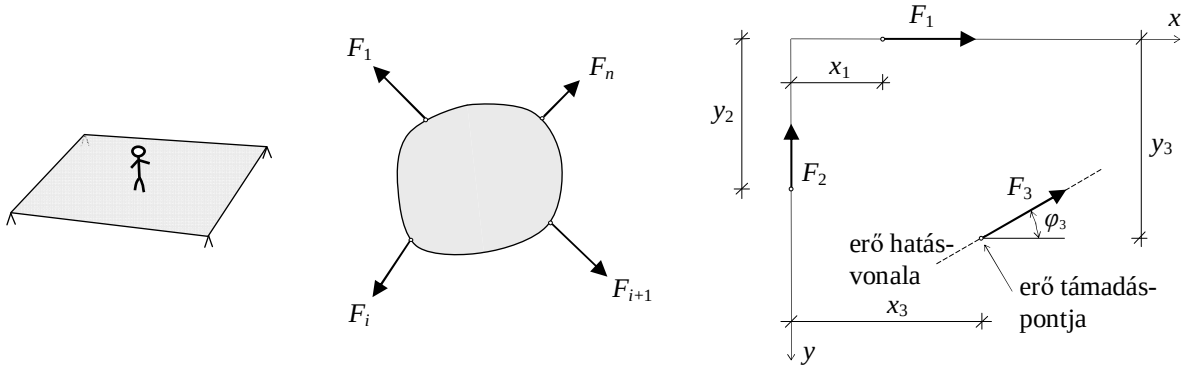
A koncentrált erőket latin nagybetűkkel szokás jelölni, például az F (az angol „Force” nyomán), A, B, C, G („Gravity”) és R („Resultant”) betűkkel.

Az 1.1/c ábrán ábrázolt három erő például az alábbiak szerint adható meg az x-y koordináta-rendszerben:

$$F_1 = +5\ \text{kN}, \quad x_1 = 4\,\text{m}, \quad y_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0°$$

$$F_2 = -3\ \text{kN}, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 5\,\text{m}, \quad \varphi_2 = 90°$$

$$F_3 = 4\ \text{kN}, \quad x_3 = 5.5\,\text{m}, \quad y_3 = 6\,\text{m}, \quad \varphi_3 = -30°$$



a) felületen b) merev testet támadva c) megadása

1.1 ábra. Koncentrált erő.

1.1.2 Erőrendszer

Két vagy több erő együttesét *erőrendszernek* nevezzük. Az erőrendszer *síkbeli*, ha az erőrendszert alkotó erők egy közös síkban hatnak. Ha nincs ilyen közös sík, akkor az erőrendszert *térbelinek* nevezzük. Az erőrendszerek jelölése úgy történik, hogy az erőrendszert alkotó erőket vesszővel elválasztva egymás mellé írjuk, majd az egészet zárójelek közé tesszük. Az 1.1/b és 1.1/c ábrán látható *n*, illetve 3 erőből álló erőrendszer esetében például:

$$(F_1, F_2, F_3, \ldots F_i, \ldots F_n) \qquad \text{és} \qquad (F_1, F_2, F_3)$$

Az erőrendszerek egy gyakori esete a *megoszló erőrendszer*. Jelölése általában latin kisbetűkkel, például *q*, *p* és *g* betűkkel történik. Itt megkülönböztetünk vonal mentén, felület mentén és térben megoszló erőrendszereket. A gyakorlatban gerendák esetében a vonal menti, lemezeknél pedig a felület menti megoszló erőrendszerrel találkozunk. A térben megoszló erőrendszerre a mágneses vonzás egy jellegzetes példa.

1.1.3 Eredő erő; erőösszetétel; erőfelbontás

Az *eredő erő* az az erő, amely minden vonatkozásban helyettesíti az erőrendszert. Jelölése gyakran a nagy *R* (Resultant) betűvel történik. Az eredő meghatározása során gyakran *erőösszetételről* beszélünk, amikor az erőrendszert alkotó *összetevőket* (vagy *komponenseket*, vagy *alkotókat*) helyettesítjük az eredővel.

Az erőösszetétel „ellentétes irányú” folyamata az *erőfelbontás*, amelynek során egy erőt két vagy több erővel helyettesítünk.

1.1.4 Egyensúly

A statika igen fontos fogalma az *egyensúly*. Az általános megfogalmazás szerint, ha valamely anyagi test mozgásállapota a rá ható erőrendszer hatására nem változik meg, akkor az

erőrendszert *egyensúlyi erőrendszernek* nevezzük. Az építőmérnöki gyakorlatban kiemelt szerepet játszanak a nyugalomban lévő testek. Az ezekre vonatkozó megfogalmazás szerint, ha a nyugalomban lévő test a rá ható erők hatására nyugalomban marad, akkor a testre működő erők rendszere *egyensúlyban lévő erőrendszert* alkot.

Az egyensúly jelölése például egy *n* erőből álló erőrendszer esetében az

$$(F_1, F_2, \ldots F_n) \doteq 0$$

formában történik. Az egyenlőség jel felett lévő pont a jelünket megkülönbözteti a matematikai egyenlőség jelétől.

1.1.5 Egyenértékűség

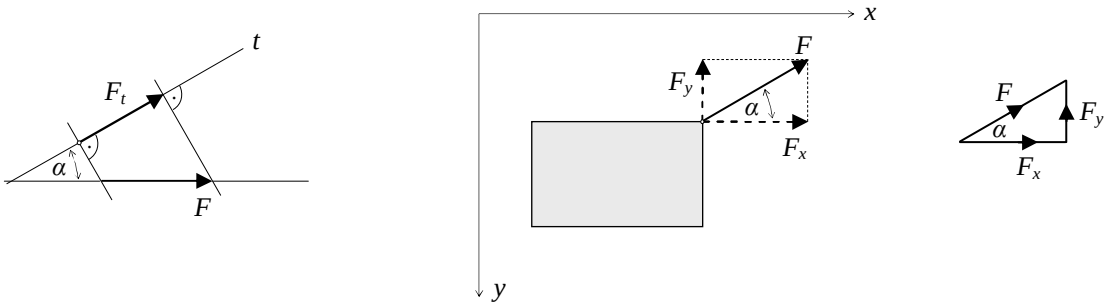
Gyakran bizonyul szükségesnek hogy két erőrendszert összehasonlítsunk, abból a célból, hogy megállapítsuk, egyenértékűek-e. Két erőrendszert akkor mondunk *egyenértékűnek*, ha ugyanazon anyagi test mozgásállapota mindkettő hatására ugyanúgy változik meg. Máshogyan megfogalmazva: két erőrendszer akkor *egyenértékű*, ha mindkettő egyensúlyozásához ugyanazt az erőrendszert kell felhasználnunk.

1.1.6 Erő vetülete

Az erők a gyakorlatban természetesen tetszőleges irányban működhetnek. Vizsgálataink során célszerűségi szempontból az erőket gyakran derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk, illetve vizsgáljuk, és a ferde erőket vetületeik segítségével kezeljük. Szükségessé válik tehát egy erő *vetületének* előállítása. Ezt a feladatot az erő kezdő- és végpontjának merőleges vetítésével oldjuk meg (1.2/a ábra). Egy tetszőleges irányú *t* tengely esetében egy *F* erő *t* tengelyre vonatkoztatott vetületét az

$$F_t = F \cos\alpha$$

összefüggés szolgáltatja, ahol α a *t* tengely és az erő hatásvonala által közbezárt szög.



a) tetszőleges *t* tengelyre b) *x* és *y* tengelyre c) vektorháromszög

1.2 ábra. Erő vetülete.

A statikai feladataink megoldása során gyakran a merev testet támadó ferde erő koordinátatengely irányú – az 1.2/b ábrán vázolt esetben *x* és *y* irányú – vetületeire van szükségünk. Ezeket az

$$F_x = F \cos\alpha$$

és

$$F_y = F \sin \alpha$$

képletek szolgáltatják. Az 1.2/c ábrán vázolt vektorháromszög alapján érvényesek még az

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad \text{és} \qquad \tan \alpha = \frac{F_y}{F_x}$$

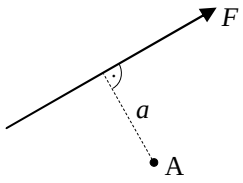
összefüggések is.

1.1.7 Erő nyomatéka

A statikai vizsgálatok során fontos szerepet játszik az *erő nyomatéka*. Az *F* erő „A” pontra vonatkoztatott nyomatékát (1.3 ábra) az

$$M_A = Fa$$

összefüggéssel definiáljuk, ahol az *a* az „A” pont és az *F* erő hatásvonalának merőleges távolsága. A nyomaték akkor pozitív, ha az erő a pont körül az óramutató járásával azonos értelemmel forgat (mint például az 1.3 ábrán). Zérus a nyomaték, ha az erő értéke zérus, vagy ha az erő ponttól mért merőleges távolsága zérus – ez utóbbi eset akkor fordul elő, amikor az erő hatásvonala átmegy a ponton.



1.3 ábra. Az *F* erő „A” pontra vonatkoztatott nyomatéka.

Gyakran fordul elő, hogy több erő egy adott pontra vonatkozó nyomatékára van szükségünk. A fenti képlet ismételt alkalmazásával ekkor összegezzük az erők nyomatékait, vagyis *n* erő esetében az

$$M_A = \sum_{i=1}^{n} F_i a_i = \pm F_1 a_1 \pm F_2 a_2 \pm \ldots \pm F_n a_n$$

képlethez jutunk. Fontos figyelembe venni, hogy az összegzés előjelhelyesen történik.

1.2 A statika alaptételei

A mechanika a természetben megállapítható tapasztalati tényekből indul ki. Ezekből a tényekből általánosítással alapvető tételek állíthatók fel. Ezeket az alapvető tételeket *alaptételeknek* vagy *axiómáknak* nevezzük. Az axiómákat az jellemzi, hogy őket bizonyítani nem szükséges és a belőlük levonható következtetések a természet törvényeivel nem ellenkeznek. A merev testek statikáját négy axiómára építjük fel.

1.2.1 Az első axióma

Az első axióma ősidők óta ismert. Azt mondja ki, hogy *két erő akkor és csakis akkor van egyensúlyban, ha hatásvonaluk közös, értelmük ellentétes és nagyságuk egyenlő*. Az F_1 és F_2 erők egyensúlyát az első axióma szerint az

$$(F_1, F_2) \doteq 0$$

módon fejezzük ki. Ha két ilyen erőt egy nyugalomban lévő merev testre működtetünk, azt tapasztaljuk, hogy a merev test továbbra is nyugalomban marad.

Az axióma fenti megfogalmazásában nem szerepel az erő támadáspontja. Ennek fontos következménye van: Az erő támadáspontjának nincs szerepe két erő egyensúlyának vizsgálata során. Ez azt is jelenti, hogy merev testek esetében az erők a hatásvonaluk mentén szabadon eltolhatók. (Ezt az állítást egyébként a harmadik axióma segítségével szemléletesen is bizonyíthatjuk.)

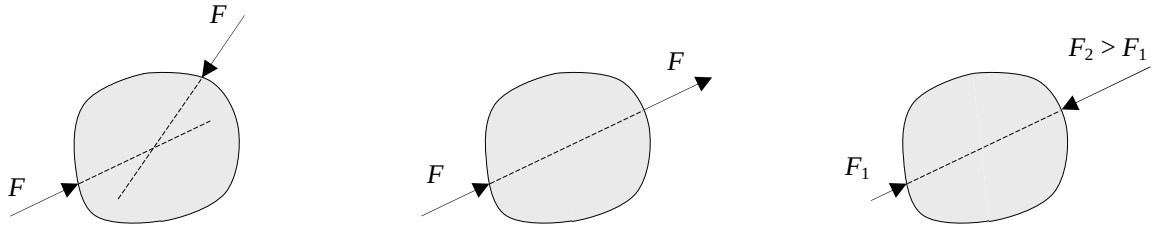
Ennek megfelelően egyaránt egyensúlyban van az 1.4/a ábrán látható F_1 és F_2 húzóerőkkel támadott és az 1.4/b ábrán vázolt F_1 és F_2 nyomóerőkkel támadott merev test, ha teljesül az $|F_1| = |F_2|$ feltétel.



a) b)

1.4 ábra. Egyensúlyban lévő merev test, a) húzóerők, b) nyomóerők esetében.

Nem teljesül az 1.5 ábrán vázolt erőrendszerek esetében az első axiómában megfogalmazott három feltétel valamelyike, ezért ezek az erőrendszerek nincsenek egyensúlyban.



a) b) c)

1.5 ábra. Nem teljesül az egyensúly három feltétele. a) az erők hatásvonala nem közös, b) az erők értelme nem ellentétes, c) az erők nem egyenlő nagyságúak.

Jelen jegyzet csak méret- és alakváltozást nem végző *merev* testek statikájával foglalkozik, de már most megemlítjük, hogy az erők hatásvonal mentén történő szabad eltolásával

kapcsolatos fenti megjegyzés *csak* merev testek esetében érvényes, szilárd (méret- és alakváltozásra is képes) testek esetében nem. Az 1.6 ábrán látható két, alakváltozásra is képes rúd viselkedésének vizsgálata látványosan szemlélteti ezt a tényt. A rudak anyaga szilárd, vagyis a rudak alakváltozásra képesek.



1.6 ábra. Egyensúlyban lévő, alakváltozásra képes rúd, a) húzóerők, b) nyomóerők esetében.

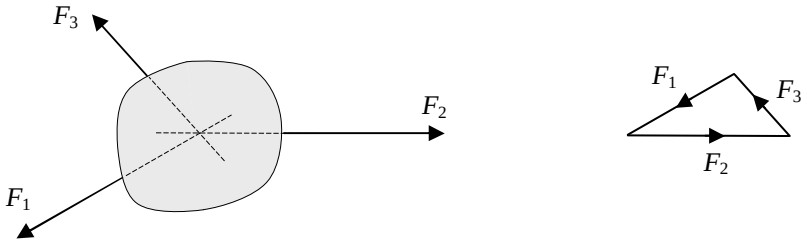
Tételezzük fel, hogy mindkét rudat egyensúlyban lévő erőrendszer támadja és a terhelő erők nagyságát zérus értékről folyamatosan növeljük. A két rúd viselkedése alapvetően különböző. A húzott erőkkel terhelt rúd (1.6/a ábra) az alakváltozás létrejötte (a rúd megnyúlása) során végig egyenes tengelyű marad. A nyomóerőkkel terhelt rúd (1.6/b ábra) eleinte tengelyirányú összenyomódást szenved, majd egy bizonyos erőnagyság elérése után meggörbül. Ez a meggörbülés a rudat jóval veszélyesebb helyzetbe hozza, mintha a tengelye egyenes maradna. A jelenség azt is mutatja, hogy szilárd testek vizsgálata során az erők támadáspontja a hatásvonaluk mentén *nem* tolható el.

1.2.2 A második axióma

A második axióma pontos származási ideje nem ismert, de azt tudjuk, hogy már a középkor boltozatépítői is ismerték és alkalmazták. Azt mondja ki, hogy *három erő akkor és csakis akkor van egyensúlyban, ha hatásvonalaik közös pontban metszik egymást és vektoraikból nyílfolytonos, zárt háromszög szerkeszthető* (1.7 ábra). A három erő (F_1, F_2 és F_3 az 1.7 ábrán) egyensúlyát a második axióma szerint az

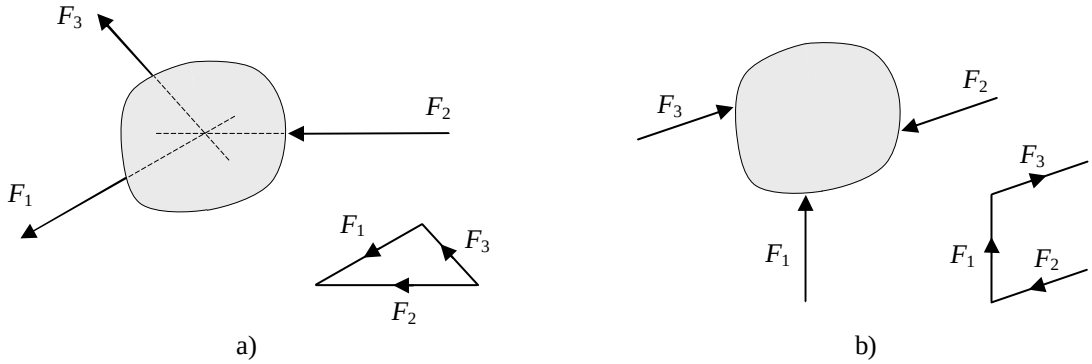
$$(F_1, F_2, F_3) \doteq 0$$

módon fejezzük ki. Ha három egyensúlyban lévő erőt egy nyugalomban lévő merev testre működtetünk, azt tapasztaljuk, hogy a merev test továbbra is nyugalomban marad.



1.7 ábra. Három erővel terhelt merev test és az erők vektorháromszöge.

Nincs viszont egyensúlyban az 1.8/a ábrán vázolt három erő, mert a vektoraikból szerkesztett zárt háromszög nem nyílfolytonos. Az 1.8/b ábrán látható három erő sincs egyensúlyban, mert vektoraikból nem szerkeszthető zárt háromszög. Ez a párhuzamos F_2 és F_3 erők miatt nem lehetséges.



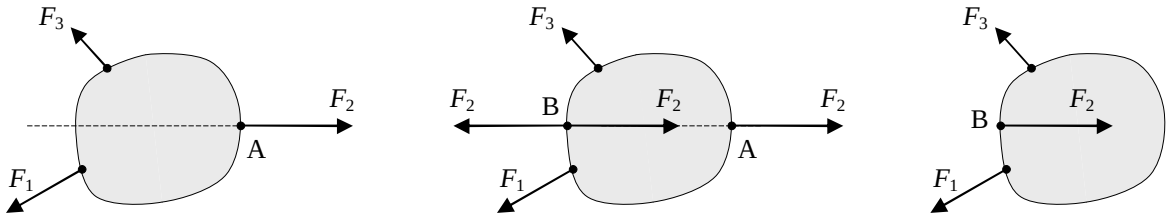
1.8 ábra. A három erő nem lehet egyensúlyban. a) a nyílfolytonosság hiánya miatt, b) nem szerkeszthető zárt vektorháromszög.

1.2.3 A harmadik axióma

A harmadik axiómát egyes források szerint Pierre Varignon (1654-1722) francia matematikus 1685-ban fogalmazta meg. A harmadik axióma azt mondja ki, hogy e*gyensúlyban lévő erőrendszerhez az egyensúly megzavarása nélkül lehet hozzátenni olyan erőket, amelyek önmagukban is egyensúlyban vannak, továbbá valamely egyensúlyban lévő erőrendszerből ugyancsak az egyensúly megzavarása nélkül lehet eltávolítani önmaguk között egyensúlyban lévő erőket*.

A harmadik axióma felhasználásával szemléletesen bizonyíthatjuk az első axióma tárgyalásakor már megfogalmazott állítást, amely szerint a merev testre ható erők saját hatásvonalukon bárhova elcsúsztathatók (vagyis a támadáspontjuk a hatásvonalon bárhol felvehető).

A bizonyításhoz tekintsük az 1.9/a ábrán vázolt merev testet, amelyet az (F_1, F_2 és F_3) egyensúlyban lévő erőrendszer támad.



1.9 ábra. Az F_2 erő a hatásvonala mentén az egyensúly megzavarása nélkül elcsúsztatható.

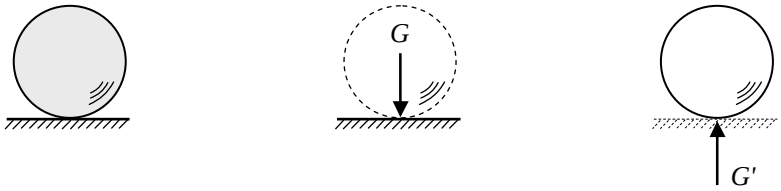
Adjunk az egyensúlyban lévő erőrendszerhez egy másik egyensúlyban lévő erőrendszert. Ez a másik egyensúlyban lévő erőrendszer két erőt tartalmaz, amelyek a „B” pontban támadják a merev testet (1.9/b ábra). A két erő nagysága F_2, értelmük ellentétes és hatásvonaluk közös. Ez a közös hatásvonal megegyezik az eredeti három erőből álló rendszer F_2 erejének hatásvonalával. Így egy öt erőből álló erőrendszerhez jutunk, amely erőrendszer a harmadik axióma szerint egyensúlyban van. A harmadik axióma szerint ebből az egyensúlyban lévő erőrendszerből az egyensúly megzavarása nélkül elvehetünk egy egyensúlyban lévő erőrendszert. Ez az erőrendszer álljon a „B” pontban balra mutató F_2 és az „A” pontban jobbra mutató F_2 erőből. A két erő elvétele után az 1.9/c ábrán látható, három erőt tartalmazó egyensúlyban lévő rendszerhez jutunk. Az 1.9/a és 1.9/c ábrát összehasonlítva

azt látjuk, hogy az eredetileg az „A” pontban működő F_2 erőt gyakorlatilag áttoltuk a „B” pontba. Mivel ebbe a helyzetbe úgy jutottunk, hogy a harmadik axiómát alkalmaztuk (kétszer), bebizonyítottuk azt az állítást, hogy a merev testre ható erő a hatásvonala mentén szabadon eltolható.

1.2.4 A negyedik axióma

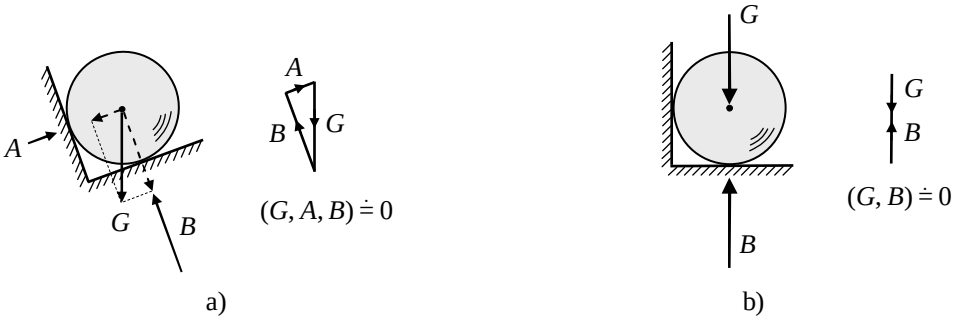
A negyedik axiómát Isaac Newton (1643-1727) 1687-ben fogalmazta meg. A negyedik axióma azt mondja ki, hogy *két merev test által egymásra kifejtett erők mindig páronként fordulnak elő, közös hatásvonalúak, ellentett értelműek és egyenlő nagyságúak.* A negyedik axióma a *hatás-ellenhatás* és az *akció-reakció törvénye* néven is ismert.

Egyszerű példa a negyedik axiómára a földön, vízszintes síkon nyugalomban lévő golyó esete (1.10 ábra). A két merev test ekkor a föld és a golyó. A golyó G súlyát az alátámasztásban keletkező, vele azonos nagyságú és ellentett értelmű G' reakcióerő egyensúlyozza. A két erő közös hatásvonalú.



1.10 ábra. G hatás (akció) és G' ellenhatás (reakció) a negyedik axiómának megfelelően.

Általánosabb helyzet áll elő, ha a golyó nem vízszintes síkon helyezkedik el, hanem két ferde síkú, egymással derékszöget bezáró megtámasztó felület biztosítja a golyó mozdulatlan, nyugalmi állapotát (1.11/a ábra). Az erőjáték vizsgálatához ekkor a második és negyedik axiómát használjuk fel és alkalmazzuk az erő felbontására vonatkozó ismereteinket (az 1.1.3 pont szerint).



1.11 ábra. Golyó, a) ferde síkú felületekkel megtámasztva, b) sarokhelyzetben.

A G hatást (a golyó súlyát) ekkor két összetevőjével helyettesíthetjük, amelyek merőlegesek a megtámasztó síkokra (szaggatott vektorok az 1.11/a ábrán). A két összetevő (hatás) egyenként ellenhatást vált ki: ezek az A és B erők. A három erő egyensúlyát a G-A-B vektorháromszög szemlélteti.

Az elrendezés vízszintes és függőleges síkú megtámasztások esetén az 1.11/b ábrán vázolt speciális sarokhelyzetet eredményezi. Ha ekkor az előzőek szerint eljárva a G erőt a megtámasztó felületekre merőleges irányú összetevőkre bontjuk, akkor azt találjuk, hogy a baloldali (vízszintes) A összetevő zérus és az egyensúly a G és B erőkkel biztosítható. Ezzel gyakorlatilag visszajutunk az 1.10 ábrán vázolt helyzethez.

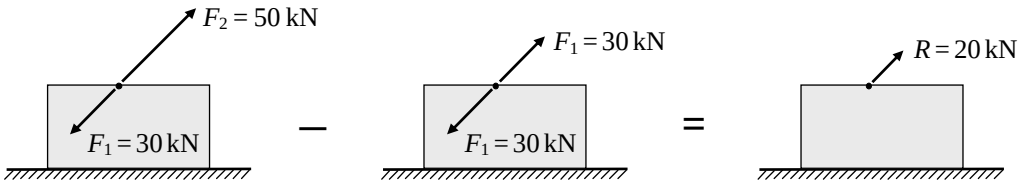
Mechanika tanulmányaink során a megtámasztások fontos szerepet játszanak, amikor a tartószerkezeteinken működő terheket a megtámasztások segítségével adjuk át az alátámasztó szerkezetekre – rendszerint a földre. A negyedik axióma – az akció-reakció törvényeként – ekkor a gyakorlati alkalmazás fontos eszköze.

1.3 Közös metszéspontú két erő összetétele

Mielőtt a gyakorlati esetekben általánosan előforduló erő*rendszerekkel* foglalkozunk, ebben a pontban bemutatjuk, hogy hogyan tudunk két közös metszéspontú erőt eredő erővé összetenni.

1.3.1 Közös hatásvonalon működő két erő összetétele

Tekintsük az 1.12/a ábrán vázolt két erőt. Az F_1 és F_2 erők közös hatásvonalon működnek. Feladatunk a két erő helyettesítése egyetlen erővel.

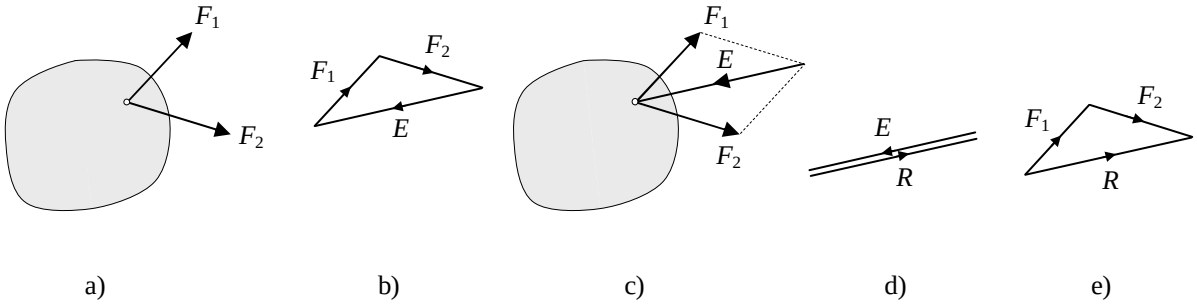


1.12 ábra. Közös hatásvonalon működő két erő összetétele. a) az F_1 és F_2 erő, b) egyensúlyban lévő két erő, c) az R eredő erő.

Vegyünk el az F_1-F_2 erőrendszerből egy egyensúlyban lévő (zérus értékű) erőrendszert. Ezt az egyensúlyban lévő erőrendszert úgy választjuk meg, hogy két F_1 = 30 kN nagyságú erőből áll (1.12/b ábra). Az eredmény az 1.12/c ábrán látható R = 20 kN nagyságú erő, amely erő egyben az eredeti erőrendszer eredője.

1.3.2 Végesben metsződő két erő összetétele

Határozzuk meg az 1.13/a ábrán látható két erő eredőjét.



1.13 ábra. Közös metszéspontú két erő összetétele. a) az F_1 és F_2 erő, b) egyensúlyozás, c) az E egyensúlyozó erő, d) az R eredő előállítása, e) az F_1, F_2 és R nyílütközéses vektorháromszöge.

Az első lépésben a második axióma felhasználásával meghatározzuk a két erőt egyensúlyozó erőt, vagyis azt a harmadik erőt amellyel együtt a három erő egyensúlyban van.

Ezt az erőt E-vel jelöljük. A második axióma szerint eljárva, nyílfolytonos, zárt háromszöget kell szerkeszteni. Az így létrehozott E erő (1.13/b ábra) a keresett egyensúlyozó erő, amely át kell menjen a két erő metszéspontján (1.13/c ábra). A második lépésben az első axiómát alkalmazzuk és előállítjuk az E erőt egyensúlyozó erőt, amely egyben az F_1 és F_2 erők R eredője (1.13/d ábra). Fentiek szerint az R eredő erővel kapcsolatban megállapíthatjuk, hogy átmegy a két erő (F_1 és F_2) metszéspontján és az F_1 és F_2 erők felhasználásával nyílütközéses vektorháromszög szerkesztésével állíthatjuk elő (1.13/e ábra). Az R eredő erő természetesen minden szempontból helyettesíti az eredeti két erőt.

2

Síkbeli erőrendszer

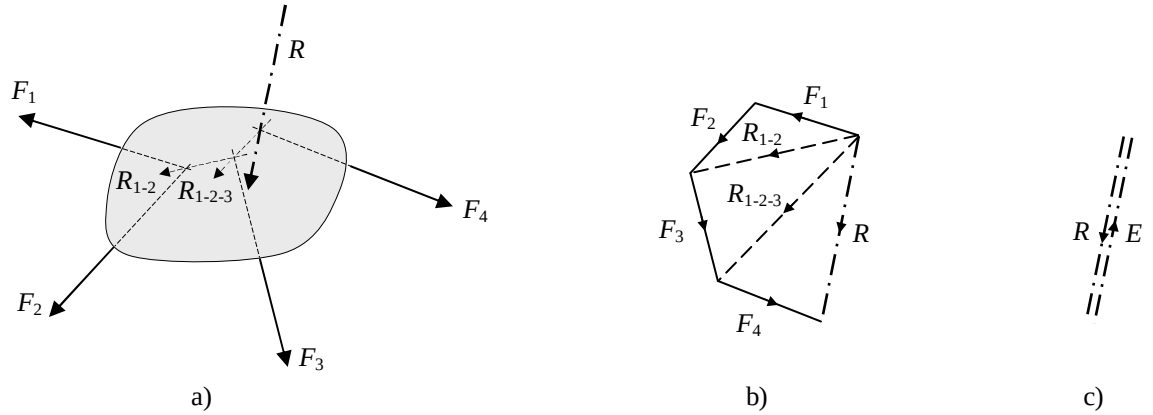
Tartószerkezeteinket rendszerint több erőhatás éri és a terhelés gyakran erőrendszerek formájában jelentkezik. Ez a fejezet ilyen, több erőből álló síkbeli erőrendszerek vizsgálatával foglalkozik.

2.1 Síkbeli erőrendszer összetétele eredővé

Sokszor szükséges – vagy a vizsgálat során célravezető – a sok erőből álló erőrendszert egyetlen erővel – az eredővel – helyettesíteni. A feladatot szerkesztéssel és számítással is egyszerűen megoldhatjuk. Bár úgy tűnik, hogy napjainkban a szerkesztéses megoldások gyakran háttérbe szorulnak, a szerkesztéses megoldást is bemutatjuk, mert szemléletessége nagymértékben hozzásegít a statikai érzék fejlesztéséhez.

2.1.1 Megoldás szerkesztéssel

A szerkesztés során felhasználjuk a két erővel kapcsolatban az 1.3.2 pontban összefoglalt tanulságokat és lépésenként járunk el. Az eljárást a 2.1/a ábrán vázolt, négy erőből álló erőrendszer esetére mutatjuk be. Az első lépésben az F_1 és F_2 erőt összetesszük az $R_{1\text{-}2}$ eredővé. Az $R_{1\text{-}2}$ eredőt a 2.1/b ábrán látható vektorábra segítségével szerkesztjük meg, majd ábrázoljuk a 2.1/a ábrán is, ahol az $R_{1\text{-}2}$ erő átmegy az F_1 és F_2 erők metszéspontján. Irányát a vektorábráról vesszük: párhuzamos az ott megszerkesztett $R_{1\text{-}2}$ erővel. Ezzel a lépéssel az F_1 és F_2 erőket kiiktattuk a további vizsgálatokból, hiszen helyettesíthetjük őket az $R_{1\text{-}2}$ eredőjükkel.



2.1 ábra. Erőrendszer helyettesítése eredővel és egyensúlyozása egy erővel. a) az F_1-F_2-F_3-F_4 erőrendszer és az R eredője, b) vektoridom, c) az E egyensúlyozó erő.

A következő lépésben az $R_{1\text{-}2}$ erő és az F_3 erő $R_{1\text{-}2\text{-}3}$ eredőjét szerkesztjük meg a 2.1/b vektorábra segítségével, majd ábrázoljuk a 2.1/a ábrán is. Itt az $R_{1\text{-}2\text{-}3}$ erőt úgy helyezzük el, hogy átmenjen az $R_{1\text{-}2}$ erő és az F_3 erő hatásvonalainak metszéspontján és párhuzamos legyen a vektorábrán megszerkesztett erővel. Így már csak két erőnk maradt: az $R_{1\text{-}2\text{-}3}$ erő és az F_4 erő. Ezek eredője az R eredő, amely egyben az egész erőrendszer eredője. Nagyságát és

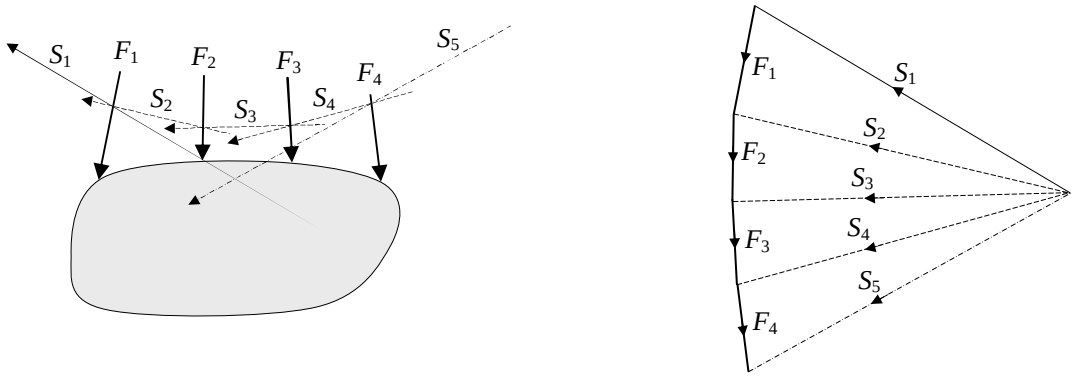
irányát a vektorábra szolgáltatja, helyét pedig a 2.1/a ábra segítségével kapjuk meg: át kell mennie az $R_{1\text{-}2\text{-}3}$ erő és az F_4 erő hatásvonalainak a metszéspontján.

A szerkesztést tanulmányozva megállapíthatjuk, hogy az R eredő nagyságát egy lépésben is megkaphatjuk az F_1, F_2, F_3 és F_4 erők vektoridoma segítségével, ha az F_1 erő vektorának kezdőpontját összekötjük az F_4 erő vektorának végpontjával.

Az E egyensúlyozó erő az R eredő ellentettje (2.1/c ábra). Hatásvonala azonos R eredő hatásvonalával.

A fent bemutatott szerkesztés csak akkor alkalmazható, ha az erők metszéspontja kezelhető helyre (vagyis a rajzlap területére) esik. Az alábbiakban bemutatunk egy alternatív szerkesztést, arra az esetre, amikor ez a feltétel nem teljesül. Párhuzamos – vagy közel párhuzamos – erők esetében csak ez a szerkesztés alkalmazható.

A 2.2/a ábrán vázolt F_1, F_2, F_3 és F_4 erőkből álló erőrendszer esetében az eredő meghatározása során az okozza a problémát, hogy ha megpróbálunk a fent bemutatott módon eljárni, akkor azt tapasztaljuk, hogy már az első lépést sem tudjuk megtenni, mert nem tudjuk elhelyezni az F_1 és F_2 erők eredőjét. Ennek az az oka, hogy az F_1 és F_2 erők metszéspontja (amelyen keresztül menne az eredőjük) az erőket ábrázoló rajztól nagyon távol kerül. Ezt a problémát egy egyszerű fogással megoldhatjuk. Adjunk az erőrendszerhez egy S_1 segéderőt, oly módon, hogy az S_1 erő és az F_1 erő metszéspontja könnyen ábrázolható helyre kerüljön. (Ezt az S_1 erőt az utolsó lépésben majd el fogjuk venni az erőrendszerből.)



a) az S_1-F_1-F_2-F_3-F_4 erőrendszer b) vektoridom

2.2 ábra. Alternatív szerkesztés párhuzamos (vagy közel párhuzamos) erőrendszer esetében.

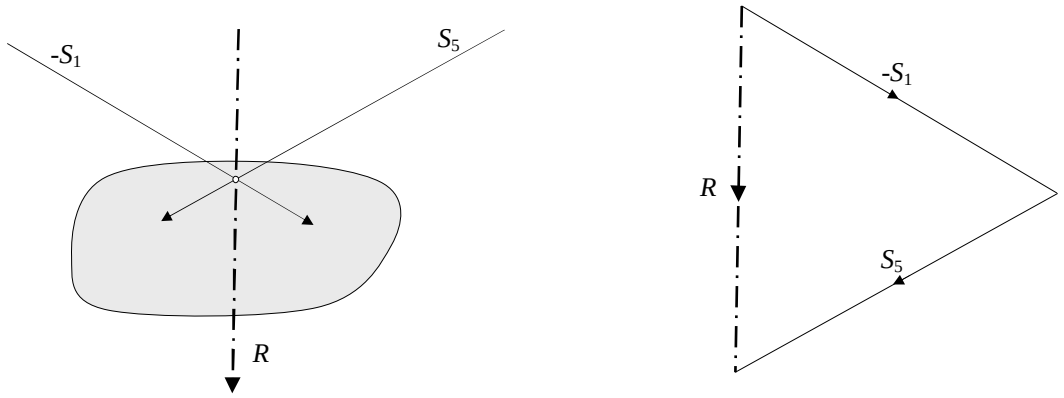
Ily módon eljárva egy S_1, F_1, F_2, F_3 és F_4 erőkből álló erőrendszerhez jutunk. Az előzőekben elmondottak szerint az eredeti szerkesztés lépéseit követve meghatározzuk az öt erő eredőjét, amit S_5-el jelölünk:

$$(S_1, F_1, F_2, F_3, F_4) \doteq S_5$$

A 2.2 ábrán az S_2 az S_1 és F_1, az S_3 az S_2 és F_2 és az S_4 az S_3 és F_3 eredője. A problémánk az, hogy a most megszerkesztett S_5 eredő az eredeti F_1, F_2, F_3 és F_4 erőkön kívül tartalmazza a „nem kívánt” S_1 segéderőt is. Ezen a problémán könnyen segíthetünk: kivonjuk az S_5 erőből az S_1 erőt és így pontosan az eredeti (F_1, F_2, F_3 és F_4) erőrendszer R eredőjéhez jutunk:

$$(S_5, -S_1) \doteq R$$

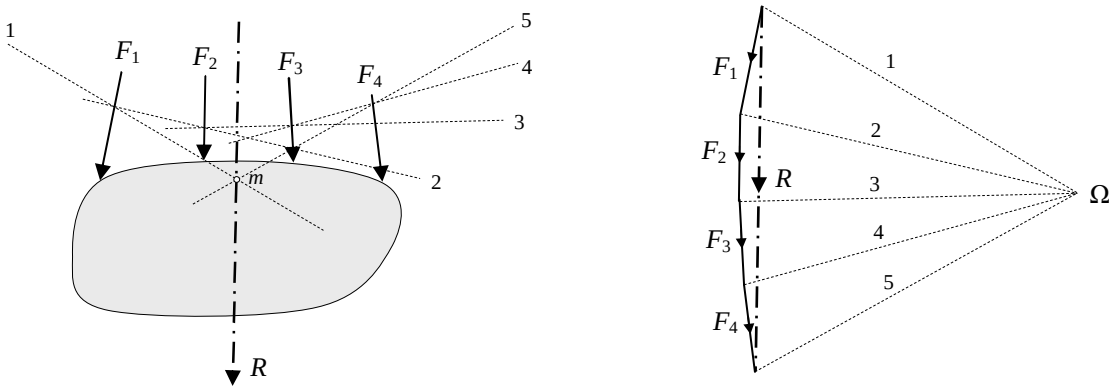
Ezt a szerkesztést a 2.3 ábrán találjuk.



a) b)

2.3 ábra. a) az S_5 és $-S_1$ erők eredője az eredeti F_1-F_2-F_3-F_4 erőrendszer R eredőjét adja, b) vektoridom.

Végül a gyakorlati végrehajtás céljára egyetlen ábrán foglaljuk össze a szerkesztés menetét (2.4 ábra). Az erőrendszer eredőjét úgy kapjuk meg, hogy az erőkből vektoridomot képezünk, majd az első erő kezdőpontját összekötjük az utolsó erő végpontjával (2.4/b ábra).



a) erőrendszer b) vektoridom

2.4 ábra. A szerkesztés végrehajtása a gyakorlatban.

Ezt a vektoridomot használjuk fel az eredő helyének meghatározásához. A vektoridom mellett felveszünk egy „Ω” póluspontot. A póluspont helye tetszőleges és célszerűen úgy vesszük fel, hogy a következőkben részletezett szerkesztés végrehajtása minél egyszerűbb legyen, illetve a szerkesztés kényelmesen elférjen az erőrendszer rajzán. A póluspontot összekötjük az első erő kezdőpontjával és minden erő végpontjával. Ezeket az ún. húrokat használjuk fel a szerkesztéshez. Az erőrendszert ábrázoló 2.4/a ábrán először az első (1. jelű) húrral húzunk párhuzamost, úgy, hogy a vonal metssze az első erőt. (Erre az első vonalra a szerkesztés befejezésekor ismét szükség lesz majd.) Ezután a második (2. jelű) húrral húzunk párhuzamost, úgy, hogy ez a vonal átmenjen az első vonal és az első erő metszéspontján. Ily módon minden húrral párhuzamost húzunk. Az utolsó (esetünkben 5. jelű) párhuzamost meghosszabbítjuk oly módon, hogy metszésbe kerüljön az első (1. jelű) párhuzamossal. Ez az m metszéspont határozza meg az eredő helyét. Az eredő átmegy ezen a ponton és párhuzamos a vektoridomban már megszerkesztett R erő hatásvonalával.

Nem nehéz észrevenni, hogy a szerkesztéshez felhasznált 1-2-3-4-5 jelű húrok valójában az S_i segéderőknek felelnek meg.

A szerkesztést léptékhelyes ábra segítségével végezzük el. A léptéket – pl. 1 cm (=) 1 kN –

úgy állapítjuk meg, hogy az erők kényelmesen elférjenek a rendelkezésre álló rajzterületen és az eredményeket – rendszerint erőket – megfelelő pontossággal tudjuk az ábráról leolvasni.

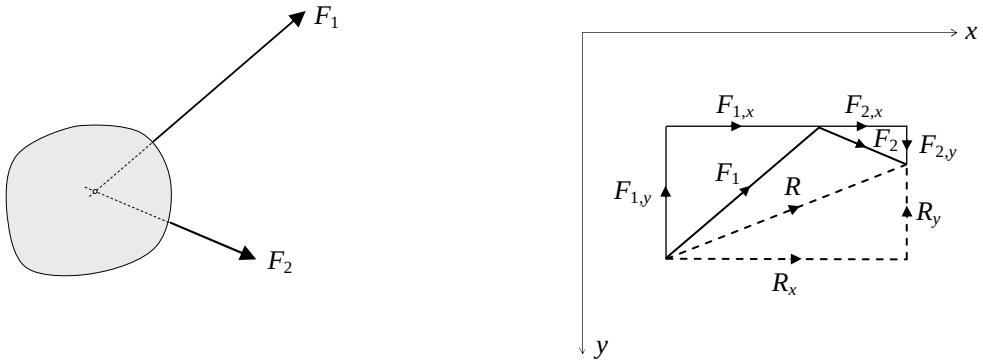
2.1.2 Megoldás számítással

A számítás végrehajtásához rendszerint derékszögű (pl. *x–y*) koordináta-rendszert használunk. Az eljárás során két fontos tételt alkalmazunk. A következőkben ezt a két tételt ismertetjük. A tételeket először két erő esetére bizonyítjuk, majd általánosítjuk őket több erőre.

Vetületi tétel

Tekintsük a 2.5/a ábrán vázolt merev testet, amelyre az F_1 és F_2 erők hatnak. Állítsuk elő a két erő eredőjét:

$$(F_1, F_2) \doteq R$$



a) b)

2.5 ábra. a) Merev test két erővel, b) ábrázolás az *x–y* koordináta-rendszerben.

Helyezzük el a két erőt és az eredőjüket vektoridom formájában az *x–y* derékszögű koordináta-rendszerben (2.5/b ábra). Állítsuk elő az erők vetületeit. Ha az *x* irányú erőket tekintjük, akkor felírható, hogy

$$F_{1,x} + F_{2,x} = R_x$$

Fenti egyenlet általánosabb formában is megfogalmazható, hiszen könnyű belátni, hogy *n* erő esetében az erőket kettesével összetéve az

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x}$$

egyenlethez jutunk. Ez az 1. vetületi tétel. A tétel azt mondja ki, hogy *az eredő erő vízszintes vetülete egyenlő az összetevők vízszintes vetületeinek algebrai (előjeles) összegével*.

Hasonlóképpen eljárva az *y* irányú erők esetében, a

$$-F_{1,y} + F_{2,y} = R_y$$

összefüggés az

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y}$$

2. vetületi tételhez vezet, vagyis *az eredő erő függőleges vetülete egyenlő az összetevők függőleges vetületeinek algebrai (előjeles) összegével.*

Nyomatéki tétel

Szorozzuk meg az 1. vetületi tételhez vezető fenti $F_{1,x} + F_{2,x} = R_x$ egyenletet y_A-val:

$$F_{1,x} y_A + F_{2,x} y_A = R_x y_A$$

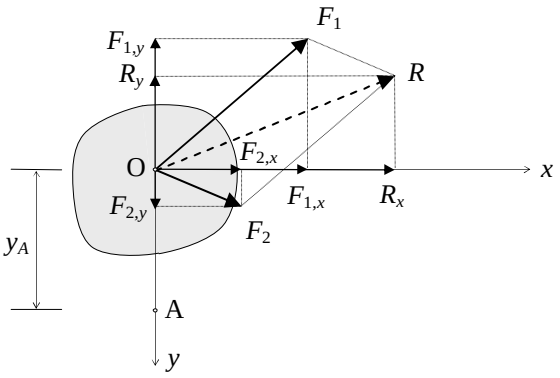
A 2.6 ábra tanúsága szerint az egyenlet baloldala az F_1 és F_2 erőkből álló erőrendszer nyomatéka az „A” pontra, a jobboldal pedig az eredő nyomatéka az „A” pontra, vagyis

$$M_A^{F_1} + M_A^{F_2} = M_A^R$$

Felírható tehát az általános alakú

$$M_A^R = \sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i}$$

egyenlet. Ez a nyomatéki tétel, amely azt mondja ki, hogy *az eredő nyomatéka a sík valamely pontjára egyenlő az összetevők ugyanezen pontra felírt nyomatékainak algebrai (előjeles) összegével.*



2.6 ábra. Az erőrendszer nyomatéka az „A” pontra.

A vetületi és nyomatéki tételek ismeretében végül összefoglaljuk a számítás menetét.

A számítás menete általános elrendezésű erők esetében

Tekintsük a 2.7 ábrán vázolt F_1, F_2 ... F_n erőkből álló erőrendszert. Feladatunk az eredő meghatározása. A számítás előkészítéséhez először felveszünk egy koordináta-rendszert. Ez általában egy *x–y* derékszögű koordináta-rendszer. A koordináta-rendszer elhelyezése tetszőleges, így rendszerint célszerűségi szempontok alapján választjuk ki a kezdőpontot és a tengelyek irányítottságát: például párhuzamos erők esetén az egyik tengely legyen az erőkkel párhuzamos. Az erőket a kiválasztott koordináta-rendszerben nagyságukkal, hajlásszögükkel és a támadáspontjuk két koordinátájával adjuk meg: $\overline{F_i}(F_i, \alpha_i, x_i, y_i)$. Az eredőt akkor

tekintjük ismertnek, ha előállítottuk a nagyságát, hajlásszögét és egy pontjának két koordinátáját: $\overline{R}(R, \varphi, x, y)$. Szokásos alternatív megadási forma az eredő megadásakor, ha ez a pont az eredő metszéspontja az egyik koordinátatengellyel (például az *x* tengellyel): $\overline{R}(R, \varphi, x_0)$.

A következőkben ezt az eljárást hat lépésben összefoglalva mutatjuk be.

1) Az erők felbontása *x* és *y* irányú összetevőkre:

$$F_{i,x} = F_i \cos\alpha_i \qquad \text{és} \qquad F_{i,y} = F_i \sin\alpha_i$$

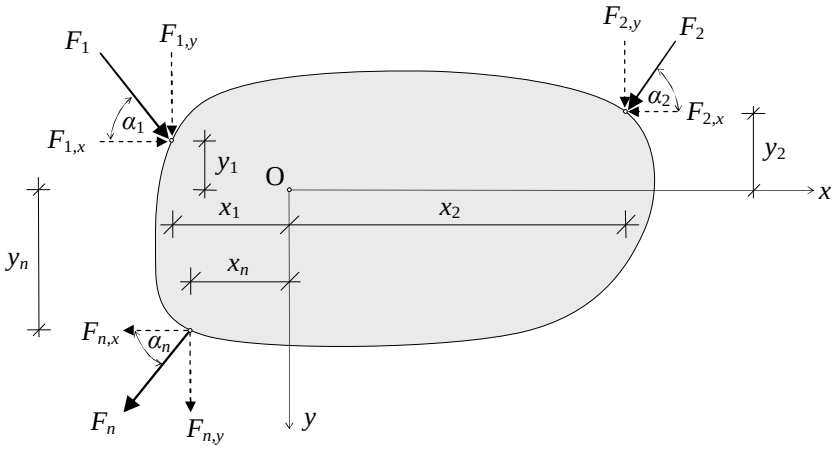
2) Az eredő *x* irányú összetevőjének meghatározása az 1. vetületi tétellel:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i = F_{1,x} + F_{2,x} + \ldots + F_{n,x}$$

3) Az eredő *y* irányú összetevőjének meghatározása a 2. vetületi tétellel:

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = \sum_{i=1}^{n} F_i \sin\alpha_i = F_{1,y} + F_{2,y} + \ldots + F_{n,y}$$

Fontos figyelembe venni, hogy az erők összetevői előjeles mennyiségek!



2.7 ábra. Az F_1, F_2 ... F_n erőkből álló erőrendszer az *x*–*y* koordináta-rendszerben.

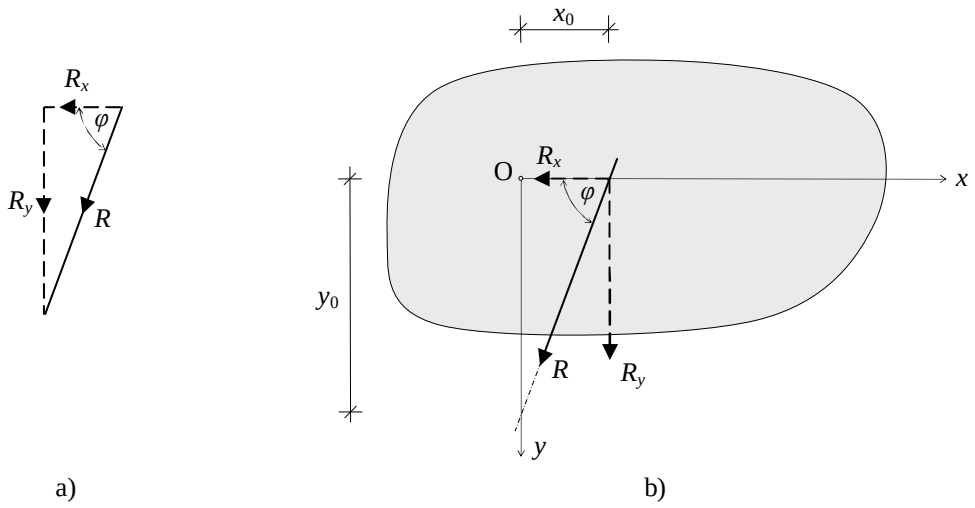
4) Az eredő meghatározása a két összetevőjének segítségével történik (2.8/a ábra):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

5) Az eredő hajlásszöge a vízszintessel:

$$\tan\varphi = \frac{R_y}{R_x}$$

6) Az eredő hatásvonala egy pontjának meghatározása
Ezt a pontot általában az eredő és az *x* tengely metszéspontjaként választjuk ki (2.8/b ábra).



2.8 ábra. a) Az eredő és összetevői, b) az eredő egy pontjának $R(x_0; 0)$ meghatározása.

A nyomatéki tétel alkalmazásával felírhatjuk, hogy az eredő nyomatéka a koordináta-rendszer „O” kezdőpontjára egyenlő az erőrendszer összetevőinek ugyanerre a pontra felírt nyomatékával

$$M_O^R = \sum_{i=1}^{n} M_O^{F_i}$$

vagyis

$$M_O^R = \sum_{i=1}^{n} (F_{i,x} y_i + F_{i,y} x_i)$$

Az $(x_0,0)$ pontban összetevőire felbontott eredő esetében ez az egyenlet az

$$x_0 R_y = F_{1,x} y_1 + F_{2,x} y_2 + \ldots + F_{n,x} y_n + F_{1,y} x_1 + F_{2,y} x_2 + \ldots + F_{n,y} x_n$$

alakot ölti, ahonnan

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (F_{i,x} y_i + F_{i,y} x_i)}{R_y}$$

Érvényesek továbbá a

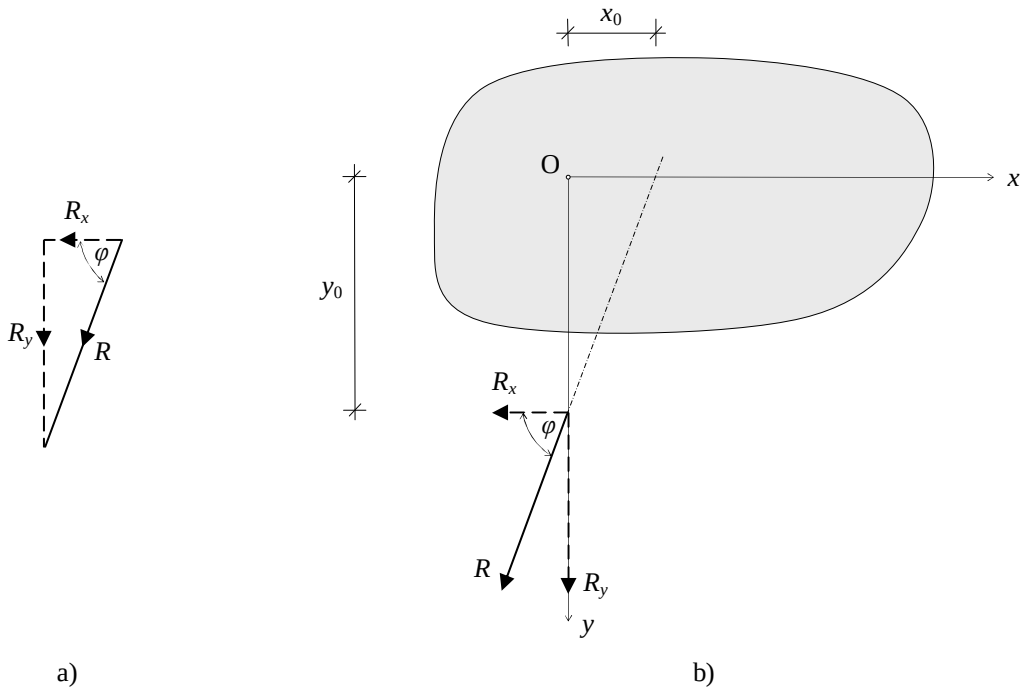
$$\tan\varphi = \frac{y_0}{x_0} \qquad \text{és} \qquad y_0 = x_0 \tan\varphi$$

összefüggések (2.8/b ábra).

Ha az eredő helyét az eredő és az y tengely metszéspontjával kívánjuk megadni, akkor egy a fentihez hasonló levezetés az

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_{i,x}y_i + F_{i,y}x_i)}{R_x}$$

összefüggést eredményezi (2.9 ábra).

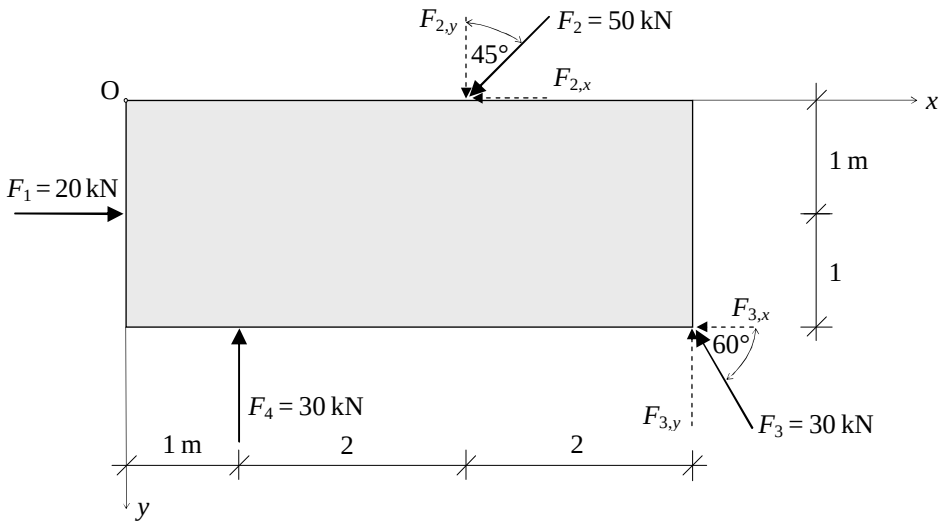


2.9 ábra. a) Az eredő és összetevői, b) az eredő egy pontjának $R(0; y_0)$ meghatározása.

A gyakorlati esetek többsége a fent leírt módon az eredő meghatározását tűzi ki feladatul. Vannak azonban ún. inverz feladatok is, amelyek során pl. adott, illetve előírt az eredő helye. Ilyen esetekben úgy jutunk megoldáshoz, hogy egy vagy több erő nagyságát (vagy helyét) úgy határozzuk meg, hogy teljesüljön az eredő helyére vonatkozó feltétel.

2.1.3 Gyakorló feladat

Határozzuk meg a 2.10 ábrán vázolt, négy erőt tartalmazó erőrendszer eredőjét.



2.10 ábra. Erőrendszer a gyakorló feladathoz.

A feladatot a fent felsorolt hat lépésben összefoglalva oldjuk meg.

1) Az erők felbontása *x* és *y* irányú összetevőkre:

$$F_{2,x} = -50\sin 45° = -35.36\ \text{kN} \qquad \text{és} \qquad F_{2,y} = 50\cos 45° = 35.36\ \text{kN}$$

$$F_{3,x} = -30\cos 60° = -15.0\ \text{kN} \qquad \text{és} \qquad F_{3,y} = -30\sin 60° = -25.98\ \text{kN}$$

2) Az eredő *x* irányú összetevőjének meghatározása az 1. vetületi tétellel:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 20 - 35.36 - 15 = -30.36\ \text{kN}\ (\leftarrow)$$

3) Az eredő *y* irányú összetevőjének meghatározása a 2. vetületi tétellel:

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 35.36 - 25.98 - 30 = -20.62\ \text{kN}\ (\uparrow)$$

4) Az eredő meghatározása a két összetevőjének segítségével történik (2.11/a ábra):

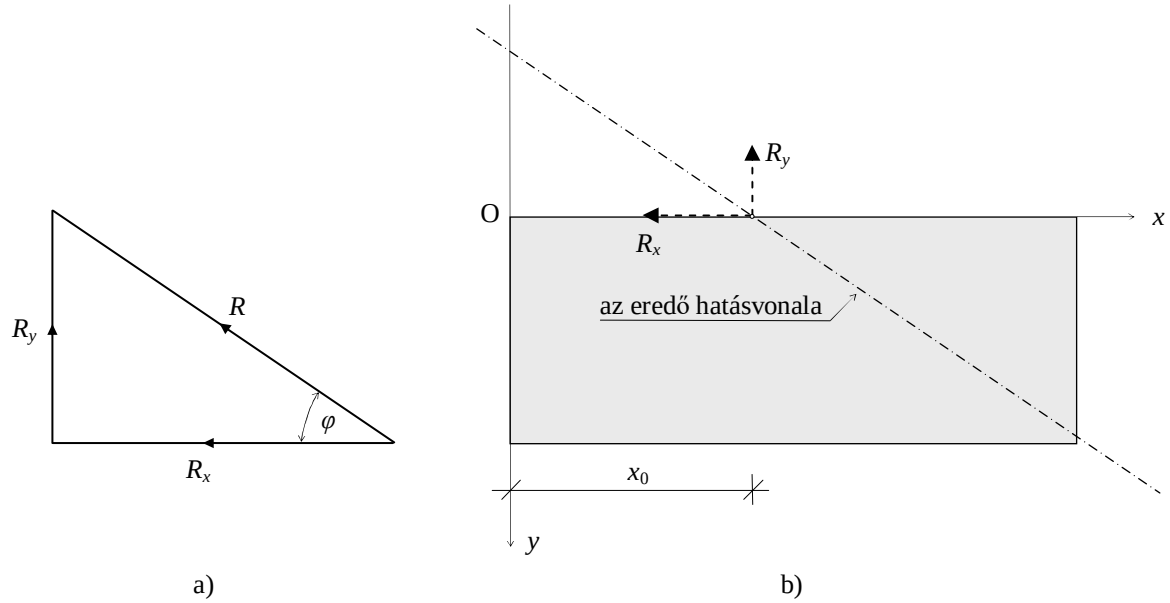
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{30.36^2 + 20.62^2} = \sqrt{1346.9} = 36.7\ \text{kN}$$

5) Az eredő hajlásszöge a vízszintessel:

$$\tan\varphi = \frac{R_y}{R_x} = \frac{20.62}{30.36} = 0.6792 \qquad \text{innen} \qquad \varphi = 34.18°$$

6) Az eredő hatásvonala egy pontjának meghatározása

Az eredő hajlásszögének ismeretében tételezzük fel, hogy az eredő az *x*-*y* síknegyedben a 2.11/b ábrán látható módon helyezkedik el.



2.11 ábra. a) Az erőrendszer eredője, b) az eredő metszéspontja az *x* tengellyel.

Alkalmazzuk a nyomatéki tételt, amely szerint az eredő nyomatéka a sík valamely pontjára (esetünkben a koordináta-rendszer „O” kezdőpontjára) egyenlő az összetevők ugyanezen pontra felírt nyomatékainak algebrai összegével:

$$M_O^R = \sum_{i=1}^{n} M_O^{F_i}$$

Az eredőt az (x_0; 0) pontban felbontva felírható tehát, hogy

$$-R_y x_0 = \sum_{i=1}^{n} M_O^{F_i}$$

Az ismert adatokat behelyettesítve

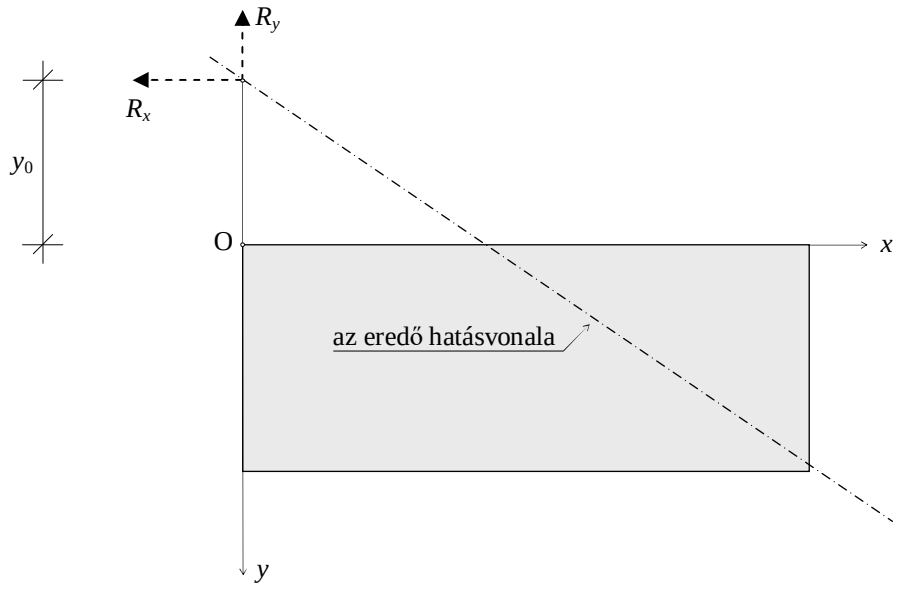
$$-20.62 x_0 = -20 \cdot 1 + 35.36 \cdot 3 + 15 \cdot 2 - 25.98 \cdot 5 - 30 \cdot 1$$

és innen

$$x_0 = \frac{-43.82}{-20.62} = 2.13\,\text{m}$$

Az x_0-ra kapott pozitív előjel azt jelenti, hogy a számítás elején jól tételeztük fel az eredő elhelyezkedését.

Gyakorlásképpen határozzuk meg az eredő metszéspontját az y tengellyel is. Ennél a számításnál az eredőt a (0; y_0) pontban bontjuk fel összetevőire (2.12 ábra).



2.12 ábra. Az eredő metszéspontja az y tengellyel.

A nyomatéki tétel alkalmazásával most a

$$-R_x y_0 = \sum_{i=1}^{n} M_O^{F_i}$$

illetve a

$$-30.36\,y_0 = -20\cdot 1 + 35.36\cdot 3 + 15\cdot 2 - 25.98\cdot 5 - 30\cdot 1$$

egyenleteket kapjuk, ahonnan

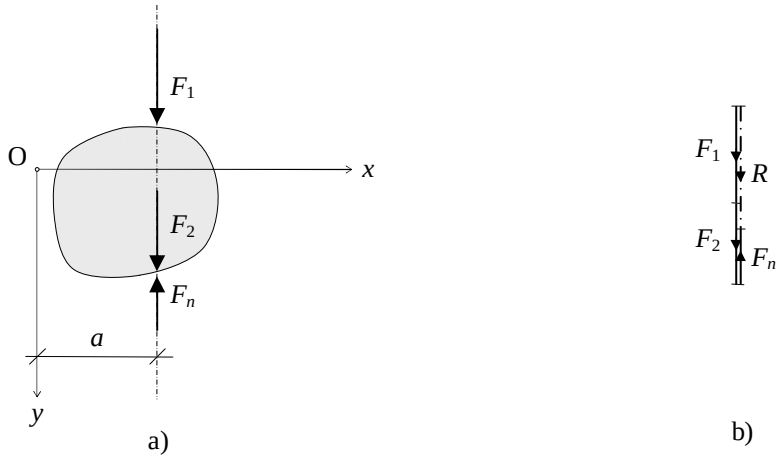
$$y_0 = \frac{-43.82}{-30.36} = 1.44\,\mathrm{m}$$

2.1.4 Síkbeli erőrendszer összetételének különleges esetei

Néhány speciális esetben az eredő meghatározása a fent bemutatott általánosan érvényes eljárásnál egyszerűbben is végrehajtható.

Közös hatásvonalon működő erők

Tekintsük a 2.13/a ábrán vázolt erőrendszert. Az F_1, F_2 ... F_n erőkből álló erőrendszer erői közös hatásvonalon működnek. Határozzuk meg az erőrendszer eredőjét és az eredő helyét.



2.13 ábra. a) Közös hatásvonalon működő erők, b) eredő szerkesztése.

Az eredő szerkesztését a 2.13/b ábrán találjuk, ahol – az erők közös hatásvonalának következtében – egy elfajuló vektoridomot látunk. Az R eredőt úgy kapjuk meg, hogy az első erő (F_1) kezdőpontját összekötjük az utolsó erő (F_n) végpontjával.

A számítást a 2.1.2 pontban leírtak szerint hajtjuk végre. Az eredő két összetevőjét a két vetületi tétel segítségével kapjuk meg:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0 \qquad \text{és} \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = F_1 + F_2 - F_n$$

Az eredő helyét a nyomatéki tétel felhasználásával kapjuk meg. Az eredő nyomatéka a koordináta-rendszer kezdőpontjára megegyezik az erőrendszer nyomatékával ugyanerre a pontra:

$$R_y x_0 = F_1 a + F_2 a - F_n a = (F_1 + F_2 - F_n)a = R_y a$$

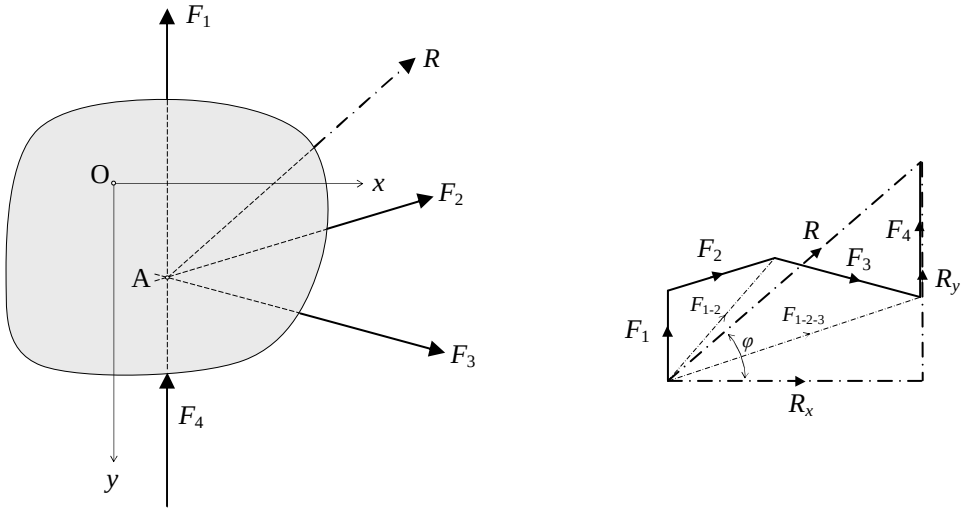
Innen:

$$x_0 = a$$

Arra – a számítás előtt már látható – eredményre jutottunk, hogy az eredő hatásvonala az erők közös hatásvonalával azonos.

Közös metszéspontú erők

A 2.14/a ábra egy négy erőből álló erőrendszert mutat. Az erők közös metszésponton, az „A” ponton mennek át. Feladatunk az eredő meghatározása.



a) b)

2.14 ábra. a) Közös metszéspontú erőkből álló erőrendszer, b) az eredő szerkesztése.

Az eredő szerkesztését a 2.14/b ábra mutatja. Az R eredőt úgy kapjuk meg, hogy az első erő (F_1) kezdőpontját összekötjük az utolsó erő (F_4) végpontjával. Ha a szerkesztést kettesével (az $F_{1\text{-}2}$ és $F_{1\text{-}2\text{-}3}$ csoporteredők segítségével) hajtjuk végre, akkor az eredő helye is adódik: minden csoporteredő, és így az eredő is a közös „A” metszésponton megy át. Ez a tény a nyomatéki tétel alkalmazásával is belátható: Az erők nyomatékösszege zérus az „A” pontra, így az eredőé is zérus kell hogy legyen, vagyis az eredő is átmegy az „A” ponton.

Az eredő két összetevőjét számítással a két vetületi tétel szolgáltatja:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} \qquad \text{és} \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y}$$

A két összetevő segítségével az eredő vízszintessel bezárt hajlásszöge is meghatározható:

$$\tan\varphi = \frac{R_y}{R_x}$$

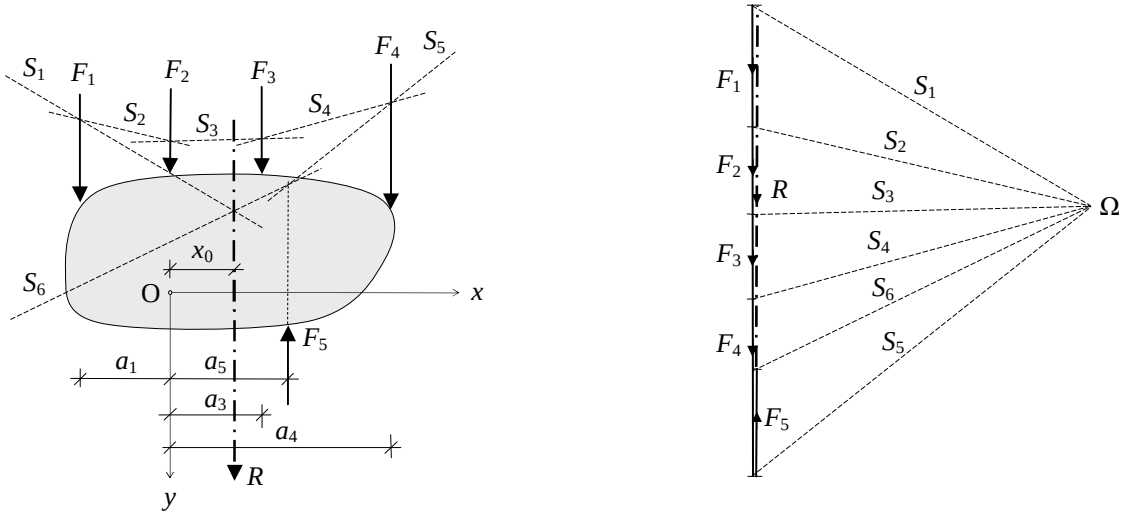
Párhuzamos erők

Gyakori eset, hogy tartószerkezeteink terhe párhuzamos erőkből áll. Tekintsük a 2.15/a ábrán vázolt erőrendszert, amely öt párhuzamos erőt tartalmaz. Feladatunk az erőrendszer eredőjének meghatározása.

A közös hatásvonalon működő erők esetéhez hasonlóan az erők vektoraiból szerkesztett

vektorábra most is elfajuló vektoridomhoz vezet. Az első erő vektorának kezdőpontját az utolsó erő vektorának végpontjával összekötve megkapjuk az eredő nagyságát (2.15/b ábra).

Az eredő helyét a 2.1.1 pontban bemutatott módon végrehajtott szerkesztés segítségével kapjuk meg. Az erők vektoridomától jobbra felveszünk egy „Ω” póluspontot. A póluspontból az erők kezdő-, illetve végpontjaihoz húzott húrokkal (2.15/b ábra) párhuzamosan láncgörbét szerkesztünk az erőkre (2.15/a ábra). Az első (S_1 jelű) és utolsó (S_6 jelű) húrokat meghosszabbítjuk és a metszéspontjuk kijelöli az eredő helyét. Az eredő természetesen párhuzamos az erőkkel.



a) b)

2.15 ábra. a) Párhuzamos erőkből álló erőrendszer, b) az eredő szerkesztése.

A számításhoz az *x-y* koordináta-rendszert úgy vesszük fel, hogy az *y* tengely párhuzamos az erőkkel és egybeesik az F_2 erő hatásvonalával. Az eredő összetevőit a vetületi tételekkel határozzuk meg:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0 \qquad \text{és} \qquad R_y = R = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - F_5$$

Az eredő helyét a nyomatéki tétel segítségével kapjuk meg:

$$x_0 R = -a_1 F_1 + 0 \cdot F_2 + a_3 F_3 + a_4 F_4 - a_5 F_5$$

Innen:

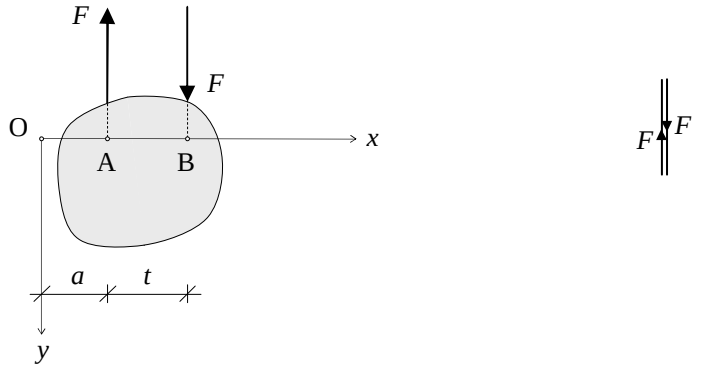
$$x_0 = \frac{-a_1 F_1 + a_3 F_3 + a_4 F_4 - a_5 F_5}{R}$$

Erőpár

Érdekes, speciális és igen fontos esettel találkozunk a 2.16/a ábrán látható két erő esetében. A két erő azonos nagyságú, egymással párhuzamos és ellentétes irányú. Az első axióma két erő egyensúlyára vonatkozó feltételei közül csak egy nem teljesül: a két erő nem közös hatásvonalú. Ez egy új, speciális eset, amelynek során a két erő erőpárt alkot.

Ha két egymással párhuzamos erő ellentétes irányú és azonos nagyságú, akkor a két erő

együttesét *erőpárnak* nevezzük. A két erő közötti merőleges *t* távolság az erőpár karja.



a) b)

2.16 ábra. a) Erőpár: a két párhuzamos (de nem közös hatásvonalú) erő azonos nagyságú és ellentétes irányú, b) a két erő vektoridoma.

A két vetületi tétel tanúsága szerint az eredő erő két összetevője zérus

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0 \qquad \text{és} \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 0$$

és így az eredő erő is zérus: $R = 0$.

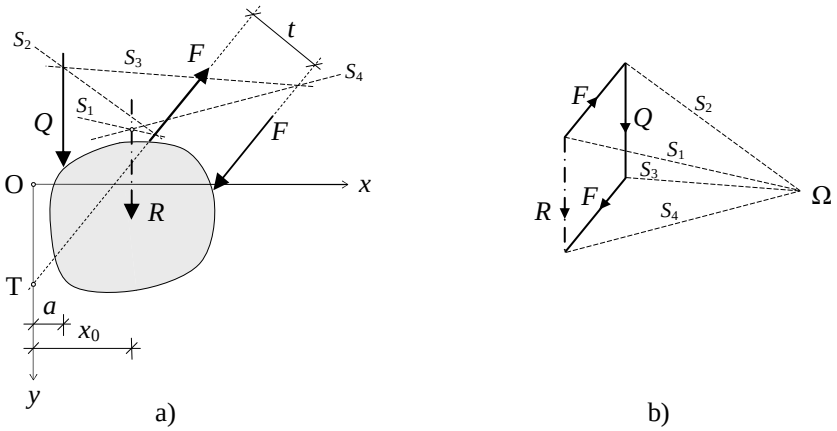
Mégsem beszélhetünk egyensúlyról (hiszen a két erő hatásvonala nem közös). A nyomatéki tétel ismételt alkalmazásával azt látjuk, hogy az erőpár nyomatéka a sík tetszőleges pontjára állandó; az „A”, „B” és „O” pontokra felírt nyomatéki egyenlet szerint ez az érték:

$$M_A = Ft\,, \qquad M_B = Ft\,, \qquad M_O = -Fa + F(a+t) = Ft$$

Ez a nyomaték az erőpár eredője, amelyet úgy kapunk, hogy az erőpárt alkotó két erő értékét megszorozzuk az erők között mért merőleges távolsággal. Az erőpár megadása ezek szerint egyetlen adattal történhet és ez az adat a nyomaték előjeles nagysága. A szokásos dimenzió [Nmm], vagy [kNm], vagy [kNcm], jelölése pedig (pozitív előjel esetén): ↺.

Erő és erőpár összetétele

Tekintsük a 2.17/a ábrán vázolt erőrendszert. Az erőrendszer három erőből áll: a két *F* erőből álló $M = tF$ erőpárt egy *Q* erő egészíti ki. Feladatunk az erőrendszer eredőjének meghatározása.



a) b)

2.17 ábra. a) Erő és erőpár *R* eredője, b) a vektoridom.

A három erő vektorát tartalmazó vektoridom most is szolgáltatja az *R* eredőt, amelyet az első erő kezdőpontjának és az utolsó erő végpontjának összekötésével kapunk (2.17/b ábra). Az erők elhelyezésének sorrendje a vektorábrában tetszőleges és így célszerűségi szempontok döntenek, például az, hogy az ábra áttekinthető legyen, illetve hogy az eredő helyének meghatározására szolgáló szerkesztés kényelmesen elférjen az ábrán. Esetünkben a sorrend a következő: 1: a jobbra/felfelé mutató *F* erő, 2: a *Q* erő, és 3: a balra/lefelé mutató *F* erő.

Az eredő helyének megszerkesztéséhez szükségünk van az S_1, S_2, S_3 és S_4 húrokra (2.17/b ábra), amelyeket az „Ω” póluspont és az erők vektorainak kezdő-, illetve végpontjainak összekötésével kapunk meg. Az „Ω” póluspont felvétele tetszőleges: helyét célszerű úgy megválasztani, hogy a szerkesztés a rendelkezésre álló helyen kényelmesen elvégezhető legyen. Az S_1, S_2, S_3 és S_4 húrok ismeretében megszerkesztjük a láncgörbét: az első erőt az S_1 húrral hozzuk metszésbe, majd a metszéspontból indítjuk az S_2 húrt amelynek a *Q* erő hatásvonalát metsző pontjából indítjuk az S_3 húrt, amellyel elmetsszük a harmadik erőt. Ebből a metszéspontból indítjuk az S_4 húrt az S_1 húr irányába. Végül az S_1 és S_4 húrok metszéspontján keresztül behúzzuk az eredőt, amely párhuzamos a vektoridomban már megszerkesztett vektorral.

A számítás során az eredő összetevőit a vetületi tételekkel határozzuk meg:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = F_x - F_x = 0 \qquad \text{és} \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = Q - F_y + F_y = Q$$

Az eredő tehát a *Q* erővel azonos nagyságú és irányú és vele párhuzamos erő:

$$R = R_y = Q$$

Az eredő helyét a nyomatéki tétel segítségével határozzuk meg. A nyomatéki tétel szerint az erőrendszer eredőjének nyomatéka a sík valamely pontjára egyenlő az erőrendszer tagjainak ugyanezen pontra felírt nyomatékainak algebrai (előjeles) összegével. A nyomatéki tételt a „T” pontra alkalmazva (2.17/a ábra) az

$$x_0 R = aQ + tF$$

egyenlethez jutunk. Az eredő helye tehát:

$$x_0 = \frac{aQ + tF}{R} = \frac{aQ + M}{Q} = a + \frac{M}{Q}$$

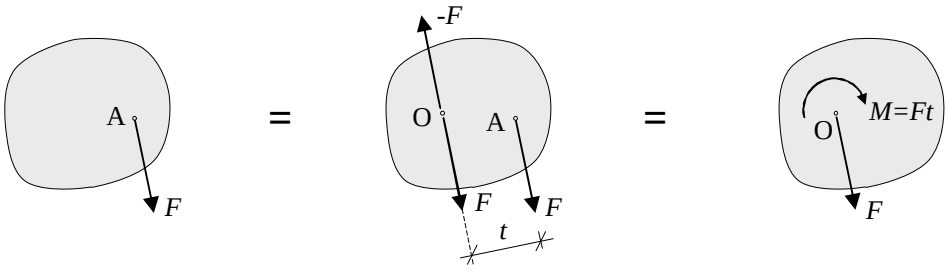
A *Q* erő és az *R* eredő közötti távolság innen:

$$x_0 - a = \frac{M}{Q}$$

Az erő és erőpár eredője tehát az adott erővel megegyező irányú, azonos nagyságú, de ahhoz képest *M/Q* távolsággal párhuzamosan eltolt erő.

Előállhat egy olyan helyzet, amelynek során egy adott erőt egy erővel és egy nyomatékkal kell helyettesíteni. Ez a fenti feladat megfordításának tekinthető, amelynek során az adott erőt egy másik pontba helyezünk át (egy nyomaték kíséretében). Az eljárást a 2.18 ábrán vázoljuk. Első lépésben az egyetlen *F* erőből álló erőrendszerhez (2.18/a ábra) hozzáadunk egy egyensúlyban lévő erőrendszert, amely két, *-F* és *F* nagyságú erőből áll (2.18/b ábra). A két erő közös hatásvonala párhuzamos az eredeti „A” ponton átmenő *F* erő hatásvonalával és attól

t távolságra van. Az így előálló három erőből álló erőrendszer két erője – a *-F* erő és a jobboldali *F* erő – egy *M = Ft* nagyságú erőpárt alkot (2.18/c ábra). Ezzel az „A” pontban működő *F* erőt helyettesítettük az „O” pontban működő *F* erő és az *M* erőpár együttesével. Máshogyan megfogalmazva: az „A” pontban működő *F* erőt egy *M = Ft* erőpár kíséretében áthelyeztük az „O” pontba.



a) b) c)

2.18 ábra. Erő helyettesítése erővel és erőpárral.

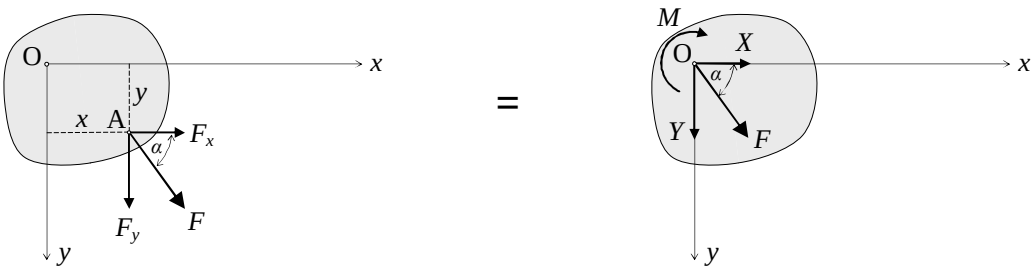
Az erő áthelyezése az *x-y* derékszögű koordináta-rendszerben a 2.19 ábrán vázolt módon történik, ahol érvényesek az

$$X = F_x = F\cos\alpha$$

$$Y = F_y = F\sin\alpha$$

$$M = xF_y - yF_x$$

összefüggések.



2.19 ábra. Erő helyettesítése erővel és erőpárral az *x-y* derékszögű koordináta-rendszerben.

Erőrendszer esetében a fentiek szerinti lépésekben járunk el az

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y}$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{i,y} + y_i F_{i,x})$$

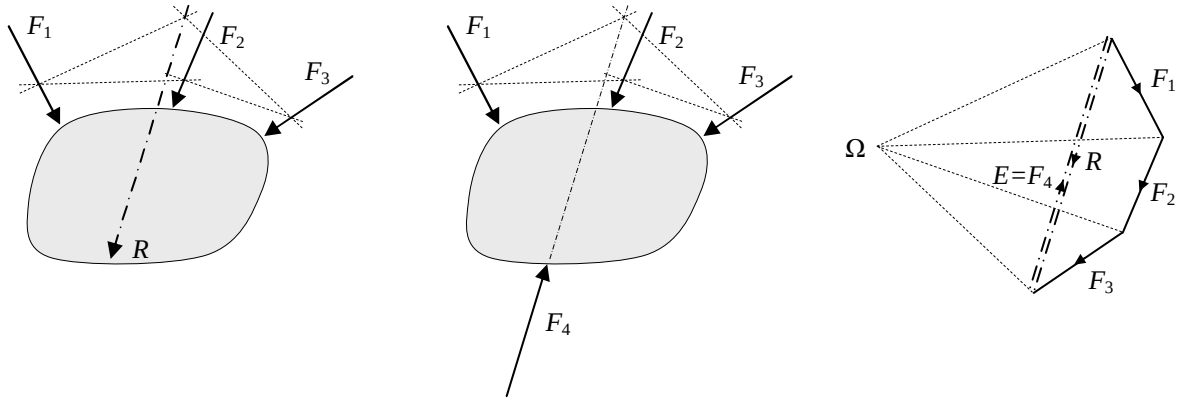
összefüggések szerint, ahol *n* az erőrendszert alkotó erők száma.

2.2 Egyensúlyban lévő síkbeli erőrendszer

Ebben a pontban egyensúlyban lévő erőrendszer általános vizsgálatával foglalkozunk. Először megadjuk az egyensúly feltételeit, majd vázoljuk a feltételi egyenletek gyakorlati alkalmazását. Végül számpéldát mutatunk be a gyakorlati alkalmazásra.

2.2.1 Az egyensúly feltételei

Tekintsük a 2.20/a ábrán vázolt merev testet. Az első lépésben a merev testre az F_1, F_2 és F_3 erőket működtetjük. Nyilvánvaló, hogy a három erő nincs egyensúlyban. Ezt a három erőre szerkesztett vektoridom is bizonyítja: az F_1-F_2-F_3 vektoridom nem zárt (2.20/c ábra). A második lépésben megszerkesztjük az F_1, F_2 és F_3 erők R eredőjét.



2.20 ábra. a) az F_1, F_2 és F_3 erőkkel terhelt merev test, b) az F_1, F_2, F_3 és F_4 erőkkel terhelt, egyensúlyban lévő merev test, c) vektoridom.

A következő lépésben az eredeti F_1, F_2 és F_3 erőket kiegészítjük az R eredő E ellentettjével, amit F_4-el jelölünk (2.20/c ábra). Ezzel biztosítottuk, hogy az F_1, F_2, F_3 és F_4 erők egyensúlyban lévő erőrendszert alkotnak:

$$(F_1, F_2, F_3, F_4) \doteq 0$$

A fenti szerkesztés tehát azt mutatja, hogy egy erőrendszer egyensúlyának az a feltétele, hogy a rendszert alkotó erők vektoraiból zárt és nyílfolytonos vektorsokszög legyen szerkeszthető.

A következőkben az egyensúly számítási feltételeit fogalmazzuk meg. A 2.20/b ábrán vázolt erőrendszert vizsgáljuk, amelyet az F_1, F_2 és F_3 erők kiegészítésével hoztunk létre, oly módon, hogy a három erőhöz úgy adtuk hozzá az F_4 erőt, hogy a négy erő egyensúlyban lévő rendszert alkosson.

A 2.20/c ábra E és R vektoraival kapcsolatban az első axióma alapján felírhatjuk, hogy

$$E \doteq -R$$

Mivel R az F_1, F_2 és F_3 erők eredője, vagyis

$$(F_1, F_2, F_3) \doteq R$$

és az E egyensúlyozó erőre bevezettük az F_4 jelölést, az x irányú erőkre vonatkoztatott 1. vetületi tétel alapján

$$F_{4,x} = - R_x$$

vagyis

$$F_{4,x} = - (F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x})$$

Átrendezve:

$$F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} + F_{4,x} = 0$$

Hasonlóképpen eljárva, az y irányú erőkkel kapcsolatban az

$$F_{4,y} = - R_y$$

illetve az

$$F_{4,y} = - (F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y})$$

összefüggések írhatók fel, ahonnan

$$F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} + F_{4,y} = 0$$

A 3. (nyomatéki) tétel alapján – mivel E és R közös hatásvonalon hatnak, csak ellentétes irányban – felírható hogy

$$M_A^E = -M_A^R$$

ahol „A” a sík egy tetszőleges pontja. A jobboldalon és baloldalon szereplő erőket részletezve:

$$M_A^{F_4} = -(M_A^{F_1} + M_A^{F_2} + M_A^{F_3})$$

Innen:

$$M_A^{F_1} + M_A^{F_2} + M_A^{F_3} + M_A^{F_4} = 0$$

Fentiek alapján rögzíthetjük az egyensúly három feltételét az x-y derékszögű koordináta-rendszerben, általános elrendezésű, n erőt tartalmazó síkbeli erőrendszer esetében.

I. Az erők vízszintes vetületeinek algebrai összege zérus:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0$$

II. Az erők függőleges vetületeinek algebrai összege zérus:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 0$$

III. Az erők nyomatékösszege a sík bármely pontjára zérus:

$$\sum_{i=1}^{n} M^{F_i} = 0$$

A három független egyenletből három ismeretlen határozható meg. Egyensúlyozási feladatok során ez szétszórt síkbeli erők esetében mindig megoldást jelent. Az egyenletek felírásának sorrendje tetszőleges; a sorrendet célszerűségi szempontok alapján állapítjuk meg.

Általános esetben – tetszőleges elrendezésű szétszórt erők esetében – a három egyenletre szükség is van az egyértelmű megoldás érdekében. Abban a speciális esetben amikor az erők párhuzamosak, vagy közös metszéspontúak, két egyenlet elegendő az egyértelmű megoldáshoz. Közös vonalon működő erők egyensúlyának vizsgálata során egyetlen egyenlet is megoldáshoz vezet.

Az egyensúly feltételeit a fenti I., II. és III. egyenletek felhasználásával más formában is megfogalmazhatjuk. Ekkor azonban kiegészítő feltételek teljesülése is szükséges.

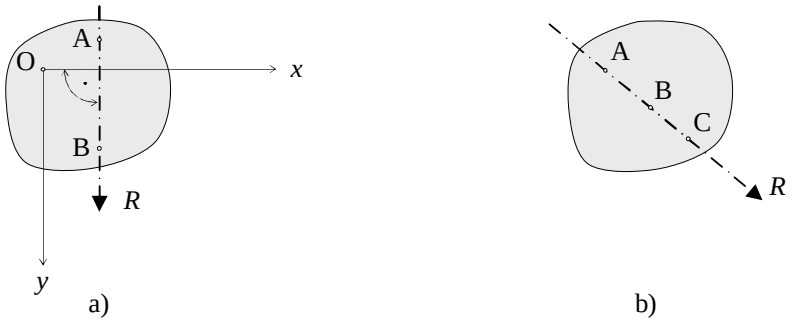
A szétszórt síkbeli erőrendszer a

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_B^{F_i} = 0$$

feltételek teljesülése esetén is egyensúlyban lehet. Az első egyenlet azt fejezi ki, hogy az erők vízszintes vetületeinek algebrai összege zérus. A második egyenlet az erők nyomatékösszegének az „A” pontra vonatkoztatott zérusértékét fejezi. Hasonló módon, a harmadik egyenlet az erők nyomatékösszegének a „B” pontra kiszámított zérusértékét követeli meg. Fontos kiegészítő feltétel viszont, hogy az *x* vetületi tengely nem lehet merőleges a nyomatéki pontok összekötő egyenesére! Ekkor ugyanis a három feltétel teljesülése esetén is létezhetne egy olyan eredő, amely az „A” és „B” ponton is átmegy és merőleges az *x* tengelyre (2.21/a ábra).



2.21 ábra. A három feltétel teljesül, még sincs egyensúly. a) az eredő átmegy az „A” és „B” ponton és merőleges az *x* tengelyre, b) az eredő átmegy az „A”, a „B” és a „C” ponton.

A szétszórt síkbeli erőrendszer egyensúlyát a

$$\sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_B^{F_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_C^{F_i} = 0$$

feltételek teljesítésével is biztosíthatjuk. Az első egyenlet azt fejezi ki, hogy az erők nyomatékösszege az „A” pontra zérus. A második egyenlet az erők nyomatékösszegének a „B” pontra vonatkoztatott zérusértékét fejezi ki. Hasonló módon, a harmadik egyenlet az erők nyomatékösszegének a „C” pontra kiszámított zérusértékét követeli meg. Fontos kiegészítő feltétel viszont, hogy a három pont nem eshet egy egyenesre! Ekkor ugyanis a három feltétel teljesülése esetén is létezhetne egy olyan eredő, amely az „A”, a „B” és a „C” ponton is átmegy (2.21/b ábra).

2.2.2 Az egyensúly feltételi egyenleteinek alkalmazása síkbeli erőrendszer általános vizsgálatára

Ahogyan a megfogalmazás is jelzi, az egyensúly feltételi egyenleteit túlnyomórészt arra használjuk, hogy eldöntsük, egy adott erőrendszer egyensúlyban van-e. Ezen túlmenően, a feltételrendszer alkalmazásával azt is el tudjuk dönteni, hogy ha egy erőrendszer nincs egyensúlyban, akkor az erőrendszer eredője egy erő vagy egy nyomaték. Az egyensúlyi feltételrendszer előző pontban bemutatott három formáját alkalmazva a következőkben ezt mutatjuk be.

Vizsgálat két vetületi és egy nyomatéki egyenlet segítségével

A vizsgálathoz két tetszőleges vetületi tengelyt és egy tetszőleges nyomatéki pontot választunk (2.22/a ábra). A két vetületi tengely általában a derékszögű koordináta-rendszer *x* vízszintes és *y* függőleges tengelyei. Az a pont, amelyre az erők nyomatékát felírjuk, gyakran a koordináta-rendszer kezdőpontja.

A vizsgálat elvégzéséhez elő kell állítani a

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x}\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,y}\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i}$$

értékeket. A vizsgálat eredményeképpen három megállapítást tehetünk.

Ha a két vetületösszeg és a nyomatékösszeg is zérus, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = \sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i} = 0$$

akkor a vizsgált erőrendszer egyensúlyban van.

Ha legalább az egyik vetületösszeg zérustól különböző, vagyis

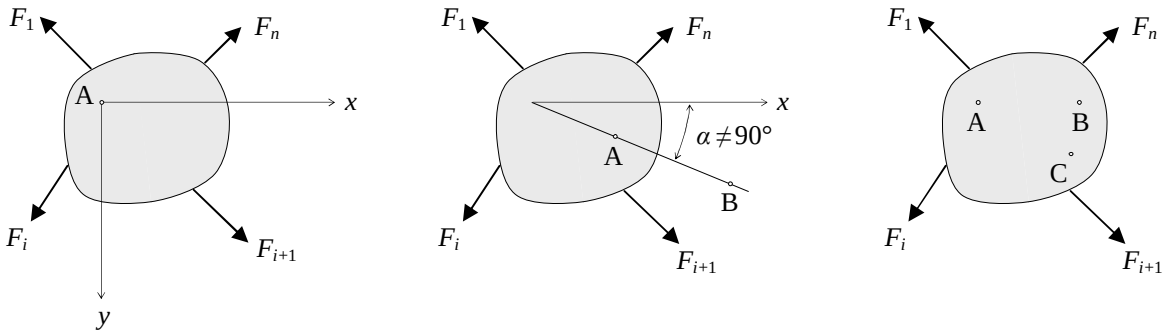
$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} \neq 0 \qquad \text{vagy} \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} \neq 0$$

akkor az erőrendszer eredő erővel rendelkezik.

Ha a két vetületösszeg zérus értékű és a nyomatékösszeg zérustól különböző, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0 \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 0 \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i} \neq 0$$

akkor az erőrendszer eredője erőpár (nyomaték).



a) b) c)

2.22 ábra. Vizsgálat a) két vetületi és egy nyomatéki, b) egy vetületi és két nyomatéki, c) három nyomatéki egyenlet segítségével.

Vizsgálat egy vetületi és két nyomatéki egyenlet segítségével

A vizsgálathoz egy vetületi tengelyt és két nyomatéki pontot választunk. Ezek lehetnek például az *x* tengely és az „A” és „B” pontok (2.22/b ábra). A választott vetületi tengely nem lehet merőleges a nyomatéki pontok összekötő egyenesére!

A vizsgálat elvégzéséhez elő kell állítani a

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x}\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i}\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_B^{F_i}$$

értékeket. A vizsgálat eredményeképpen három megállapítást tehetünk.

Ha a vetületösszeg és a két nyomatékösszeg is zérus, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = \sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i} = \sum_{i=1}^{n} M_B^{F_i} = 0$$

akkor a vizsgált erőrendszer egyensúlyban van.

Ha a vetületösszeg zérustól különböző, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} \neq 0$$

vagy ha teljesül a

$$\sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i} \neq \sum_{i=1}^{n} M_B^{F_i}$$

egyenlőtlenség, akkor az erőrendszer eredő erővel rendelkezik.

Ha a vetületösszeg zérus, a két nyomatékösszeg azonos, de zérustól különböző értékű, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0 \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i} = \sum_{i=1}^{n} M_B^{F_i} \neq 0$$

akkor az erőrendszer eredője erőpár (nyomaték).

Vizsgálat három nyomatéki egyenlet segítségével

A vizsgálathoz három nyomatéki pontot választunk, például az „A”, „B” és „C” pontokat (2.22/c ábra). A három pont nem eshet egy egyenesre!

A vizsgálat elvégzéséhez elő kell állítani a

$$\sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i}, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_B^{F_i}, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_C^{F_i}$$

értékeket. A vizsgálat eredményeképpen három megállapítást tehetünk.

A vizsgált erőrendszer egyensúlyban van, ha mindhárom nyomatékösszeg zérus, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i} = \sum_{i=1}^{n} M_B^{F_i} = \sum_{i=1}^{n} M_C^{F_i} = 0$$

Az erőrendszer eredője erő, ha teljesül a

$$\sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i} \neq \sum_{i=1}^{n} M_B^{F_i} \qquad \text{vagy a} \qquad \sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i} \neq \sum_{i=1}^{n} M_C^{F_i}$$

egyenlőtlenség.

Az erőrendszer eredője erőpár (nyomaték), ha a három nyomatéki összegzés zérustól különböző azonos értéket ad, vagyis ha

$$\sum_{i=1}^{n} M_A^{F_i} = \sum_{i=1}^{n} M_B^{F_i} = \sum_{i=1}^{n} M_C^{F_i} \neq 0$$

2.2.3 Gyakorló feladat

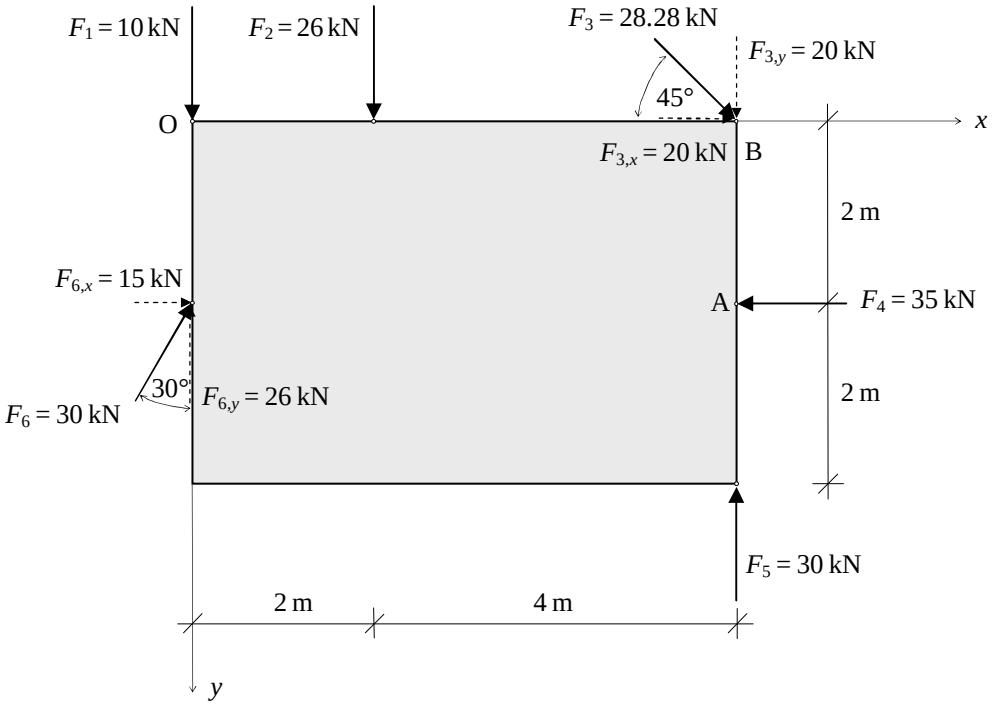
Vizsgáljuk meg a 2.23 ábrán látható, hat erőt tartalmazó erőrendszert és állapítsuk meg, hogy az erőrendszer egyensúlyban van-e. Ha nincs, akkor határozzuk meg az erőrendszer eredőjét.

A számítást az ábrán vázolt *x-y* koordináta-rendszerben végezzük el. A számítás során szükség lesz az F_3 és F_6 ferde erők *x* és *y* irányú összetevőire:

$$F_{3,x} = 28.28 \cdot \cos 45° = 20\,\text{kN} \qquad \text{és} \qquad F_{3,y} = 28.28 \cdot \sin 45° = 20\,\text{kN}$$

$$F_{6,x} = 30 \cdot \sin 30° = 15\,\text{kN} \qquad \text{és} \qquad F_{6,y} = 30 \cdot \cos 30° = 26\,\text{kN}$$

A feladatot először két vetületi és egy nyomatéki egyenlet segítségével hajtjuk végre, majd gyakorlásképpen a vizsgálatot elvégezzük a másik két egyenletrendszer felhasználásával is.



2.23 ábra. Erőrendszer a gyakorló feladathoz.

Vizsgálat két vetületi és egy nyomatéki egyenlet segítségével

Legyen a két vetületi tengely az *x* és *y* tengely, nyomatéki pontnak pedig a koordináta-rendszer „O” kezdőpontját választjuk. A szükséges egyenletek rendre:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 20 - 35 + 15 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 10 + 26 + 20 - 30 - 26 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_O^{F_i} = 26 \cdot 2 + 20 \cdot 6 + 35 \cdot 2 - 6 \cdot 30 - 15 \cdot 2 = 32 \text{ kNm}$$

A két vetületi egyenlet egyaránt zérust ad, a nyomatéki egyenlet nyomatékösszege pedig zérustól különböző. Ez azt jelenti, hogy az erőrendszer eredője erőpár, mégpedig egy 32 kNm nagyságú nyomaték.

Vizsgálat egy vetületi és két nyomatéki egyenlet segítségével

A vizsgálathoz vetületi tengelyként az *x* tengelyt, a két nyomatéki pontként pedig a koordináta-rendszer „O” kezdőpontját és az „A” pontot választjuk (2.23 ábra). Az a feltétel, hogy a választott vetületi tengely nem lehet merőleges a nyomatéki pontok összekötő egyenesére, teljesül.

A szükséges egyenletek rendre:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 20 - 35 + 15 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{\mathrm{O}}^{F_i} = 26 \cdot 2 + 20 \cdot 6 + 35 \cdot 2 - 6 \cdot 30 - 15 \cdot 2 = 32\ \mathrm{kNm}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{\mathrm{A}}^{F_i} = -6 \cdot 10 - 4 \cdot 26 + 2 \cdot 20 + 26 \cdot 6 = 32\ \mathrm{kNm}$$

A vetületi egyenlet zérus, a két nyomatéki egyenlet pedig azonos és zérustól különböző (32 kNm) értéket ad. Ezek szerint az erőrendszer eredője erőpár, mégpedig egy 32 kNm nagyságú nyomaték.

Vizsgálat három nyomatéki egyenlet segítségével

A vizsgálathoz a koordináta-rendszer „O” kezdőpontját, valamint az „A” és „B” pontokat választjuk ki (2.23 ábra). Teljesül az a feltétel, hogy a három pont nem eshet egy egyenesre.

A szükséges egyenletek rendre:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{\mathrm{O}}^{F_i} = 26 \cdot 2 + 20 \cdot 6 + 35 \cdot 2 - 6 \cdot 30 - 15 \cdot 2 = 32\ \mathrm{kNm}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{\mathrm{A}}^{F_i} = -6 \cdot 10 - 4 \cdot 26 + 2 \cdot 20 + 26 \cdot 6 = 32\ \mathrm{kNm}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{\mathrm{B}}^{F_i} = -10 \cdot 6 - 4 \cdot 26 + 35 \cdot 2 - 15 \cdot 2 + 26 \cdot 6 = 32\ \mathrm{kNm}$$

A három nyomatéki összegzés zérustól különböző azonos értéket ad, tehát az erőrendszer eredője erőpár, mégpedig egy 32 kNm nagyságú erőpár.

2.3 Síkbeli erőrendszer egyensúlyozása

Ebben a pontban a statika talán legfontosabb kérdésével, az egyensúlyozással foglalkozunk. Amikor az egyensúlyozási feladatot számítással oldjuk meg, akkor a megoldásához a három egyensúlyi egyenletet használjuk. A szerkesztés során az erők vektoraiból vektorsokszöget szerkesztünk, amely egyensúly esetén nyílfolytonos és zárt kell legyen.

2.3.1 Egyensúlyozás egy erővel

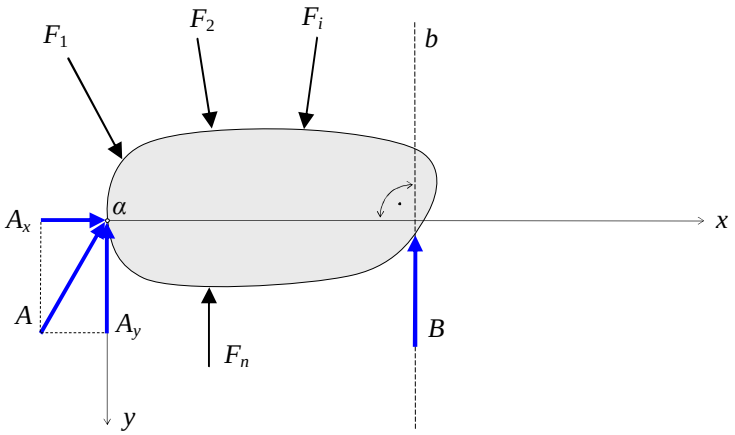
Ennek a feladatnak az azonnali megoldásához már minden ismeret a rendelkezésünkre áll. Első lépésben meghatározzuk az erőrendszer eredőjét és az eredő helyét a korábban már ismertetett módon, majd a második lépésben működtetjük a közös hatásvonalú egyensúlyozó erőt.

2.3.2 Egyensúlyozás két erővel

Gyakori feladat tartószerkezetek tervezése során, hogy amikor egy erőrendszert egyensúlyozni kell, akkor a feladat két egyensúlyozó erővel oldható meg praktikus módon. A két erő legyen *A* és *B*. A megoldáshoz feltételezzük, hogy

− ismerjük az egyik erő hatásvonalának egy pontját (mondjuk az *A* erő *α* pontját),
− ismerjük a másik egyensúlyozó erő hatásvonalának helyét (pl. *B* erő *b* hatásvonalát),
− a *b* egyenes nem megy át az *α* ponton.

Az egyensúlyozást a 2.24 ábrán vázolt *A* és *B* erőkkel fogjuk elvégezni. A számítást általában egy *x*-*y* derékszögű koordináta-rendszerben hajtjuk végre. A tengelyeket célszerű úgy felvenni, hogy az egyik tengely párhuzamos a *b* egyenessel, a másik tengely pedig merőleges rá. Az ismeretlen *A* erőt a *b* egyenesre merőleges és azzal párhuzamos A_x és A_y összetevőivel helyettesítjük. Így összesen három ismeretlenünk van. Az adott külső erőket szintén *x* és *y* irányú $F_{i,x}$ és $F_{i,y}$ összetevőkre bontjuk. A számítás megkezdése előtt *feltételezzük az ismeretlen erők irányát*. Ezek után ha a számítás végén egy erő *negatív* előjellel jön ki, akkor ezt azt jelenti, hogy a feltételezésünk helytelen volt és így a *feltételezett irányt az ellentettjére kell változtatni*.



2.24 ábra. Erőrendszer egyensúlyozása két erővel az *x*-*y* koordináta-rendszerben.

Alkalmazzuk az egyensúly három feltételi egyenletét a két vetületi és egy nyomatéki egyenlet formájában. A három egyenlet segítségével a három ismeretlen (A_x, A_y és *B*) meghatározható. A számítási munka mennyisége függ a koordinátatengelyek és a nyomatéki pont megválasztásától, valamint attól, hogy az egyenleteket milyen sorrendben alkalmazzuk. Ha elsőnek a nyomatéki egyenletet írjuk fel és a nyomatéki pontnak az *α* pontot választjuk, akkor a

$$\sum_{i=1}^{n} M_{\alpha}^{F_i} = 0$$

egyenlet csak egy ismeretlent tartalmaz. Ez az ismeretlen a *B* erő, amit így egyszerűen kiszámíthatunk. A még rendelkezésre álló két (vetületi) egyenlet segítségével az A_x és A_y ismeretlenek is meghatározhatók. A

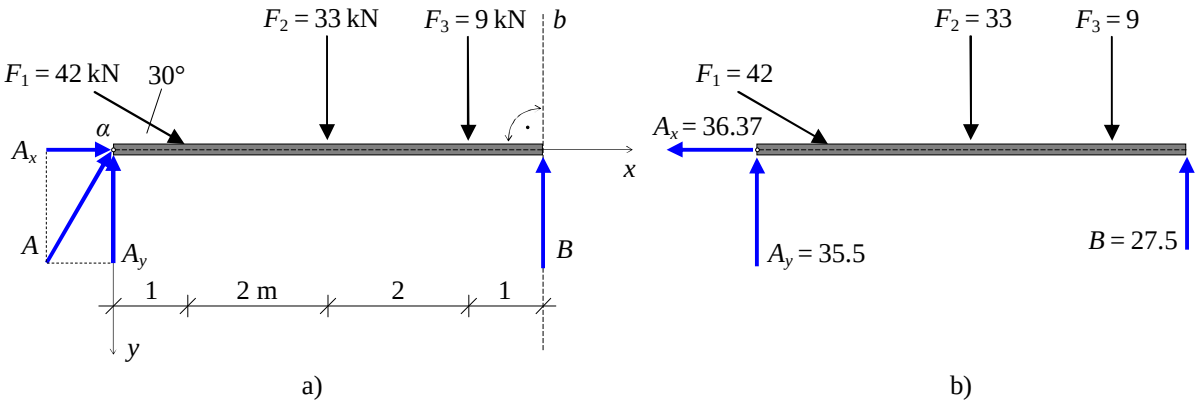
$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 0$$

egyenlet csak az A_y ismeretlent tartalmazza, a

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0$$

egyenletből pedig egyetlen ismeretlenként az A_x erőt tudjuk kiszámítani.

A számítás illusztrálása céljából tekintsük a 2.25/a ábrán vázolt merev testet (egy gerendatartó formájában), amelyre az F_1, F_2 és F_3 erők hatnak. Feladatul tűzzük ki az erőrendszer egyensúlyozását két erővel. Kikötjük, hogy az egyik erő (B) hatásvonala a b egyenes legyen és a másik erő (A) pedig a gerendatartó bal szélén, az α pontban támadja a merev testet. A számítás elkezdése előtt feltételezést kell tennünk az egyensúlyozó erők irányát illetően. Feltételezésünk szerint a B erő felfelé mutat. Az A erővel kapcsolatban azt tételezzük fel, hogy jobbra és felfelé mutat. Az A erőt az A_x és A_y összetevőivel helyettesítjük. Az x koordinátatengelyt a b egyenesre merőlegesen, a gerendatartó tengelyvonalában vesszük fel. Az y tengely a szokásos módon merőleges az x tengelyre.



2.25 ábra. Számpélda: Erőrendszer egyensúlyozása két erővel. a) tartó terheléssel és a feltételezett irányú egyensúlyozó erőkkel, b) eredményvázlat.

Hogy x és y irányú erőkkel dolgozhassunk, előállítjuk az F_1 ferde erő két összetevőjét:

$$F_{1,x} = 42 \cdot \cos 30° = 36.37 \text{ kN } (\rightarrow) \qquad \text{és} \qquad F_{1,y} = 42 \cdot \sin 30° = 21.0 \text{ kN } (\downarrow)$$

Az α pontra felírt nyomatéki egyenlet csak egy ismeretlent, a B egyensúlyozó erőt tartalmazza:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{\alpha}^{F_i} = 21 \cdot 1 + 33 \cdot 3 + 9 \cdot 5 - 6B = 0$$

Innen:

$$B = \frac{165}{6} = 27.5 \text{ kN } (\uparrow)$$

Az y tengelyre vonatkozó vetületi egyenlet csak az A_y ismeretlent tartalmazza:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 21 + 33 + 9 - 27.5 - A_y = 0$$

Innen:

$$A_y = 35.5 \text{ kN } (\uparrow)$$

Az *x* tengelyre vonatkozó vetületi egyenlet csak az A_x ismeretlent tartalmazza:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = A_x + 36.37 = 0$$

Innen:

$$A_x = -36.37\ \text{kN}\ (\leftarrow)$$

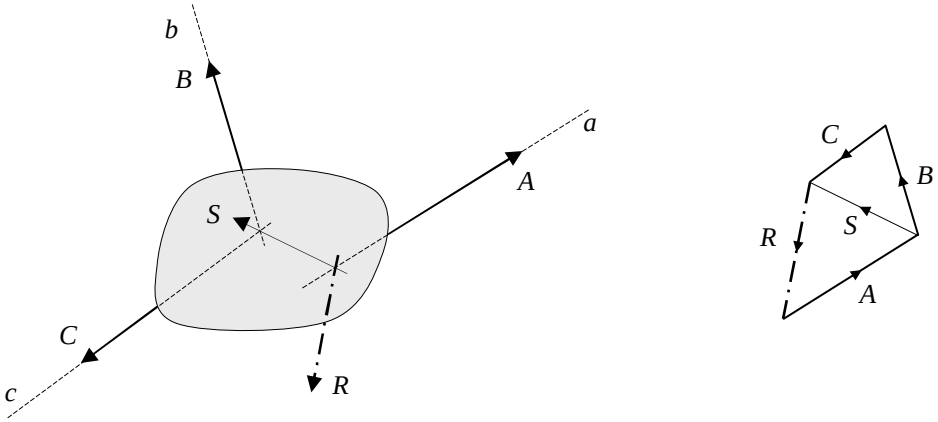
Az A_x negatív előjele azt jelenti, hogy az A_x előjelét a számítás megkezdése előtt rosszul tételeztük fel és nem jobbra mutat (2.25/a ábra). Ennek megfelelően a feltételezett erőirányt az ellenkezőjére kell változtatnunk, vagyis az A_x erő balra mutat. Az eredményeket a 2.25/b ábrán vázoljuk.

2.3.3 Egyensúlyozás három erővel

A feladat megoldásához feltételezzük, hogy a három erő hatásvonala ismert és a hatásvonalak nem metsződnek közös pontban. A következőkben a feladatot szerkesztéssel és számítással is megoldjuk.

A Culmann-féle szerkesztés

Jelölje a három hatásvonalat *a*, *b* és *c* (2.26/a ábra). A megoldás három lépésben történik. Az első lépésben a 2.1 pontban ismertetett módon meghatározzuk az erőrendszer *R* eredőjét. Ezután az adott *a* hatásvonalon működtetünk egy általunk megadott nagyságú *A* egyensúlyozó erőt. Az erő nagyságát úgy állapítjuk meg, hogy a következőkben bemutatott és a 2.26 ábrán vázolt szerkesztés egyszerűen legyen végrehajtható és a szerkesztés során felhasznált léptékhelyesen megrajzolt vektoridom (2.26/b ábra) elférjen a rendelkezésre álló területen.



a) egyensúlyozás három erővel b) vektoridom

2.26 ábra. A Culmann-féle szerkesztés.

Az erőrendszer *R* eredője és az *A* egyensúlyozó erő mellé megszerkesztünk egy *S* segéderőt, úgy, hogy a három erő egyensúlyban legyen, vagyis hogy teljesüljön az

$$(R, A, S) \doteq 0$$

feltétel. A szerkesztést úgy hajtjuk végre, hogy az *A* erő végpontját összekötjük az *R* eredő

kezdőpontjával: ez lesz az *S* segéderő (2.26/b ábra). Ezzel az erőrendszert tulajdonképpen két erővel egyensúlyoztuk. A feladat viszont az volt, hogy három erővel egyensúlyozzunk. Az utolsó lépésben így az *S* segéderőt felbontjuk két – a *b* és a *c* hatásvonalon működő – *B* és *C* erőre. Ekkor teljesül az

$$S \doteq (B, C)$$

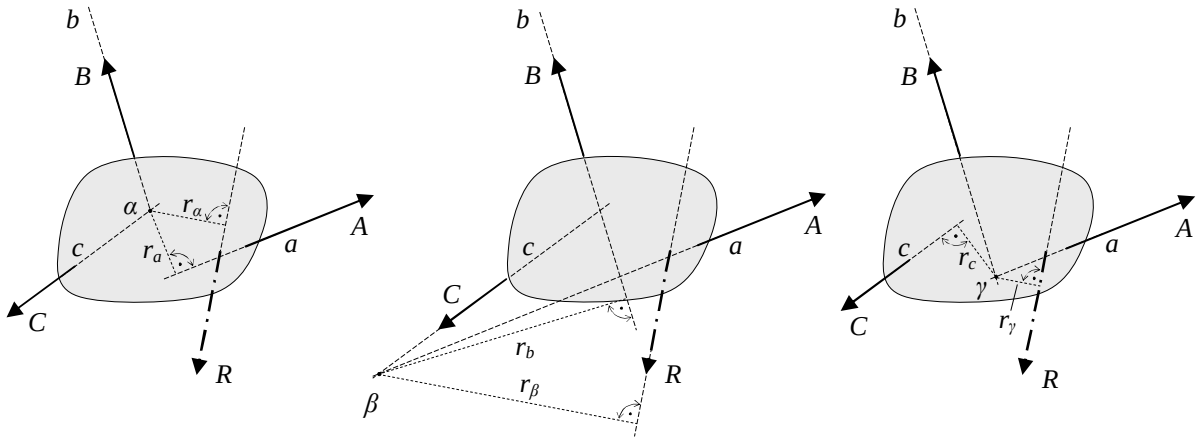
egyenlőség. A feladatot ezzel megoldottuk, vagyis:

$$(R, A, B, C) \doteq 0$$

Az egyensúlyt az *R-A-B-C* zárt, nyílfolytonos vektoridom jellemzi (2.26/b ábra). A léptékhelyes ábrán látjuk az *A*, *B* és *C* erők irányát és leolvashatjuk az erők nagyságát.

A Ritter-féle számítás

A számítás során a három ismeretlen meghatározására három egyenlet áll rendelkezésünkre. Igyekszünk úgy eljárni, hogy egyismeretlenes egyenletekhez jussunk, ahonnan az ismeretlent kis számítási munkával meghatározhatjuk. Ezt a célt úgy érjük el, hogy ún. *nyomatéki főpontokat* alkalmazunk. Az *egyik* hatásvonalon működő erő nyomatéki főpontja a *másik* két erőhöz tartozó hatásvonalak metszéspontja (ha létezik). Ha például a három egyensúlyozó erő közül elsőnek az *A* erő kiszámítását tűzzük ki célul, akkor a *b* és *c* hatásvonalak α metszéspontját választjuk nyomatéki főpontnak (2.27/a ábra).



a) b) c)

2.27 ábra. A Ritter-féle számítás. a) az *A*, b) a *B* és c) a *C* erő számítása.

Az α pontra felírt nyomatéki egyenlet a

$$\sum M_\alpha = Rr_\alpha - Ar_a = 0$$

alakot ölti, ahonnan az egyetlen ismeretlen azonnal megkapható:

$$A = \frac{Rr_\alpha}{r_a}$$

A fenti összefüggésekben r_a az α ponttól az a hatásvonalig mért merőleges távolság és r_α az α ponttól az eredő hatásvonaláig mért merőleges távolság (2.27/a ábra). {Külön figyelmet igényel a nagyon hasonló α (pont) és a (hatásvonal).}

Hasonlóan eljárva, a β és γ nyomatéki főpontok felhasználásával a B és C egyensúlyozó erők is egyszerűen meghatározhatók. A B erő esetében (2.27/b ábra):

$$\sum M_\beta = Rr_\beta - Br_b = 0$$

és

$$B = \frac{Rr_\beta}{r_b}$$

ahol r_b a β ponttól a b hatásvonalig mért merőleges távolság és r_β a β ponttól az eredő hatásvonaláig mért merőleges távolság.

A C erő esetében (2.27/c ábra):

$$\sum M_\gamma = Rr_\gamma - Cr_c = 0$$

és

$$C = \frac{Rr_\gamma}{r_c}$$

ahol r_c a γ ponttól a c hatásvonalig mért merőleges távolság és r_γ a γ ponttól az eredő hatásvonaláig mért merőleges távolság.

Speciális esetek

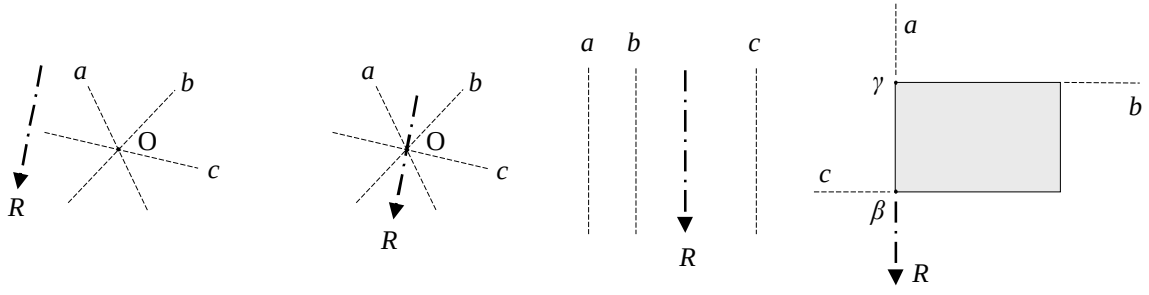
Végül a három erővel történő egyensúlyozás során előállható néhány érdekes speciális esetet mutatunk be.

Ha a megadott három hatásvonal a 2.28/a ábrán vázolt módon közös metszésponttal rendelkezik, és ezen a ponton az erőrendszer eredője nem megy át, akkor a feladatot nem tudjuk megoldani.

Nem teljesíthető ugyanis a

$$\sum M_O = 0$$

feltétel, vagyis az egyensúly nem biztosítható.



a) b) c) d)

2.28 ábra. Speciális esetek. a) nincs egyensúly, b)-c) végtelen sok megoldás, d) $A = R$.

Ha a megadott három hatásvonal a 2.28/b ábrán vázolt módon közös metszésponttal rendelkezik, és ezen a ponton az erőrendszer eredője is átmegy, akkor a

$$\sum M_O = 0$$

feltétel automatikusan teljesül. Ilyen esetben végtelen sok megoldás van és a korrekt megoldás érdekében további kikötés(eke)t kell megfogalmazni.

Ennek a speciális esetnek az aleseteként tekinthetjük a 2.28/c ábrán vázolt esetet, amikor is a párhuzamos erők (az eredő és az egyensúlyozó három erő) közös metszéspontja a végtelenben van. Itt is végtelen sok megoldás van.

Érdekes esetet mutat a 2.28/d ábra. Ebben az esetben a megoldást egyszerűen felírhatjuk. Egy függőleges vetületi egyenletből azt kapjuk, hogy

$$A = R$$

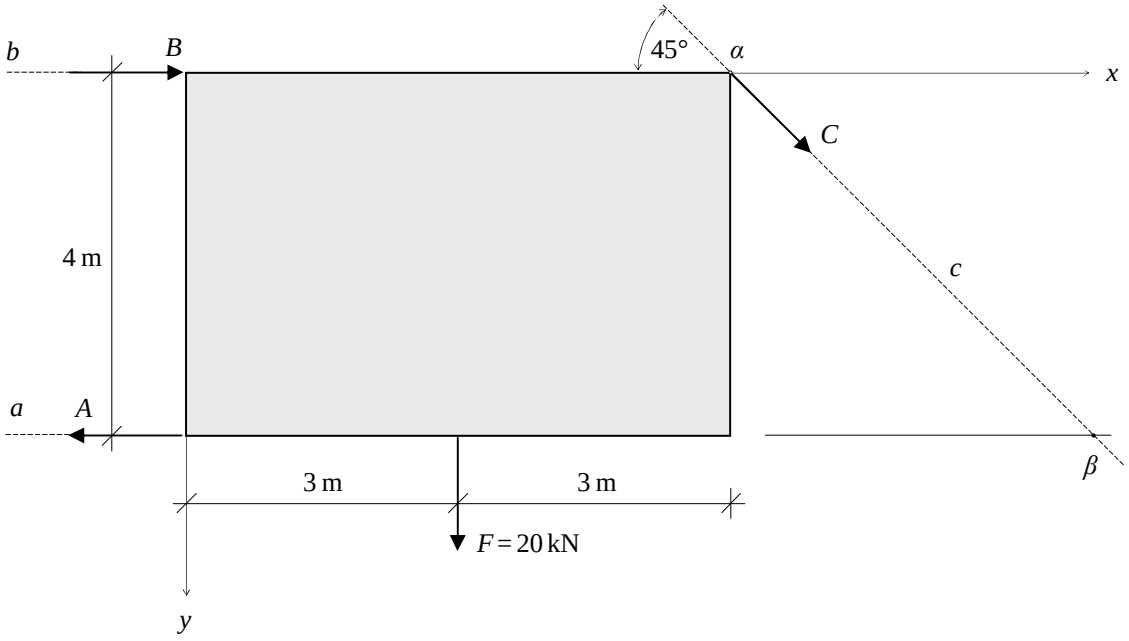
A β és γ pontokra felírt nyomatéki egyenletek azonnal mutatják, hogy a másik két egyensúlyozó erő csak zérus értékű lehet:

$$B = C = 0$$

2.3.4 Gyakorló feladatok

Erő egyensúlyozása három erővel

Tekintsük a 2.29 ábrán vázolt téglalap alakú merev testet, amelyre egy F = 20 kN nagyságú koncentrált erő hat. Feladatunk az erő egyensúlyozása három erővel. Az egyensúlyozó erők hatásvonala az *a*, *b* és *c* egyenesekkel adott.



2.29 ábra. Számpélda: erő egyensúlyozása három erővel.

Mielőtt a számítást elkezdenénk, a megadott hatásvonalak mentén feltételezzük az egyensúlyozó erők irányát. Feltételezésünk szerint az *A* erő balra, a *B* erő jobbra, a *C* erő

pedig jobbra lefelé mutat (2.29 ábra).

A számítást az *A* egyensúlyozó erő meghatározásával kezdjük. Az *A* erő nyomatéki főpontja a másik két erő hatásvonalainak metszéspontja. Ez a pont az α pont. Az α pontra felírt

$$\sum M_{\alpha} = -3 \cdot 20 + 4A = 0$$

nyomatéki egyenletből az *A* erő azonnal meghatározható:

$$A = \frac{3 \cdot 20}{4} = 15\,\text{kN}\ (\leftarrow)$$

Az *A* erő értékét pozitív előjellel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy az *A* erő irányát a számítás megkezdése előtt jól tételeztük fel, tehát az erő valóban balra mutat. (Ezt a tényt az erő irányának megjelölésével az erő értéke mellett zárójelek között rögzítettük.)

A második lépésben a *B* erőt határozzuk meg. A másik két erő hatásvonalának metszéspontja a β pont. A *c* hatásvonal 45 fokos hajlásának megfelelően a β pont a merev test jobboldali sarkától 4 méterre van.

A β pontra felírt

$$\sum M_{\beta} = -7 \cdot 20 + 4B = 0$$

nyomatéki egyenletből a *B* erő egy lépésben kiszámítható:

$$B = \frac{7 \cdot 20}{4} = 35\,\text{kN}\ (\rightarrow)$$

A *B* erő értékét pozitív előjellel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy a *B* erő irányát a számítás megkezdése előtt jól tételeztük fel, tehát az erő valóban jobbra mutat. (Ezt a tényt az erő irányának megjelölésével az erő értéke mellett zárójelek között rögzítettük.)

Egy *y* irányú függőleges vetületi egyenlet segítségével meghatározhatjuk a harmadik egyensúlyozó erőt:

$$\sum F_{y,i} = C \cos 45° + 20 = 0$$

Innen:

$$C = -\frac{20}{\cos 45°} = -28.3\,\text{kN}\ (\nwarrow)$$

A negatív előjel arra figyelmeztet, hogy a *C* egyensúlyozó erő előjelét a számítás megkezdése előtt rosszul tételeztük fel. Az erő tehát nem jobbra és lefelé, hanem az ellenkező irányba, balra és felfelé mutat. (Ezt a tényt az erő irányának megjelölésével az erő értéke mellett zárójelek között rögzítettük.)

Erőrendszer egyensúlyozása három erővel

Tekintsük a 2.30 ábrán vázolt téglalap alakú merev testet, amelyre egy két koncentrált erőből és egy erőpárból álló (F_1, F_2, M) erőrendszer hat. Feladatunk az erőrendszer egyensúlyozása három erővel. Az egyensúlyozó erők *a*, *b* és *c* hatásvonala adott.

A számítást az egyensúlyozó erők irányának feltételezésével kezdjük. Feltételezésünk szerint az *A* erő lefelé, a *B* erő balra, a *C* erő pedig jobbra felfelé mutat (2.30 ábra).

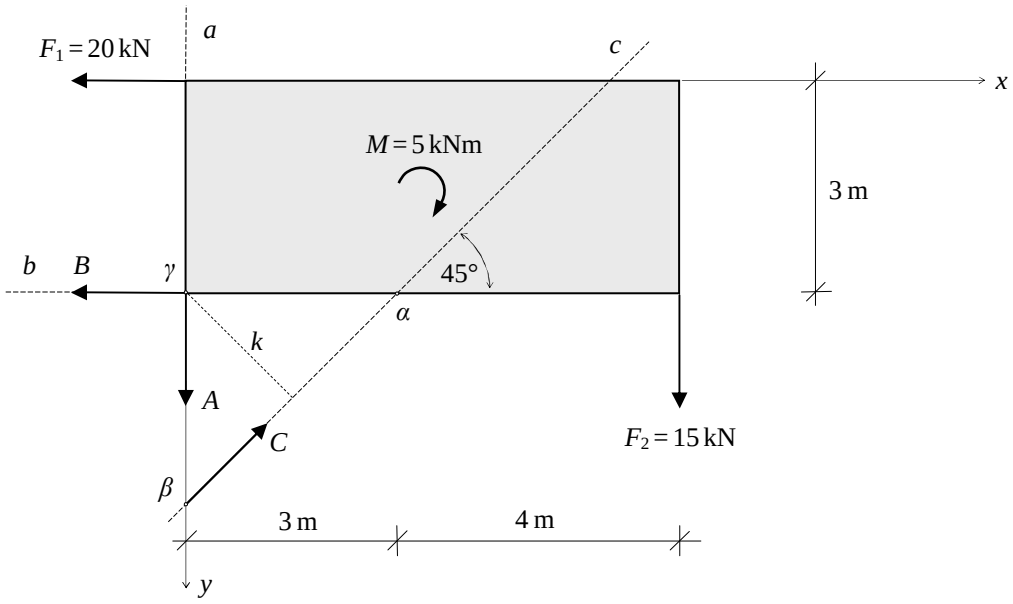
Ezután kiszámítjuk az *A* egyensúlyozó erőt. Az *A* erő nyomatéki főpontja a másik két erő hatásvonalainak metszéspontja. Ez a pont az α pont. Az α pontra felírt

$$\sum M_\alpha = -3 \cdot 20 + 4 \cdot 15 + 5 - 3A = 0$$

nyomatéki egyenletből az *A* erő azonnal meghatározható:

$$A = \frac{-60 + 60 + 5}{3} = 1.67 \text{ kN } (\downarrow)$$

Az *A* erő értékét pozitív előjellel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy az *A* erő irányát a számítás megkezdése előtt jól tételeztük fel, tehát az erő valóban lefelé mutat.



2.30 ábra. Számpélda: erőrendszer egyensúlyozása három erővel.

A következő lépés a *B* egyensúlyozó erő meghatározása lehet. A másik két egyensúlyozó erő hatásvonalai a β pontban metszik egymást. A β nyomatéki főpontra felírt

$$\sum M_\beta = -6 \cdot 20 + 15 \cdot 7 + 5 - 3B = 0$$

nyomatéki egyenletből a *B* erő egy lépésben kiszámítható:

$$B = \frac{-120 + 105 + 5}{3} = -3.33 \text{ kN } (\rightarrow)$$

A negatív előjel arra figyelmeztet, hogy a *B* egyensúlyozó erő előjelét a számítás megkezdése előtt rosszul tételeztük föl: az erő tehát nem balra, hanem jobbra mutat.

A *C* egyensúlyozó erő kiszámításához a másik két erő hatásvonalainak metszéspontját, a γ pontot fogjuk felhasználni. A számításhoz szükség lesz a *k* távolságra is (2.30 ábra):

$$k^2 + k^2 = 3^2 \qquad \text{innen} \qquad k = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2.12\,\text{m}$$

A γ nyomatéki főpontra felírt

$$\sum M_\gamma = -3 \cdot 20 + 7 \cdot 15 + 5 - 2.12C = 0$$

nyomatéki egyenletből a C erő értéke:

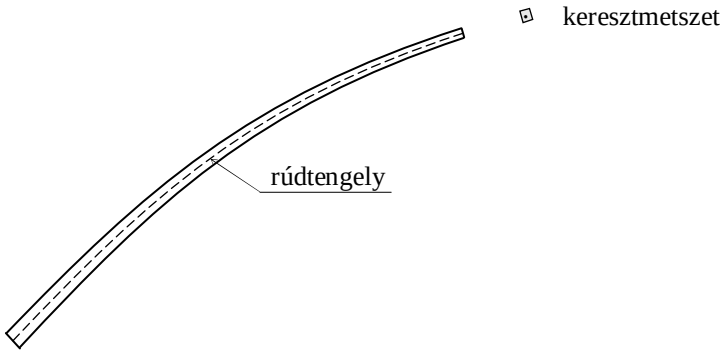
$$C = \frac{-60 + 105 + 5}{2.12} = 23.58\,\text{kN}\ (\nearrow)$$

2.4 Síkbeli tartók

A teherbírásra alkalmas szerkezeteket tartószerkezeteknek, vagy röviden tartóknak nevezzük. Jelen jegyzet síkbeli tartókkal foglalkozik. A síkbeli tartót az jellemzi, hogy van szimmetriasíkja és az összes erő ebben a síkban hat. A következőkben összefoglaljuk a síkbeli tartókkal kapcsolatos fontosabb tudnivalókat és bevezetünk néhány fogalmat.

2.4.1 A tartók alakja

A tartószerkezetek konstruálása során fontos szerepet játszanak a *rudak*. Rúdról akkor beszélünk, ha a test három jellemző mérete közül kettő jóval kisebb a harmadiknál. Esetünkben (2.31 ábra) a keresztirányú méretek jóval kisebbek a hosszirányú méretnél.

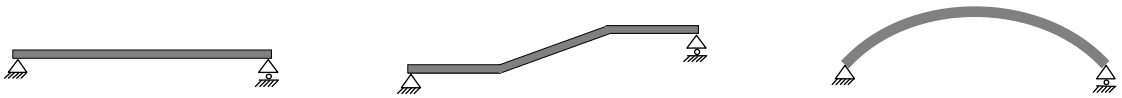


2.31 ábra. Rúd tengelye és keresztmetszete.

A keresztirányú méretek a rúd keresztmetszetét határozzák meg, amely a (tartó tengelyére merőleges) legkisebb síkmetszet. A keresztmetszetek súlypontjait összekötő vonal a rúd *tengelye*. A rudakat általában a tengelyükkel ábrázoljuk.

A rúdtengely alakja szerint megkülönböztetünk egyenestengelyű, törttengelyű és íves tartókat (2.32 ábra, ahol a megtámasztásokat is jelöltük – lásd 2.4.2 pont).

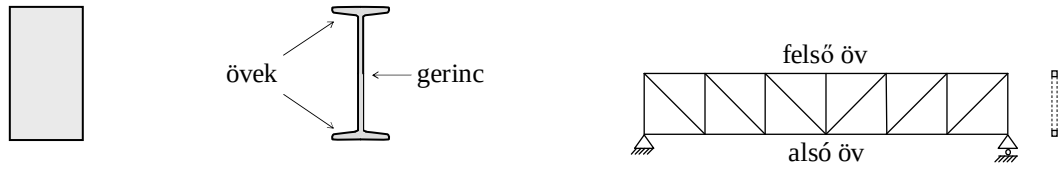
Különböző tartószerkezeti feladatokat különböző alakú és típusú keresztmetszetek alkalmazásával oldhatunk meg. A legegyszerűbben kialakítható tartók sok esetben *tömör* keresztmetszettel rendelkeznek (2.33/a ábra).



a) egyenestengelyű b) törttengelyű c) íves

2.32 ábra. Osztályozás a rúdtengely alakja szerint.

Gyakran alkalmaznak ún. *gerinclemezes tartókat*, amelyek gerincből és övekből állnak, oly módon, hogy az alsó és felső övet a tartó hossza mentén végigmenő gerinclemez köti össze (2.33/b ábra). Az öveket összekötő gerinclemez tartószerkezeti szerepe általában kicsi és anyagtakarékossági okokból sokszor a végigmenő gerinclemez helyett az öveket csak pontonként kötik össze. Ezek a gerinclemez nélküli tartók, amelyek jellegzetes példája a *rácsos tartó*, amelynél az öveket oszlopok és ferde rácsrudak kötik össze (2.33/c ábra). Ha a rácsos tartó ferde rúdjait is elhagyjuk, akkor az ún. Vierendeel tartóhoz jutunk.



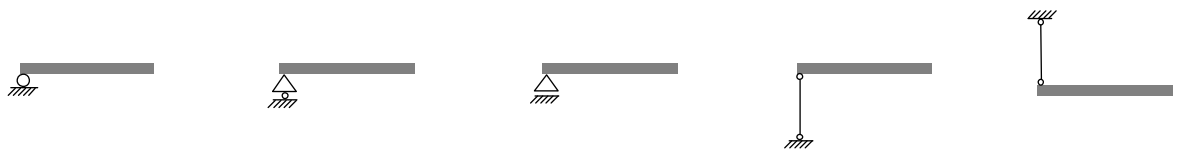
a) b) c)

2.33 ábra. a) tömör tartó keresztmetszete, b) gerinclemezes tartó keresztmetszete, c) rácsos tartó és keresztmetszete.

2.4.2 A tartók alátámasztása

Nincsen építőipari tartószerkezet alátámasztás nélkül. Az alátámasztásokat röviden *támaszoknak* is hívjuk. A támaszok szerepe a tartószerkezet rögzítése, abból a célból, hogy a tartószerkezet a terv szerinti helyen és helyzetben legyen. Nagyobb, illetve összetett szerkezetek esetében általában több támaszt alkalmazunk. A két támasz közötti szakaszt *támaszköznek* nevezzük. A támaszokat különböző szempontok szerint osztályozhatjuk. A megkülönböztetés alapja leggyakrabban talán a támasz szerkezeti kialakítása, illetve a támasznál fellépő kényszerek (meggátolt mozgások) száma. A támaszokban a kényszereknek megfelelően erők és nyomatékok, összefoglaló néven *támaszerők* (más néven *reakcióerők*) keletkeznek.

Az egyik jellegzetes megtámasztási mód a *sarus* megtámasztás, amely lehet mozgó vagy álló. A mozgó saru lehet hengeres, görgős és csúszó (2.34/a, 2.34/b és 2.34/c ábra). Bár nem sarus megtámasztás, de a viselkedés hasonlósága miatt a mozgó megtámasztások csoportjában szoktuk kezelni a támasztó rudas (2.34/d ábra) és a függesztő köteles/rudas (2.34/e ábra) megtámasztást.



a) hengeres b) görgős c) csúszó saru d) támasztó rúd e) függesztő kötél/rúd

2.34 ábra. Mozgó megtámasztások.

Lehetséges vízszintes és függőleges eltolódásokat és elfordulást feltételezve, a mozgó megtámasztásokat az jellemzi, hogy egy mozgás-komponenst akadályoznak meg és kettőt tesznek lehetővé. A 2.34 ábrán vázolt mozgó megtámasztások mindegyike megakadályozza a függőleges eltolódást és lehetővé teszi a vízszintes eltolódást és elfordulást a megtámasztott pontnál. Ennek megfelelően a bemutatott mozgó megtámasztásoknál egy kényszer ébred és a számítások során így egy ismeretlen reakcióerőt – a függőleges támaszerőt – kell meghatározni.

Az álló sarut *csuklónak* is nevezzük. A csukló viselkedésére az jellemző, hogy a megtámasztott pontnál nem lehetséges vízszintes és függőleges eltolódás, de elfordulás szabadon létrejöhet (2.35/a ábra). Két kényszer lép fel és ennek megfelelően a számítások során két ismeretlent – a vízszintes és függőleges támaszerőt – kell meghatározni.

A másik jellegzetes megtámasztási mód a *befogás*. A gyakorlati esetek túlnyomó részében olyan befogást alkalmaznak, amely a megtámasztási pontnál minden mozgást megakadályoz, vagyis nincs vízszintes és függőleges eltolódás és nincs elfordulás (2.35/b ábra). Három kényszer lép fel és a számítások során három ismeretlent kell meghatározni. Ezek az ismeretlenek a vízszintes és függőleges támaszerő és a befogási nyomaték. Jóval ritkábban fordul elő az az eset, amikor a megtámasztási pontnál nem jöhet létre függőleges eltolódás és elfordulás, de a vízszintes eltolódás létrejöttét a mozgó sarunál szokásos módon lehetővé tesszük (2.35/c ábra).

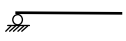
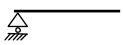
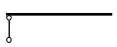
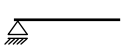
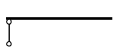
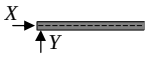
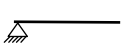
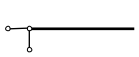
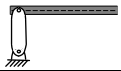
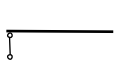
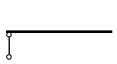
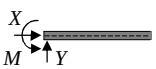
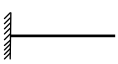
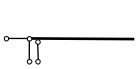
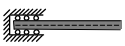
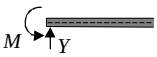
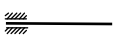
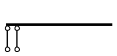


a) b) c)

2.35 ábra. a) csuklós megtámasztás, b) befogás, c) vízszintes mozgást megengedő befogás.

A síkbeli megtámasztó szerkezeteket a 2.1 táblázatban foglaljuk össze.

2.1 táblázat. Síkbeli támasztószerkezetek.

Támasztó szerkezet				Statikai kényszer	Jelölés	Ismeretlenek száma	Helyettesítés támasztó rudakkal
neve			vázlata				
Saru	mozgó	hengeres				1	
		görgős				1	
		csúszó				1	
	álló (csukló)					2	
Támasztó rúd						1	
Befogás	álló (fix)					3	
	mozgó					2	

2.4.3 Tartószerkezetek osztályozása

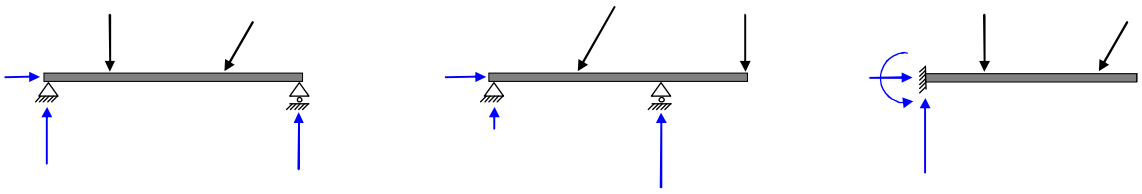
A tartószerkezetek statikai szempontból két csoportra oszthatók. Ezek a határozott és a határozatlan tartók.

A *határozott* tartókat az jellemzi, hogy az őket megtámasztó erők – a támaszerők – pusztán egyensúlyi egyenletekből meghatározhatók. Síkbeli tartók esetében merev testenként három független egyensúlyi egyenletet írhatunk fel, amelyekből merev testenként három ismeretlent határozhatunk meg. Ebből az következik, hogy az egy merev testből álló határozott tartók esetében az ismeretlen támaszerők száma három, vagyis:

$$f = 3$$

ahol f a támaszerők száma.

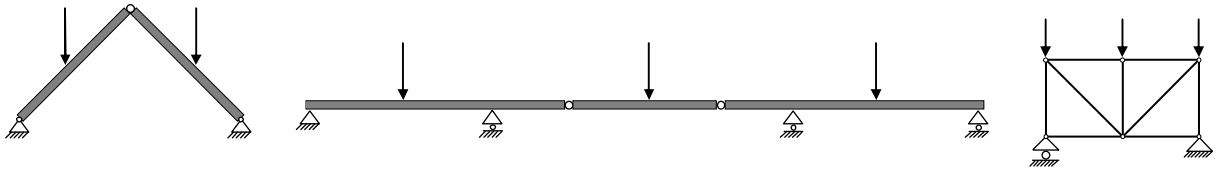
A 2.36 ábrán három példát láthatunk egy merev testből álló határozott tartókra, ahol (kékkel) az ismeretlen támaszerőket is bejelöltük.



a) kéttámaszú tartó b) konzolos kéttámaszú tartó c) befogott tartó

2.36 ábra. Egy merev testből álló határozott tartók.

Határozott tartót kialakíthatunk úgy is, hogy egy (vagy több) csukló segítségével több merev testet kapcsolunk össze. Ezeket az ún. belső csuklókat az jellemzi, hogy csak erőket (de nyomatékot nem) tudnak az összekapcsolt merev testek között átadni. Két, három, illetve kilenc merev test összekapcsolásával kialakított határozott tartókat láthatunk a 2.37 ábrán.



a) háromcsuklós tartó b) Gerber-tartó c) rácsos tartó

2.37 ábra. Több merev testet tartalmazó határozott tartók.

Több merev testből álló tartók esetében is érvényes az a fenti kijelentés, hogy a támaszerők a rendelkezésre álló egyensúlyi egyenletekből meghatározhatók. A statikai határozottság feltételét ilyen esetekben képletszerűen is megfogalmazhatjuk, úgy, hogy az ismeretlen támaszerők és rendelkezésre álló egyensúlyi egyenletek számát egyenlővé tesszük. – Több merev testből álló tartókkal a 3. és 5. fejezetekben részletesen foglalkozunk.

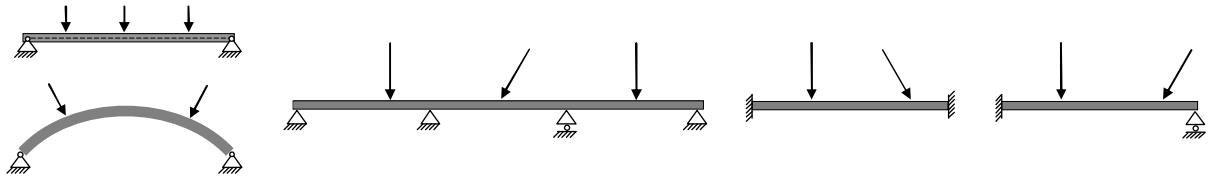
A *határozatlan* tartók esetében a (megtámasztásokból származó) ismeretlenek száma több mint 3, vagyis

$$f > 3$$

A határozatlan tartókat a határozatlanság fokával, vagyis az

$f-3$

számmal jellemezhetjük. Néhány határozatlan tartót mutatunk a 2.38 ábrán. A statikai határozatlanság foka az ábrán vázolt tartók esetében: a) $f-3=1$, b) $f-3=4$, c) $f-3=3$ és d) $f-3=1$.

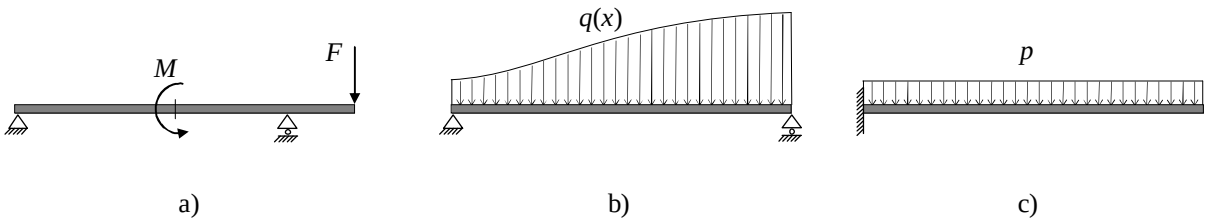


2.38 ábra. Határozatlan tartók. a) kétcsuklós tartó, b) többtámaszú tartó, c) két végén befogott tartó, d) másik végén megtámasztott befogott tartó.

Határozatlan tartókkal részletesen a Mechanika III (Határozatlan tartók) c. tárgy foglalkozik.

2.4.4 A terhelő erők

Síkbeli tartószerkezeteink terhelő erőit két nagy csoportra oszthatjuk. A *koncentrált* erők és nyomatékok egy meghatározott pontban támadják a tartót (2.39/a ábra), míg a *megoszló* erőrendszert az jellemzi, hogy vonal mentén hat (2.39/b ábra). A megoszló erők speciális esete az *egyenletesen* megoszló teher (2.39/c ábra).



2.39 ábra. a) F koncentrált erő és M nyomaték a konzolos kéttámaszú tartón. b) $q(x)$ megoszló erőrendszer, c) p = állandó intenzitású egyenletesen megoszló erőrendszer.

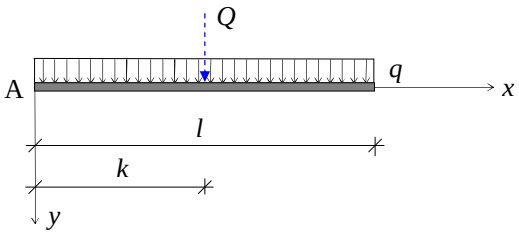
A támaszerők meghatározása során gyakran szükségünk van az egyenletesen megoszló erőrendszer eredőjére.

Tekintsük a 2.40 ábrán az x-y koordináta-rendszerben ábrázolt l hosszúságú rudat, amelyet q intenzitású egyenletesen megoszló teher terhel. Az ábrán a terhelést egy l hosszúságú téglalappal jelöljük, amelynek másik mérete q. Ez az úgynevezett terhelési diagram.

Az erőrendszer Q eredőjének nagyságát egy az erőrendszerrel párhuzamos y tengelyre vonatkoztatott vetületi egyenlet segítségével határozhatjuk meg:

$$Q=\sum F_y=ql$$

Az erőrendszer nagysága tehát a terhelési diagram területe.



2.40 ábra. q intenzitású, l hosszon egyenletesen megoszló erőrendszer Q eredője.

Az eredő helyét egy tetszőleges pontra felírt nyomatéki egyenlet segítségével kapjuk meg. Legyen ez a pont a koordináta-rendszer „A” kezdőpontja, ami egyben az l hosszúságú rúd baloldali kezdőpontja.

A

$$\sum M_A^{(q)} = \sum M_A^{(Q)}$$

egyenletből azt kapjuk hogy

$$lq\frac{l}{2} = Qk$$

és innen a fenti $Q = ql$ helyettesítéssel:

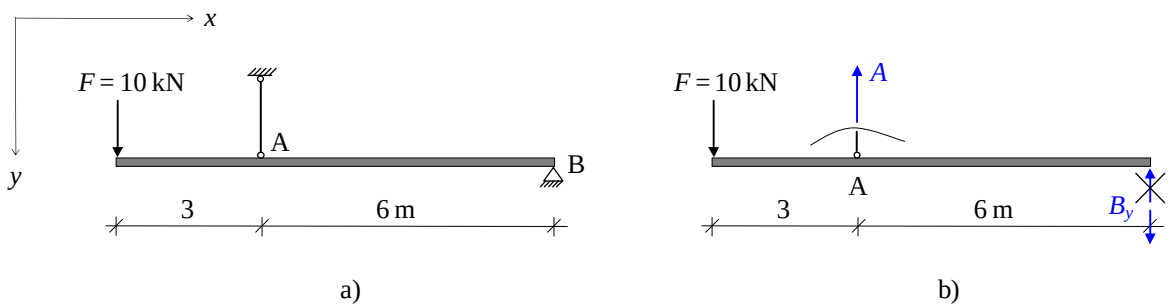
$$k = \frac{l}{2}$$

Az erőrendszer eredője ezek szerint a terhelési diagram súlypontján megy keresztül és támadáspontja az l hosszúságú rúd középpontjában van.

2.4.5 Gyakorló feladatok

Gyakorlati statikai feladatok megoldása során a számítások első lépése rendszerint a tartók megtámasztásaiban keletkező erők meghatározása. Ezzel az igen fontos feladattal foglalkozunk ebben a pontban. A következő nyolc példa bemutatásával a szükséges számítási rutin megszerzését szeretnénk segíteni.

Határozzuk meg először a 2.41/a ábrán vázolt 9-méteres gerenda megtámasztásaiban keletkező erőket. A tartót a jobboldali végén álló csuklóval, a baloldali végétől 3 méterre pedig egy függesztő rúddal rögzítjük. A tartó egyetlen terhe egy F = 10 kN nagyságú, lefelé mutató koncentrált erő a gerenda baloldali végén.



2.41 ábra. a) Álló csuklóval és függesztő rúddal rögzített kéttámaszú tartó, b) számítási vázlat.

Az „A” függesztő rúdban csak rúdirányú − azaz függőleges − erő ébredhet. Mivel az egyetlen teher függőleges, a „B” támaszban is csak függőleges erő keletkezhet. (Ez világosan látható egy *x* irányú vetületi egyenlet segítségével, amely zérus értéket adna a B_x értékére.) A gerendára tehát párhuzamos erők hatnak, így két egyensúlyi egyenlet áll rendelkezésünkre az ismeretlen támaszerők meghatározására. Az első lépésben feltételezzük a támaszerők irányát. A feltételezett erőket a 2.41/b ábrán kék nyilakkal ábrázoljuk. Feltételezésünk szerint az átvágott „A” függesztőrúdban felfelé mutató erő – húzóerő – keletkezik és a B_y támaszerő is felfelé mutat. A feltételezéseinknek megfelelő számítási vázlat a 2.41/b ábrán látható.

A „B” pontra felírt

$$\sum M_i^{(B)} = 6A - 9 \cdot 10 = 0$$

nyomatéki egyenletből az *A* erő értéke

$$A = \frac{90}{6} = 15.0\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

Az eredményt pozitív előjellel kaptuk meg és ez azt jelenti, hogy az *A* erő irányát jól tételeztük föl, vagyis valóban felfelé mutat. Ez az erő húzza a 2.41/b ábrán látható rúdcsonkot. Ezek szerint az „A” függesztőrúdban húzás keletkezik. Ez az eredmény összhangban is van a gerendánk erőjátékával: egy a jobb végén megtámasztott, a balvégén lefelé mutató erővel terhelt rudat a két hatás között „felkötünk”, ezáltal biztosítjuk a gerenda egyensúlyát és vízszintes nyugalmi helyzetét.

Ha most a függesztőrúd bekötési pontjára írunk fel nyomatékot és felhasználjuk a

$$\sum M_i^{(A)} = -6B_y - 3 \cdot 10 = 0$$

egyenletet, akkor innen megkapjuk a „B” támasznál keletkező támaszerő értékét:

$$B_y = -\frac{30}{6} = -5.0\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

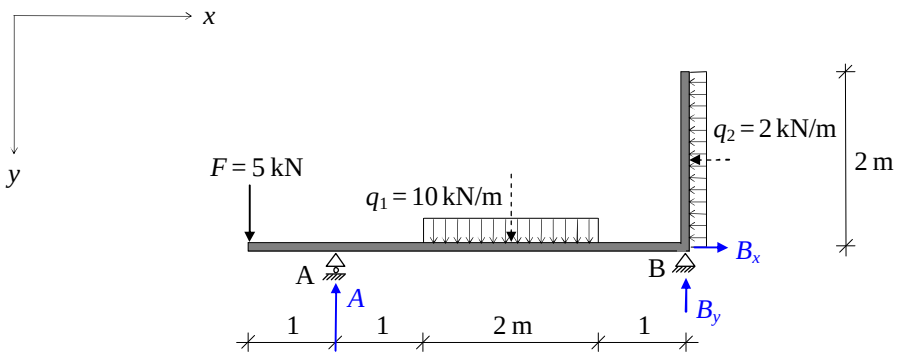
A negatív előjellel megkapott eredmény azt jelzi, hogy a B_y támaszerő irányát rosszul tételeztük fel. A B_y támaszerő tehát nem lefelé, hanem felfelé mutat.

Az ellenőrzésképpen felírt függőleges vetületi egyenlet megerősíti, hogy jól számoltunk:

$$\sum F_{y,i} = 10 - 15 + 5 = 0$$

Határozzuk most meg a 2.42 ábrán vázolt kéttámaszú, törttengelyű tartó reakcióerőit. A tartó vízszintes gerendáját a bal szélen egy F = 5 kN nagyságú koncentrált erő, az „A” és „B” támasz között pedig 2 méter hosszon egy q_1 = 10 kN/m intenzitású egyenletesen megoszló függőleges teher terheli. A tartó függőleges rúdján egy q_2 = 2 kN/m intenzitású egyenletesen megoszló vízszintes teher hat. A megoszló terhek eredőjét az ábrán szaggatott erőkkel jelöljük.

A számítás megkezdése előtt feltételezzük a reakcióerők irányát. Feltételezésünk szerint az *A* függőleges támaszerő felfelé mutat. A *B* támaszerőt két összetevőjével helyettesítjük. Feltételezzük, hogy a B_x vízszintes összetevő jobbra, a B_y függőleges összetevő pedig felfelé mutat. Az egyelőre ismeretlen *A*, B_x és B_y erőket az ábrán kék nyilakkal ábrázoljuk.



2.42 ábra. Kéttámaszú törttengelyű tartó.

Szétszórt síkbeli erőrendszer esetén az ismeretlenek meghatározására három egyensúlyi egyenlet áll rendelkezésünkre. A három ismeretlent így egyértelműen meghatározhatjuk. A három egyensúlyi egyenletet célszerű úgy megválasztani, hogy mindhárom egyenletben csak egy ismeretlen szerepeljen. Ha elsőnek a „B” pontra vonatkozó

$$\sum M_i^{(B)} = 0$$

nyomatéki egyenletet választjuk, akkor abban csak az A függőleges reakcióerő szerepel ismeretlenként. Részletesen kiírva:

$$\sum M_i^{(B)} = -5 \cdot 5 + 4A - 10 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

Innen megkapjuk az A reakcióerőt:

$$A = \frac{25 + 40 + 4}{4} = 17.25\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

Az A reakcióerőt pozitív előjellel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy az eredeti feltételezésünk – miszerint az A reakcióerő felfelé mutat – helyes volt. Ennek megfelelően az A reakcióerő értéke mellé zárójelek között egy felfelé mutató nyilat helyezünk el.

A maradék két reakcióerő meghatározására több lehetőség kínálkozik. A B_y függőleges reakcióerőt meghatározhatjuk függőleges vetületi egyenlet és az „A” pontra vonatkozó nyomatéki egyenlet segítségével. Az „A” pontra vonatkozó nyomatéki egyenletet választjuk, ami azzal az előnnyel jár, hogy csak eredeti adatokat tartalmaz (vagyis nem szerepel benne az előző lépésben kiszámított A reakcióerő).

Az „A” pontra vonatkozó

$$\sum M_i^{(A)} = 0$$

nyomatéki egyenlet részletesen kiírva:

$$\sum M_i^{(A)} = -1 \cdot 5 + 10 \cdot 2 \cdot 2 - 4B_y - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

Innen megkapjuk a B reakcióerő függőleges összetevőjét:

$$B_y = \frac{-5+40-4}{4} = 7.75\ \text{kN}\ (\uparrow)$$

A B reakcióerő függőleges összetevőjét pozitív előjellel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy az eredeti feltételezésünk – miszerint a B_y reakcióerő felfelé mutat – helyes volt. Ennek megfelelően a B_y reakcióerő értéke mellé zárójelek között egy felfelé mutató nyilat helyezünk el.

A B_x reakcióerő meghatározásához a

$$\sum F_{x,i} = 0$$

vízszintes vetületi egyenletet használjuk fel:

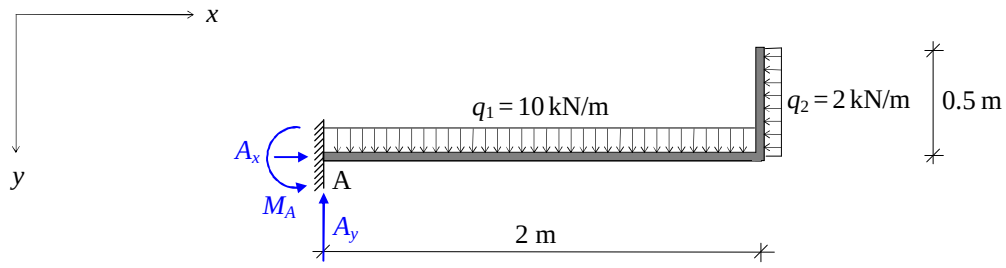
$$\sum F_{x,i} = B_x - 2 \cdot 2 = 0$$

Innen:

$$B_x = 4\ \text{kN}\ (\rightarrow)$$

A B reakcióerő vízszintes összetevőjét pozitív előjellel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy az eredeti feltételezésünk – miszerint a B_x reakcióerő jobbra mutat – helyes volt. Ennek megfelelően a B_x reakcióerő értéke mellé zárójelek között egy jobbra mutató nyilat helyezünk el.

A következő feladatként határozzuk meg a 2.43 ábrán vázolt, a baloldalon mereven befogott és a jobboldalon szabadon elmozduló végű, ún. konzoltartó reakcióerőit. A tartó vízszintes gerendáját a teljes hosszán egy $q_1 = 10$ kN/m intenzitású egyenletesen megoszló függőleges teher terheli. A tartó függőleges rúdján egy $q_2 = 2$ kN/m intenzitású, egyenletesen megoszló, balra mutató vízszintes teher hat. A számítás megkezdése előtt feltételezzük a reakcióerők irányát. Feltételezésünk szerint az A_y függőleges támaszerő felfelé, az A_x vízszintes támaszerő pedig jobbra mutat. A tartó baloldali végének elfordulását megakadályozó M_A támasznyomaték forgatóértelme feltételezésünk szerint legyen az óramutató járásával ellentétes. A két támaszerőt és a támasznyomatékot az ábrán kék nyilakkal ábrázoljuk.



2.43 ábra. Konzoltartó.

Most is három egyensúlyi egyenlet áll rendelkezésünkre, amelyek segítségével a három ismeretlent egyértelműen meghatározhatjuk.

Az A_x reakcióerő meghatározásához a

$$\sum F_{x,i} = 0$$

vízszintes vetületi egyenletet használjuk fel:

$$\sum F_{x,i} = A_x - 2 \cdot 0.5 = 0$$

Innen:

$$A_x = 1\,\text{kN}\ (\rightarrow)$$

Az A_x reakcióerőt pozitív előjellel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy az eredeti feltételezésünk – miszerint az A_x reakcióerő jobbra mutat – helyes volt. Ennek megfelelően az A_x reakcióerő értéke mellé zárójelek között egy jobbra mutató nyilat helyezünk el.

Az A_y reakcióerő meghatározásához a

$$\sum F_{y,i} = 0$$

függőleges vetületi egyenletet használjuk fel:

$$\sum F_{y,i} = -A_y + 10 \cdot 2 = 0$$

Innen:

$$A_y = 20\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

Az A_y reakcióerőt is pozitív előjellel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy az eredeti feltételezésünk – miszerint az A_y reakcióerő felfelé mutat – helyes volt. Ennek megfelelően az A_y reakcióerő értéke mellé zárójelek között egy felfelé mutató nyilat helyezünk el.

Az M_A támasznyomatékot az „A” pontra vonatkozó

$$\sum M_i^{(A)} = 0$$

nyomatéki egyenlet segítségével határozzuk meg. Az egyenlet részletesen kiírva:

$$\sum M_i^{(A)} = -M_A + 10 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0.5 \frac{0.5}{2} = 0$$

Innen megkapjuk az M_A támasznyomaték értékét:

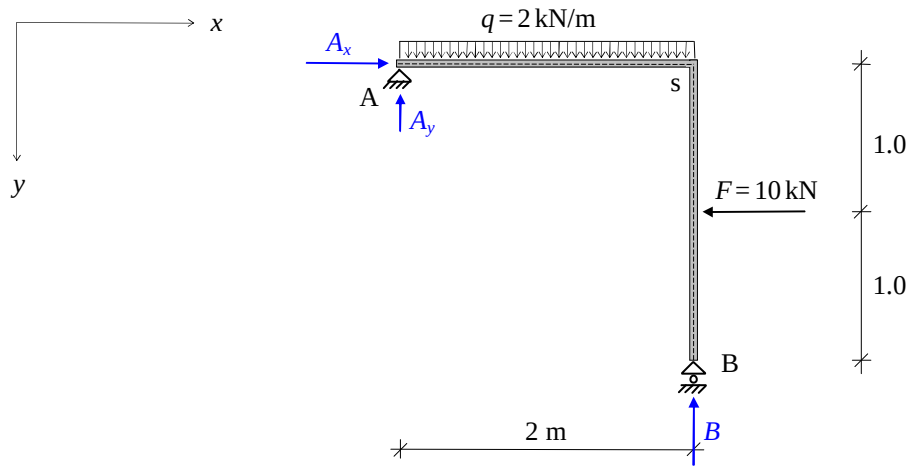
$$M_A = 19.75\,\text{kNm}\ (\circlearrowleft)$$

Az M_A támasznyomaték értékét pozitív előjellel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy az eredeti feltételezésünk – miszerint az M_A támasznyomaték az óramutató járásával ellentétesen forgat – helyes volt. Ennek megfelelően az M_A támasznyomaték értéke mellé zárójelek között egy óramutató járásával ellentétesen forgató nyilat helyezünk el.

Kéttámaszú törttengelyű tartót látunk a 2.44 ábrán. A tartó vízszintes gerendáját egy q = 2 kN/m egyenletesen megoszló függőleges teher terheli, a függőleges rúd közepén pedig egy balra mutató F = 10 kN nagyságú vízszintes erő hat.

A feltételezett támaszerő-összetevőket az ábrán kék nyilakkal jelöljük. A „B” támasz

vízszintes terepen álló görgős megtámasztás, így ott csak függőleges reakcióerő ébredhet.



2.44 ábra. Kéttámaszú törttengelyű tartó.

Első lépésben az „A” pontra írunk fel nyomatéki egyenletet:

$$\sum M_i^{(A)} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 10 \cdot 1 - 2B = 0$$

Innen az egyetlen ismeretlen azonnal meghatározható:

$$B = \frac{4+10}{2} = 7 \text{ kN } (\uparrow)$$

A B támaszerő értékét pozitív előjellel kaptuk meg és ez azt jelenti, hogy az eredeti feltételezés helyes volt, vagyis a B támaszerő felfelé mutat.

Második lépésben vízszintes vetületi egyenletet írunk fel:

$$\sum F_{x,i} = A_x - 10 = 0$$

Innen adódik az „A” támaszerő vízszintes összetevője:

$$A_x = 10 \text{ kN } (\rightarrow)$$

A pozitív előjellel megkapott eredmény megerősíti az eredeti feltételezést: az A_x támaszerő-összetevő jobbra mutat.

Írjunk fel végül nyomatéki egyenletet a szerkezet „s” jelű sarokpontjára:

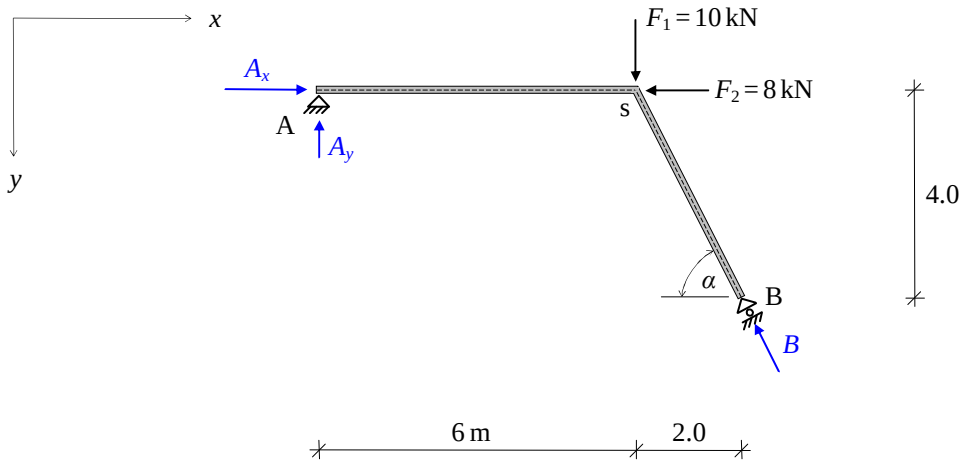
$$\sum M_i^{(s)} = -2 \cdot 2 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 2A_y = 0$$

Innen:

$$A_y = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1 - 10}{2} = -3 \text{ kN } (\downarrow)$$

A negatív előjelű eredmény arra figyelmeztet, hogy az A_y támaszerő-összetevő irányát rosszul tételeztük fel. Az erő tehát nem felfelé, hanem lefelé mutat.

A 2.45 ábra is törttengelyű kéttámaszú tartót mutat, de a tartó „B” támasztól induló eleme most ferde. A ferde rúd hajlásszöge a vízszinteshez $\alpha = \text{arctg}(4/2) = 63.43°$. A ferde elem görgős csuklóval van megtámasztva, amely a ferde rúdra merőleges síkon tud elmozdulni. A tartó másik végén a vízszintes gerendát az „A” jelű csuklós megtámasztás rögzíti. A tartót az $F_1 = 10$ kN függőleges és az $F_2 = 8$ kN vízszintes koncentrált erő terheli. Mindkét erő az „s” jelű sarokpontban működik. A feltételezett támaszerő-összetevőket az ábrán kék nyilakkal jelöljük.



2.45 ábra. Kéttámaszú törttengelyű tartó ferde megtámasztással.

Az „A” pontra felírt

$$\sum M_i^{(A)} = 10 \cdot 6 + B\cos(63.43°) \cdot 4 - B\sin(63.43°) \cdot 8 = 0$$

nyomatéki egyenletben csak a B támaszerő szerepel ismeretlenként. Értéke:

$$B = \frac{60}{8\sin(63.43°) - 4\cos(63.43°)} = 11.18\,\text{kN}\ (\nwarrow)$$

Az „s” sarokponton a feltételezett A_y támaszerő-összetevőn kívül az összes erő átmegy. Az ide felírt

$$\sum M_i^{(s)} = 6A_y = 0$$

nyomatéki egyenlet így azonnal szolgáltatja az A_y támaszerő-összetevő értékét:

$$A_y = 0$$

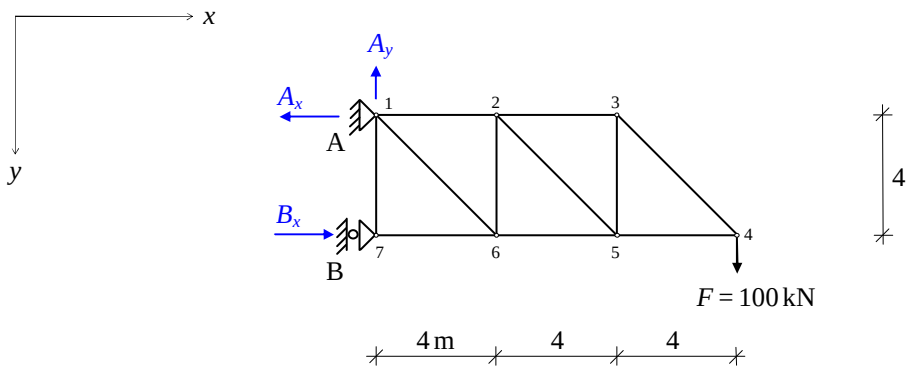
Az x irányú

$$\sum F_{x,i} = A_x - 8 - 11.18 \cdot \cos(63.43°) = 0$$

vetületi egyenlet végül megadja az A_x támaszerő-összetevő értékét:

$$A_x = 13\,\text{kN}\ (\rightarrow)$$

A csuklókkal összekapcsolt rudak alkotta szerkezetek egyik típusa a rácsos tartó. Egy ilyen tartót ábrázol a 2.46 ábra. Rácsos tartókkal a 3. fejezetben foglalkozunk részletesen, itt most csak a tartó megtámasztásaiban keletkező erőket határozzuk meg. A „B” görgős támasz jellegének megfelelően csak a megtámasztásra merőleges, vagyis vízszintes erőt képes felvenni. Az „A” csuklós támaszban mind *x*, mind *y* irányú támaszerő-összetevő keletkezhet. A feltételezett irányú támaszerő-összetevőket az ábrán kék nyilakkal jelöljük.



2.46 ábra. Rácsos tartó.

A tartót a jobbszélső csomóponton egyetlen $F = 100$ kN nagyságú, függőleges, lefelé mutató koncentrált erő terheli. A támaszerők meghatározása során a hét csuklóval összekapcsolt tizenegy rudat egyetlen merev testnek tekintjük. Az „A” pontra felírt

$$\sum M_i^{(A)} = 100 \cdot 12 - 4B_x = 0$$

nyomatéki egyenletben csak egy ismeretlen van. A B_x támaszerő innen:

$$B_x = 300\,\mathrm{kN}\ (\rightarrow)$$

A „B” pontra felírt

$$\sum M_i^{(B)} = 100 \cdot 12 - 4A_x = 0$$

nyomatéki egyenlet azonnal szolgáltatja az A_x támaszerő-összetevőt:

$$A_x = 300\,\mathrm{kN}\ (\leftarrow)$$

Az A_y támaszerő-összetevőt a

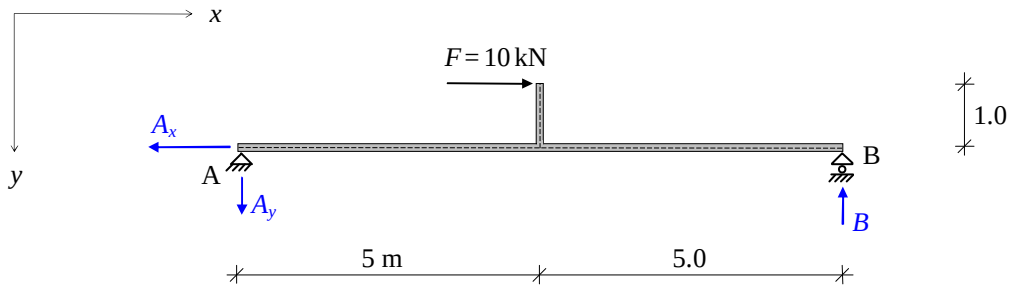
$$\sum F_{y,i} = -A_y + 100 = 0$$

függőleges vetületi egyenlet segítségével számítjuk ki:

$$A_y = 100\,\mathrm{kN}\ (\uparrow)$$

Mindhárom támaszerő-összetevőt pozitív előjellel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy az erők irányát jól tételeztük fel.

A 2.47 ábrán vázolt 10 méteres kéttámaszú gerendát egyetlen F = 10 kN nagyságú, jobbra mutató vízszintes koncentrált erő terheli a tartó közepéről elágazó, egy méteres oszlop tetején.



2.47 ábra. Kéttámaszú tartó.

A támaszerő-összetevők irányának feltételezése (kék nyilak az ábrán) után az „A” pontra írunk fel nyomatéki egyenletet:

$$\sum M_i^{(A)} = 10 \cdot 1 - 10B = 0$$

Innen:

$$B = 1\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A „B” pontra felírt

$$\sum M_i^{(B)} = 10 \cdot 1 - 10A_y = 0$$

nyomatéki egyenlet szolgáltatja az A_y támaszerő-összetevőt:

$$A_y = 1\,\text{kN}\ (\downarrow)$$

Az A_x támaszerő-összetevőt a

$$\sum F_{x,i} = -A_x + 10 = 0$$

vetületi egyenletből kapjuk meg:

$$A_x = 10\,\text{kN}\ (\leftarrow)$$

Mindhárom támaszerő-összetevőt pozitív előjellel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy az erők irányát jól tételeztük fel.

Igen egyszerűen jutunk eredményhez a 2.48 ábrán vázolt kéttámaszú tartó esetében. A tartót két F = 10 kN nagyságú vízszintes koncentrált erő terheli. Az egyik erő az „A” támasznál elágazó, egy méteres oszlop tetején jobbra, a másik erő pedig a „B” támasznál elágazó, egy méteres oszlop tetején balra hat. A két erő közös hatásvonalon működik.

A támaszerő-összetevők irányának feltételezése (kék nyilak az ábrán) után az „A” pontra írunk fel nyomatéki egyenletet:

$$\sum M_i^{(A)} = 1\cdot 10 - 1\cdot 10 - 10B = 0$$

Innen:

$$B = 0$$

A „B” pontra felírt

$$\sum M_i^{(B)} = 1\cdot 10 - 1\cdot 10 + 10A_y = 0$$

nyomatéki egyenlet szolgáltatja az A_y támaszerő-összetevőt:

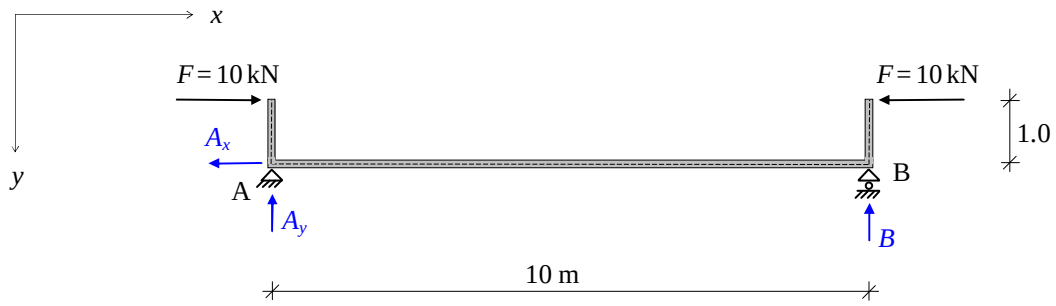
$$A_y = 0$$

Az A_x támaszerő-összetevőt a

$$\sum F_{x,i} = -A_x + 10 - 10 = 0$$

vetületi egyenletből kapjuk meg:

$$A_x = 0$$



2.48 ábra. Kéttámaszú tartó.

Ezeket az eredményeket természetesen számítás nélkül is megkaphattuk volna: a tartóra egyensúlyban lévő erőrendszer hat, így a tartó egyensúlyozásához nincs szükség további (a támaszokban ható) erőkre.

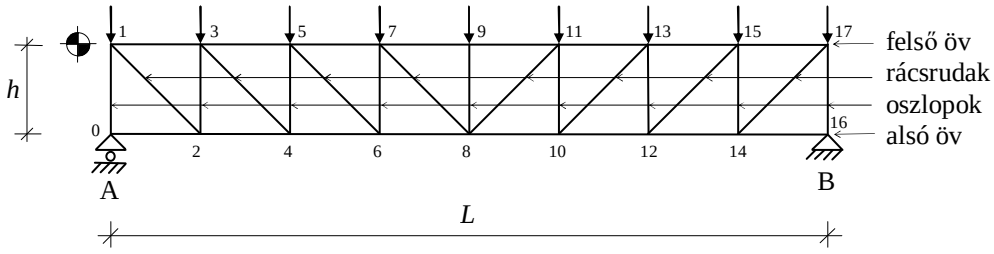
3

Rácsos tartók

A több merev testből csuklókkal összekapcsolt szerkezeteket rácsos tartóknak nevezzük. Ha viszonylag nagy teherbírás az igény és anyagtakarékos szerkezetet szeretnénk alkalmazni, akkor a rácsos tartó egy kedvező lehetőséget jelenthet. Az összekapcsolt merev testek általában rudak, mégpedig egyenestengelyű rudak. A merev testeket összekapcsoló csuklókat az jellemzi, hogy csak erőket tudnak átadni, nyomatékot nem. A csuklókat rendszerint csomólemezek segítségével alakítjuk ki. Ezek a csomópontok ugyan nem tekinthetők tökéletes csuklóknak, de jó közelítéssel idealizált csuklókként kezeljük őket a statikai számításokban. Ebben a fejezetben statikailag határozott, csomópontokban terhelt, síkbeli rácsos tartókkal foglalkozunk és bemutatjuk a szokásosan alkalmazott számítási módszereket.

3.1 Bevezetés

A rácsos tartók különböző szempontok szerint osztályozhatók és a különböző típusokkal későbbi tanulmányaink során a szaktantárgyak keretei között részletesen is megismerkedünk. Itt most csak annyit említünk meg, hogy a legismertebb és leggyakrabban előforduló típus talán a párhuzamos övű rácsos tartó. A párhuzamos övű rácsos tartó jellegzetes részei a vízszintes övrudak, a ferde rácsrudak és a függőleges oszlopok (3.1 ábra).



3.1 ábra. Kéttámaszú, felsőpályás, párhuzamos övű rácsos tartó.

A rácsos tartók megadása hálózatukkal történik és az egyes rudak azonosítása céljából a csomópontokat megszámozzuk. A rácsos tartók egyik gyakori alkalmazási területe a közúti és vasúti közlekedés, ahol a keresztező út/folyó (vagy valamilyen műtárgy) áthidalása párhuzamosan egymás mellé elhelyezett rácsos tartók segítségével történhet. Ha a közlekedés csak az egyik – alsó vagy felső – öv síkjában terheli a tartókat, akkor ezt a tényt a pálya megjelölésével szokás jelezni. (Felsőpályás párhuzamos övű rácsos tartót vázoltunk a 3.1 ábrán. A felső pálya tényét az 1. csomóponttól balra elhelyezett szimbólummal jelöljük.)

A rácsos tartók tervezése során szükségünk van az egyes rudakban a terhelés hatására keletkező rúderők értékének ismeretére. Mivel csomópontokon terhelt rácsos tartókkal foglalkozunk, csomópontonként közös metszéspontú erőkkel találkozunk. Ebből az következik, hogy egy statikailag határozott rácsos tartó vizsgálata során

$$e = 2c$$

számú egyenletet írhatunk fel, ahol *e* az egyenletek száma és *c* a csomópontok száma. Az *i* ismeretlenek száma

$$i = r + f$$

ahol *r* a rudak száma és *f* a megtámasztásokban keletkező támaszerők száma. Statikailag határozott tartók esetében – ahol az ismeretlenek száma egyenlő kell hogy legyen a rendelkezésre álló egyenletek számával – érvényes tehát a

$$2c = r + f$$

összefüggés. Fenti összefüggés a statikai határozottság *szükséges* feltétele.

A statikai tervezés célja állékony szerkezetek megalkotása. Könnyen belátható, hogy a fenti összefüggés csak szükséges feltétel, de nem elégséges. Tekintsük a 3.2 ábrán vázolt két rácsos tartót. A 3.2/b ábrán vázolt tartót úgy kaptuk, hogy a 3.2/a ábrán látható tartó egyik közbenső mezőjében található 3-4 jelű rácsrudat áthelyeztük a balszélső mezőbe. Sem a csomópontok, sem a rácsrudak száma így nem változott. Mindkét rácsos tartó kielégíti a fenti feltételt, hiszen mindkét esetben

$$2c = 2 \cdot 10 = 20 \qquad \text{és} \qquad r + f = 17 + 3 = 20$$

de amíg a 3.2/a ábrán vázolt tartó állékony, addig a 3.2/b ábrán vázolt tartó összeomlik, így a statikai gyakorlatban nem alkalmazható. A statikai határozottság *szükséges és elégséges* feltételét így a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$r = 2c - f \qquad + \qquad \text{jó elrendezés}$$



3.2 ábra. a) statikailag határozott tartó, b) nem állékony tartó.

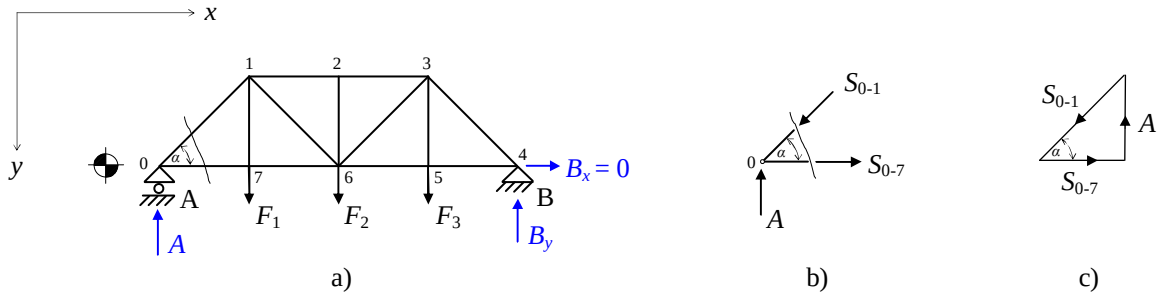
A következőkben a rácsos tartó rúderőinek meghatározására szolgáló két módszert ismertetünk.

3.2 A rúderők meghatározása a csomóponti módszerrel

A rácsos tartó rúdjainak képzeletbeli átvágásával *csomópontokat* veszünk ki a rácsos tartóból (a csomóponthoz tartozó rúdvégekkel) és a csomópontban található erők (külső terhelő erők és rúderők) egyensúlyát vizsgáljuk. Mivel közös metszéspontú síkbeli erőkről van szó, csomópontonként két egyenlet áll rendelkezésre a rúderők meghatározására. Az eljárást a 3.3/a ábrán vázolt alsópályás rácsos tartó segítségével mutatjuk be.

A számítást két részben hajtjuk végre. Először meghatározzuk a rácsos tartó támaszerőit. Ebből a célból a teljes rácsos tartót egyetlen merev testnek tekintjük és a szokásos módon meghatározzuk a támaszerőket. Ehhez a számításhoz három egyenlet áll rendelkezésünkre. A

3.3/a ábrán kékkel ábrázoltuk az A, B_x és B_y támaszerőket. Mivel a tartót csak függőleges erők támadják, esetünkben a támaszerők közül a B_x értéke zérus.



3.3 ábra. Csomóponti módszer. a) statikailag határozott rácsos tartó, b) a „0” csomópont egyensúlya, c) az egyensúlyt kifejező vektorháromszög.

A támaszerők értékének ismeretében ezután csomópontonként haladva meghatározzuk a rúderőket. A haladás sorrendjének megállapítása során a következőket vesszük figyelembe:

a) a csomópontban maximum két ismeretlen rúderő legyen,

b) egyenletenként lehetőleg csak egy ismeretlen rúderő szerepeljen.

Fentieknek megfelelően a „0” csomópontot választjuk elsőnek, mert ott a már ismert A támaszerő mellett csak két ismeretlen rúderő van (az $S_{0\text{-}1}$ és $S_{0\text{-}7}$), amelyeket a rendelkezésre álló két egyensúlyi egyenlet segítségével egyszerűen meghatározhatunk. Kivágjuk a „0” csomópontot a környezetével együtt (3.3/b ábra). Feltételezzük az átvágott rudakban működő ismeretlen $S_{0\text{-}1}$ és $S_{0\text{-}7}$ erők irányát: esetünkben a $S_{0\text{-}1}$ erőt balra és lefelé mutatónak, az $S_{0\text{-}7}$ erőt pedig jobbra mutatónak tételezzük fel. Így készen állunk a csomópont egyensúlyának vizsgálatára. Ha az első lépésben a

$$\sum F_{y,i} = S_{0-1}\sin\alpha - A = 0$$

függőleges vetületi egyenletet használjuk fel, akkor az egyetlen ismeretlent egy lépésben kiszámíthatjuk:

$$S_{0-1} = \frac{A}{\sin\alpha}\ (-)$$

A vetületi egyenletből az $S_{0\text{-}1}$ erőt pozitív előjellel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy az eredeti feltételezésünk (amely szerint az $S_{0\text{-}1}$ erő balra és lefelé mutat) helyes volt. Ebből pedig az következik, hogy a 0-1 rúd nyomott. Ezt az mutatja, hogy az $S_{0\text{-}1}$ erő a kivágott vázlaton látható rúdcsonkot nyomja (3.3/b ábra). Azt a tényt, hogy az $S_{0\text{-}1}$ erő nyomott, az értéke mellett zárójelek között elhelyezett negatív előjellel rögzítjük.

Ezután a vízszintes vetületi egyenletet írjuk fel:

$$\sum F_{x,i} = -S_{0-1}\cos\alpha + S_{0-7} = 0$$

Innen:

$$S_{0-7} = S_{0-1}\cos\alpha\ (+)$$

Mivel az $S_{0\text{-}1}$ erő értéke az előző lépésből már ismert, így megkaptuk az $S_{0\text{-}7}$ erő értékét. Az

erőt pozitív előjellel kaptuk meg és ez azt jelenti, hogy az eredeti feltételezésünk (amely szerint az $S_{0\text{-}7}$ erő jobbra mutat) helyes volt. Ebből pedig az következik, hogy a 0-7 rúd húzott. Ezt az mutatja, hogy az $S_{0\text{-}7}$ erő a kivágott vázlaton látható rúdcsonkot húzza (3.3/b ábra). Azt a tényt, hogy az $S_{0\text{-}7}$ erő húzott, az értéke mellett zárójelek között elhelyezett pozitív előjellel rögzítjük.

Ha a lépések során egy erő értékét negatív előjellel kapjuk meg, akkor ez azt jelenti hogy az eredeti feltételezés helytelen volt és ezt a tényt *azonnal* figyelembe kell venni, azzal, hogy a csomóponti vázlaton korrigáljuk az erő irányát. Csak ezután tesszük meg a következő lépést. A vizsgált rúderő előjelét – vagyis hogy húzott vagy nyomott – a korrigált vázlat segítségével kell megállapítani.

Ha a rúderőket szerkesztéssel akarjuk meghatározni, akkor a 3.3/c ábrán vázolt módon járunk el, vagyis léptékhelyes ábrán megszerkesztjük az egyensúlyt kifejező vektoridomot.

Ezek után a fentiekben leírt módon egyenként végigmehetünk a csomópontokon és meghatározhatjuk az összes rúderőt.

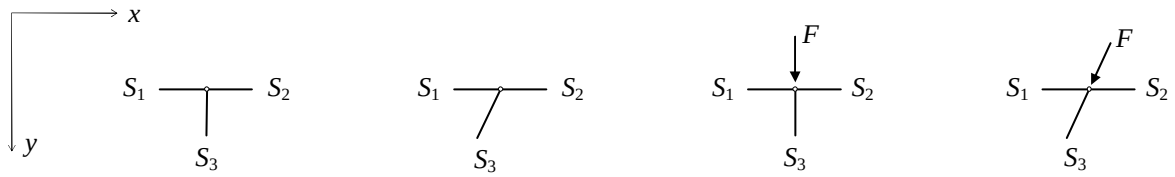
A következő lépésben a „7” csomópontot vizsgálhatjuk, mert ott csak két ismeretlen rúderő van, majd sorrendben jöhetnek az „1”, a „2”, a „6”, stb csomópontok.

A számítás elvégzése után a tényleges statikai tervezés megkönnyítése érdekében célszerű az eredményeket összefoglalni. Ez történhet rúderőtáblázat elkészítésével, ahol feltüntetjük az összes rudat a bennük ébredő erő értékével és a húzott vagy nyomott jelleg megadásával. Az eredményeket összefoglalhatjuk eredményvázlaton is, ahol egy léptékhelyes hálózati ábrán tüntetjük fel az előjeles (+ húzott, – nyomott) rúderő értékeket.

Általános esetben az ismeretlen erőket lépésenként, a két egyensúlyi egyenlet alkalmazásával határozzuk meg, de néhány speciális kialakítású és terhelésű csomópont esetében számítás nélkül, szemrevételezéssel is eredményhez jutunk.

A 3.4/a és 3.4/b ábrán vázolt, terheletlen csomópontok esetében például a függőleges vetületi egyenlet segítségével azonnal látjuk hogy az S_3 rúderő zérus. Zérus rúderő esetén az érintett rudat *vakrúdnak* nevezzük. A „3” rúd tehát vakrúd és a vízszintes vetületi egyenlet tényleges számítás nélkül azonnal mutatja hogy $S_1 = S_2$.

Hasonló a helyzet akkor, amikor a csomópont terhelt (3.4/c és 3.4/d ábra). A függőleges vetületi egyenlet azonnal adja az $S_3 = F$ eredményt, a vízszintes vetületi egyenlet segítségével pedig számítás nélkül is látjuk hogy $S_1 = S_2$.



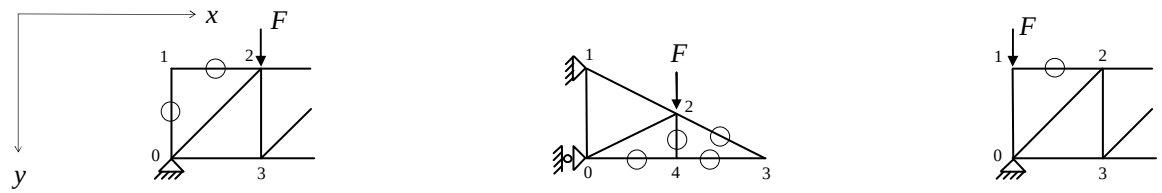
a) b) c) d)

3.4 ábra. Speciális kialakítású és/vagy terhelésű csomópontok. a) és b) terheletlen „T” csomópont, c) és d) terhelt „T” csomópont.

A statika első axiómája alkalmazásával azonnali információt kapunk a 3.5/a ábrán vázolt rácsos tartó baloldali részének két rúderejéről: az $S_{0\text{-}1}$ és $S_{1\text{-}2}$ erők nem lehetnek egyensúlyban, így a 0-1 és 1-2 rudak csak vakrudak lehetnek. (A vakrudakat – amelyekben nem ébred erő – szokás üres karikával ábrázolni.)

Hasonlóan azonnali eredményeket kapunk a 3.5/b ábrán látható rácsos tartó számítása során. A 3. csomópontba befutó 2-3 és 3-4 jelű rudak csak vakrudak lehetnek, mert zérustól különböző nagyságú rúderő esetében nem lehetnének egyensúlyban. Ha ezek a rudak vakrudak, akkor ugyanilyen okból a 2-4 és 0-4 jelű rudak is vakrudak. A 3.5/c ábrán vázolt

rácsos tartórész esetében a számítást az 1. csomópontban kell kezdeni, mert a többi csomópontban kettőnél több ismeretlen rúderővel találkoznánk. Az 1-2 jelű rúd vakrúd. (A gyakorlatban persze az 1-2 jelű rúdra is szükség van.) A 0-1 rúdban ébredő (F nagyságú) erő ismeretében a számítást a 0., a 2. majd a 3. csomópontban folytathatjuk.



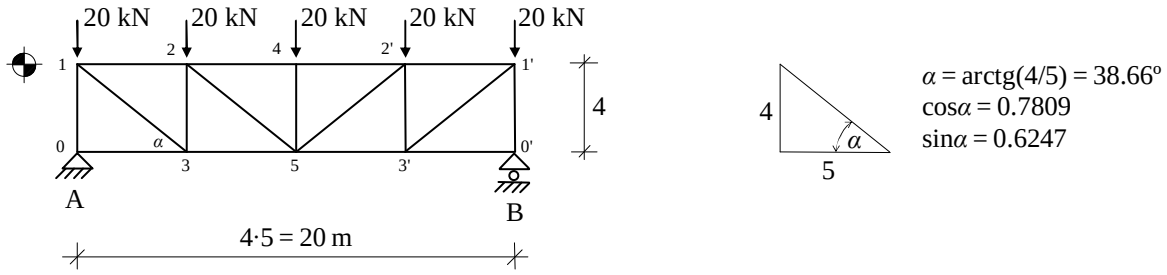
a) b) c)

3.5 ábra. Speciális esetek. a) terheletlen sarok, b) „T” csomópont, c) terhelt sarok.

A csomóponti módszer előnye az, hogy egyszerű és általában egyismeretlenes egyenletekből meg tudjuk határozni a rúderőket. Hátránya az, hogy a számítás sorrendje kötött, általában nem lehet tetszőleges rúderőt azonnal kiszámítani és az esetlegesen elkövetett számítási hiba terheli a hiba elkövetése után végzett számítást.

3.3 Gyakorló feladatok: a rúderők meghatározása a csomóponti módszerrel

Határozzuk meg a 3.6 ábrán vázolt, kéttámaszú, párhuzamos övű rácsos tartó összes rúderejét. A tartót a felső öv csomópontjaiban öt, egyenként 20 kN nagyságú koncentrált erő terheli. Mivel a tartó és terhelése szimmetrikus, elegendő a tartó felét vizsgálni. Ez kilenc rúderő meghatározását jelenti.



3.6 ábra. Rácsos tartó a csomóponti módszer alkalmazásához.

A tartóra vízszintes teher nem hat, így az „A” támasznál nem keletkezik vízszintes reakcióerő: $A_x = 0$. A szimmetrikusan elhelyezkedő öt erő összesen 100 kN függőleges terhet jelent a tartón. A reakcióerők így

$$A_y = 50\,\text{kN}\ (\uparrow) \qquad \text{és} \qquad B = 50\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A számítást a „0” csomóponttal kezdjük, ahol a már ismert A_y reakcióerő mellett két ismeretlen rúderő van (3.7/a ábra). A

$$\sum F_{y,i} = S_{0-1} - 50 = 0$$

függőleges vetületi egyenletből az $S_{0\text{-}1}$ rúderő azonnal meghatározható:

$$S_{0-1} = 50\,\text{kN}\ (-)$$

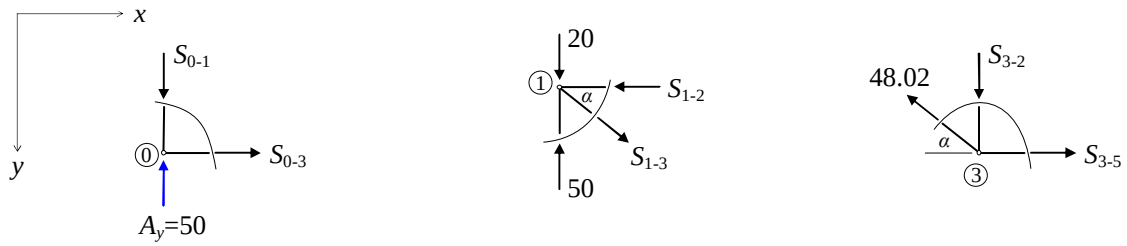
A vetületi egyenletből az $S_{0\text{-}1}$ erőt pozitív előjellel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy az eredeti feltételezésünk (amely szerint az $S_{0\text{-}1}$ erő lefelé mutat) helyes volt. Ezek szerint az $S_{0\text{-}1}$ erő nyomja a kivágott rúdcsonkot (3.7/a ábra). Azt a tényt, hogy a 0-1 rúd nyomott, az $S_{0\text{-}1}$ erő értéke mellett zárójelek között elhelyezett negatív előjellel rögzítjük.

A vízszintes vetületi egyenletben csak az ismeretlen $S_{0\text{-}3}$ rúderő szerepel:

$$\sum F_{x,i} = S_{0-3} = 0$$

Innen:

$$S_{0-3} = 0 \ \text{(vakrúd)}$$



a) a „0” csomópont b) az „1” csomópont c) a „3” csomópont

3.7 ábra. A „0”, az „1” és a „3” csomópontokban működő erők.

A következő csomópontnak az „1” csomópontot választjuk (3.7/b ábra), ahol a csomópontot terhelő 20 kN erő és a már ismert értékű $S_{0\text{-}1}$ rúderő mellett két ismeretlen rúderő van, amelyek értékét a rendelkezésre álló két vetületi egyenlet segítségével meg tudjuk határozni. Az „1” csomópont közelében tehát képzeletben átvágjuk a rudakat, működtetjük a már ismert erőket és vizsgáljuk a csomópont egyensúlyát. Az $S_{0\text{-}1}$ erő elhelyezésekor nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy a 0-1 jelű rúd *nyomott* (amit a „0” csomópont vizsgálatakor, az előbb állapítottunk meg). Ebből az következik, hogy vázlatunkon az $S_{0\text{-}1}$ erőt úgy kell elhelyezni, hogy nyomja a látható rúdcsonkot. Ez azt jelenti, hogy ábránkon az $S_{0\text{-}1}$ = 50 kN erő *felfelé* mutat.

A függőleges vetületi egyenletet írjuk fel elsőnek (mert az csak egy ismeretlent tartalmaz):

$$\sum F_{y,i} = 20 - 50 + S_{1-3} \sin\alpha = 0$$

Innen:

$$S_{1-3} = \frac{30}{0.6247} = 48.02 \ \text{kN (+)}$$

Az $S_{1\text{-}3}$ erőt pozitív előjellel kaptuk meg és ez azt jelenti, hogy az erő irányát jól tételeztük fel. Ez az erő az 1-3 rúd ábrán látható csonkját húzza, tehát az 1-3 rúd húzott.

Az $S_{1\text{-}3}$ rúderő ismeretében a vízszintes vetületi egyenlet most már csak egy ismeretlent tartalmaz:

$$\sum F_{x,i} = -S_{1-2} + 48.02 \cdot \cos\alpha = 0$$

Innen:

$$S_{1-2} = 48.02 \cdot 0.7809 = 37.5\,\text{kN}\ (-)$$

Ezt a rúderőt is pozitív előjellel kaptuk meg. Helyes tehát a 3.7/b ábrán látható eredetileg feltételezett erőirány. Ilyen irányú erő nyomja az ábrán vázolt rúdcsonkot: az 1-2 rúd tehát nyomott. Ezt a tényt az erő mellett zárójelek között elhelyezett negatív előjellel rögzítjük.

Áttérhetünk a „3” csomópontra (3.7/c ábra), ahol az oda befutó négy rúdból kettő esetében már ismert a rúderő.

A vízszintes vetületi egyenlet egy ismeretlent tartalmaz:

$$\sum F_{x,i} = S_{3-5} - 48.02 \cdot \cos\alpha = 0$$

Innen az $S_{3\text{-}5}$ rúderő értékét pozitív előjellel kapjuk meg:

$$S_{3-5} = 48.02 \cdot 0.7809 = 37.5\,\text{kN}\ (+)$$

Ez az erő húzza az ábrán vázolt rúdcsonkot, tehát a 3-5 jelű rúd húzott.

A függőleges vetületi egyenlet is csak egy ismeretlent tartalmaz:

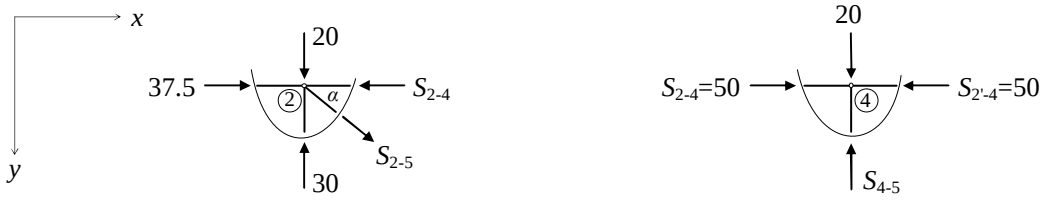
$$\sum F_{y,i} = S_{3-2} - 48.02 \sin\alpha = 0$$

Innen:

$$S_{3-2} = 48.02 \cdot 0.6247 = 30.0\,\text{kN}\ (-)$$

A pozitív előjellel adódó $S_{3\text{-}2}$ erő megerősíti az eredetileg feltételezett (lefelé mutató) erőirányt. Ez az erő nyomja a 3-2 jelű rúd csonkját, tehát a 3-2 rúd nyomott.

A következő lépésben a „2” csomópont egyensúlyát vizsgáljuk (3.8/a ábra).



a) a „2” csomópont b) a „4” csomópont

3.8 ábra. A „2” és a „4” csomópontokban működő erők.

A függőleges vetületi egyenletet írjuk fel először:

$$\sum F_{y,i} = S_{2-5} \sin\alpha + 20 - 30 = 0$$

Innen megkapjuk az $S_{2\text{-}5}$ erőt:

$$S_{2-5} = \frac{10}{0.6247} = 16.0\ \text{kN}\ (+)$$

A pozitív eredmény azt jelzi, hogy jól tételeztük fel az $S_{2\text{-}5}$ erő irányát és az valóban a 3.8/a ábrán vázolt irányba mutat. Mivel a vázolt erő húzza a rúdcsonkot, a 2-5 rúd húzott.

A vízszintes vetületi egyenletben csak az $S_{2\text{-}4}$ erő szerepel ismeretlenként:

$$\sum F_{x,i} = 37.5 - S_{2-4} + 16\cos\alpha = 0$$

Innen megkapjuk az $S_{2\text{-}4}$ erőt:

$$S_{2-4} = 37.5 + 16 \cdot 0.7809 = 50 \text{ kN (–)}$$

Az $S_{2\text{-}4}$ erőt pozitív előjellel kaptuk meg és ezzel megerősítettük az eredetileg feltételezett irányt, vagyis $S_{2\text{-}4}$ erő balra mutat. Ez az erő pedig nyomja a 2-4 rúdcsonkot, tehát a rúd nyomott. Ezt a tényt az erő értéke után zárójelek között negatív előjellel jelöltük.

A „4” csomópont (3.8/b ábra) egyensúlyának vizsgálatával megkapjuk az utolsó ismeretlent. (A szimmetria következtében a többi rúderő értéke már ismert.) A

$$\sum F_{y,i} = 20 - S_{4-5} = 0$$

függőleges vetületi egyenletből

$$S_{4-5} = 20 \text{ kN (–)}$$

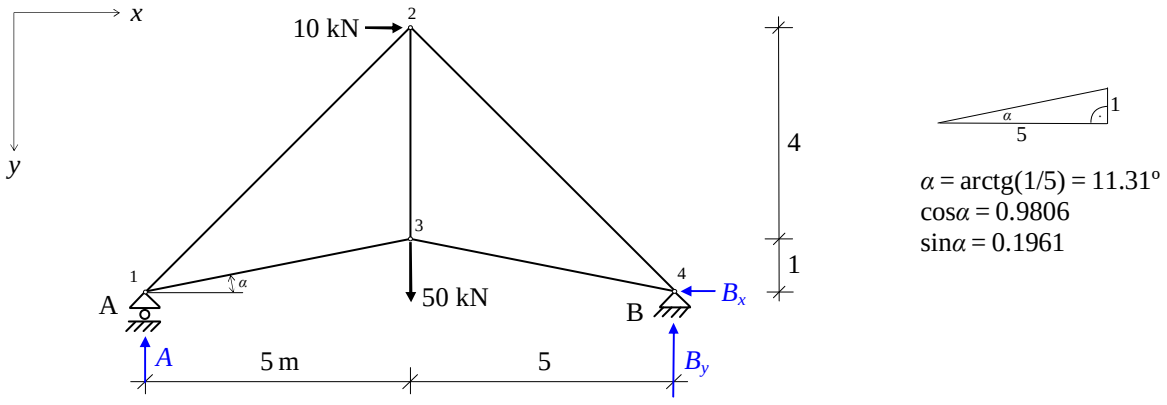
Az ábra tanúsága szerint az $S_{4\text{-}5}$ erő nyomja a vázolt rúdcsonkot, így a 4-5 rúd nyomott. (A „4” csomópont úgynevezett speciális csomópont, ahol szemrevételezéssel azonnal ugyanerre az eredményre jutunk.)

3.1 táblázat. Rúderő-táblázat a 3.6 ábrán látható rácsos tartóhoz.

A rúd		Rúderő [kN]	
		húzott	nyomott
Felső övrudak	1-2		37.5
	2-4		50.0
	4-2'		50.0
	2'-1'		37.5
Alsó övrudak	0-3	0	
	3-5	37.5	
	5-3'	37.5	
	3'-0'	0	
Oszlopok	0-1		50.0
	3-2		30.0
	4-5		20.0
	3'-2'		30.0
	0'-1'		50.0
Rácsrudak	1-3	48.02	
	2-5	16.0	
	2'-5	16.0	
	1'-3'	48.02	

Az eredményeket a 3.1 táblázatban foglaljuk össze, ahol feltüntetjük a többi – a szimmetriának köszönhetően számítást nem igénylő – rúderőt is.

A fenti feladat megoldása során egyismeretlenes egyenleteket kellett megoldanunk és viszonylag egyszerűen kaptuk meg az ismeretlen rúderőket. Nem mindig ez a helyzet. A 3.9 ábrán vázolt rácsos tartó egynél több egy csomópontba bekötő ferde rudat tartalmaz és ebben az esetben kétismeretlenes egyenlet megoldása is szükségessé válik.



3.9 ábra. Csomópontonként két ferde rudat tartalmazó rácsos tartó.

A támaszerő-összetevők irányának feltételezése után (kék nyilak az ábrán) az első lépés most is a támaszerő-összetevők meghatározása.

A „B” pontra felírt

$$\sum M_i^{(B)} = 10 \cdot 5 - 5 \cdot 50 + 10A = 0$$

nyomatéki egyenlet megadja az A támaszerőt:

$$A = 20 \text{ kN } (\uparrow)$$

A pozitív előjelű eredmény azt jelzi, hogy az A támaszerő irányát a számítás megkezdése előtt jól tételeztük fel, tehát valóban felfelé mutat.

Hasonlóan eljárva, az „A” pontra felírt

$$\sum M_i^{(A)} = 10 \cdot 5 + 5 \cdot 50 - 10B_y = 0$$

nyomatéki egyenlet megadja a másik támaszerő függőleges összetevőjét:

$$B_y = 30 \text{ kN } (\uparrow)$$

A pozitív előjelű eredmény most is azt jelzi, hogy a B_y támaszerő irányára vonatkozó előzetes feltételezésünk helyes volt. A B_y támaszerő-összetevő felfelé mutat.

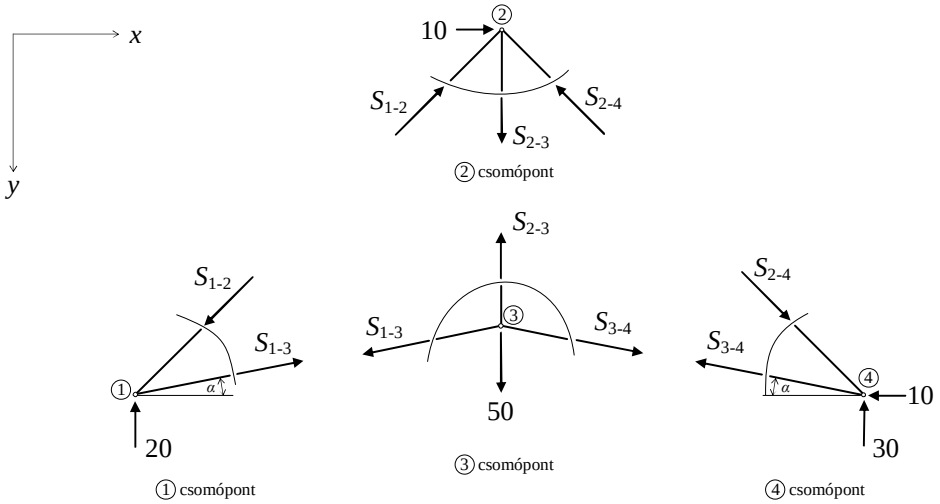
A „B” támasznál vízszintes támaszerő-összetevő is ébred. Értékét az x tengelyre vonatkozó vízszintes vetületi egyenlet adja meg:

$$\sum F_{x,i} = 10 - B_x = 0$$

Innen:

$$B_x = 10\ \text{kN}\ (\leftarrow)$$

A támaszerők ismeretében rátérhetünk a rúderők meghatározására. A számítást az 1. vagy a 4. csomópontban (az „A” vagy a „B” támasznál) kell kezdeni, mert a másik két csomópontban három rúd csatlakozik, amelyek rúderői a rendelkezésre álló két egyenletből nem határozhatók meg. Válasszuk az 1. csomópontot (3.10 ábra).



3.10 ábra. Csomópontok egyensúlya.

Az 1. csomópontban három közös metszéspontú erő van egyensúlyban: az 1-2 és az 1-3 jelű rudakban keletkező erők és az A = 20 kN felfelé mutató támaszerő. Feltételezzük az $S_{1\text{-}2}$ és az $S_{1\text{-}3}$ rúderők előjelét. Feltételezésünk szerint az 1-2 jelű rúd nyomott lesz. Ez a feltételezés az ábránkon úgy jelenik meg, hogy az 1. csomóponti vázlatunkon az $S_{1\text{-}2}$ erő *nyomja* az 1-2 rúdcsonkot. Feltételezzük továbbá, hogy az 1-3 jelű rúd húzott lesz. Ez a feltételezés az ábránkon úgy jelenik meg, hogy az 1. csomóponti vázlatunkon az $S_{1\text{-}3}$ erő *húzza* az 1-3 rúdcsonkot. Ezután felírjuk az x és y tengelyre vonatkozó vetületi egyenleteket, amelyek két-két ismeretlent tartalmaznak:

$$\sum F_{i,x} = -S_{1-2}\cos 45° + S_{1-3}\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_{i,y} = S_{1-2}\sin 45° - S_{1-3}\sin\alpha - 20 = 0$$

A két egyenletet összeadva – és az α szög értékének ismeretében (3.9 ábra):

$$S_{1-3} = \frac{20}{\cos\alpha - \sin\alpha} = 25.5\ \text{kN}\ (+)$$

A pozitív előjelű eredmény azt mutatja, hogy az 1-3 rúdra vonatkozó feltételezésünk helyes volt és a rúderő valóban húzott. Ezt a tényt a zárójelek között elhelyezett pozitív előjellel rögzítjük. Visszahelyettesítés után megkapjuk az $S_{1\text{-}2}$ rúderőt:

$$S_{1-2} = S_{1-3}\frac{\cos\alpha}{\cos 45°} = 25.5\frac{0.9806}{0.7071} = 35.36\ \text{kN}\ (-)$$

Ez eredmény is pozitív előjelű. Ez azt jelenti, hogy az 1-2 rúdra vonatkozó feltételezésünk is helyes volt és a csomóponti vázlat tanúsága szerint a rúderő valóban nyomott. Ezt a tényt a zárójelek között elhelyezett negatív előjellel rögzítjük.

Áttérünk a 2. csomópontra (3.10 ábra). A csomópontban négy erő van egyensúlyban: a 10 kN nagyságú vízszintes külső terhelő erő, az előbb meghatározott $S_{1\text{-}2}$ erő és a két ismeretlen erő, az $S_{2\text{-}3}$ erő és az $S_{2\text{-}4}$ erő. Feltételezzük az $S_{2\text{-}3}$ és az $S_{2\text{-}4}$ rúderők előjelét. Feltételezésünk szerint a 2-4 jelű rúd nyomott lesz. Ez a feltételezés az ábránkon úgy jelenik meg, hogy a 2. csomóponti vázlatunkon az $S_{2\text{-}4}$ erő *nyomja* a 2-4 rúdcsonkot. Feltételezzük továbbá, hogy a 2-3 jelű rúd húzott lesz. Ez a feltételezés az ábránkon úgy jelenik meg, hogy a 2. csomóponti vázlatunkon az $S_{2\text{-}3}$ erő *húzza* a 2-3 rúdcsonkot. A vázlatunkon a már ismert $S_{1\text{-}2}$ erőt is el kell helyezni. Mivel már tudjuk hogy az 1-2 rúd nyomott, a vázlaton az $S_{1\text{-}2}$ erőt úgy helyezzük el, hogy nyomja az 1-2 rúdcsonkot. Az x irányú vetületi egyenletet írjuk fel először, mert ez esetben – mivel a 2-3 rúd merőleges az x tengelyre – csak egy ismeretlen szerepel az egyenletben:

$$\sum F_{i,x} = 10 + 35.36\cos 45° - S_{2-4}\cos 45° = 0$$

Innen az $S_{2\text{-}4}$ rúderőt pozitív előjellel kapjuk meg:

$$S_{2-4} = 49.5\ \text{kN}\ (-)$$

A negatív előjel (a zárójelek között) azt jelzi, hogy a 2-4 rúd nyomott.

A függőleges vetületi egyenlet most már csak egy ismeretlent tartalmaz:

$$\sum F_{i,y} = S_{2-3} - (35.36 + 49.5)\cos 45° = 0$$

Innen:

$$S_{2-3} = 60\ \text{kN}\ (+)$$

A rúderőt most is pozitív előjellel kaptuk meg és ez most is azt jelenti, hogy jól tételeztük fel a rúderő előjelét. A 2-3 rúd tehát valóban húzott.

A következő lépésben a 3. csomópont egyensúlyát vizsgáljuk (3.10 ábra). A csomópontban hat az 50 kN nagyságú külső erő és ide csatlakozik a 2-3 (már ismert) rúd, az 1-3 (már ismert) rúd és az egyetlen ismeretlen 3-4 rúd. Az $S_{1\text{-}3}$ és $S_{2\text{-}3}$ rúderőket annak tudatában ábrázoljuk, hogy mindkét rúdról már tudjuk hogy húzott rudak. A 3-4 rúdról azt tételezzük fel hogy húzott. A

$$\sum F_{i,x} = -25.5\cos\alpha + S_{3-4}\cos\alpha = 0$$

vízszintes vetületi egyenlet segítségével azonnal megkapjuk az ismeretlen $S_{3\text{-}4}$ rúderőt:

$$S_{3-4} = 25.5\ \text{kN}\ (+)$$

(Ezt az eredményt persze számítás nélkül is felírhattuk volna, figyelembe véve a két ferde rúd szimmetrikus elhelyezését.) A pozitív előjelű eredmény megerősíti az eredeti feltételezésünket, amely szerint a rúd húzott.

Az összes rúderőt meghatároztuk, így a 4. csomópont vizsgálata már csak az ellenőrzés célját szolgálja (3.10 ábra). A csomópontban négy erőt kell figyelembe venni: a B támaszerő két összetevőjét, az $S_{2\text{-}4}$ rúderőt és az $S_{3\text{-}4}$ rúderőt. Az erők nyilát annak megfelelően rajzoltuk

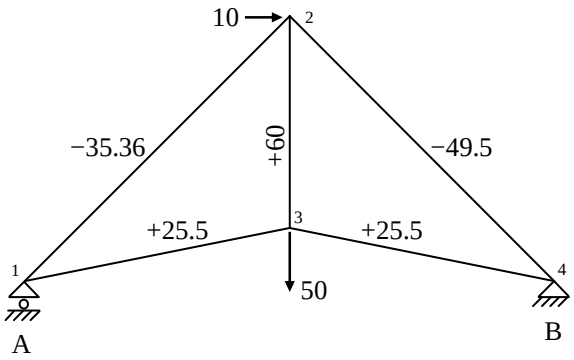
be, hogy a 2-4 rúd nyomott, a 3-4 rúd pedig húzott.

A két vetületi egyenlet tanúsága szerint a csomópont egyensúlyban van:

$$\sum F_{i,x} = -10 - 25.5\cos\alpha + 49.5\cos 45° = 0$$

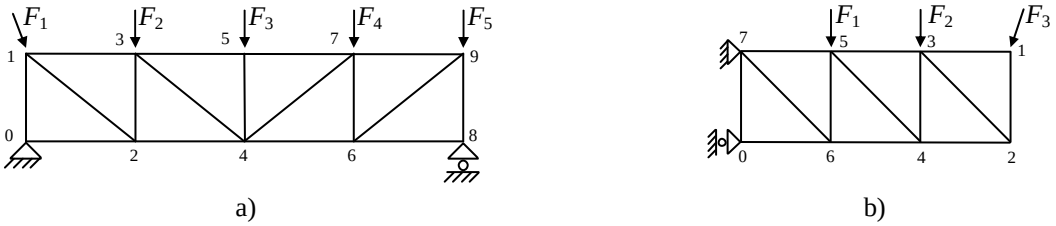
$$\sum F_{i,y} = -30 - 25.5\sin\alpha + 49.5\sin 45° = 0$$

Az eredményvázlatot a 3.11 ábra tartalmazza. Pozitív előjellel a húzott, negatív előjellel a nyomott rudakat jelöljük. A rúderők dimenziója kN.



3.11 ábra. Eredményvázlat.

Az előző (3.2) pont végén bemutatott speciális esetek kapcsán érdekes kérdés fogalmazható meg a 3.12 ábrán vázolt két rácsos tartóval kapcsolatban: Hány rúderő határozható meg a támaszerők ismerete nélkül?



3.12 ábra. a) Kéttámaszú rácsos tartó, b) konzolos rácsos tartó.

A 3.12/a ábrán vázolt kéttámaszú rácsos tartó esetében az 5. csomópont speciális csomópont és a 4-5 jelű rúdban keletkező erő azonnal megállapítható: értéke megegyezik az F_3 erő értékével (és a rúd nyomott). A 8. csomópontba bekötő 6-8 jelű rúd is „kezelhető” a támaszerő értékének ismerete nélkül: mivel az ismeretlen támaszerő csak *függőleges* lehet, a vízszintes 6-8 jelű rúd vakrúd kell hogy legyen. Az összes többi csomópont kezelhetetlen, mert három ismeretlen rudat tartalmaznak (amelyekben ébredő erők a rendelkezésre álló két egyenlet segítségével nem határozhatók meg). A 0. csomópontban ugyan csak két ismeretlen van, de ott meg szükség lenne a támaszerő függőleges és vízszintes összetevőjére. – Ezek szerint a 3.12/a ábrán vázolt rácsos tartó esetében két rúderő értékét tudjuk megállapítani a támaszerők ismerete nélkül.

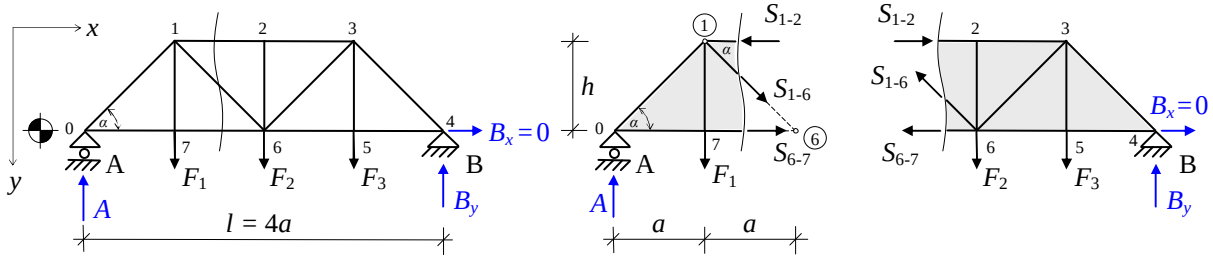
A 3.12/b ábrán vázolt konzolos rácsos tartó esetében az 1. csomóponttal kezdve és sorban haladva az *összes* rúderő értéke kiszámítható a támaszerők ismerete nélkül.

3.4 A hármas átmetszés módszere

A csomóponti módszerrel ellentétben (amikor is egy-egy csomópont egyensúlyát vizsgáljuk) a Ritter-féle számításra épülő hármas átmetszés módszere egy *tartórész* egyensúlyát vizsgálja. A reakcióerők meghatározása után átvágjuk a rácsos tartót általunk kiválasztott három rúdján keresztül. A tartó így két merev testre „esik szét”. Felhasználjuk azt a tényt, hogy mindkét rész önmagában is egyensúlyban kell hogy legyen. Egy egyensúlyozási feladathoz jutunk, amelynek során egy merev testre ható ismert erőrendszert kell egyensúlyoznunk három adott hatásvonalú erővel. A síkbeli szétszórt erőket tartalmazó feladat megoldására három egyenlet áll rendelkezésünkre, amelyek segítségével a három ismeretlen rúderőt egyértelműen meghatározhatjuk. Elméletileg – legrosszabb esetben – egy három egyenletből álló, három ismeretlenes egyenletrendszerhez jutnánk. A gyakorlati esetek túlnyomó többségében azonban a megoldás jóval egyszerűbben (egyismeretlenes egyenletek formájában) állítható elő.

A módszer illusztrálása céljából tekintsük ismét a 3.2 pontban megismert rácsos tartót (3.13/a ábra). Feladatunk legyen az $S_{1\text{-}2}$, $S_{1\text{-}6}$ és $S_{6\text{-}7}$ rúderők meghatározása.

Az első lépésben meghatározzuk a reakcióerőket. A tartót ezután a meghatározandó rúderőkhöz tartozó rudak – esetünkben az 1-2, 1-6 és 6-7 rudak – átvágásával két részre bontjuk (3.13/b és 3.13/c ábra). Feltételezzük, hogy az átvágott rudak húzottak, vagy nyomottak. Az átvágott rudakat a feltételezéseknek megfelelően bennük ébredő rúderőkkel helyettesítjük. (Feltételezésünk szerint az 1-2 rúd nyomott, az 1-6 és 6-7 rudak pedig húzottak.) A feltételezéseknek megfelelő irányú erőket berajzoljuk az ábrákba. (Rajzunk szerint az $S_{1\text{-}2}$ erő mind a 3.13/b, mind a 3.13/c ábrán nyomja az átvágás után megmaradt rúdcsonkot. Hasonló módon, az $S_{1\text{-}6}$ erő és az $S_{6\text{-}7}$ erő is mindkét ábrán húzza az átvágás után elkülönített tartórészben megmaradt rúdcsonkot.)



a) b) c)

3.13 ábra. Rácsos tartó vizsgálata a hármas átmetszés módszerével.

A számítást ezek után bármelyik tartórész segítségével elvégezhetjük. Rendszerint azt a tartórészt választjuk, amely egyszerűbb számítást tesz lehetővé. Válasszuk most a baloldali tartórészt (3.13/b ábra). Három egyensúlyi egyenlet áll rendelkezésünkre.

Válasszunk elsőnek egy nyomatéki egyensúlyi egyenletet, mégpedig a „6” csomópontra vonatkozó nyomatéki egyenletet:

$$\sum M_i^{(6)} = 2aA - aF_1 - hS_{1-2} = 0$$

Innen az $S_{1\text{-}2}$ erő egyetlen ismeretlenként meghatározható:

$$S_{1-2} = \frac{2aA - aF_1}{h}$$

A „6” pontot amire a nyomatéki egyensúlyi egyenletet felírtuk, az $S_{1\text{-}2}$ erő nyomatéki

főpontjának nevezzük. (A hármas átmetszés módszerét nyomatéki főponti módszernek is nevezik.) A főpontok használata azért előnyös, mert a három ismeretlen erőből kettő átmegy rajta, így a harmadik ismeretlent egyetlen egyenletből, egy lépésben tudjuk meghatározni.

Ha az eredményt pozitív előjellel kapjuk meg, akkor ez azt jelenti, hogy az $S_{1\text{-}2}$ erővel kapcsolatos eredeti feltételezésünk helyes volt, vagyis az $S_{1\text{-}2}$ erő arra mutat, amerre feltételeztük – vagyis esetünkben balra. Ha az eredmény negatív előjelű $S_{1\text{-}2}$ erőt eredményez, akkor a feltételezett $S_{1\text{-}2}$ erőirányt az ellenkezőjére kell változtatni. A végleges erőirány ismeretében megállapíthatjuk, hogy az 1-2 jelű rúd húzott vagy nyomott. Esetünkben tételezzük fel, hogy az $S_{1\text{-}2}$ erő irányát jól becsültük meg: ez esetben az 1-2 jelű rúd nyomott, mert az $S_{1\text{-}2}$ erő nyomja a tartórészen vázolt rúdcsonkot.

A második lépésben is nyomatéki egyensúlyi egyenletet írunk fel. A 6-7 rúd nyomatéki főpontja az 1. csomópont. Az ide felírt

$$\sum M_i^{(1)} = aA - hS_{6-7} = 0$$

nyomatéki egyenletben csak az $S_{6\text{-}7}$ erő szerepel ismeretlenként. Értéke:

$$S_{6-7} = \frac{aA}{h}$$

Ez az erő pozitív előjellel adódik, ami azt jelenti hogy az eredeti feltételezésünk (miszerint az $S_{6\text{-}7}$ erő jobbra mutat) helyes volt. A jobbra mutató erő húzza a 3.13/b ábrán vázolt tartórész 6-7 rúdjának csonkját, tehát a 6-7 rúd húzott.

Az utolsó ismeretlent a

$$\sum F_{y,i} = -A + F_1 + S_{1-6}\sin\alpha = 0$$

függőleges vetületi egyenlet segítségével határozzuk meg. Az egyenletben csak az $S_{1\text{-}6}$ erő szerepel ismeretlenként, így az $S_{1\text{-}6}$ értéke egy lépésben meghatározható:

$$S_{1-6} = \frac{A - F_1}{\sin\alpha}$$

Ha az eredményt pozitív előjellel kapjuk meg, akkor ez azt jelenti, hogy az $S_{1\text{-}6}$ erővel kapcsolatos feltételezésünk helyes volt, vagyis az $S_{1\text{-}6}$ erő arra mutat, amerre feltételeztük – jobbra és lefelé. Ha az eredmény negatív előjelű $S_{1\text{-}6}$ erőt eredményez, akkor a feltételezett $S_{1\text{-}6}$ erőirányt az ellenkezőjére kell változtatni. A végleges erőirány ismeretében megállapíthatjuk, hogy az 1-6 jelű rúd húzott vagy nyomott. Esetünkben tételezzük fel, hogy az $S_{1\text{-}6}$ erő irányát jól becsültük meg: ez esetben az 1-6 jelű rúd húzott, mert az $S_{1\text{-}6}$ erő húzza a tartórészen vázolt rúdcsonkot.

3.5 Gyakorló feladatok: a rúderők meghatározása a hármas átmetszés módszerével

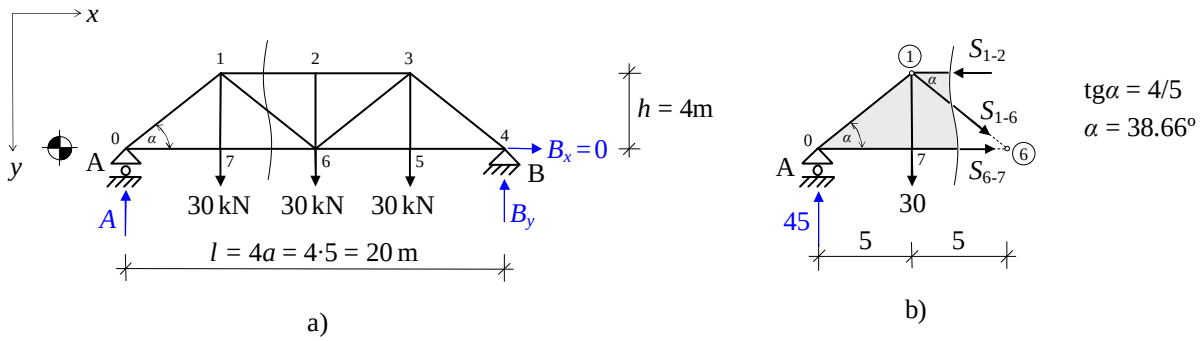
Határozzuk meg először a hármas átmetszés módszerének illusztrálása során használt (a 3.13/a ábrán vázolt) rácsos tartó $S_{1\text{-}2}$, $S_{1\text{-}6}$ és $S_{6\text{-}7}$ rúderőit a 3.14/a ábrán megadott geometriai és terhelési adatok felhasználásával. Az érintett három rúdon átmenő hármas átmetszéssel a tartót két részre vágjuk. A számítást a baloldali tartórész (3.14/b ábra) egyensúlyának vizsgálatával hajtjuk majd végre. Először azonban az A reakcióerő értékét kell meghatároznunk. Értékét a teljes tartó egyensúlyának vizsgálata segítségével, a „B” pontra felírt

$$\sum M_i^{(B)} = 20A - 15\cdot 30 - 10\cdot 30 - 5\cdot 30 = 0$$

nyomatéki egyenletből kapjuk meg:

$$A = \frac{15\cdot 30 + 10\cdot 30 + 5\cdot 30}{20} = 45\ \text{kN}\ (\uparrow)$$

Ezt az eredményt számítás nélkül is megkaphatjuk: szimmetrikus tartó és terhelés esetén a teljes külső teher (3·30=90) fele-fele a két reakcióerő.



3.14 ábra. a) Párhuzamos övű, alsópályás rácsos tartó, b) a baloldali tartórész egyensúlyának vizsgálata.

A baloldali tartórészre a már ismert irányú és értékű A reakcióerő mellett az átvágott rudakban működő $S_{1\text{-}2}$, $S_{1\text{-}6}$ és $S_{6\text{-}7}$ erők hatnak (3.14/b ábra). Feltételezzük ezek irányát. Feltételezésünk szerint mutasson az $S_{1\text{-}2}$ erő balra, az $S_{6\text{-}7}$ erő jobbra és az $S_{1\text{-}6}$ erő ferdén jobbra és lefelé. A tartórész egyensúlyának vizsgálatához három egyensúlyi egyenlet áll rendelkezésünkre. Ezek segítségével a három ismeretlen rúderő egyértelműen meghatározható. Elsőnek az $S_{1\text{-}2}$ erő nyomatéki főpontját választva a 6. csomópontra írunk fel nyomatéki egyenletet:

$$\sum M_i^{(6)} = 10\cdot 45 - 5\cdot 30 - 4S_{1-2} = 0$$

Innen az $S_{1\text{-}2}$ erő egyetlen ismeretlenként meghatározható:

$$S_{1-2} = \frac{450 - 150}{4} = 75\ \text{kN}\ (-)$$

Az eredmény pozitív előjelű, ami azt jelenti, hogy az erő irányát jól tételeztük fel. A balra mutató $S_{1\text{-}2}$ erő nyomja az 1-2 rúd megmaradt csonkját, tehát az 1-2 rúd nyomott. Ezt a tényt jelzi az erő értéke mellé zárójelek között elhelyezett negatív előjel.

Az $S_{6\text{-}7}$ erő nyomatéki főpontja az 1. csomópont. Ide írunk fel nyomatéki egyenletet:

$$\sum M_i^{(1)} = 5\cdot 45 - 4S_{6-7} = 0$$

Innen az $S_{6\text{-}7}$ erő egyetlen ismeretlenként meghatározható:

$$S_{6-7} = \frac{225}{4} = 56.25\ \text{kN}\ (+)$$

Az eredmény pozitív előjelű, ami azt jelenti, hogy az erő irányát jól tételeztük fel. A jobbra

mutató $S_{6\text{-}7}$ erő húzza a 6-7 rúd megmaradt csonkját, tehát a 6-7 rúd húzott. Ezt a tényt jelzi az erő értéke mellé zárójelek között elhelyezett pozitív előjel.

Az $S_{1\text{-}6}$ erőt a

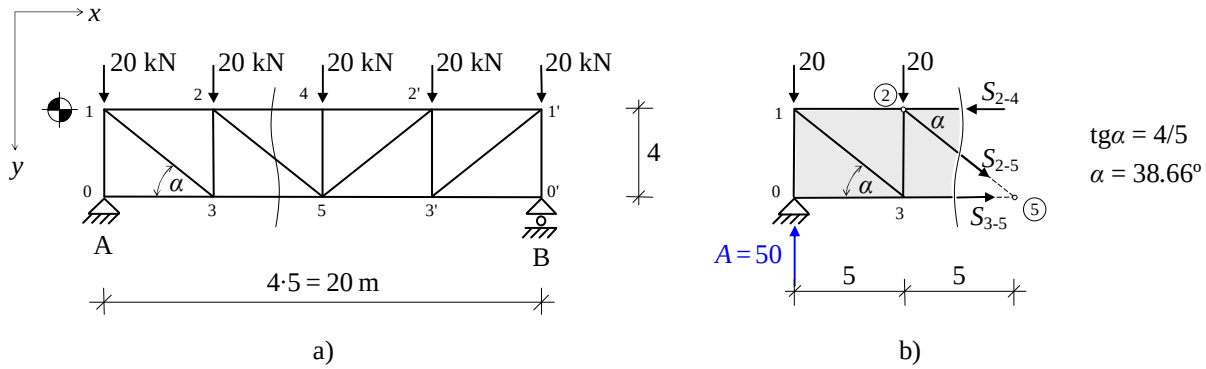
$$\sum F_{y,i} = -45 + 30 + S_{1-6}\sin(38.66°) = 0$$

függőleges vetületi egyenlet segítségével határozzuk meg. Az egyenletben csak az $S_{1\text{-}6}$ erő szerepel ismeretlenként, így az $S_{1\text{-}6}$ értéke egy lépésben meghatározható:

$$S_{1-6} = \frac{45-30}{0.6247} = 24.0 \text{ kN (+)}$$

Az eredményt pozitív előjellel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy az $S_{1\text{-}6}$ erővel kapcsolatos feltételezésünk helyes volt, vagyis az $S_{1\text{-}6}$ erő arra mutat, amerre feltételeztük – jobbra/lefelé. Ebben az esetben az $S_{1\text{-}6}$ erő húzza az 1-6 rúdcsonkot, tehát az 1-6 rúd húzott, amit pozitív előjellel jelzünk az erő értéke mellett.

Határozzuk most meg a csomóponti módszer ismertetésekor gyakorló feladatként használt felsőpályás, párhuzamos övű rácsos tartó $S_{2\text{-}4}$, $S_{2\text{-}5}$ és $S_{3\text{-}5}$ rúderejét a hármas átmetszés módszerével (3.15 ábra).



a) b)

3.15 ábra. a) Párhuzamos övű, felsőpályás rácsos tartó, b) a baloldali tartórész az egyensúly vizsgálatához.

A szimmetrikus terhelésű rácsos tartó egészét (3.15/a ábra) vizsgálva arra az eredményre jutunk, hogy a két támaszerő azonos nagyságú és értéke:

$$A = B = 50\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A 2-4, 2-5 és 3-5 rudak átvágásával a rácsos tartót két részre bontjuk. A baloldali tartórész (3.15/b ábra) vizsgálatával meghatározhatjuk a három keresett rúderőt. A rudakban ébredő erők előjelét a 3.15/b ábrán vázoltak szerint tételezzük fel.

A 2-4 rúd „5” nyomatéki főpontjára felírt

$$\sum M_i^{(5)} = -5\cdot 20 - 10\cdot 20 + 10\cdot 50 - 4S_{2-4} = 0$$

nyomatéki egyenletből megkapjuk az $S_{2\text{-}4}$ rúderőt:

$$S_{2-4} = \frac{500-300}{4} = 50.0 \text{ kN (–)}$$

Az erő pozitív előjele azt jelzi, hogy az erő irányát jól tételeztük fel (balra mutatónak) és ez az erő a 2-4 rúdcsonkot nyomja. A 2-4 rúd tehát nyomott.

A 3-5 rúd „2” nyomatéki főpontjára felírt

$$\sum M_i^{(2)} = -5\cdot 20 + 5\cdot 50 - 4S_{3-5} = 0$$

nyomatéki egyenletből megkapjuk az S_{3-5} rúderőt:

$$S_{3-5} = \frac{250-100}{4} = 37.5 \text{ kN (+)}$$

Az erő pozitív előjele azt jelzi, hogy az erő irányát jól tételeztük fel (jobbra mutatónak) és ez az erő a 3-5 rúdcsonkot húzza. A 3-5 rúd tehát húzott.

Az S_{2-5} rúderőt függőleges vetületi egyenlet segítségével határozzuk meg:

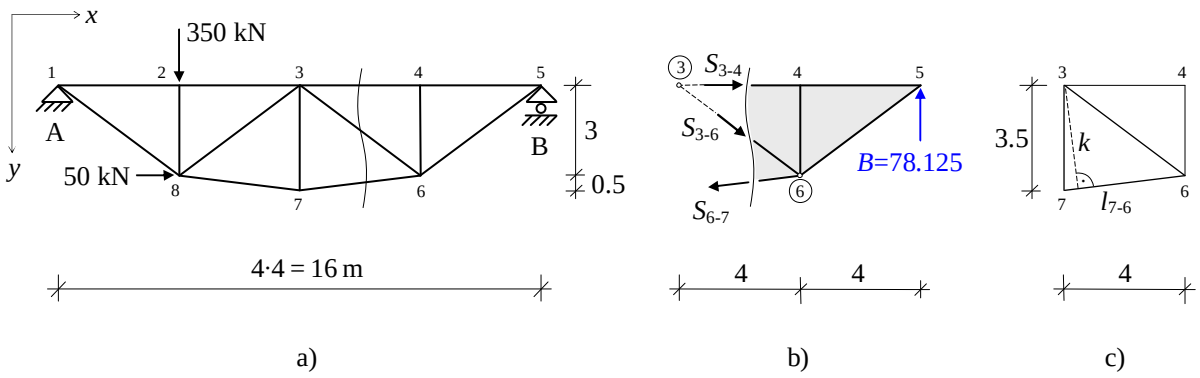
$$\sum F_{y,i} = 20 + 20 - 50 + S_{2-5}\sin(38.66°) = 0$$

Innen:

$$S_{2-5} = \frac{10}{0.6247} = 16.0 \text{ kN (+)}$$

A rúderő értékét pozitív értékkel kaptuk meg. Ez azt jelenti, hogy a feltételezett erő-irány (jobbra/lefelé) helyes volt. Ez az erő húzza a 2-5 rúdcsonkot, tehát a 2-5 rúd húzott.

Határozzuk meg végül a 3.16/a ábrán vázolt rácsos tartó S_{3-4}, S_{3-6} és S_{6-7} rúderőit. A rácsos tartót a 3-4, 3-6 és 6-7 rudak átmetszésével két részre bontjuk. A számítást a jobboldali tartórész (3.16/b ábra) egyensúlyának vizsgálatával fogjuk elvégezni, így csak a B támaszerő értékére lesz szükségünk.



3.16 ábra. a) Rácsos tartó, b) a jobboldali tartórész az egyensúly vizsgálatához, c) a tartó 3-4-6-7 tartománya.

A tartó egészének egyensúlyát vizsgálva és felfelé mutató B támaszerőt feltételezve az „A” pontra felírt

$$\sum M_i^{(A)} = 350\cdot 4 - 3\cdot 50 - 16B = 0$$

nyomatéki egyenlet szolgáltatja a B támaszerő értékét:

$$B = \frac{1400 - 150}{16} = 78.125\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A pozitív eredmény azt jelzi, hogy a *B* támaszerő valóban felfelé mutat.

Feltételezzük a három ismeretlen erő ($S_{3\text{-}4}$, $S_{3\text{-}6}$ és $S_{6\text{-}7}$) irányát (3.16/b ábra). A 3-4 rúd nyomatéki főpontja a „6” csomópont. Az ide felírt

$$\sum M_i^{(6)} = -4 \cdot 78.125 + 3S_{3-4} = 0$$

nyomatéki egyenlet azonnal szolgáltatja az $S_{3\text{-}4}$ erő értékét:

$$S_{3-4} = \frac{4 \cdot 78.125}{3} = 104.17\,\text{kN}\ (-)$$

A pozitív eredmény azt jelenti, hogy az $S_{3\text{-}4}$ erő irányát jól tételeztük fel. A jobbra mutató erő nyomja a 3-4 rúdcsonkot, tehát a 3-4 rúd nyomott.

A 6-7 rúd nyomatéki főpontja a „3” csomópont. A „3” pontra felírt nyomatéki egyenletben csak az $S_{6\text{-}7}$ erő szerepel ismeretlen erőként. Mielőtt végrehajthatnánk ezt a számítást, meg kell határoznunk az $S_{6\text{-}7}$ erő hatásvonalának *k* merőleges távolságát a „3” csomóponttól. Ezt úgy tesszük meg, hogy a 3-6-7 háromszög (3.16/c ábra) kétszeres területét kétféleképpen írjuk fel:

$$2T = 3.5 \cdot 4 = kl_{6-7}$$

Itt $l_{6\text{-}7}$ a 6-7 rúd hossza:

$$l_{6-7} = \sqrt{4^2 + 0.5^2} = 4.031\,\text{m}$$

A fenti összefüggésbe behelyettesítve ezt az értéket, megkapjuk a keresett *k* merőleges távolságot:

$$k = \frac{3.5 \cdot 4}{4.031} = 3.47\,\text{m}$$

Most már felírhatjuk az egyensúlyt kifejező nyomatéki egyenletet (a „3” nyomatéki főpontra):

$$\sum M_i^{(3)} = -8 \cdot 78.125 + 3.47S_{6-7} = 0$$

Innen:

$$S_{6-7} = \frac{8 \cdot 78.125}{3.47} = 180.12\,\text{kN}\ (+)$$

A pozitív eredmény azt jelenti, hogy az $S_{6\text{-}7}$ erő irányát jól tételeztük fel. A balra mutató erő húzza a 6-7 rúdcsonkot, tehát a 6-7 rúd húzott.

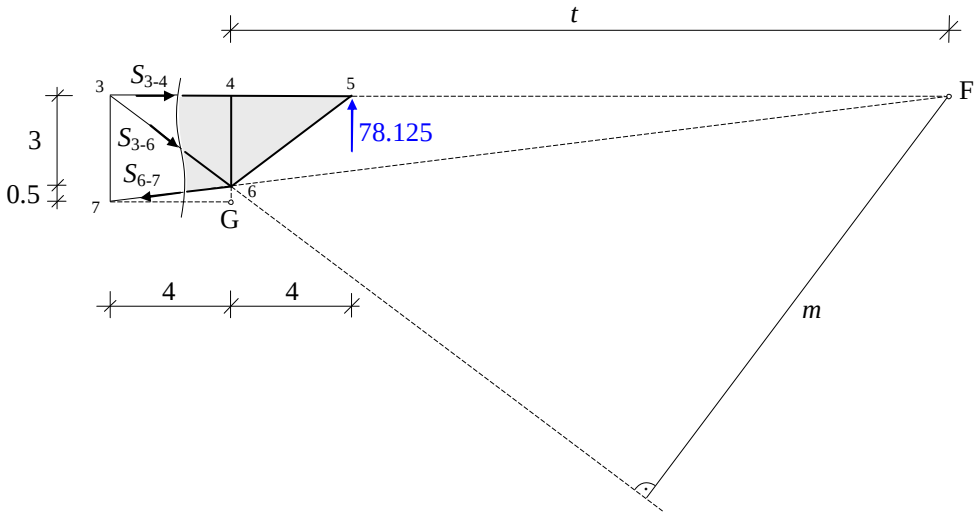
Az utolsó ismeretlen erő ($S_{3\text{-}6}$) értékét kiszámíthatjuk (*x* vagy *y* irányú) vetület egyenlet segítségével, vagy ismét alkalmazhatjuk a nyomatéki főpontra felírt nyomatéki egyensúlyi egyenletet. Gyakorlásképpen ez utóbbi megoldást választjuk.

A 3-6 rúd nyomatéki főpontja az „F” pont, amelyen a *másik* két erő, az $S_{6\text{-}7}$ és $S_{3\text{-}4}$ átmegy (3.17 ábra). Ide kell a nyomatéki egyenletet felírni. A nyomatéki egyenlet felírása során szükségünk lesz az $S_{3\text{-}6}$ erő hatásvonalának *m* merőleges távolságára az „F” ponttól, amit a *t* távolság ismeretében könnyen meghatározhatunk. A *t* távolság meghatározásához felhasználjuk azt a tényt, hogy a 6-7-G és a 4-6-F háromszög hasonló. Ennek alapján felírhatjuk, hogy

$$\frac{t}{3}=\frac{4}{0.5}$$

Innen:

$$t=24\,\text{m}$$



3.17 ábra. Az $S_{3\text{-}6}$ erő hatásvonalának *m* merőleges távolságának meghatározásához szükséges adatok.

Ha most kétféleképpen felírjuk a 3-6-F háromszög kétszeres területét

$$2T=(t+4)3=l_{3-6}m$$

és figyelembe vesszük hogy a 3-6 rúd hossza $l_{3\text{-}6}$ = 5 m, akkor innen a keresett *m* távolság adódik:

$$m=\frac{(24+4)3}{5}=16.8\,\text{m}$$

Az „F” nyomatéki főpontra felírt

$$\sum M_i^{(F)}=78.125(t-4)-16.8S_{3-6}=0$$

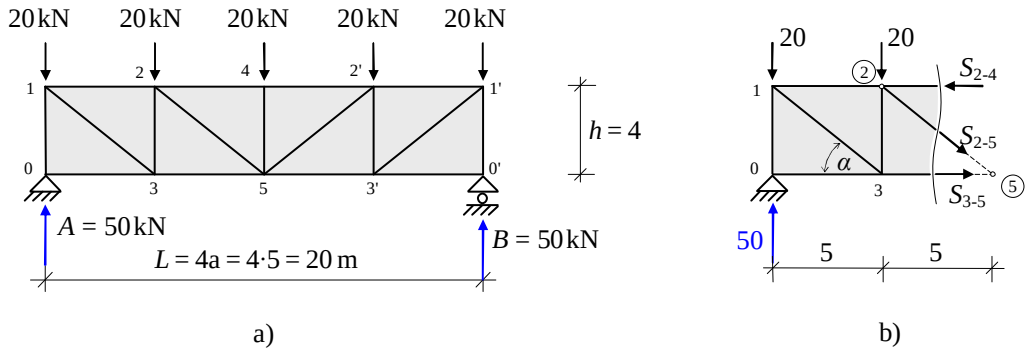
nyomatéki egyenletből így megkapjuk az $S_{3\text{-}6}$ rúderő értékét:

$$S_{3-6}=\frac{78.125\cdot 20}{16.8}=93.0\,\text{kN}\ (-)$$

Az eredmény pozitív előjele azt jelenti, hogy az $S_{3\text{-}6}$ erő irányát a jól tételeztük fel és az erő valóban jobbra/lefelé mutat. Ez az erő nyomja a 3-6 rúdcsonkot, tehát a 3-6 rúd nyomott.

Végül bemutatunk egy (a hármas átmetszésen alapuló) igen egyszerű módszert, amelyet a gyakorló statikusi munka során előszeretettel alkalmaznak kéttámaszú, párhuzamos övű tartók legnagyobb övrúderejének gyors (gyakran fejben történő) meghatározására.

Tekintsük még egyszer a 3.3 pontban (a 3.6 ábrán) már bemutatott és a csomóponti módszerrel részletesen vizsgált szimmetrikus kialakítású és szimmetrikusan terhelt kéttámaszú rácsos tartót, amelyet a 3.4 pontban (a 3.15 ábra segítségével) a hármas átmetszés módszerével is vizsgáltunk (3.18/a ábra).



a) b)

3.18 ábra. A felső csomópontokban szimmetrikusan terhelt kéttámaszú rácsos tartó.

Képzeljük el úgy a tartónkat, mintha nem rudakból állna, hanem tömör lenne. A következő fejezetben (a 4.4 pontban) látni fogjuk, hogy az ilyen függőleges erőkkel terhelt kéttámaszú (tömör) gerendatartókat az jellemzi, hogy a teher hatására lehajlanak és a gerenda hossza mentén nyomatékok keletkeznek (4.30 ábra), miközben a gerendakeresztmetszet felső részében nyomás, az alsó részében pedig húzás keletkezik. Szimmetrikus teher esetén a legnagyobb nyomaték a tartó közepén keletkezik.

Jelöljük ezt a nyomatékot $M_{\max}$-al. Ha ezt a nyomatékot elosztjuk a tartó (esetünkben a rácsos tartó h) magasságával, akkor megkapjuk ezt a külső nyomatékot egyensúlyozó erőpár erő elemét, ami esetünkben a rácsos tartó felső övében ébredő $S_{2\text{-}4}$ rúderőt jelenti:

$$S_{2-4} = \frac{M_{\max}}{h}$$

A 3.18/a ábra adataival eljárva, a nyomaték a támaszköz közepén:

$$M_{\max} = A\frac{L}{2} - F\,2a - Fa = 50\cdot 10 - 20\cdot 10 - 20\cdot 5 = 200\ \text{kNm}$$

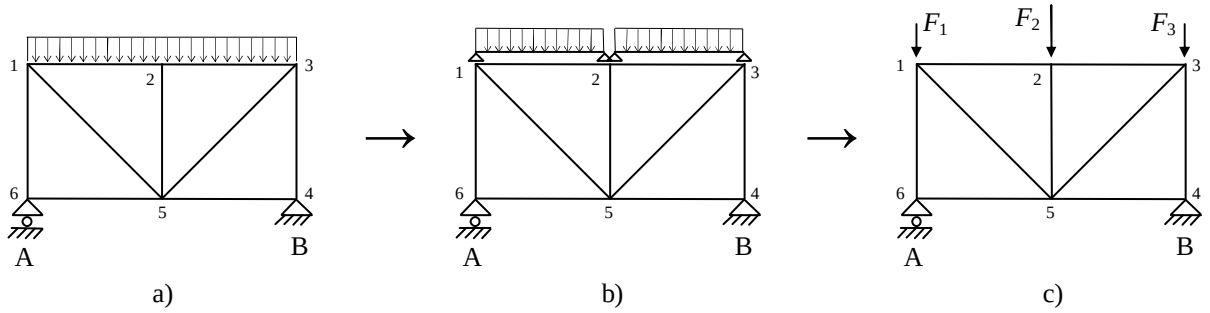
és így a rúderő értéke:

$$S_{2-4} = \frac{200}{4} = 50\ \text{kN}$$

Az itt bemutatott eljárást összehasonlítva a 3.4 pontban bemutatott hármas átmetszés módszerével, nem nehéz belátni, hogy valójában a hármas átmetszés módszerét alkalmaztuk (3.18/b ábra).

3.6 Rudakon is terhelt rácsos tartók

Bár a fejezet elején rögzítettük hogy a vizsgált rácsos tartók csomópontokon terheltek, a gyakorlatban előfordulnak olyan esetek amikor nem kerülhető el a rudak közvetlen terhelése.



3.19 ábra. a) Rudakon terhelt rácsos tartó, b) számítási modell, c) csomóponti terhelésűvé alakított tartó.

Ilyen esetekben (3.19/a ábra) a következőkben vázolt közelítő eljárást alkalmazhatjuk.

A közelítő számításhoz a közvetlenül terhelt rudakat (1-2 és 2-3 jelű rudak) első lépésben különálló kéttámaszú tartókként kezeljük (3.19/b ábra). Ezekkel az ún. átviteles tartókkal foglalkozunk először és meghatározzuk a támaszerőket. A támaszerőket ezután csomópontokként összegyűjtjük és a megfelelő csomópontokon ráterheljük a rácsos tartóra (3.19/c ábra).

A rácsos tartó rúderőinek meghatározása után a közvetlenül is terhelt (1-2 és 2-3 jelű) rudak „különleges” bánásmódban részesülnek: ezek a rudak ugyanis a tengelyirányú erőkön kívül a rúdtengelyre merőleges terhet is kapnak. Ezekkel a kérdésekkel a Mechanika II tárgy és a szaktantárgyak foglalkoznak majd.

Itt jegyezzük meg, hogy a rúderők előjele – vagyis hogy egy rúd húzott vagy nyomott – igen fontos szerepet játszik a rudak méretezése során. A húzott és nyomott rudak viselkedése alapvetően különbözik egymástól, nemcsak jellegében, hanem a veszélyesség szempontjából is: a nyomott rudak általában sokkal „veszélyesebbek” lehetnek, mint a húzott rudak. – Ezekkel a kérdésekkel szintén későbbi tanulmányaink során foglalkozunk részletesebben.

4

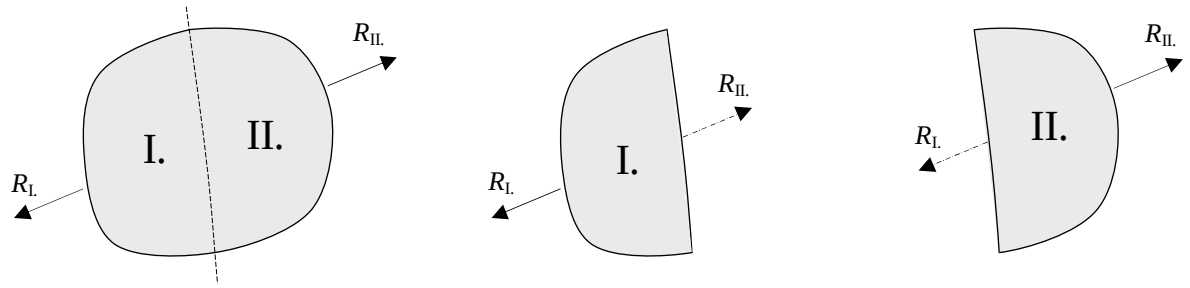
Statikailag határozott gerendatartók igénybevételi ábrái

Az előző fejezetben tárgyalt, csomópontokban terhelt rácsos tartókat az jellemzi, hogy az adott külső erők hatására a szerkezet egy rúdjában olyan erő keletkezik, amely „egyneműnek” tekinthető. Ez a belső erő – a rúderő – a keresztmetszetre merőleges, rúdtengely irányú *normálerő*, amely a rúd geometriai adatainak ismeretében *egyetlen* előjeles adattal, a rúderővel egyértelműen jellemezhető. A normálerők ismeretében a rácsos tartó rúdjainak méretezése elvégezhető (amint ezt majd látni fogjuk későbbi tanulmányaink során).

Alapvetően más a helyzet az ebben a fejezetben tárgyalásra kerülő gerendatartók esetében, amikor is a külső erők egyensúlyozása során *három* jellemző adattal dolgozunk. Ennek az az oka, hogy a gerendatartó méretezésekor (mint ahogyan azt a későbbi tanulmányaink során látni fogjuk) három adatra van szükség.

4.1 Definíciók és előjelszabályok

Tekintsük a 4.1/a ábrán vázolt általános alakú merev testet. A testet egyensúlyban lévő erőrendszer támadja. Célunk a merev testben ébredő belső erők jellemzése. (Megjegyezzük, hogy a belső erők vizsgálata során nem érvényes az egyensúly vizsgálata során korábban alkalmazott tétel, amely szerint a merev testre ható erő hatásvonala mentén szabadon eltolható. Hasonlóképpen, a merev testre ható erőpár sem tolható el saját síkjában.)



a) b) c)

4.1 ábra. a) Egyensúlyban lévő merev test, b) egyensúlyban lévő I. rész, c) egyensúlyban lévő II. rész.

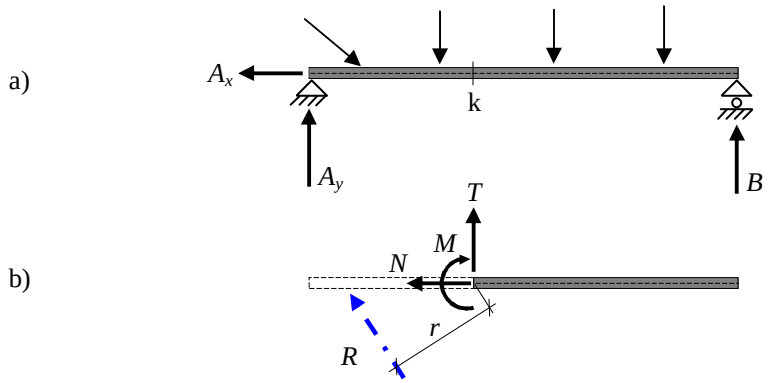
A merev testet képzeletben két részre bontjuk. Az I. részre ható külső erőket az R_I eredőjükkel, a II. részre ható külső erőket pedig az R_{II} eredővel helyettesítjük. Érvényes az

$$R_I \doteq R_{II}$$

egyenértékűség. Az I. rész egyensúlyát vizsgálva (4.1/b ábra) megállapítható, hogy az R_I által képviselt külső erőket az R_{II} eredővel képviselt belső erők egyensúlyozzák. A II. rész egyensúlyát vizsgálva (4.1/c ábra) hasonlóképpen megállapítható, hogy az R_{II} által képviselt

külső erőket az R_I eredővel képviselt belső erők egyensúlyozzák.

Fentiek alapján a 4.2/a ábrán vázolt gerendatartó esetében a belső erőkkel kapcsolatban a következőket mondhatjuk.



4.2 ábra. a) Gerendatartó, b) a „k” keresztmetszetre ható belső erők.

Ha a rudat egy „k” keresztmetszetben elmetsszük, a rúd egyik részét eltávolítjuk és képezzük az eltávolított részre ható erők *R* eredőjét, akkor ez az eredő a keresztmetszetre ható belső erő (4.2/b ábra). Ezt az erőt a gyakorlati számításokhoz helyettesítjük egy erővel és egy *M nyomatékkal*. Az erőt két összetevőjével, az *N normálerő* és *T nyíróerő* összetevőkkel adjuk meg. A három mennyiséget a keresztmetszettől balra lévő erők esetében az alábbiak szerint definiáljuk (4.3/a ábra).

A *normálerő* a keresztmetszettől balra lévő erők a keresztmetszet síkjára merőleges összetevőinek algebrai összege. Pozitív, ha a megmaradó tartórészt húzza.

A *nyíróerő* a keresztmetszettől balra lévő erők a keresztmetszet síkjával párhuzamos összetevőinek algebrai összege. Pozitív, ha a megmaradó tartórészen felvett tetszőleges pont körül az óramutató járásával egyezően forgat, vagy máshogyan megfogalmazva, ha a keresztmetszet normálisának 90 fokos óramutatóval egyező elfordulásával származtatható.

A *hajlítónyomaték* az az erőpár, amelynek nagysága a keresztmetszettől balra lévő erők a keresztmetszet súlypontjára felírt forgatónyomatékainak algebrai összegével egyenlő. Pozitív, ha az összeg az óramutató járásával egyező forgatásértelmű.



4.3 ábra. Előjelszabály. Pozitív belső erők a) baloldali rúdvég, b) jobboldali rúdvég esetén.

A „k” keresztmetszetben keletkező belső erők a keresztmetszettől jobbra található erők segítségével is meghatározhatók (4.3/b ábra). Ebben az esetben a következő definíciók érvényesek.

A normálerő a keresztmetszettől jobbra lévő erők a keresztmetszet síkjára merőleges összetevőinek algebrai összege. Pozitív, ha a megmaradó tartórészt húzza.

A nyíróerő a keresztmetszettől jobbra lévő erők a keresztmetszet síkjával párhuzamos összetevőinek algebrai összege. Pozitív, ha a megmaradó tartórészen felvett tetszőleges pont körül az óramutató járásával egyezően forgat, vagy máshogyan megfogalmazva, ha a keresztmetszet normálisának 90 fokos óramutatóval egyező elfordulásával származtatható.

A hajlítónyomaték az az erőpár, amelynek nagysága a keresztmetszettől jobbra lévő erők a keresztmetszet súlypontjára felírt forgatónyomatékainak algebrai összegével egyenlő. Pozitív, ha az összeg az óramutató járásával *ellentétes* forgatásértelmű.

A „k” keresztmetszettől balra, illetve jobbra lévő erők segítségével meghatározott belső erőkre vonatkozó előjelszabályokat a 4.3 ábrán foglaltuk össze.

A fentiek illusztrálása céljából, gyakorlásképpen határozzuk meg a 4.4/a ábrán vázolt kéttámaszú gerendatartó „k” keresztmetszetében keletkező belső erőket.

A tényleges számítás elkezdése előtt a tartót támadó ferde erőt *x* és *y* irányú összetevőire bontjuk:

$$F_x = F\cos\alpha = 100\cos 60° = 50\,\text{kN}$$

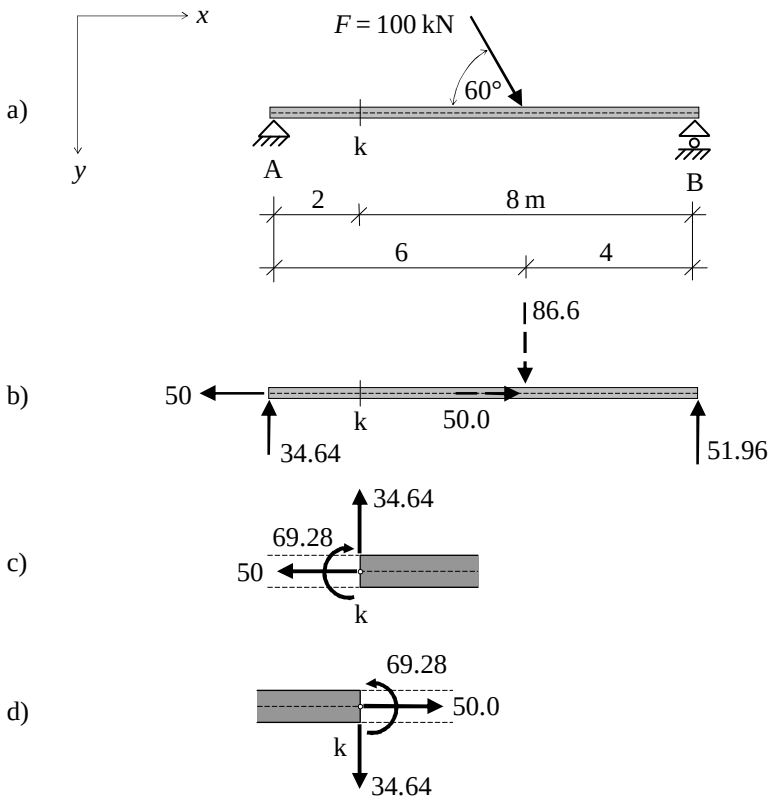
$$F_y = F\sin\alpha = 100\sin 60° = 86.6\,\text{kN}$$

Első lépésben a támaszerőket kell meghatározni. Ebből a célból nyomatéki egyenletet írunk fel az „A” pontra, majd nyomatéki egyenletet írunk fel a „B” pontra, végül alkalmazunk egy *x* irányú (vízszintes) vetületi egyenletet:

$$\sum M_i^{(A)} = 86.6\cdot 6 - 10B = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = 51.96\ \text{kN}\ (\uparrow)$$

$$\sum M_i^{(B)} = -86.6\cdot 4 + 10A_y = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_y = 34.64\ \text{kN}\ (\uparrow)$$

$$\sum F_{i,x} = -A_x + 50 = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_x = 50.0\ \text{kN}\ (\leftarrow)$$



4.4 ábra. Belső erők a „k” keresztmetszetben. a) kéttámaszú tartó, b) tartó az összes támadó erővel, c) belső erők a baloldali tartórészről számolva, d) belső erők a jobboldali tartórészről számolva.

Minden készen áll a „k” keresztmetszetben ébredő belső erők meghatározására. A számításhoz vázlatot készíthetünk a szereplő erők feltüntetésével (4.4/b ábra). A tartót a „k” keresztmetszetnél két részre vágjuk. Tekintsük a baloldali tartórészt. Ezen a tartórészen egyetlen rúdtengely irányú erőt találunk. Ez az erő – az A_x támaszerő-összetevő – húzza a „k” keresztmetszetet, tehát a *normálerő* pozitív (4.4/c ábra):

$$\sum_{\substack{\text{baloldali}\\ \text{tartórész}}} F_{i,x} = 50 \qquad \rightarrow \qquad N = 50\,\text{kN}\ (+)$$

A baloldali tartórészen egyetlen tengelyre merőleges erőt találunk. Ez az erő – az A_y támaszerő-összetevő – a keresztmetszet normálisának 90 fokos óramutatóval egyező elfordulásával származtatható, tehát a *nyíróerő* pozitív:

$$\sum_{\substack{\text{baloldali}\\ \text{tartórész}}} F_{i,y} = 34.64 \qquad \rightarrow \qquad T = 34.64\,\text{kN}\ (+)$$

A baloldali tartórészen található erőknek a keresztmetszet súlypontjára vonatkozó nyomatékait összegyűjtve megkapjuk a „k” keresztmetszetben keletkező nyomatékot:

$$\sum_{\substack{\text{baloldali}\\ \text{tartórész}}} M^{(k)} = 34.64 \cdot 2 = 69.28 \qquad \rightarrow \qquad M = 69.28\,\text{kNm}\ (+)$$

A nyomaték akkor pozitív, ha a „k” keresztmetszet körüli forgatóértelem az óramutató járásával egyező, tehát ez a nyomaték pozitív.

Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk, ha a „k” keresztmetszettől jobbra lévő tartórészen hajtjuk végre a vizsgálatot. Gyakorlásképpen hajtsuk végre ezt a számítást is.

A jobboldali tartórészen egyetlen rúdtengely irányú erőt találunk. Ez az erő – az F_x, az F erő vízszintes összetevője – húzza a „k” keresztmetszetet, tehát a *normálerő* pozitív (4.4/d ábra):

$$\sum_{\substack{\text{jobboldali}\\ \text{tartórész}}} F_{i,x} = 50 \qquad \rightarrow \qquad N = 50\,\text{kN}\ (+)$$

A jobboldali tartórészen két rúdtengelyre merőleges erőt találunk. E két erő – az F_y és a B – algebrai összege a nyíróerő:

$$\sum_{\substack{\text{jobboldali}\\ \text{tartórész}}} F_{i,y} = 86.6 - 51.96 = 34.64 \qquad \rightarrow \qquad T = 34.64\,\text{kN}\ (+)$$

Ez az erő a keresztmetszet normálisának 90 fokos óramutatóval egyező elfordulásával származtatható, tehát a *nyíróerő* pozitív.

A jobboldali tartórészen található erőknek a keresztmetszet súlypontjára vonatkozó nyomatékait összegyűjtve megkapjuk a „k” keresztmetszetben keletkező nyomatékot:

$$\sum_{\substack{\text{jobboldali}\\ \text{tartórész}}} M^{(k)} = -86.6 \cdot 4 + 51.96 \cdot 8 = 69.28 \qquad \rightarrow \qquad M = 69.28\,\text{kNm}\ (+)$$

A nyomaték akkor pozitív, ha a „k” keresztmetszet körüli forgatóértelem az óramutató

járásával *ellentétes*. Ez a nyomaték tehát pozitív.

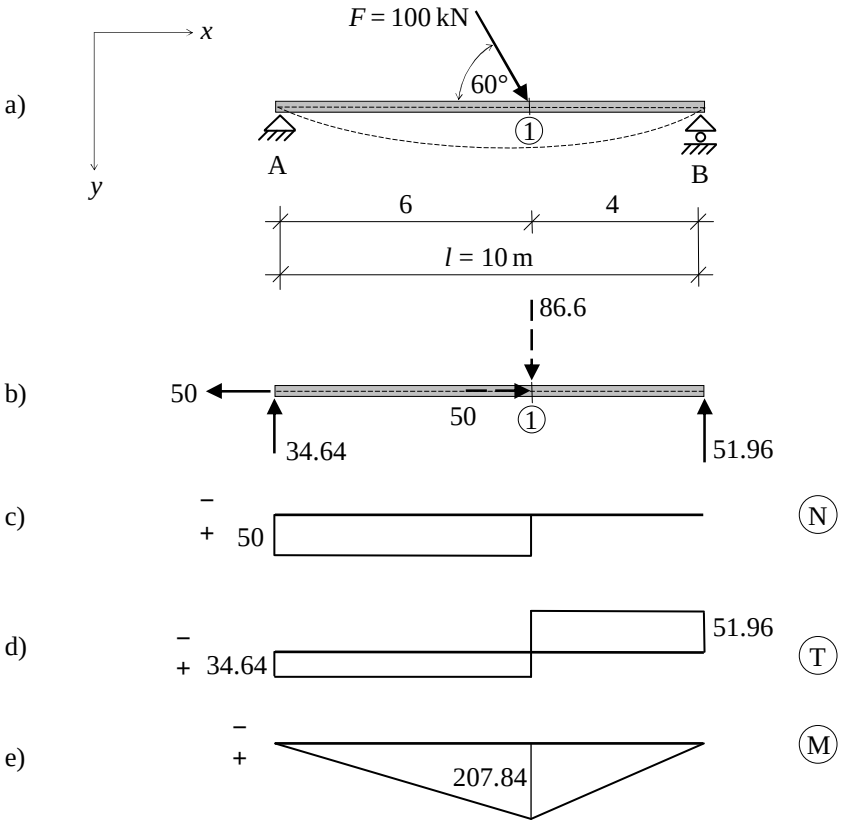
Fentiekből nyilvánvaló, hogy egy gerendatartó mentén különböző keresztmetszeteknél különböző nagyságú és előjelű belső erők keletkeznek. Ezek közül a legfontosabb szerepet a maximális értékek játsszák, de a gyakorlati munka során gyakran szükségünk van több értékre is. A belső erőket ezért általában több helyen is kiszámítjuk és az értékek segítségével a belső erőket függvényekkel adjuk meg. Ezek a belsőerő-ábrák, illetve a statikai tervezés során talán gyakrabban használt elnevezés szerint az *igénybevételi ábrák*. (A belső erőket is hívják *igénybevételeknek* is.)

Az igénybevételi ábrák a tartó hossza mentén szemléletesen mutatják meg az egyes keresztmetszetekben fellépő igénybevételeket, azaz a normálerő, nyíróerő és hajlítónyomaték aktuális értékeit. A függvények alapvonala a tartó tengelyvonala, a haladásirány pedig rendszerint a balról jobbra haladó irány. A függvényértékek az alapvonalra merőlegesek. Bal→jobb haladásiránynál a pozitív értékeket jobbra, a negatív értékeket pedig balra mérjük fel. A gyakorlati munka során az igénybevételi ábrákat jellemző értékei segítségével szerkesztjük meg. A jellemző értékeket általában azokon a helyeken számítjuk ki, ahol a tartót támadó erők száma változik.

Tekintsük ismét az előző feladathoz használt, a vízszintessel 60 fokot bezáró $F = 100$ kN nagyságú, ferde koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartót (4.5/a ábra) és szerkesszük meg a három igénybevételi ábrát.

Az első lépésben a ferde erőt függőleges és vízszintes összetevőire bontjuk és kiszámítjuk a tartó támaszerőit. Ezt a munkát az előző feladat megoldásakor már elvégeztük.

Ezután megállapítjuk, hogy melyek a szerkesztéshez szükséges jellemző pontok. A tartó két végpontja mindig ilyen pont, így az igénybevételeket ki kell majd számítani az „A” és „B” pontokban. A tartót egy (két összetevőjével helyettesíthető) F külső erő támadja az „1” pontban, így az „1” pont is jellemző pont lesz (4.5/a ábra).



4.5 ábra. a) Kéttámaszú tartó, b) gerenda és terhelése, c) normálerő-ábra, d) nyíróerő-ábra, e) nyomatékábra.

A számításokat ezek után egy olyan gerendatartón hajtjuk végre, ahol a támaszokat a támaszerő-összetevőkkel és az esetleges ferde erőket a vízszintes és függőleges összetevőkkel helyettesítettük (4.5/b ábra).

Állítsuk elő először a normálerő ábrát. A 4.5/b ábra vázlata szerint a tartó baloldali végén, az „A” pontban, a gerenda keresztmetszetére egy 50 kN nagyságú húzóerő hat:

$$N_A = +50\,\text{kN}$$

Ezt az értéket az alapvonalra merőlegesen, lefelé (a pozitív oldalon) mérjük fel (4.5/c ábra). A tartó tengelye mentén jobbra haladva az „1” pontig nem változik a helyzet: a vonatkozó keresztmetszeteket az 50 kN nagyságú erő húzza. Az „1” ponthoz végtelen közel a jobb oldalon viszont már más a helyzet: belép a külső erő ellenkező irányban működő 50 kN nagyságú vízszintes összetevője. A normálerő az „1” pont jobboldalán tehát:

$$N_{1j} = +50 - 50 = 0$$

Innen tovább haladva a tartó jobboldali végéig (a „B” pontig) a helyzet nem változik és érvényes a fenti zérus érték. Ezzel előállítottuk a normálerő-ábrát (4.5/c ábra).

Hasonlóan járunk el a nyíróerő-ábra előállítása során. A 4.5/b ábra vázlata szerint a tartó baloldali végén, az „A” pontban, a gerenda keresztmetszetére egy 34.64 kN nagyságú nyíróerő hat. A 4.3/a ábrán vázolt előjelszabály szerint ez a nyíróerő pozitív, így

$$T_A = +34.64\,\text{kN}$$

Ezt az értéket az alapvonalra merőlegesen, lefelé (a pozitív oldalon) mérjük fel (4.5/d ábra). A tartó tengelye mentén jobbra haladva az „1” pontig nem változik a helyzet: a vonatkozó keresztmetszetekre T = 34.64 kN nagyságú nyíróerő hat. Az „1” ponthoz végtelen közel a jobb oldalon viszont már más a helyzet: belép a külső erő ellenkező irányban működő 86.6 kN nagyságú függőleges összetevője. A nyíróerő az „1” pont jobboldalán tehát:

$$T_{1j} = +34.64 - 86.6 = -51.96\,\text{kN}$$

Innen tovább haladva a tartó jobboldali végéig (a „B” pontig) a helyzet nem változik és érvényes a fenti érték. Ezzel előállítottuk a nyíróerő-ábrát (4.5/d ábra).

A nyomaték értéke az „A” pontban zérus:

$$M_A = 0$$

Az „1” pont felé haladva és balról számolva, a 34.64 kN nagyságú erő okoz nyomatékot, mégpedig a haladás közben lineárisan növekvő karjának megfelelő növekvő mértékben. Ez az érték az „1” pontban:

$$M_1 = 34.64 \cdot 6 = 207.84\,\text{kN}$$

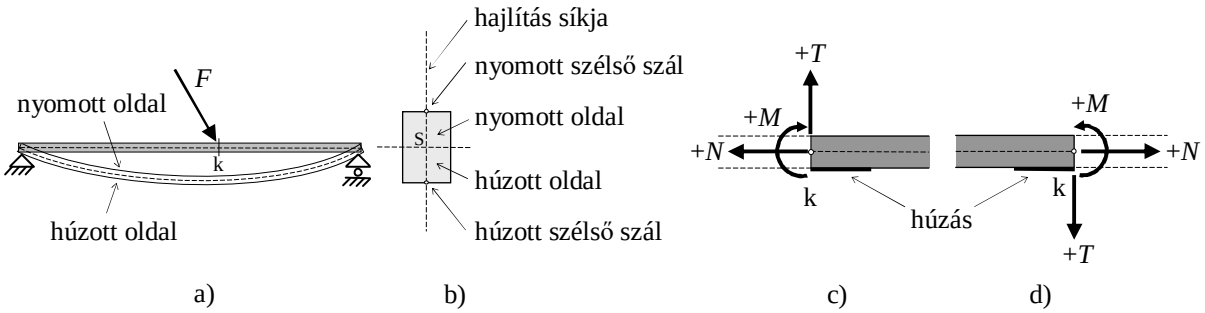
Mivel a 34.64 kN nagyságú erő az „1” pont körül az óramutató járásával egyezően forgat, ez a nyomaték pozitív és így lefelé, a pozitív oldalra mérjük fel.

A „B” pontban keletkező nyomaték értékét balról és jobbról is kiszámíthatjuk (és természetesen ugyanazt az értéket kapjuk). Jobbról számolunk, mert jobbról egyszerűbb. A „B” ponttól jobbra nincs erő, így a nyomaték értéke a „B” pontban zérus:

$$M_B = 0$$

Ezzel a nyomatékábrát előállítottuk (4.5/e ábra).

Bár a „Mechanika I. Statika” tárgy tematikájában nem szerepel a tartók alakváltozásának vizsgálata, a 4.5/a ábrán (szaggatott vonallal) feltüntettük a hajlított gerenda teher okozta alakváltozását, vagyis az ún. meggörbült vonalat is. Ezt azért célszerű megtenni, mert rúdszerkezetek nyomatékábrájának megszerkesztése során minden esetben úgy kell eljárni, hogy a nyomatékábra a tartó *húzott* oldalára kerüljön. Minden hajlított rúd keresztmetszetének két része van, a húzott és nyomott oldal, ahol a rúd hosszanti szálai megnyúlnak, illetve összenyomódnak (4.6/a ábra). Ennek megfelelően két szélső szálról beszélhetünk, amelyek a legnagyobb megnyúlást, illetve összenyomódást szenvedik el. A koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó esetében jól érzékelhető, hogy a gerenda alsó szélső szála húzott lesz (4.6/b ábra) és így a nyomatékábrát az alsó oldalra kell rajzolni. Ezt tettük a 4.5/e ábrán.



4.6 ábra. a) Kéttámaszú hajlított tartó és meggörbült alakja, b) keresztmetszet a húzott és nyomott oldallal, a „k” keresztmetszetre vonatkozó c) „baloldali” és d) „jobboldali” előjelszabály.

A 4.6/a és 4.6/b ábrákat kiegészítettük a 4.3 ábrán már bemutatott bal- és jobboldali előjelszabállyal, vastag vonallal megjelölve a húzott alsó szálat (4.6/c és 4.6/d ábra). Látható, hogy függőlegesen lefelé mutató teherrel terhelt kéttámaszú vízszintes gerendák esetén a pozitív nyomaték alulra rajzolt nyomatékábrát eredményez.

A következőkben minden esetben – kommentár nélkül – (szaggatottan) megrajzoljuk a hajlított tartók meggörbült tengelyvonalát is.

A következő pontban néhány alapesetet tárgyalunk.

4.2 Alapesetek

Az ebben a pontban található egyszerű terhelésű és egyszerű kialakítású tartók gyakran közvetlenül is alkalmazhatók egyszerűbb statikai feladatok megoldása során, egyéb esetekben pedig útmutatót adhatnak bonyolultabb terhelésű és kialakítású tartók vizsgálatához. Feladatunk minden esetben az igénybevételi ábrák előállítása.

4.2.1 Középen koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó

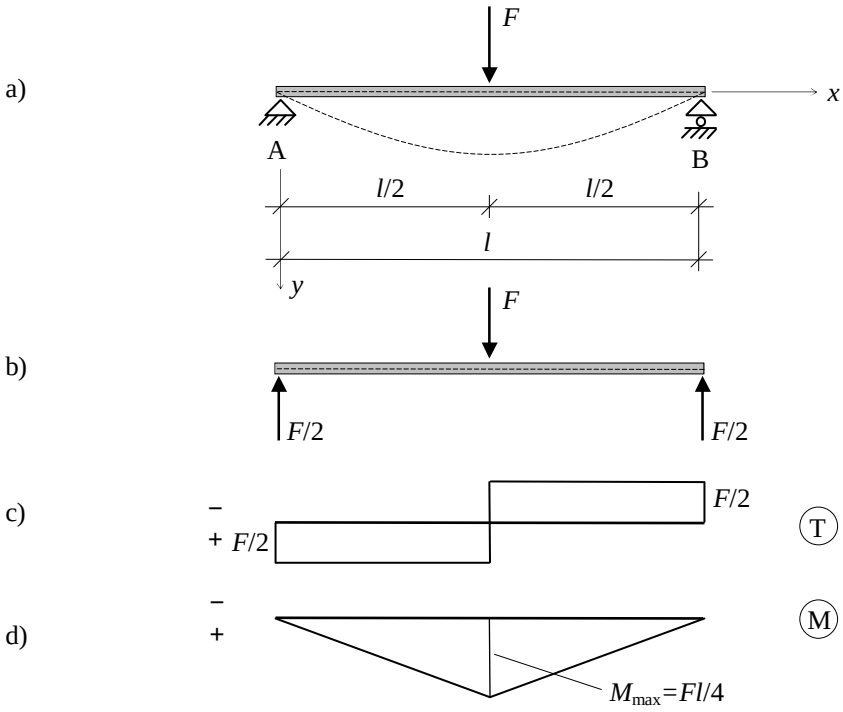
Tekintsük a 4.7/a ábrán vázolt kéttámaszú tartót. A tartót egyetlen függőleges F erő terheli, amely a tartó közepén hat. A „B” támasz görgős megtámasztású, ahol csak függőleges támaszerő keletkezhet. Az „A” csuklós megtámasztásnál így szintén csak függőleges támaszerő keletkezhet. Az A_x így zérus értékű, és a szimmetrikus terhelés következtében a két támaszerő értéke:

$$A_y = B = \frac{F}{2}$$

Ugyanerre az eredményre jutunk az egyensúlyi egyenletek felírásával.

Az igénybevételi ábrák előállítása így a 4.7/b ábrán látható vázlat segítségével lehetséges. Az előző feladatnál bemutatott módon járunk el (4.5 ábra), azzal a kiegészítéssel hogy a koncentrált erő most függőleges és a tartó közepén hat. A T- és M-ábrát a 4.7/c és 4.7/d ábrán találjuk. A legnagyobb nyomaték a tartó közepén keletkezik és értéke

$$M_{\max} = M(l/2) = \frac{F}{2}\frac{l}{2} = \frac{Fl}{4}$$



4.7 ábra. a) Középen koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó, b) számítási vázlat, c) nyíróerő-ábra, d) nyomatékábra.

4.2.2 Egyenletesen megoszló teherrel terhelt kéttámaszú tartó

Sűrűn előforduló gyakorlati esetet mutat a 4.8/a ábra. A szimmetrikus elrendezés következtében a két támaszerő azonos és értéke a teljes terhelés fele (4.8/b ábra):

$$A_y = B = \frac{ql}{2}$$

A nyíróerő értéke az *x*-*y* koordináta-rendszerben a kezdőponttól *x* távolságban (baloldalról nézve):

$$T(x) = \frac{ql}{2} - qx$$

Ezt a függvényt ábrázoltuk a 4.8/c ábrán. A fenti összefüggésből azt találjuk, hogy a nyíróerő maximuma *x* = 0-nál, illetve *x* = *l*-nél van és értéke

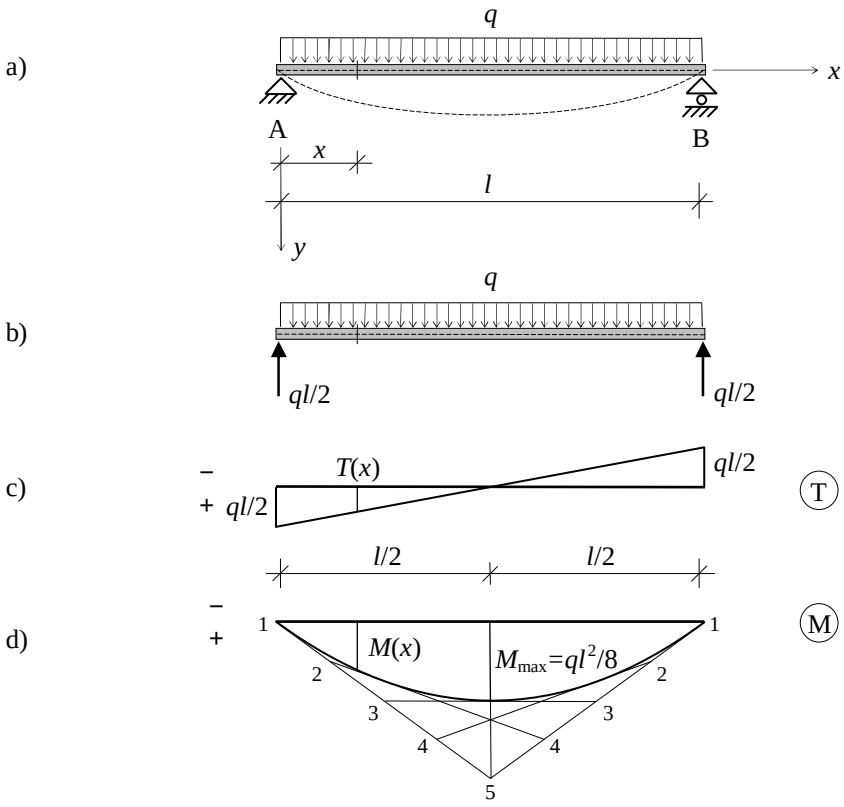
$$T_{\max} = \pm\frac{ql}{2}$$

A nyomatékfüggvény (szintén balról nézve):

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - qx\frac{x}{2} = x\left(\frac{ql}{2} - \frac{qx}{2}\right)$$

Ez egy másodfokú parabola egyenlete. A zérushelyek:

$$x = 0 \qquad \text{és} \qquad x = l$$



4.8 ábra. a) Egyenletesen megoszló teherrel terhelt kéttámaszú tartó, b) számítási vázlat, c) nyíróerő-ábra, d) nyomatékábra.

A maximum helyét az első derivált segítségével kapjuk meg:

$$M'(x) = \frac{ql}{2} - qx$$

Ahol az első derivált zérus, ott a függvénynek szélsőértéke van:

$$\frac{ql}{2} - qx = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{l}{2}$$

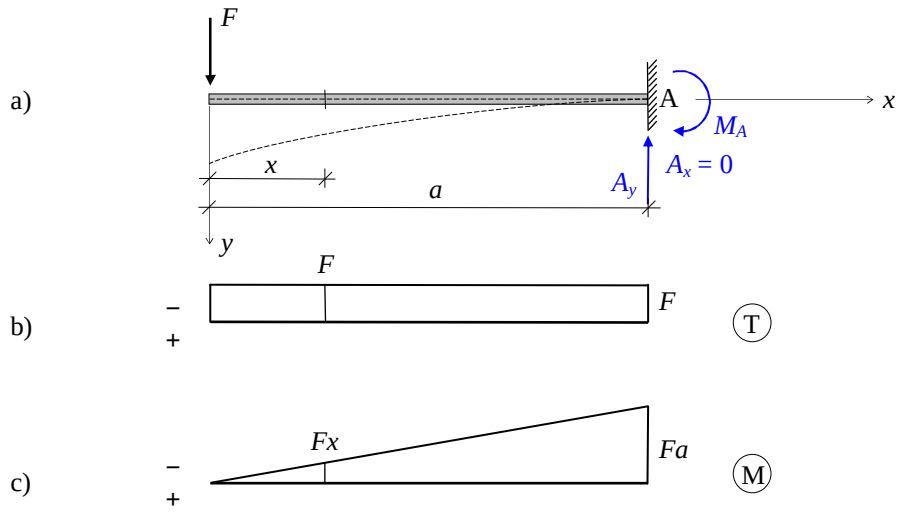
A nyomaték maximuma így (az $x = l/2$ helyen):

$$M_{\max} = \frac{ql}{2}\frac{l}{2} - \frac{ql}{2}\frac{l}{4} = \frac{ql^2}{8}$$

A két zérushely és a maximum ismeretében a nyomatékfüggvény már könnyen megszerkeszthető (4.8/d ábra). A szerkesztés megkönnyítése érdekében érintőket használhatunk fel: ezeket az 1-5, 2-4 és 3-3 segédpontok összekötésével kapjuk meg, ahol az „1” pont a két zérushelyet, az „5” pont pedig az $M_{\max}$ kétszeres értékét jelöli a tartó közepénél. A „2”, a „3” és a „4” pontok negyedelő pontok.

4.2.3 Koncentrált erővel terhelt konzoltartó

Tekintsük a jobboldalon befogott és baloldalon szabad végű konzoltartót (4.9/a ábra). A tartót a szabad végen egy F koncentrált erő terheli.



4.9 ábra. a) Koncentrált erővel terhelt konzoltartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

Bár ebben az esetben az igénybevételi ábrák a támaszerők meghatározása nélkül is előállíthatók, első lépésben határozzuk meg a támaszerőket. A függőleges vetületi egyenlet alapján azonnal látjuk, hogy

$$A_y = F\ (\uparrow)$$

és az „A” pontra felírt nyomatéki egyenlet pedig szolgáltatja a befogási támasznyomatékot:

$$M_A = Fa\ (\circlearrowleft)$$

A tartón nincs vízszintes erő, így a vízszintes támaszerő zérus: $A_x = 0$. A támaszerőket a 4.9/a ábrán kék színnel ábrázoltuk.

A nyíróerő-ábra két jellemző értékét az $x = 0$ és $x = a$ helyeken kell meghatározni. Az $x = 0$ helyen a nyíróerő értéke $-F$, és ez az érték a befogásig nem változik (4.9/b ábra). A nyíróerő-függvény állandó:

$$T(x) = -F$$

Hasonló a helyzet a nyomatékábra esetében: a két jellemző hely az $x = 0$ és az $x = a$. A

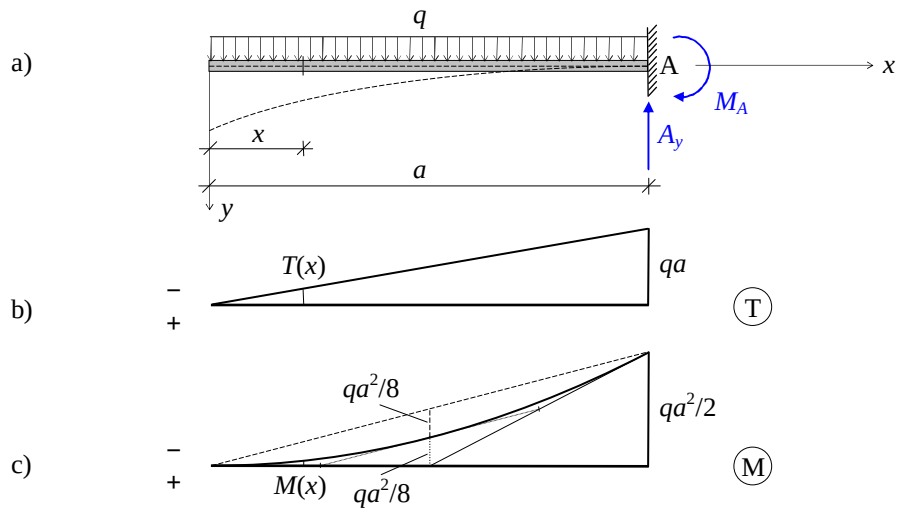
nyomatékfüggvény

$$M(x) = -Fx$$

Ez a lineáris függvény az $x = 0$ helyen zérus, az $x = a$ helyen pedig $M = -Fa$ értéket eredményez (4.9/c ábra). Ez utóbbi érték egyben az M_{max} nyomatéki maximum.

4.2.4 Egyenletesen megoszló teherrel terhelt konzoltartó

Gyakori eset a teljes hossza mentén egyenletesen megoszló teherrel terhelt konzoltartó (4.10/a ábra).



4.10 ábra. a) A tartó teljes hossza mentén egyenletesen megoszló teherrel terhelt konzoltartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

A függőleges vetületi egyenlet segítségével meghatározzuk a függőleges támaszerőt:

$$\sum F_{i,y} = qa - A_y = 0 \qquad \text{innen:} \qquad A_y = qa\ (\uparrow)$$

Az „A” pontra felírt nyomatéki egyenlet szolgáltatja a támasznyomatékot:

$$\sum M^{(A)} = -qa\frac{a}{2} + M_A = 0 \qquad \text{innen:} \qquad M_A = \frac{qa^2}{2}\ (\circlearrowleft)$$

A tartón nincs vízszintes erő, így a vízszintes támaszerő zérus: $A_x = 0$. A támaszerőket a 4.10/a ábrán kék színnel ábrázoltuk.

A nyíróerő függvénye

$$T(x) = -qx$$

melynek jellemző értékei:

$$T(0) = 0 \qquad \text{és} \qquad T(a) = -qa$$

A nyíróerő-ábrát a 4.10/b ábra mutatja.

A nyomatékfüggvény

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2}$$

melynek jellemző értékei:

$$M(0) = 0 \qquad \text{és} \qquad M(a) = M_{\max} = -\frac{qa^2}{2}$$

A nyomatékábrát a 4.10/c ábra mutatja.

4.2.5 Végnyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó

A 4.11/a ábrán vázolt *M* végnyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó támaszerőit nyomatéki egyensúlyi egyenletek segítségével határozzuk meg. Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = M - Bl = 0$$

egyenletből

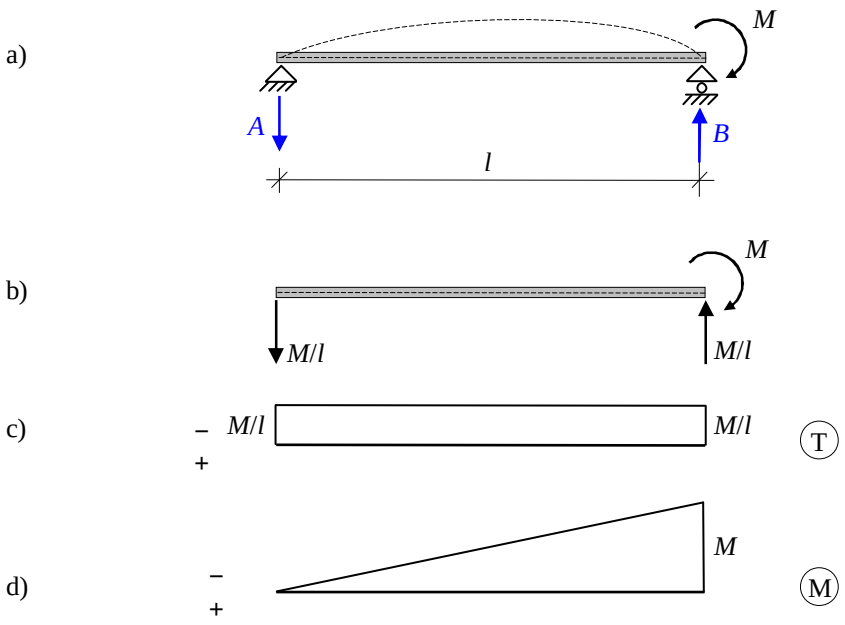
$$B = \frac{M}{l} \ (\uparrow)$$

Hasonlóképpen, a „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = M - Al = 0$$

egyenletből

$$A = \frac{M}{l} \ (\downarrow)$$



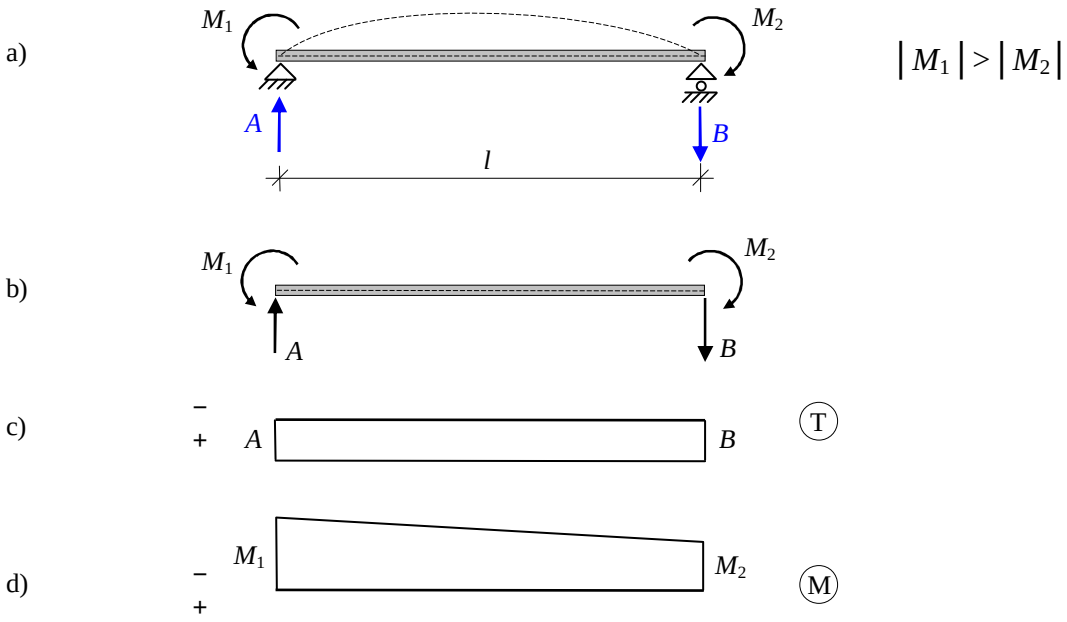
4.11 ábra. a) Végnyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó, b) számítási vázlat, c) nyíróerő-ábra, d) nyomatékábra.

A tartóra vízszintes erő nem hat, így az „A” támasznál sem keletkezik vízszintes támaszerő-összetevő, vagyis $A_x = 0$.

Az igénybevételi ábrák előállításához használt számítási vázlatot a 4.11/b ábra mutatja. A vázlat alapján balról haladva könnyen előállíthatjuk az igénybevételi ábrákat. A nyíróerő-ábra baloldali értékét a gerenda balvégén ható $T = M/l$ negatív nyíróerő adja. Ez az érték a tartó másik végéig változatlan (4.11/c ábra). A nyomatékábra esetében – szintén balról haladva – azt látjuk, hogy a balszélen lévő M/l nagyságú erő okoz nyomatékot, mégpedig a karjával arányos mértékben, zérus értékről $(M/l)l = M$ értékig (4.11/d ábra). A nyomaték végig negatív.

4.2.6 Két, ellenkező előjelű végnyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó

Tekintsük a 4.12/a ábrán vázolt, két ellenkező előjelű nyomatékkal terhelt kéttámaszú tartót. Tételezzük fel, hogy a tartót terhelő két nyomaték közül a baloldali nyomaték a nagyobb: $|M_1| > |M_2|$.



4.12 ábra. a) Két, ellenkező előjelű ($|M_1| > |M_2|$) végnyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó, b) számítási vázlat, c) nyíróerő-ábra, d) nyomatékábra.

Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = -M_1 + M_2 + Bl = 0$$

egyenletből

$$B = \frac{M_1 - M_2}{l} \quad (\downarrow)$$

Hasonlóan eljárva, a „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = -M_1 + M_2 + Al = 0$$

egyenletből

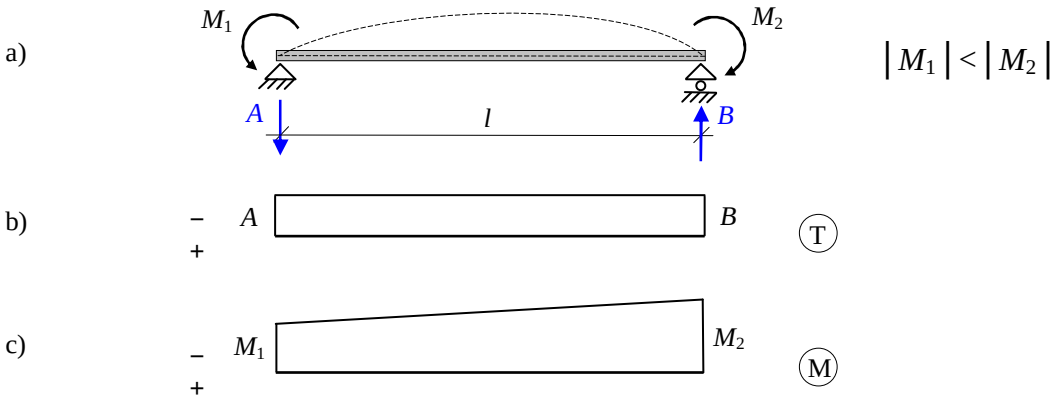
$$A = \frac{M_1 - M_2}{l} \quad (\uparrow)$$

A két támaszerő természetesen azonos nagyságú (de ellenkező irányú).

A tartóra vízszintes erő nem hat, így az „A” támasznál sem keletkezik vízszintes támaszerő-összetevő, vagyis $A_x = 0$.

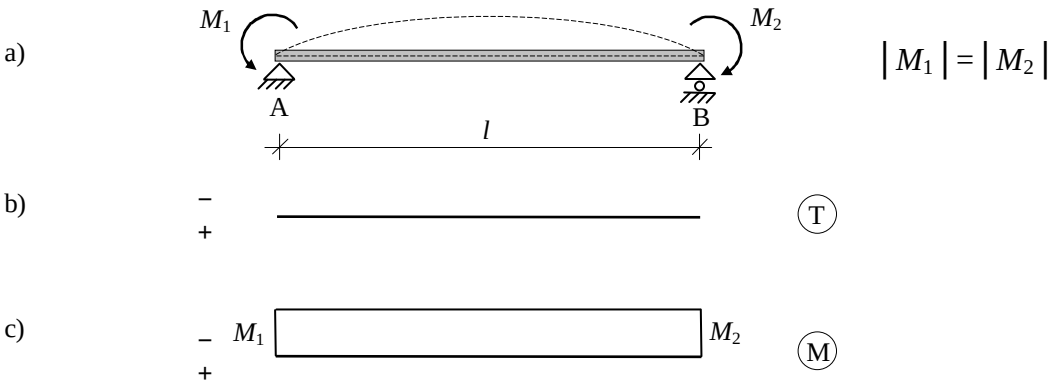
A 4.12/b ábrán vázolt számítási vázlat segítségével az igénybevételi ábrákat könnyen előállíthatjuk. A nyíróerő-ábra baloldali értékét a gerenda balvégén ható A támaszerő adja. Ez az érték a tartó másik végéig változatlan (4.12/c ábra). A nyomatékábra esetében – szintén balról haladva – azt látjuk, hogy a tartó bal szélén az M_1 nyomaték okoz nyomatékot. Ezt az értéket jobbra haladva folyamatosan csökkenti az A támaszerő által okozott nyomaték, mégpedig karjával arányos mértékben. A gerenda jobb szélén az M_2 érvényes (4.12/d ábra). A nyomaték végig negatív.

Gyakorlásképpen foglalkozzunk most azzal az esettel, amikor a jobboldali nyomaték a nagyobb, vagyis amikor $|M_1| < |M_2|$ (4.13/a ábra).



4.13 ábra. a) Két, ellenkező előjelű ($|M_1| < |M_2|$) végnyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

A fenti módon eljárva most azt tapasztaljuk, hogy a támaszerők iránya felcserélődik. Ez a változás elsősorban a nyíróerő-ábrát érinti, amely átkerül a negatív oldalra (4.13/b ábra). A nyomatékábra továbbra is negatív oldalon van, de a lefutása a nyomatékok értékének megfelelően megváltozik (4.13/c ábra).

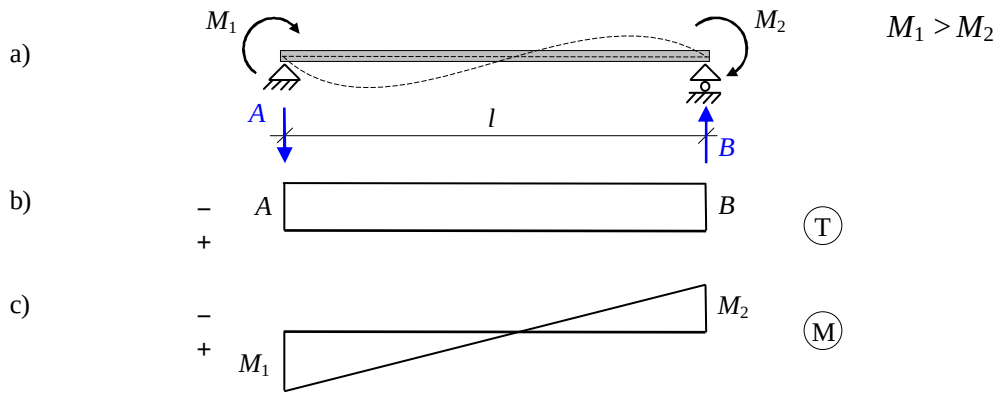


4.14 ábra. a) Két, ellenkező előjelű és azonos nagyságú végnyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

Végül tekintsük azt az esetet, amikor a két nyomaték egyenlő nagyságú: $|M_1| = |M_2|$ (4.14/a ábra). A két támaszerő ekkor zérus és ez a nyíróerő-ábra eltűnéséhez vezet (4.14/b ábra). A nyomatékábra az $|M_1| = |M_2|$ = állandó értéket veszi fel (4.14/c ábra).

4.2.7 Két, azonos előjelű végnyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó

A 4.15/a ábrán vázolt tartó abban különbözik az előző pontokban vizsgált tartóktól, hogy a terhelő két végnyomaték most azonos előjelű. Tételezzük fel, hogy $M_1 > M_2$.



4.15 ábra. a) Két, azonos előjelű végnyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = M_1 + M_2 - Bl = 0$$

egyenletből

$$B = \frac{M_1 + M_2}{l} \ (\uparrow)$$

Hasonlóképpen, a „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = M_1 + M_2 - Al = 0$$

egyenletből

$$A = \frac{M_1 + M_2}{l} \ (\downarrow)$$

A tartóra vízszintes erő nem hat, így az „A” támasznál sem keletkezik vízszintes támaszerő-összetevő, vagyis $A_x = 0$.

A támaszerők ismeretében az igénybevételi ábrák előállíthatók. A nyíróerő-ábra az A támaszerő okozta negatív értékkel indul (balról) és ez az érték a „B” támaszig nem változik (4.15/b ábra). A nyomatékábra bal oldalán az M_1 érvényesül, amely értéket jobbra haladva az A támaszerő okozta nyomaték csökkenti, mégpedig olyan mértékben, hogy a gerenda jobb szélére érve a nyomaték értéke M_2 (4.15/c ábra). Az „A” és „B” pontok között a nyomatékábra lineárisan változik.

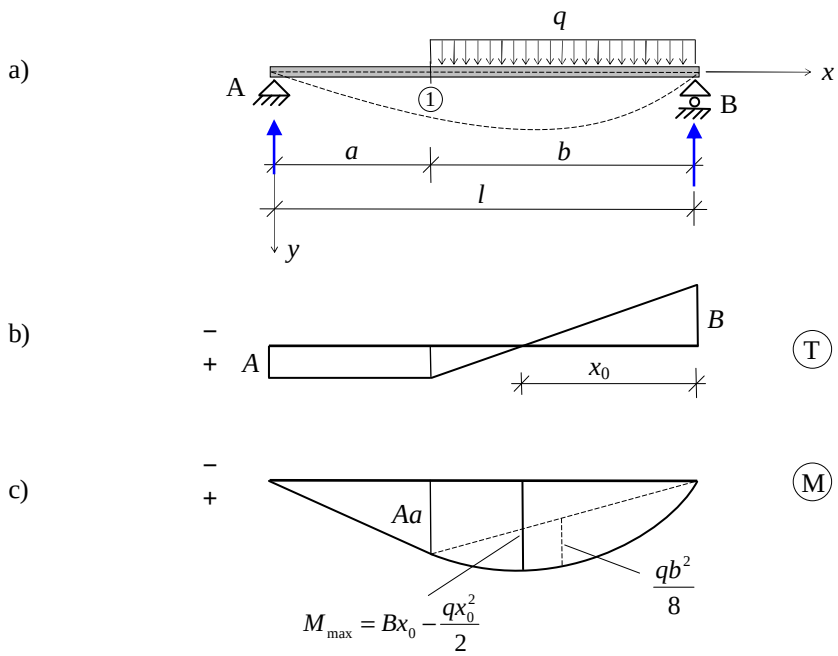
4.2.8 Megoszló teherrel szakaszosan terhelt kéttámaszú tartó

A 4.16/a ábrán vázolt kéttámaszú tartót olyan q intenzitású egyenletesen megoszló teher terheli, amely a tartó jobboldali részén, egy b hosszúságú szakaszon hat. Az igénybevételi ábrák előállításához szükségünk van a két támaszerő értékére. Mivel az egyetlen külső teher függőleges, vízszintes támaszerő-összetevő nem ébred. Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = bq\left(a+\frac{b}{2}\right) - Bl = 0$$

nyomatéki egyenletből megkapjuk a B támaszerőt:

$$B = \frac{bq}{l}\left(a+\frac{b}{2}\right)\ (\uparrow)$$



4.16 ábra. a) Szakaszosan terhelt kéttámaszú tartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

A „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = -bq\frac{b}{2} + Al = 0$$

nyomatéki egyenlet szolgáltatja az A támaszerőt:

$$A = \frac{qb^2}{2l}\ (\uparrow)$$

A támaszerők ismeretében már előállíthatjuk a nyíróerő-ábrát. A tartó balszélén a nyíróerő értéke azonos az A támaszerő értékével és pozitív előjelű. Jobbra haladva és az a szakaszt

elhagyva ez az érték az „1” ponttól a q megoszló teher belépésével csökken. A tartó jobbszélén – jobbról nézve – a nyíróerő értéke azonos a B támaszerő értékével és negatív értékű. Ez azt jelenti, hogy az „1” pontnál lévő pozitív A értéket összeköthetjük a tartó jobbszélén felmért negatív B értékkel (4.16/b ábra).

A nyomatékábra előállítása során szükségünk lesz a nyíróerő-ábra zérushelyének ismeretére, mert a nyomatékfüggvény ott lesz maximális értékű. (Ennek bizonyítását a következő 4.3 pontban találjuk meg.) A zérushelyet az x_0 távolság határozza meg, amelynek értékét – az erőket jobbról véve – a

$$T(x_0) = -B + qx_0 = -\frac{bq}{l}\left(a + \frac{b}{2}\right) + qx_0 = 0$$

egyenletből kapjuk meg:

$$x_0 = \frac{b}{l}\left(a + \frac{b}{2}\right)$$

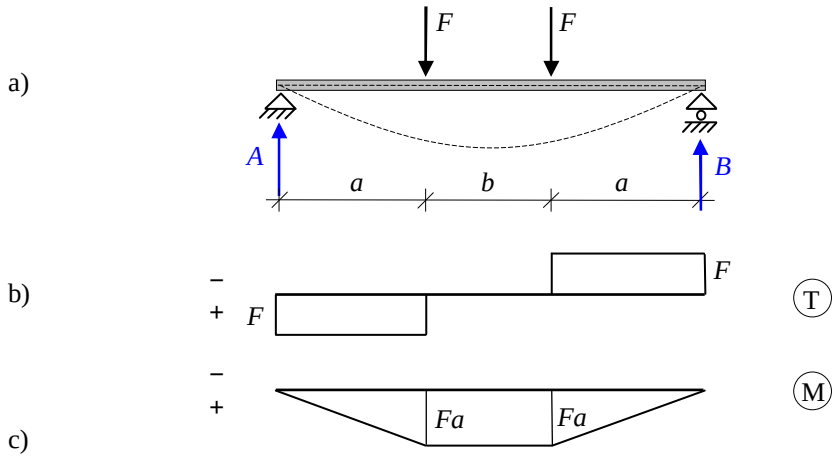
A nyomatékfüggvény értéke az „A” és „B” támaszoknál zérus (hiszen balról, illetve jobbról nézve nincs semmi ami nyomatékot eredményezne) és a nyomaték maximuma az x_0 helyen:

$$M_{\max} = M(x_0) = Bx_0 - \frac{qx_0^2}{2}$$

A fenti értékek felhasználásával a nyomatékábra már megszerkeszthető (4.16/c ábra). A függvény az a szakaszon ferde egyenes, a b szakaszon pedig másodfokú parabola.

4.2.9 Két, szimmetrikusan elhelyezett koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó

Igen egyszerű feladatot mutat a 4.17/a ábra.



4.17 ábra. a) Két koncentrált erővel szimmetrikusan terhelt kéttámaszú tartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

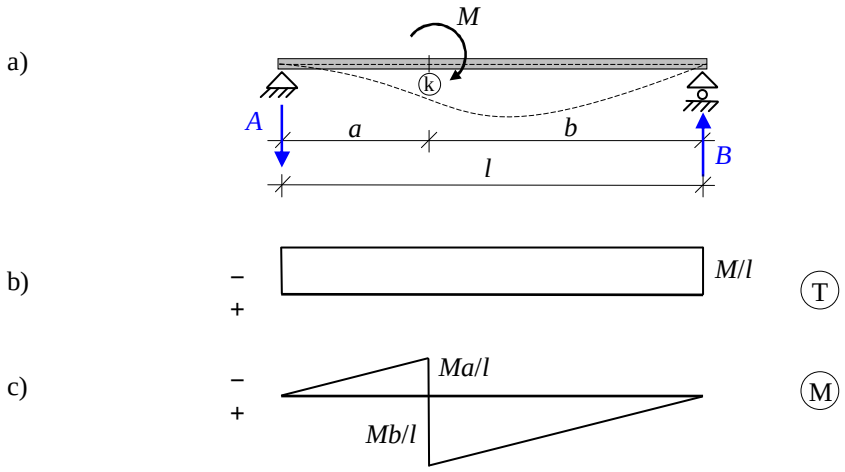
A két koncentrált erővel szimmetrikusan terhelt kéttámaszú tartó támaszerői is szimmetrikusak és értékük:

$$A = B = \frac{2F}{2} = F \ (\uparrow)$$

A nyíróerő-ábra (4.17/b ábra) és nyomatékábra (4.17/c ábra) a támaszerők ismeretében azonnal megrajzolható.

4.2.10 Mezőben nyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó

A 4.18/a ábrán vázolt kéttámaszú tartó hasonló feladatot mutat, mint amit a 4.2.5 pontban tárgyaltunk, de a tartót terhelő nyomaték ezúttal a két támasz között helyezkedik el.



4.18 ábra. a) Koncentrált nyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = M - Bl = 0$$

egyenletből

$$B = \frac{M}{l} \ (\uparrow)$$

Hasonlóképpen, a „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = M - Al = 0$$

egyenletből

$$A = \frac{M}{l} \ (\downarrow)$$

Ugyanazt az eredményt kaptuk mint a 4.2.5 pontban. Ez azt mutatja, hogy a támaszerő-számítás vonatkozásában az *M* nyomaték helye az „A” és „B” támaszpontok között tetszőleges, vagyis nem befolyásolja a támaszerők nagyságát.

A nyíróerő-ábra igen egyszerűen alakul (4.18/b ábra): az „A” támasztól végtelen közel jobbra negatív nyíróerőt okoz az *A* támaszerő és ez az érték változatlanul érvényes a „B”

pontig, ahol belép a *B* támaszerő és a nyíróerő értéke zérus lesz.

Az „A” pontban a nyomatékfüggvény értéke zérus, hiszen – balról vizsgálva – nincsen semmi, ami az „A” pontban nyomatékot okozna.

A „k” ponthoz végtelen közel balra a nyomaték értékét a balra lévő *A* támaszerő segítségével határozzuk meg:

$$M_{\mathrm{k}}^{\mathrm{bal}} = -Aa = -\frac{Ma}{l}$$

Ez a nyomaték a gerenda felső oldalán okoz húzást, így a nyomatékfüggvényt az A-k szakaszon felülre rajzoljuk.

Hasonló módon eljárva, a „k” ponthoz végtelen közel jobbra a nyomaték értékét a jobbra lévő *B* támaszerő segítségével határozzuk meg:

$$M_{\mathrm{k}}^{\mathrm{jobb}} = -(-Bb) = \frac{Mb}{l}$$

Ez a nyomaték a gerenda alsó oldalán okoz húzást, így a nyomatékfüggvényt a k-B szakaszon alulra rajzoljuk.

A „B” pontban a nyomatékfüggvény értéke zérus, hiszen – jobbról vizsgálva – nincsen semmi, ami a „B” pontban nyomatékot okozna. Ezzel előállítottuk a nyomatékábrát (4.18/c ábra). Ha ezt a nyomatékábrát összehasonlítjuk a 4.2.5 pontban vizsgált tartó nyomatékábrájával, akkor azt látjuk, hogy a két ábra alakja jelentősen eltér egymástól. Ennek az az oka, hogy a tartón keletkező nyomatékok vizsgálata során – ellentétben a támaszerő-számításnál tapasztaltakkal – a tartót támadó koncentrált nyomaték helye alapvetően befolyásolja a nyomatékfüggvény alakulását.

Ha a „k” keresztmetszetnél a bal és jobb oldalról számított értékeket összeadjuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy a nyomaték függvényében a „k” keresztmetszetben egy *M* nagyságú ugrás van:

$$M_{\mathrm{k}}^{\mathrm{bal}} + M_{\mathrm{k}}^{\mathrm{jobb}} = \frac{Ma}{l} + \frac{Mb}{l} = M$$

Ez megfelel a „k” keresztmetszetnél működő *M* nyomaték hatásának.

4.2.11 Konzolon nyomatékkal terhelt kéttámaszú konzolos tartó

A 4.19/a ábrán vázolt kéttámaszú konzolos tartó egyetlen terhe egy *M* nagyságú koncentrált nyomaték, ami a jobboldali konzolos rész végén működik.

Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = M - Bl = 0$$

egyenletből

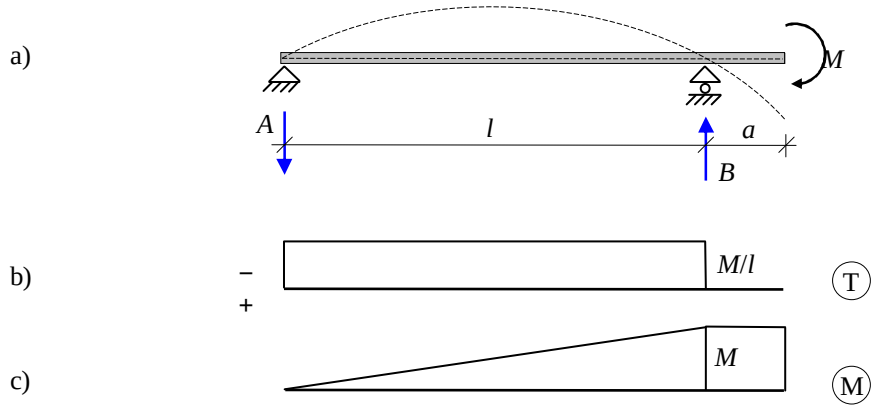
$$B = \frac{M}{l} \ (\uparrow)$$

Hasonlóképpen, a „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = M - Al = 0$$

egyenletből

$$A = \frac{M}{l} \ (\downarrow)$$



4.19 ábra. a) Konzolon koncentrált nyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

Ugyanazt az eredményt kaptuk mint a korábbi esetekben, amikor a tartót egyetlen koncentrált nyomaték terhelte. Ez ismét azt mutatja, hogy a támaszerő-számítás vonatkozásában az *M* nyomaték helye a tartó hossza mentén tetszőleges, vagyis nem befolyásolja a támaszerők nagyságát.

A nyíróerő-ábra ismét igen egyszerűen alakul (4.19/b ábra): az „A” támasztól végtelen közel jobbra negatív nyíróerőt okoz az *A* támaszerő és ez az érték változatlanul érvényes a „B” pontig, ahol belép a *B* támaszerő és a nyíróerő értéke zérus lesz. A zérus érték érvényes a konzol *a* hosszán.

A nyomatékábra esetében – az „A” támasztól jobbra haladva – azt látjuk, hogy a balszélen lévő *M*/*l* nagyságú erő okoz nyomatékot, mégpedig a karjával arányos mértékben. A „B” támaszhoz érve elérjük az (*M*/*l*)*l* = *M* értéket, ami utána változatlanul érvényes a konzol *a* hosszán (4.19/c ábra). A tartó jobb végétől balra haladva ugyanerre az eredményre jutunk.

4.2.12 Háromszög megoszlású teherrel terhelt kéttámaszú tartó

A 4.20/a ábrán vázolt kéttámaszú tartót megoszló teher terheli. A teher megoszlása háromszög alakú, az „A” támasznál zérus, a „B” támasznál *q* értékkel. A teher függvénye:

$$q(x) = x\frac{q}{l}$$

Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = \frac{ql}{2}\frac{2l}{3} - Bl = 0$$

egyenletből megkapjuk a *B* támaszerő értékét:

$$B = \frac{ql}{3} \ (\uparrow)$$

Hasonlóan eljárva, a „B” pontra felírt

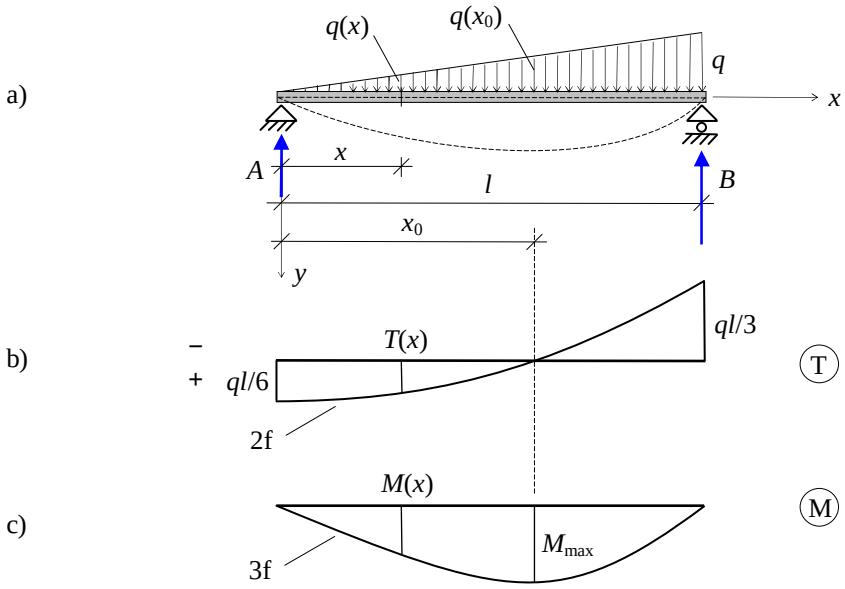
$$\sum M^{(B)} = -\frac{ql}{2}\frac{l}{3} + Al = 0$$

egyenlet szolgáltatja az *A* támaszerő értékét:

$$A = \frac{ql}{6} \ (\uparrow)$$

Ellenőrzésképpen írjuk fel a függőleges vetületi egyenletet, amely a helyes számítás esetében zérust ad:

$$\sum F_{i,y} = -\frac{ql}{6} - \frac{ql}{3} + \frac{ql}{2} = 0$$



4.20 ábra. a) Háromszög megoszlású teherrel terhelt kéttámaszú tartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

A nyíróerő függvénye:

$$T(x) = \frac{ql}{6} - x\frac{xq}{l}\frac{1}{2} = \frac{ql}{6} - \frac{q}{2l}x^2$$

Ez egy másodfokú függvény, amely az $x = 0$-nál (az „A” pontnál) az *A* támaszerő $ql/6$ értékét, az $x = l$-nél (a „B” pontnál) pedig a *B* támaszerő $-ql/3$ értékét veszi fel. A zérushely koordinátáját a

$$T(x_0) = \frac{ql}{6} - \frac{q}{2l} x_0^2 = 0$$

egyenletből kapjuk meg:

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

A nyíróerő-ábra ezekkel az adatokkal már megrajzolható (4.20/b ábra).

A nyomatékábrát az

$$M(x) = Ax - xq(x)\frac{1}{2}\frac{x}{3} = \frac{ql}{6}x - x\frac{xq}{l}\frac{1}{2}\frac{x}{3} = x\left(\frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{6l}\right)$$

harmadfokú nyomatékfüggvény definiálja.

A nyomatékfüggvény két pontját minden számítás nélkül ismerjük: a nyomaték értéke zérus az „A” és „B” támaszoknál (hiszen az „A” ponttól balra, illetve a „B” ponttól jobbra nincs erő, ami balról, illetve jobbról nyomatékot okozna). A nyomatékfüggvény harmadik jellemző értéke az $M_{\max}$ nyomatéki maximum. A maximum ott van, ahol a nyíróerő-függvény zérus értékű – a bizonyítás a 4.3 pontban található – vagyis az x_0 helyen:

$$M_{\max} = M(x_0) = \frac{l}{\sqrt{3}}\left(\frac{ql}{6} - \frac{ql^2}{3 \cdot 6l}\right) = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}}$$

A nyomatékábra a fenti adatokkal már megrajzolható (4.20/c ábra).

4.2.13 Másodfokú parabola megoszlású teherrel terhelt kéttámaszú tartó

A 4.21/a ábrán vázolt kéttámaszú tartót megoszló teher terheli, amelynek megoszlása másodfokú parabola. A teher maximális értékét a tartó közepén a „k” keresztmetszetben q_0 jelöli.

A szimmetrikus terhelés következtében a támaszerők azonnal megállapíthatók:

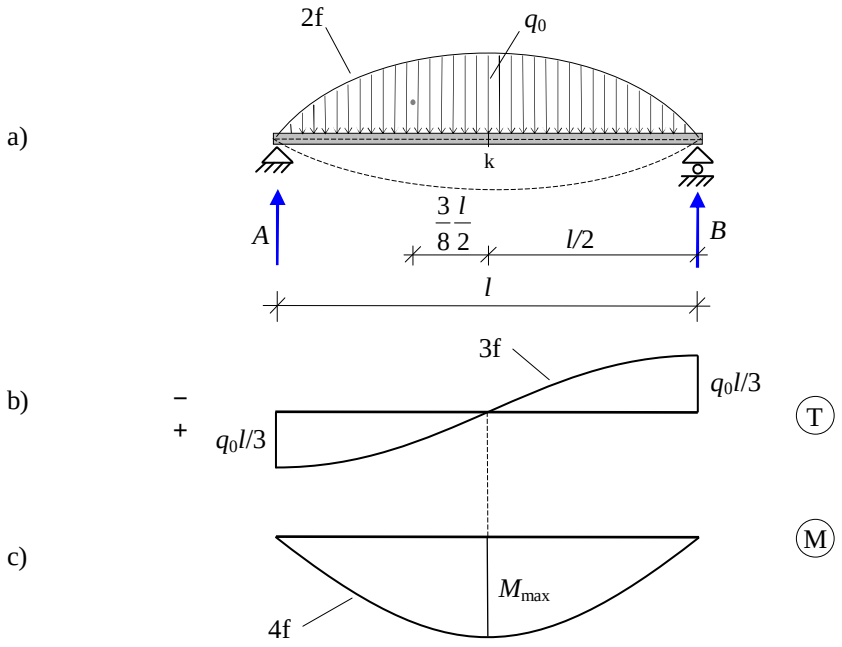
$$A = B = \frac{2}{3} l q_0 \frac{1}{2} = \frac{l q_0}{3} \quad (\uparrow)$$

A nyíróerő-ábra így balról az A támaszerő értékével, $lq_0/3$-al indul. Ezt a pozitív értéket csökkenti a megoszló teher, mégpedig a megoszlásának megfelelően egyre nagyobb mértékben. A tartó közepén a nyíróerő zérus értékű, majd növekedésnek indul, a teher megoszlásának megfelelően egyre csökkenő mértékben, amíg a „B” támasznál el nem éri a B támaszerő értékét (4.21/b ábra). A nyíróerő-függvény harmadfokú parabola megoszlású.

A nyomatékfüggvény két pontja azonnal ismert: az „A” és „B” támaszoknál a nyomaték értéke zérus. A harmadik jellemző pont a tartó középső „k” keresztmetszete, ahol a nyomaték maximális értéket vesz fel. Az A támaszerő már ismert értékének felhasználásával:

$$M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{lq_0}{3}\frac{l}{2} - \frac{l}{2}q_0\frac{2}{3}\frac{l}{2}\frac{3}{8} = \frac{q_0 l^2}{6}\left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{5}{48}q_0 l^2$$

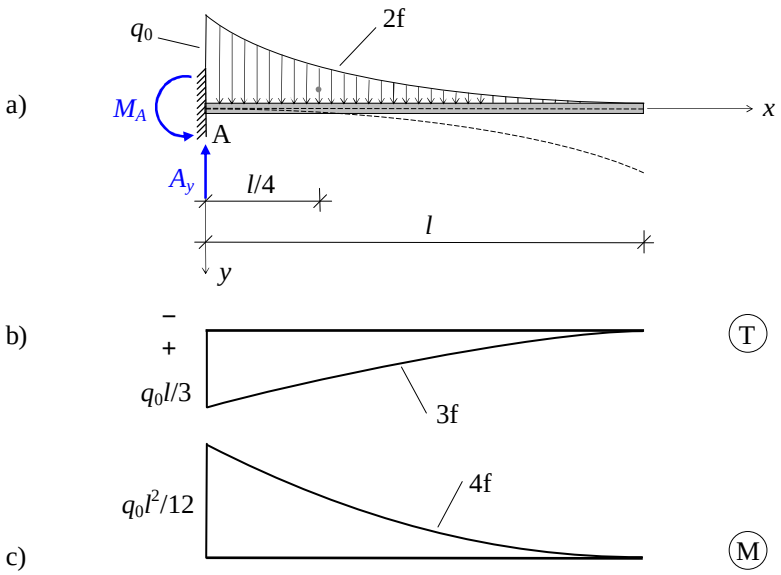
A nyomatékfüggvény negyedfokú parabola megoszlású (4.21/c ábra).



4.21 ábra. a) Másodfokú parabola megoszlású teherrel terhelt kéttámaszú tartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

4.2.14 Másodfokú parabola megoszlású teherrel terhelt konzoltartó

A 4.22/a ábrán vázolt, baloldalon befogott konzoltartót olyan másodfokú, alulról domború parabola megoszlású teher terheli, amelynek intenzitása a konzol szabad végén zérus, a befogásnál pedig q_0 értékű. Az igénybevételi ábrák előállításához nincs szükség a támaszerők meghatározására (hiszen a tartó jobboldali végétől indulva az ábrák a támaszerők értékének ismerete nélkül is előállíthatók), de gyakorlásképpen meghatározzuk a támaszerőket is.



4.22 ábra. a) Másodfokú parabola megoszlású teherrel terhelt, baloldalon befogott tartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

A függőleges vetületi egyenlet segítségével meghatározzuk a függőleges támaszerőt:

$$\sum F_{i,y} = \frac{q_0 l}{3} - A_y = 0 \qquad \text{innen:} \qquad A_y = \frac{q_0 l}{3} \ (\uparrow)$$

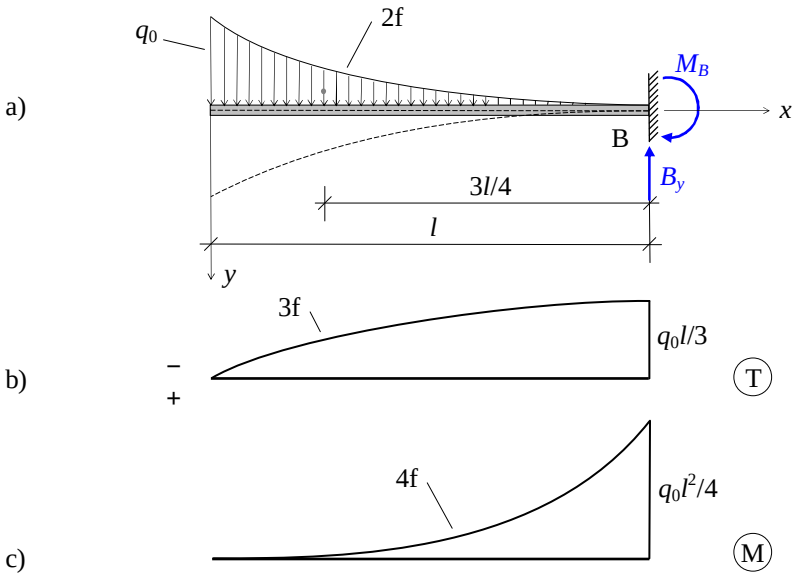
Az „A” pontra felírt nyomatéki egyenlet szolgáltatja a támasznyomatékot:

$$\sum M^{(A)} = \frac{q_0 l}{3}\frac{l}{4} - M_A = 0 \qquad \text{innen:} \qquad M_A = \frac{q_0 l^2}{12} \ (\curvearrowleft)$$

A tartón nincs vízszintes erő, így a vízszintes támaszerő zérus: $A_x = 0$. A támaszerőket a 4.22/a ábrán kék színnel ábrázoltuk.

A nyíróerő-ábra a jobboldali zérus értékkel indulva megrajzolható (4.22/b ábra). Hasonlóan eljárva a nyomatékábra is könnyen előállítható (4.22/c ábra). Az ábrák lefutásának könnyebb megállapítása céljából mindkét esetben kiszámíthatjuk az igénybevétel értékét a tartó felében – $x = l/2$-nél – is.

Végül nézzük meg, hogy hogyan alakulnak az igénybevételi ábrák, ha a tartó nem a bal, hanem a jobboldali végén befogott (4.23/a ábra).



4.23 ábra. a) Másodfokú parabola megoszlású teherrel terhelt, jobboldalon befogott tartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

A függőleges vetületi egyenlet segítségével ugyanolyan értékű függőleges támaszerőt kapunk, mint az előző esetben:

$$\sum F_{i,y} = \frac{q_0 l}{3} - B_y = 0 \qquad \text{innen:} \qquad B_y = \frac{q_0 l}{3} \ (\uparrow)$$

A „B” pontra felírt nyomatéki egyenlet szolgáltatja a támasznyomatékot:

$$\sum M^{(B)} = \frac{q_0 l}{3}\frac{3l}{4} - M_B = 0 \qquad \text{innen:} \qquad M_B = \frac{q_0 l^2}{4} \ (\curvearrowright)$$

A tartón nincs vízszintes erő, így a vízszintes támaszerő zérus: $B_x = 0$. A támaszerőket a 4.23/a ábrán kék színnel ábrázoltuk.

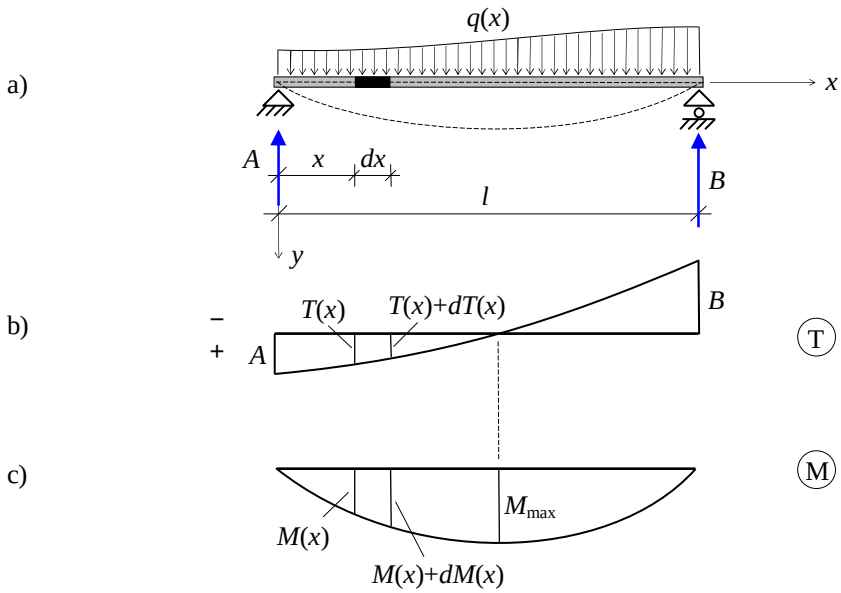
A nyíróerő-ábra a baloldali zérus értékkel indulva megrajzolható (4.23/b ábra). Hasonlóan eljárva a nyomatékábra is könnyen előállítható (4.23/c ábra). Az ábrák lefutásának könnyebb megállapítása céljából mindkét esetben kiszámíthatjuk az igénybevétel értékét a tartó felében, az $x = l/2$-nél is.

Az igénybevételi ábrákat jellemző függvényekre vonatkozó általános szabályokkal a következő pontban ismerkedünk meg.

4.3 Összefüggés a teher-, a nyíróerő- és a nyomatékfüggvény között

Az előző pontban bemutatott egyszerű tartók igénybevételi ábráit tanulmányozva már megpróbálhatnánk bizonyos tanulságokat levonni az igénybevételek függvényeivel kapcsolatban. Ehelyett inkább a következőkben a tartó egyensúlyának vizsgálata segítségével általános törvényszerűségeket fogunk megállapítani.

Tekintsük a 4.24/a ábrán látható kéttámaszú tartót, amelyre egy adott $q(x)$ függvénnyel definiált megoszló teher hat. Az előző pontban szerzett tapasztalatok segítségével könnyen megrajzolhatjuk a tartó *alakhelyes* igénybevételi ábráit (4.24/b és 4.24/c ábra).



4.24 ábra. a) Tetszőleges $q(x)$ megoszlású teherrel terhelt kéttámaszú tartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

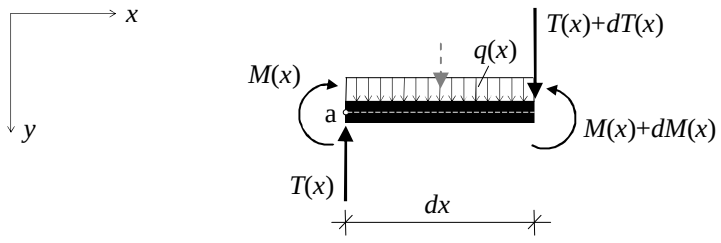
A tartó egy dx hosszúságú elemi szakaszát vizsgálva azt látjuk, hogy az elemi tartódarabra szétszórt síkbeli erők hatnak (4.25 ábra). Vízszintes erők a tartóra nem hatnak, így az egyensúly vizsgálatához két egyenlet áll rendelkezésünkre.

A függőleges vetületi egyenlet alapján felírhatjuk, hogy

$$\sum F_{i,y} = -T(x) + q(x)dx + T(x) + dT(x) = 0$$

Innen megkapjuk a teher és a nyíróerő között fennálló I. számú összefüggést:

$$q(x) = -\frac{dT(x)}{dx} \qquad \text{I.}$$



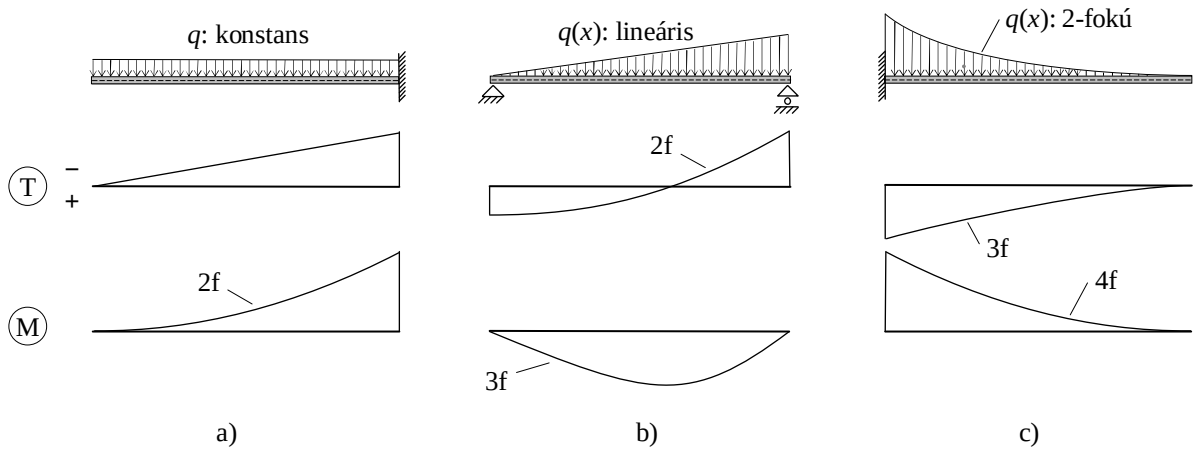
4.25 ábra. A tartó egy *dx* hosszúsági elemi szakasza a ráható erőkkel.

Az egyensúlyban lévő elemi tartószakasz baloldali „a” végpontjára a

$$\sum M^{(a)} = M(x) + q(x)\frac{dx^2}{2} + T(x)dx + dT(x)dx - M(x) - dM(x) = 0$$

nyomatéki egyenlet írható fel. Ha itt elhanyagoljuk a másodrendűen kicsiny mennyiségeket, akkor átrendezés után a nyíróerő és nyomaték között fennálló II. számú összefüggéshez jutunk:

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx} \qquad \text{II.}$$



4.26 ábra. A teher-, a nyíróerő- és a nyomatékfüggvény fokszáma eggyel növekvő. a) *q*: konstans, *T*: lineáris, *M*: 2-fokú, b) *q*: lineáris, *T*: 2-fokú, *M*: 3-fokú, c) *q*: 2-fokú, *T*: 3-fokú, *M*: 4-fokú.

A II. összefüggés egyszeri differenciálása

$$T'(x) = \frac{dT(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2}$$

után – az I. összefüggés felhasználásával – végül felírhatjuk a teher és a nyomaték között érvényes III. számú összefüggést:

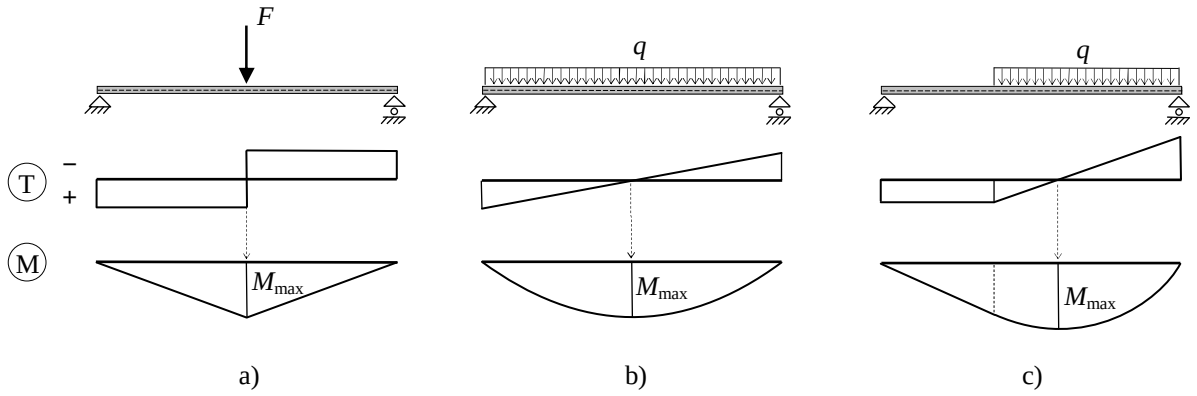
$$-q(x)=\frac{d^2M(x)}{dx^2} \qquad \text{III.}$$

Az előző pontban bemutatott alapesetek vizsgálata és a most levezetett I., II. és III. számú összefüggések alapján elméletileg fontos következtetéseket vonhatunk le és gyakorlatilag hasznos tanulságokat fogalmazhatunk meg. Ezeket a következő nyolc pontban foglaljuk össze.

1) A nyomatékfüggvény deriváltja a nyíróerő-függvény, és a nyíróerő-függvény deriváltja (ellenkező előjellel) a teherfüggvény. A nyomatékfüggvény második deriváltja tehát (ellenkező előjellel) a teherfüggvény. {az I.-II.-III. összefüggések alapján}

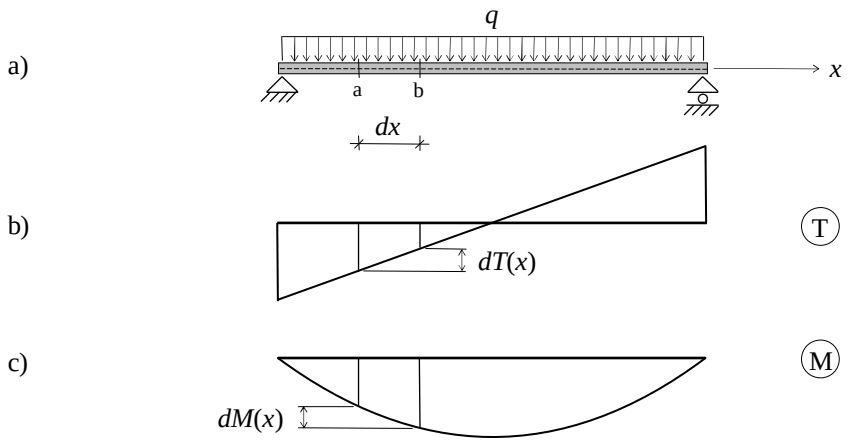
2) A teherfüggvény, a nyíróerő-függvény és a nyomatékfüggvény fokszáma ebben a sorrendben eggyel növekvő (4.26 ábra).

3) A nyomatékábrának ott van szélsőértéke, ahol a nyíróerő-függvény előjelet vált (4.27 ábra). {II.}



4.27 ábra. Ahol a nyíróerő-függvény előjelet vált, ott a nyomatékábrának szélsőértéke van.

4) A teherfüggvény integrálásával a nyíróerő-függvényt kapjuk, annak további integrálásával pedig a nyomatékfüggvényhez jutunk. {I.-II.}



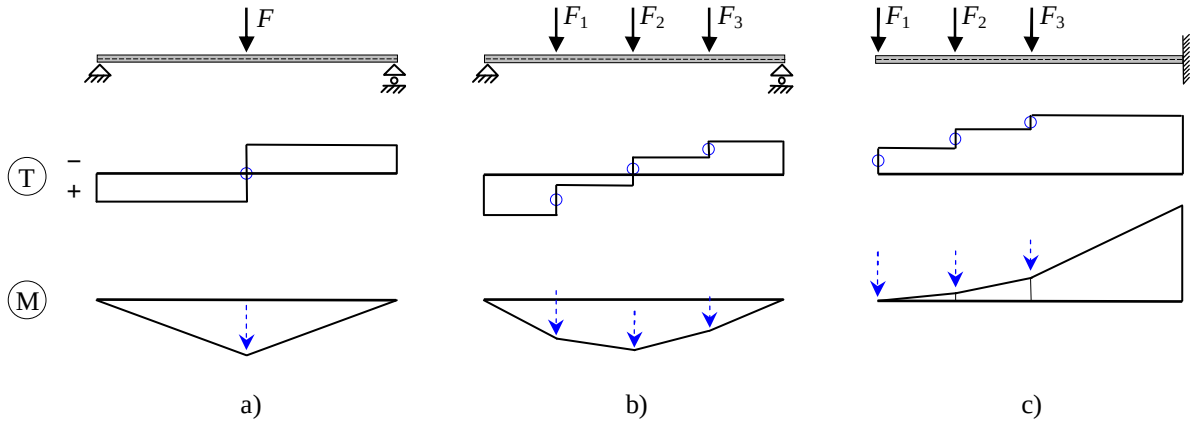
4.28 ábra. Összefüggés a teher, a nyíróerő-növekmény és a nyomatéknövekmény között.

5) Két pont közötti teherábra területe megegyezik a két pont közötti *dT* nyíróerő-

növekménnyel (negatív előjellel) és két pont közötti nyíróerő-ábra területe megegyezik a két pont közötti *dM* nyomaték-növekménnyel (4.28 ábra), vagyis

$$\int_a^b q(x)dx = -dT(x) \qquad \text{és} \qquad \int_a^b T(x)dx = dM(x)$$

6) A koncentrált erővel terhelt keresztmetszet helyén a T-ábrában ugrás, az M-ábrában pedig törés van. Az M-ábra törésébe az erő nyila „beleillik” (4.29 ábra).



4.29 ábra. A koncentrált erő helyén a T-ábrában ugrás (○), az M-ábrában törés (⋎) van.

7) Az igénybevételi ábrák előállítása során a megoszló terhelések nem helyettesíthetők az eredőjükkel.

8) A nyomatékábra mindig a rúd húzott oldalára kerül. (A rúd húzott oldalát a rúd meggörbült vonala segítségével szemléletből is megállapíthatjuk. A gyakorlatban általában így járunk el.)

4.4 Kéttámaszú tartók igénybevételi ábrái

Az előző pontban levezetett összefüggésekre támaszkodva és az alapesetek megoldása során nyert tapasztalatokat felhasználva ebben a részben néhány gyakorló feladatot oldunk meg.

A 4.30/a ábrán vázolt kéttámaszú tartót három koncentrált erő támadja. A harmadik (ferde) erő összetevőkre való felbontása után feltételezzük az egyelőre ismeretlen irányú és nagyságú támaszerők irányát (kék erők a 4.30/a ábrán). A támaszerők meghatározása ezután az első feladat. Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = a_1F_1 + a_2F_2 + a_3F_{3y} - lB = 0$$

nyomatéki egyenlet megoldása a *B* támaszerő értékét szolgáltatja:

$$B = \frac{a_1F_1 + a_2F_2 + a_3F_{3y}}{l} \quad (\uparrow)$$

A „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = -b_1F_1 - b_2F_2 - b_3F_{3y} + lA_y = 0$$

nyomatéki egyenletből megkapjuk az A támaszerő függőleges összetevőjét:

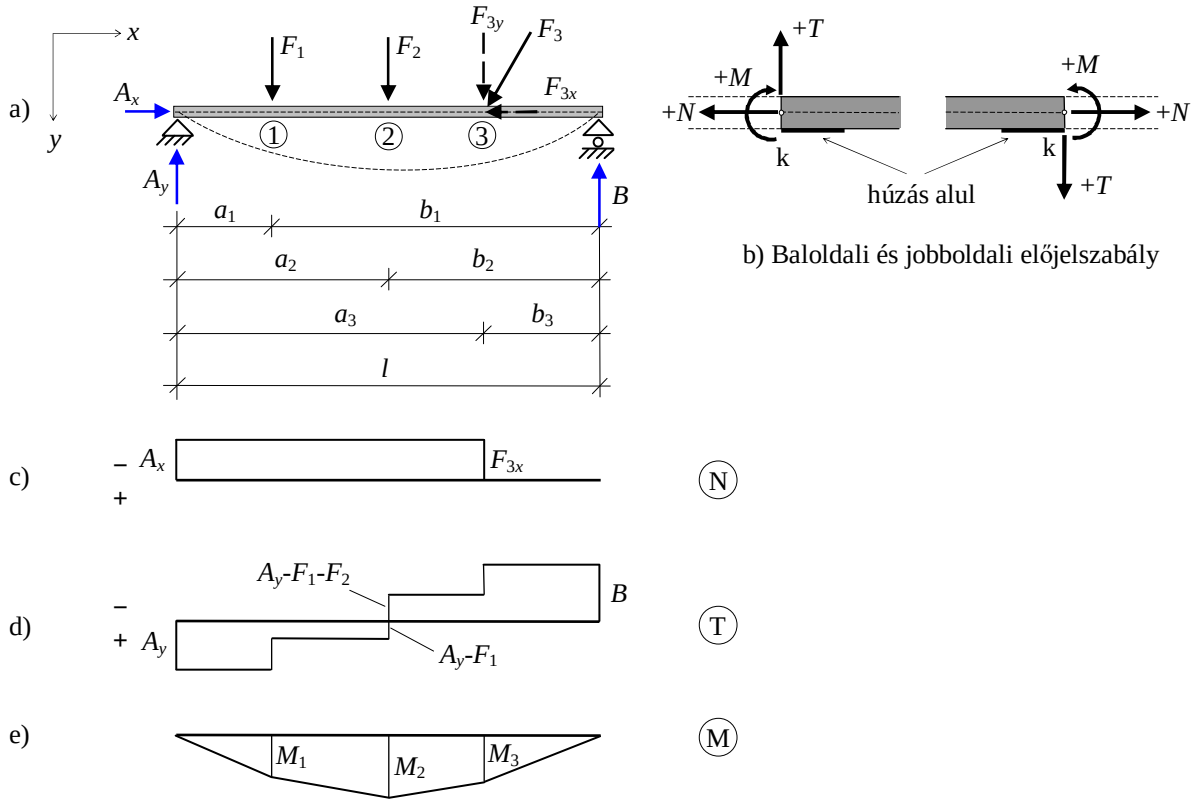
$$A_y = \frac{b_1F_1 + b_2F_2 + b_3F_{3y}}{l} \quad (\uparrow)$$

Az x tengelyre vonatkozó

$$\sum F_{i,x} = A_x - F_{3x} = 0$$

vízszintes vetületi egyenlet csak az A_x támaszerő-összetevőt tartalmazza ismeretlenként, így innen a vízszintes támaszerő-összetevő azonnal meghatározható:

$$A_x = F_{3x} \quad (\rightarrow)$$



b) Baloldali és jobboldali előjelszabály

4.30 ábra. a) Három koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó, b) baloldali és jobboldali előjelszabály, c) normálerő-ábra, d) nyíróerő-ábra, e) nyomatékábra.

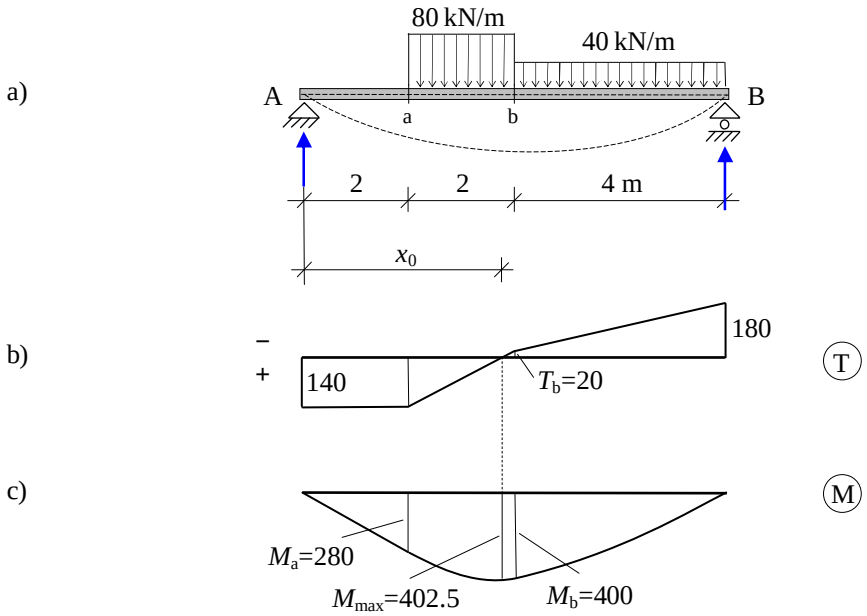
Az A_x vízszintes támaszerő-összetevő a tartó baloldali végén normálerőként működik. A 4.30/b ábra baloldali előjelszabálya szerint ez a normálerő negatív. Ezzel az értékkel indul a normálerő-ábra a tartó baloldali végpontjánál. Ez az érték a „3” pontig nem változik. Ott belép az A_x erővel azonos nagyságú, de ellentétes irányú F_{3x} erő (4.30/c ábra). A normálerő így a 3-B szakaszon zérus.

Az A_y függőleges támaszerő-összetevő a tartó baloldali végén nyíróerőként működik. A 4.30/b ábra baloldali előjelszabálya szerint ez a nyíróerő pozitív. Ezzel az értékkel indul a nyíróerő-ábra a tartó baloldali végpontjánál. Ez az érték érvényes az „1” pontig. Itt belép az

ellenkező irányú F_1 erő, amely a nyíróerő-ábrában ugrást okoz és F_1 értékkel csökkenti az addig érvényes A_y nagyságú nyíróerőt. Az ábra így az A_y-F_1 értékkel megy tovább a „2” pontig. Itt – ugrást okozva a nyíróerő-ábrában – belép az F_2 erő. Az ábra az A_y-F_1-F_2 értékkel – valószínűleg negatív nyíróerőként – megy tovább a „3” pontig. A 3-B szakaszon egyszerűbb jobbról nézni a nyíróerő-ábra alakulását: itt a B támaszerő hat, amely a 4.30/b ábra jobboldali előjelszabálya szerint negatív nyíróerő (4.30/d ábra).

A nyomatékábra a tartó bal végén zérus értékkel kezdődik: nincs az „A” támasztól balra olyan erő, amely nyomatékot okozna az „A” pontban. Az A-1 szakaszon már van nyomatékot okozó erő: az A_y támaszerő az egyre növekvő karjával a baloldali előjelszabály tanúsága szerint a tartó alján húzást előidézve okoz nyomatékot. Ez az érték az „1” pontban $M_1 = a_1A_y$ (4.30/e ábra). Az „1” pontban álló F_1 erő alatt törés van a nyomatékábrában. Az „1” pontot elhagyva és a „2” ponthoz közeledve az A_y támaszerőn kívül most már az F_1 erőnek is van nyomatéka, mégpedig ellenkező értelmű, mint az A_y támaszerőé – ez a tény is jelzi a törést az „1” pont alatt. A nyomaték értéke a „2” pontban: $M_2 = a_2A_y - (a_2\text{-}a_1)F_1$. A tartó meggörbült alakja jelzi, hogy ez az érték is pozitív, vagyis ez az érték is alulra kerül a nyomatékábrán. A „3” pontban ébredő nyomatékot jobbról, a jobboldali előjelszabály szerint határozzuk meg: $M_3 = b_3B$. A nyomaték értéke végül a „B” támasznál zérus, hiszen a „B” támasztól jobbra nincs erő amely a „B” pontban nyomatékot okozna.

A 4.31/a ábrán vázolt kéttámaszú tartót az a-b szakaszon egy 80 kN/m, a b-B szakaszon pedig egy 40 kN/m intenzitású egyenletesen megoszló függőleges teher terheli.



4.31 ábra. a) Megoszló erőkkel terhelt kéttámaszú tartó, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

A tartóra vízszintes teher nem hat, így a B támaszerő mellett az A támaszerő is függőleges lesz. Mindkét támaszerőt felfelé mutatónak tételezzük fel.

Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = 80 \cdot 2 \cdot 3 + 40 \cdot 4 \cdot 6 - 8B = 0$$

nyomatéki egyenletből meghatározzuk a B támaszerőt:

$$B = \frac{480 + 960}{8} = 180\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = -40 \cdot 4 \cdot 2 - 80 \cdot 2 \cdot 5 + 8A = 0$$

nyomatéki egyenletből az *A* támaszerő:

$$A = \frac{320 + 800}{8} = 140\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

Az ellenőrzésként felírt

$$\sum F_{i,y} = -140 + 80 \cdot 2 + 40 \cdot 4 - 180 = 0$$

függőleges vetületi egyenlet azt mutatja, hogy jól számoltunk.

A nyíróerő-ábra (4.31/b ábra) balról az $A = 140$ kN értékkel kezdődik és ez az érték érvényes az „a” pont bal oldaláig. Itt belép az ellenkező előjelű nyíróerőt okozó 80 kN/m intenzitású megoszló terhelés és így a „b” pontban a nyíróerő értéke:

$$T_b = 140 - 80 \cdot 2 = -20\,\text{kN}$$

A „B” támasznál a nyíróerő értéke $B = -180$ kN. A „b” és „B” pontok között az egyenletesen megoszló terhelésnek megfelelően a nyíróerő-függvény a −20 és −180 értékeket összekötő ferde egyenes.

A nyomatékábra előállításához szükségünk van a nyíróerő-függvény x_0 zérushelyére (4.31/b ábra). A nyíróerő zérus értékét kifejező

$$T(x_0) = 140 - 80(x_0 - 2) = 0$$

egyenletből:

$$x_0 = 3.75\,\text{m}$$

Ezzel már meghatározhatjuk a nyomaték maximális értékét:

$$M_{\max} = M(x_0) = 140 \cdot 3.75 - 80\frac{1.75^2}{2} = 402.5\,\text{kNm}$$

Mivel a nyomaték értéke a két támasznál zérus, a nyomatékábra már megrajzolható (4.31/c ábra). Precízebb ábra megszerkesztése érdekében kiszámolhatunk még közbenső értéke(ke)t is, például a nyomaték értékét az „a” és „b” pontban:

$$M_{\text{a}} = 140 \cdot 2 = 280\,\text{kNm} \qquad \text{és} \qquad M_{\text{b}} = 140 \cdot 4 - 2 \cdot 80 \cdot 1 = 400\,\text{kNm}$$

A 4.32/a ábrán vázolt kéttámaszú tartót két támasznyomaték, egy ferde erő és az a-c szakaszon egyenletesen megoszló teher terheli. A ferde erő összetevőkre való felbontása

$F_x = 11.55\sin(30°) = 5.775\,\text{kN}$ és $F_y = 11.55\cos(30°) = 10.0\,\text{kN}$

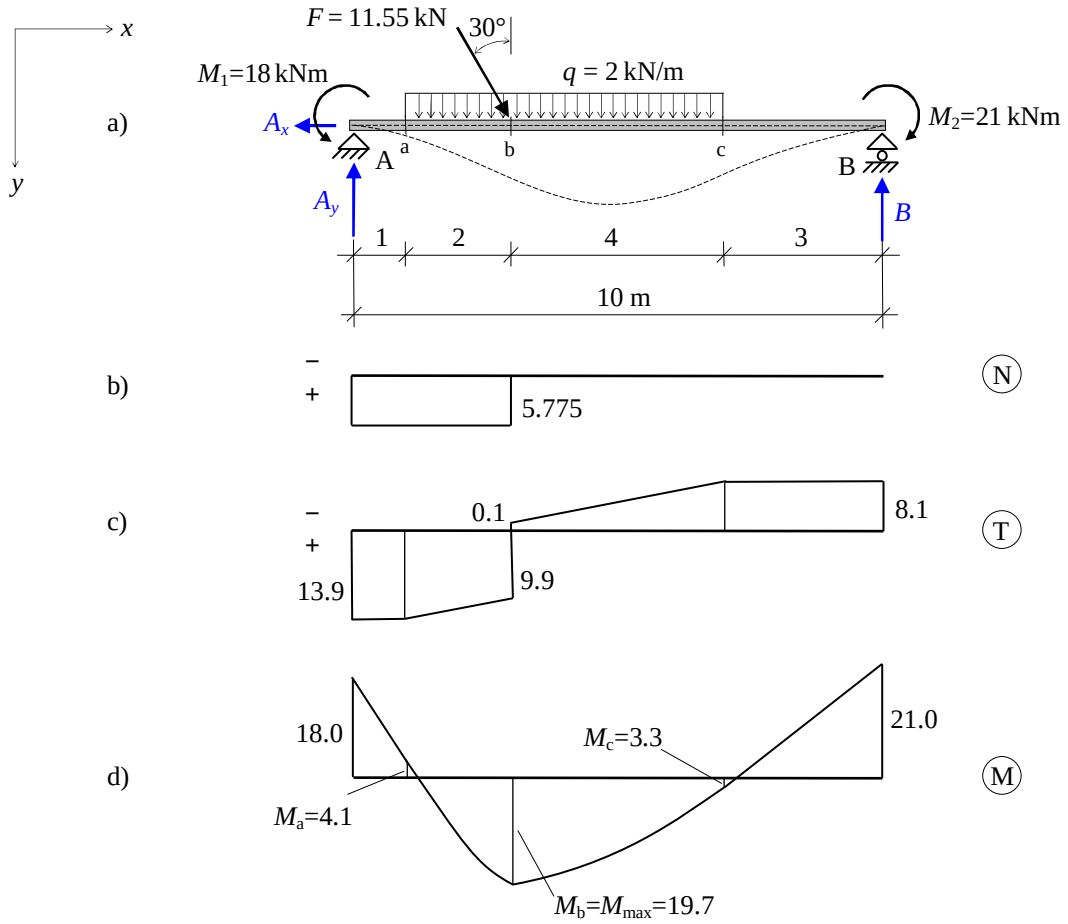
után feltételezzük a támaszerők irányát (kék erők a 4.32/a vázlaton) majd az egyensúlyi egyenletek segítségével meghatározzuk értéküket.

Az „A” támasznál keletkező támaszerő vízszintes összetevőjét a

$$\sum F_{i,x} = 5.775 - A_x = 0$$

vízszintes vetületi egyenletből kapjuk meg:

$$A_x = 5.775\,\text{kN}\ (\leftarrow)$$



4.32 ábra. a) Támasznyomatékokkal, koncentrált erővel és megoszló teherrel terhelt kéttámaszú tartó, b) normálerő-ábra, c) nyíróerő-ábra, d) nyomatékábra.

Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = -18 + 10\cdot 3 + 2\cdot 6\cdot 4 + 21 - 10B = 0$$

nyomatéki egyenletből meghatározzuk a B támaszerőt:

$$B = \frac{-18+30+48+21}{10} = 8.1\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = 21 - 6\cdot 2\cdot 6 - 10\cdot 7 - 18 + 10A_y = 0$$

nyomatéki egyenletből az *A* támaszerő függőleges összetevője:

$$A_y = \frac{18+72+70-21}{10} = 13.9\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A normálerő-ábra (4.32/b ábra) egyszerűen alakul: az A_x = 5.775 kN nagyságú támaszerő-összetevő húzást okoz az „A” pontnál és ez az érték érvényes a „b” pontig. A b-B szakaszon a tartóra nem hat normálerő.

A nyíróerő-ábra (4.32/c ábra) balról az A_y = 13.9 kN értékkel kezdődik és ez az érték érvényes az „a” pontig. Itt belép az ellenkező előjelű nyíróerőt okozó q = 2 kN/m intenzitású megoszló terhelés. A „b” pont baloldalán a nyíróerő értéke:

$$T_{\text{b,bal}} = 13.9 - 2\cdot 2 = 9.9\,\text{kN}$$

A „b” pontnál működik az *F* erő F_y = 10.0 kN nagyságú függőleges összetevője, amely a nyíróerő-ábrában 10 kN nagyságú ugrást okoz. A nyíróerő értéke a „b” pont jobboldalán így:

$$T_{\text{b, jobb}} = 9.9 - 10.0 = -0.1\,\text{kN}$$

A „c” pontig a teljes megoszló teher kifejti hatását, a nyíróerő ott így:

$$T_{\text{c}} = 13.9 - 6\cdot 2 - 10.0 = -8.1\,\text{kN}$$

Ez az érték a „B” támaszig már nem változik.

A nyomatékábrát (4.32/d ábra) balról vizsgálva, a nyomatékfüggvény a baloldali M_1 = 18 kNm támasznyomatékkal kezdődik. Az ábrán ezt az értéket felülre mérjük fel, mert a nyomaték felül okoz húzást. Jobbra haladva, ezt az értéket a támaszerő ellenkező előjelű nyomatéka csökkenti. Az „a” ponthoz érve a nyomaték értéke:

$$M_{\text{a}} = -18 + 13.9\cdot 1 = -4.1\,\text{kNm}$$

A nyíróerő-függvény a „b” pontnál vált előjelet, a nyomaték-függvénynek így ott (helyi) maximuma van. Ez az érték:

$$M_{\text{b}} = M_{\text{max}} = -18 + 13.9\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 1 = 19.7\,\text{kNm}$$

A nyomatékábrát most jobbról vizsgálva, a tartó jobbszélén a nyomatékfüggvény értékét a „B” támasznál működő M_2 = 21 kNm támasznyomaték adja meg. A jobboldali előjelszabály szerint ez az érték negatív. A nyomaték felül okoz húzást, így felülre mérjük fel. Továbbra is jobbról számolva, a nyomatékfüggvény értéke a „c” pontban:

$$M_{\text{c}} = -21 + 8.1\cdot 3 = 3.3\,\text{kNm}$$

A nyomatékábrát így előállítottuk. A függvény az A-a és c-B szakaszokon lineáris, az a-b és b-c szakaszon pedig másodfokú. A függvénynek a „b” pontban (a helyi maximum helyén) töréspontja van. Az *F* koncentrált erő nyila „beleillik” ebbe a törésbe.

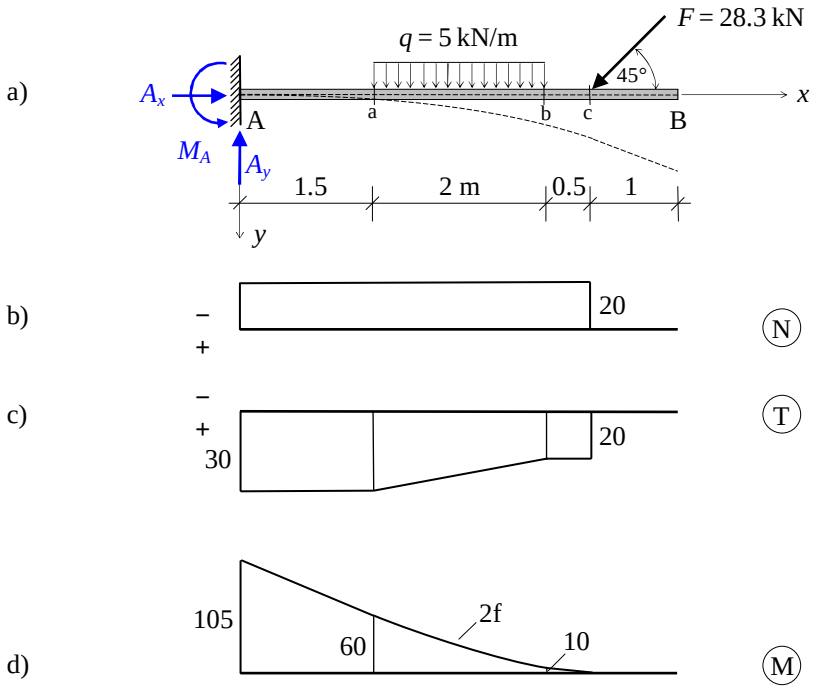
4.5 Konzolos tartók igénybevételi ábrái

A 4.33/a ábrán látható, baloldalon befogott és a jobb oldalon szabad végű konzolos tartót megoszló teher terheli az a-b szakaszon és ferde koncentrált erő terheli a „c” pontban. Bár a konzolos tartók igénybevételi ábráinak meghatározásához nincs szükség a támaszerők ismeretére, először – gyakorlásképpen – a támaszerőket számítjuk ki.

A ferde erő két összetevője:

$$F_x = 28.3\cos(45°) = 20.0\ \text{kN} \qquad \text{és} \qquad F_y = 28.3\sin(45°) = 20.0\ \text{kN}$$

A támaszerők irányának feltételezése után (kék erők a 4.33/a vázlaton) két vetületi és egy nyomatéki egyenletet írunk fel.



4.33 ábra. a) Konzolos tartó szakaszosan megoszló teherrel és koncentrált erővel, b) normálerő-ábra, c) nyíróerő-ábra, d) nyomatékábra.

A befogásnál keletkező támaszerő vízszintes összetevőjét a

$$\sum F_{i,x} = -20.0 + A_x = 0$$

vízszintes vetületi egyenlet szolgáltatja:

$$A_x = 20.0\ \text{kN}\ (\rightarrow)$$

A befogásnál keletkező támaszerő függőleges összetevőjét a

$$\sum F_{i,y} = 20.0 + 5 \cdot 2 - A_y = 0$$

függőleges vetületi egyenletből kapjuk meg:

$$A_y = 30.0\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A befogási támasznyomatékot az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = 2 \cdot 5 \cdot 2.5 + 20 \cdot 4 - M_A = 0$$

nyomatéki egyenletből számítjuk ki:

$$M_A = 105\,\text{kNm}\ (\circlearrowleft)$$

A normálerő-ábrát (4.33/b ábra) a tartó jobboldali szabad végétől balra haladva állítjuk elő. A B-c szakasz terheletlen, így ott a normálerő-ábra zérus. A „c” pontban belép az F erő 20 kN nagyságú vízszintes összetevője, ami nyomást okoz. Ez az érték érvényes az „A” pontig.

A nyíróerő-ábrát (4.33/c ábra) is a tartó jobboldali szabad végétől balra haladva állítjuk elő. A B-c szakaszon nincs erő, így ott a nyíróerő-ábra (is) zérus. A „c” pontban belép az F erő 20 kN nagyságú függőleges összetevője, ami pozitív előjelű nyírást okoz. Ez az érték érvényes a „b” pontig. A b-a szakaszon pozitív nyíróerőt okozva a q = 5 kN/m egyenletesen megoszló teher működik és a nyíróerő értéke az „a” pontban így:

$$T_\text{a} = 20 + 5 \cdot 2 = 30.0\,\text{kN}$$

Ez az érték – külső teher hiányában – az a-A szakaszon már nem változik.

A nyomaték a tartó jobb végén zérus (4.33/d ábra). Balra haladva a „c” pontig ez a zérus érték nem változik. Itt belép az F erő 20 kN nagyságú függőleges összetevője, amely növekvő karjával a „b” pontban

$$M_\text{b} = -20 \cdot 0.5 = -10.0\,\text{kNm}$$

nyomatékot okoz. A b-a szakaszon működő q = 5 kN/m egyenletesen megoszló teher további nyomatékot okoz (az F erő függőleges összetevője mellett) és a nyomaték értéke az „a” pontban

$$M_\text{a} = -20 \cdot 2.5 - 5 \cdot 2 \cdot 1 = -60.0\,\text{kNm}$$

Balra tovább haladva új erő már nem lép be, de a nyomaték értéke tovább nő, mert nő az F erő függőleges összetevőjének és a megoszló teher eredőjének a karja. Az „A” pontot elérve ez a nyomaték

$$M_\text{A} = -20 \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 2.5 = -105.0\,\text{kNm}$$

A c-b és a-A szakaszon a nyomatékfüggvény lineáris, a b-a szakaszon pedig másodfokú.

A 4.34/a ábrán látható, jobboldalon befogott és baloldalon szabad végű konzolos tartót a teljes hossza mentén q = 8 kN/m intenzitású egyenletesen megoszló teher terheli és hat még rá a tartó baloldali szabad végén egy F = 20 kN nagyságú, felfelé mutató koncentrált erő is.

A tartóra csak függőleges erők hatnak, így az „A” befogott támasznál vízszintes erő nem

keletkezik. Feltételezzük az „A” befogásnál keletkező támaszerők irányát (kék erő és nyomaték a 4.34/a vázlaton). A befogásnál keletkező függőleges támaszerőt a

$$\sum F_{i,y} = -20.0 + 10 \cdot 8 - A_y = 0$$

függőleges vetületi egyenletből kapjuk meg:

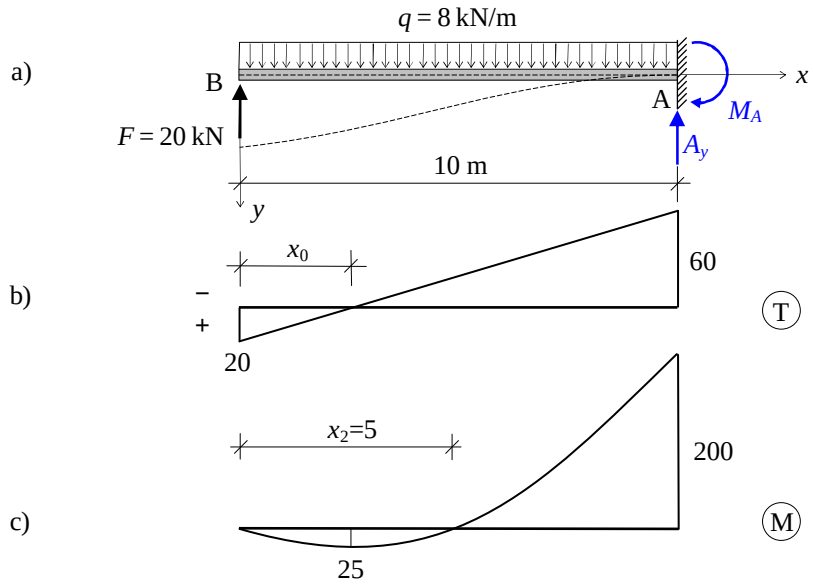
$$A_y = 60.0\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A befogási támasznyomatékot az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = 20 \cdot 10 - 8 \cdot 10 \cdot 5 + M_A = 0$$

nyomatéki egyenletből számítjuk ki:

$$M_A = 200\,\text{kNm}\ \ (\circlearrowleft)$$



4.34 ábra. a) Konzolos tartó megoszló teherrel és koncentrált erővel, b) nyíróerő-ábra, c) nyomatékábra.

A nyíróerő-ábrát balról, a konzol szabad végén működő $F = 20$ kN erő okozta pozitív nyíróerővel kezdjük (4.34/b ábra). A konzolvégtől jobbra haladva ezt az értéket azonnal elkezdi csökkenteni a $q = 8$ kN/m intenzitású egyenletesen megoszló teher okozta nyíróerő. A tartó jobb szélén a befogásnál a nyíróerő így

$$T_A = 20 - 8 \cdot 10 = -60.0\,\text{kN}$$

A tartó két végpontja között a nyíróerő-függvény lineáris.
A nyomatékfüggvény előállításához szükségünk van a nyíróerő-függvény zérushelyére. A

$$T(x) = 20 - 8x$$

nyíróerő-függvény segítségével ez az érték könnyen meghatározható:

$$T(x_0) = 20 - 8x_0 = 0 \qquad \text{innen:} \qquad x_0 = 2.5\,\text{m}$$

A nyomatékfüggvény (4.34/c ábra):

$$M(x) = 20x - 8x\frac{x}{2} = -4x^2 + 20x$$

A tartó két végén ez a függvény az

$$M(0) = -4x^2 + 20x = 0 \qquad \text{és} \qquad M(10) = -4x^2 + 20x = -400 + 200 = -200\,\text{kNm}$$

értékeket adja. A nyomaték maximuma az $x_0 = 2.5$ m-nél:

$$M_{\max} = M(2.5) = -4 \cdot 2.5^2 + 20 \cdot 2.5 = 25\,\text{kNm}$$

A nyomatékfüggvény zérushelyeit az

$$M(x) = -4x^2 + 20x = x(20 - 4x)$$

egyenlet segítségével könnyen meghatározhatjuk:

$$x(20 - 4x) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{és} \quad x_2 = 5$$

Így a másodfokú nyomatékfüggvény négy pontját meghatároztuk, amelyek segítségével a függvény könnyen megszerkeszthető.

A következő feladat tárgya egy *q* egyenletesen megoszló teherrel terhelt, *l* hosszúságú rúd, amelyet szimmetrikusan, két ponton támasztunk alá. Ha a két támaszt a rúd két végpontjában helyezzük el (4.35/a ábra), akkor a tartón keletkező legnagyobb nyomaték értéke $M_{(1)} = ql^2/8$. (Ezzel a feladattal a 4.2.2 pontban részletesen foglalkoztunk.) Ha viszont a két támaszt a végpontoktól befelé mozdítjuk el, például *b* távolságra (4.35/b ábra), akkor a legnagyobb nyomaték értéke csökken ($M_{(2)} < M_{(1)}$). Feladatunk legyen annak megállapítása, hogy hova helyezzük el két támaszt, úgy, hogy a tartón a maximális nyomaték értéke a lehető legkisebb legyen (4.35/c ábra).

A támaszerők a szimmetriának köszönhetően azonosak és értékük:

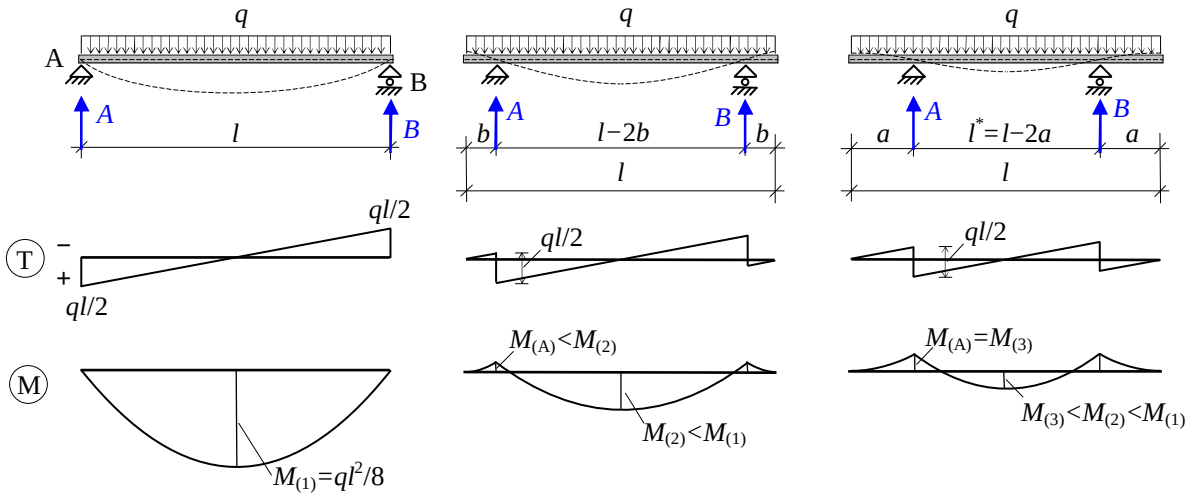
$$A = B = \frac{ql}{2} \ (\uparrow)$$

Az optimális helyzetet jellemezzük *a* hosszúságú konzolokkal. Az „A” támasznál keletkező nyomaték értéke (amely a szimmetriának köszönhetően megegyezik a „B” támasznál keletkező nyomaték értékével):

$$M_{(\text{A})} = \frac{qa^2}{2}$$

Ez a nyomaték a gerenda felső részében okoz húzást és a nyomatékábrán felülre mértük fel (4.35/c ábra). A tartó közepén a teher alul okoz húzást és az ott keletkező nyomaték értéke:

$$M_{(3)} = \frac{ql}{2}\frac{l^*}{2} - \frac{ql}{2}\frac{l}{4} = q\left(\frac{l}{2}\frac{l-2a}{2} - \frac{l^2}{8}\right) = q\left(\frac{l^2}{4} - \frac{2al}{4} - \frac{l^2}{8}\right) = ql\left(\frac{l}{8} - \frac{a}{2}\right)$$



a) b) c)

4.35 ábra. a) Két végén megtámasztott gerenda, b) gerenda kisebb konzolokkal, c) gerenda optimális méretű konzolokkal.

Optimális esetben a támaszoknál felül és a mezőközépen alul keletkező nyomaték azonos, illetve $M_{(A)} = M_{(3)}$, vagyis

$$\frac{qa^2}{2} = ql\left(\frac{l}{8} - \frac{a}{2}\right)$$

Innen átrendezés után az

$$a^2 + la - \frac{l^2}{4} = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek a számunkra érdekes megoldása

$$a = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + l^2}}{2} = \frac{-l \pm l\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}-1}{2}l$$

vagyis:

$$a = 0.207l$$

Ha tehát az l hosszúságú tartót a két végponttól $0.207l$ távolságra támasztjuk meg, akkor a tartón keletkező legnagyobb nyomaték értéke

$$M_{(3)} = ql\left(\frac{l}{8} - \frac{a}{2}\right) = \frac{ql^2}{8}(1 - 0.828) = 0.0215ql^2$$

Ez az érték az eredeti (két végén megtámasztott) rúdon keletkező legnagyobb nyomatéknak mindössze 17 százaléka.

Állítsuk végül elő a 4.36 ábrán látható kéttámaszú konzolos tartók igénybevételi ábráit.

Mindhárom esetben csak függőleges erők terhelik a tartót, így a támaszerők is függőlegesek lesznek.

A 4.36/a ábrán vázolt tartót egyetlen F nagyságú koncentrált erő támadja a tartó jobboldali konzolos végén. A két reakcióerő irányát felfelé mutatónak tételezzük fel. Az A támaszerő értékét a „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = lA + aF = 0$$

nyomatéki egyenlet segítségével határozzuk meg:

$$A = -\frac{Fa}{l}(\downarrow)$$

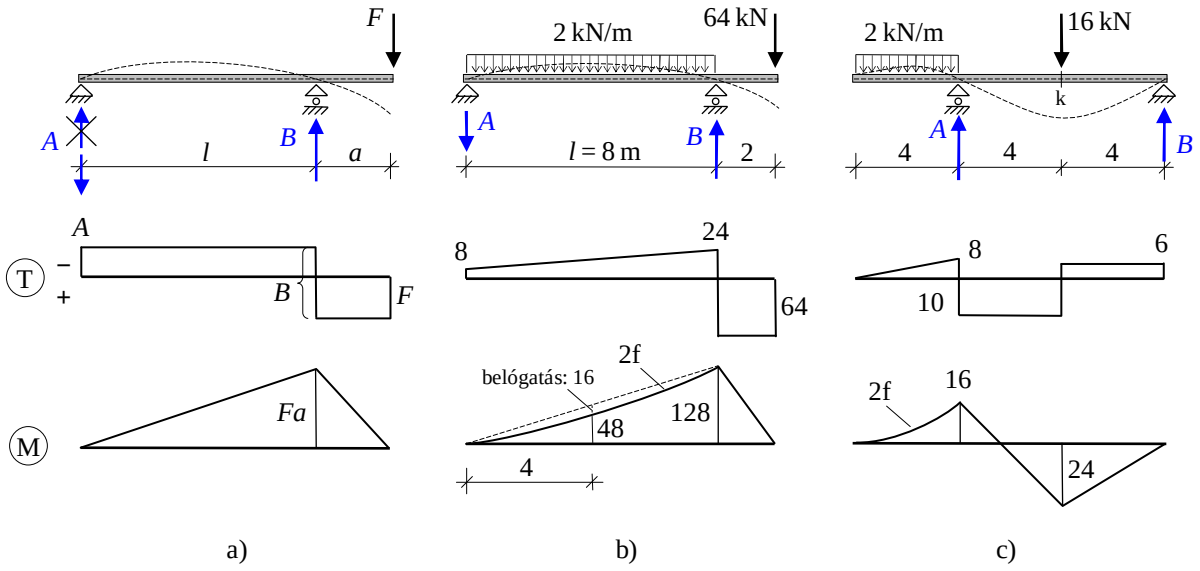
A negatív előjellel kapott eredmény arra figyelmeztet, hogy az A támaszerő irányát rosszul tételeztük fel és a támaszerő nem fölfelé, hanem lefelé mutat. Ezt a tényt azonnal jelöljük az A értéke mellett jobbra és a 4.36/a ábrán is.

Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = -lB + (l + a)F = 0$$

nyomatéki egyenlet szolgáltatja a B támaszerő értékét:

$$B = \frac{F(l + a)}{l}(\uparrow)$$



4.36 ábra. Kéttámaszú konzolos tartók. a) Egy koncentrált erővel, b) megoszló mezőteherrel és koncentrált erővel a konzol végén, c) koncentrált erővel mezőközépen és megoszló konzolteherrel.

A támaszerők ismeretében az igénybevételi ábrák most már előállíthatók. A nyíróerő-

függvény a tartó bal oldalán az *A* támaszerő (negatív) értékével kezdődik. Ez az érték a „B” támaszig nem változik. Ott belép az ellenkező előjelű *B* támaszerő. A két erő különbsége éppen *F* és ez az érték érvényes a tartó jobb széléig.

A nyomatékábra három jellemző értékkel rendelkezik. Az „A” pontnál a nyomaték értéke (balról nézve) azonnal láthatóan zérus. Hasonlóan eljárva, a nyomaték értéke a tartó jobb szélén (jobbról nézve) szintén azonnal láthatóan zérus. A harmadik fontos hely a „B” pont. A nyomaték értéke itt $-Fa$. Ez jobbról nézve azonnal látható, de természetesen balról számolva ugyanerre az eredményre jutunk:

$$M^{(B)} = -Al = -\frac{Fa}{l}l = -Fa\ (\circlearrowleft)$$

A 4.36/b ábrán vázolt tartó terhelése két részből áll: egy $F = 64$ kN nagyságú koncentrált erő a tartó jobboldali konzolos végén és egy $q = 2$ kN/m intenzitású egyenletesen megoszló teher az „A” és „B” támaszok között. Mindkét teher függőleges és lefelé mutat. Az *A* támaszerőt lefelé, a *B* támaszerőt pedig felfelé mutatónak tételezzük fel.

Az *A* támaszerő értékét a „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = -2 \cdot 8 \cdot 4 + 2 \cdot 64 - 8A = 0$$

nyomatéki egyenlet segítségével határozzuk meg:

$$A = \frac{128 - 64}{8} = 8\,\text{kN}\ (\downarrow)$$

A pozitív előjelű eredmény azt mutatja, hogy az *A* támaszerő értékét helyesen tételeztük fel és valóban lefelé mutat.

Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = 64 \cdot 10 + 8 \cdot 2 \cdot 4 - 8B = 0$$

nyomatéki egyenlet szolgáltatja a *B* támaszerő értékét:

$$B = \frac{640 + 64}{8} = 88\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A pozitív előjelű eredmény azt mutatja, hogy a *B* támaszerő értékét is helyesen tételeztük fel és valóban felfelé mutat. A támaszerők ismeretében az igénybevételi ábrák most már előállíthatók.

A nyíróerő-függvény (balról nézve) az *A* támaszerő értékével, negatív nyíróerőként indul. Ehhez az értékhez (8 kN) a „B” támasz felé haladva fokozatosan hozzáadódik a megoszló teherből keletkező (szintén negatív) nyíróerő. A nyíróerő-függvény értéke a „B” támaszhoz végtelen közel balra így

$$T_{\text{B,bal}} = -8 - 2 \cdot 8 = -24\,\text{kN}$$

Itt belép a *B* támaszerő (pozitív nyíróerőként), amely egy 88 kN nagyságú ugrást eredményez a nyíróerő-függvényben. A nyíróerő értéke így a „B” támaszhoz végtelen közel jobbra:

$$T_{\mathrm{B,jobb}} = -8 - 2 \cdot 8 + 88 = 64\,\mathrm{kN}$$

Tovább haladva a tartó jobb oldali végéig ez az érték már nem változik. Ott belép az F = 64 kN erő, amivel a nyíróerő-függvény eljut a záró zérus értékhez.

A nyomatékfüggvény zérus a tartó bal szélén, hiszen az „A” ponttól balra nem található erő, amelynek nyomatéka lenne az „A” pontra. Hasonló a helyzet a tartó jobb végén, az F koncentrált erő támadáspontjában: nincs erő (jobbról nézve), amelynek nyomatéka lenne erre a pontra. A harmadik jellemző pont a „B” támasz. A nyomaték értéke itt (jobbról nézve):

$$M^{(B)} = -(64 \cdot 2) = -128\ \mathrm{kNm}\ (\curvearrowright)$$

Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha a nyomatékot balról határozzuk meg:

$$M^{(B)} = -8 \cdot 8 - 2 \cdot 8 \cdot 4 = -128\ \mathrm{kNm}\ (\curvearrowleft)$$

Itt emlékeztetünk a nyomatékra vonatkozó baloldali és jobboldali előjelszabályra: balról nézve az óramutató járásával ellentétesen forgató nyomaték negatív és a vízszintes gerenda esetében a függvényt felülre kell rajzolni, jobbról nézve az óramutató járásával egyezően forgató nyomaték negatív és a függvényt felülre kell rajzolni.

A teher egyenletesen megoszló jellegének következtében a nyomatékfüggvény az „A” és „B” pont között másodfokú. Az ábra precíz megrajzolása érdekében a támaszköz felénél célszerű kiszámítani a „belógatás” értékét (4.36/b ábra):

$$M^{(\text{belógatás})} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \cdot 8^2}{8} = 16\ \mathrm{kNm}$$

A nyomaték értéke ezek szerint a mezőközépen (l/2=4-nél):

$$M(l/2) = -\left(\frac{128}{2} - 16\right) = -48\ \mathrm{kNm}$$

Valóban, ha a nyomatékot balról kiszámítjuk az $x = l/2 = 4$ helyen, akkor ugyanezt az értéket kapjuk:

$$M(l/2) = -8 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = -48\ \mathrm{kNm}$$

A 4.36/c ábrán vázolt konzolos kéttámaszú tartót egy q = 2 kN/m intenzitású egyenletesen megoszló teher terheli a baloldali konzolos részen és egy F = 16 kN nagyságú koncentrált erő a mezőközépen. Mindkét teher függőleges és lefelé mutat. Mindkét támaszerőt felfelé mutatónak tételezzük fel.

Az A támaszerő értékét a „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = -2 \cdot 4 \cdot 10 - 16 \cdot 4 + 8A = 0$$

nyomatéki egyenlet segítségével határozzuk meg:

$$A = \frac{80 + 64}{8} = 18\,\mathrm{kN}\ (\uparrow)$$

A pozitív előjelű eredmény azt mutatja, hogy az *A* támaszerő értékét helyesen tételeztük fel és valóban felfelé mutat.

Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = -2 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 16 - 8B = 0$$

nyomatéki egyenlet szolgáltatja a *B* támaszerő értékét:

$$B = \frac{64 - 16}{8} = 6 \text{ kN } (\uparrow)$$

A pozitív előjelű eredmény azt mutatja, hogy a *B* támaszerő értékét is helyesen tételeztük fel és valóban felfelé mutat. A támaszerők ismeretében az igénybevételi ábrák most már előállíthatók.

A nyíróerő-függvény a tartó balszélén zérus értékről indul, hiszen ettől a ponttól balra nincs erő, amely nyíróerőt okozna. Jobbra haladva az „A” támaszig, a nyíróerőt a megoszló teher határozza meg. A nyíróerő értéke az „A” támasztól végtelen közel balra:

$$T_{\text{A,bal}} = -2 \cdot 4 = -8 \text{ kN}$$

Az „A” támasznál belép az ellenkező – pozitív – előjelű, $A = 18$ kN értékű támaszerő, amely a függvényben ugrást okoz, amivel a támasztól végtelen közel jobbra a

$$T_{\text{A, jobb}} = -2 \cdot 4 + 18 = 10 \text{ kN}$$

értékhez jutunk. Jobbra haladva ez az érték nem változik, amíg el nem érjük az $F = 16$ kN nagyságú, negatív nyíróerőt jelentő koncentrált erőt. Ez az erő ugrást eredményez a nyíróerő-függvényben, amelynek az értéke az erő „k” támadáspontjától végtelen közel jobbra:

$$T_{\text{k, jobb}} = -2 \cdot 4 + 18 - 16 = -6 \text{ kN}$$

Ez az érték érvényes jobbra haladva a „B” támaszig, ahol a belépő $B = 6$ kN támaszerő zérusra zárja a nyíróerő-függvényt.

A nyomatékfüggvény most négy jellemző érték meghatározásával szerkeszthető meg. A tartó bal szélén a nyomaték értéke zérus, hiszen ettől a ponttól balra nincs erő, amely nyomatékot okozhatna a tartó bal szélén. Ahogy jobbra haladunk, a megoszló teher figyelembe vehető része egyre nagyobb nyomatékot okoz az éppen aktuális pontban. Ez az érték az „A” pontnál:

$$M^{(\text{A})} = -2 \cdot 4 \cdot 2 = -16 \text{ kNm } (\curvearrowleft)$$

A negatív nyomatékot a vízszintes gerendánk esetében felülre mérjük fel. Az egyenletesen megoszló teher jellegének megfelelően a nyomatékfüggvény ezen a szakaszon másodfokú.

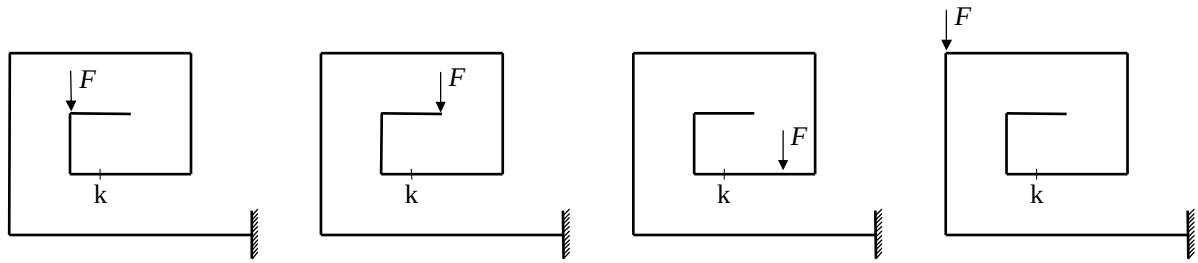
Átugorva a tartó jobb szélére a „B” támaszhoz, és jobbról vizsgálva a tartót, azt látjuk, hogy teher híján a nyomatékfüggvény értéke a tartó jobb szélén zérus. Balra haladva a „k” pont felé, és továbbra is jobbról vizsgálja a tartót, a $B = 6$ kN nagyságú támaszerő okoz nyomatékot az éppen aktuális pontban, mégpedig a karjának növekedésével arányos módon, lineárisan növekvő mértékben. Ez a nyomaték a jobboldali előjelszabály szerint pozitív (mert az óramutató járásával ellentétesen forgat), ezért a nyomatékábrán alulra kerül. Értéke a „k” pontban:

$$M^{(k)} = -(-6 \cdot 4) = 24 \text{ kNm } (\circlearrowright)$$

A „k” és „A” pontok között nincs teher, így a már meghatározott két pontot ($M^{(k)}$=24 és $M^{(A)}$=−16) csak össze kell kötni.

4.6 Ferde helyzetű és törttengelyű tartók

Az eddig tárgyalt vízszintes elrendezésű és egyenestengelyű tartókhoz képest a ferde helyzetű és törttengelyű tartók vizsgálata semmiféle elméleti többletnehézséget nem okoz. A ferde helyzetű tartók esetében általában szükségessé válik az erők felbontása rúdtengely irányú és arra merőleges összetevőkre. Oktatási tapasztalataink azt mutatják, hogy törttengelyű tartóknál esetenként nehézséget okozhat az előjelszabály alkalmazása. Nem egyszerű és magától értetődő ugyanis például a 4.37 ábrán vázolt tartó esetében eldönteni, hogy az F erő az előjelszabály elveinek megfelelően a vizsgált („k”) keresztmetszettől jobbra vagy balra van.



a) b) c) d)

4.37 ábra. Törttengelyű tartó, a) és b) erő a ’k’ keresztmetszettől balra, c) és d) erő a ’k’ keresztmetszettől jobbra.

Ilyen extrém alakú tartók a gyakorlatban szerencsére ritkán fordulnak elő, de még a többszörösen megtört alakú tartók vizsgálata során előálló nehézségek is némi gyakorlattal könnyen leküzdhetőek. Ezt segíti az alábbiakban bemutatandó néhány példa.

A 4.38/a ábra két oszloppal és egy gerendával rendelkező, úgynevezett kéttámaszú keretet ábrázol. Feladatunk az igénybevételi ábrák előállítása.

Tételezzük fel, hogy az F_1 függőleges erő a vízszintes gerenda közepén $L/2$-nél, az F_2 vízszintes erő pedig a H magasság felében hat. Az alakhelyes igénybevételi ábrák megrajzolhatósága érdekében azt is feltételezzük, hogy a függőleges erő jóval nagyobb a vízszintes erőnél, vagyis hogy $F_1 >> F_2$.

Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = F_1 \frac{L}{2} - F_2 \frac{H}{2} - BL = 0$$

nyomatéki egyenletből a B támaszerőt mint az egyetlen ismeretlent azonnal meghatározhatjuk:

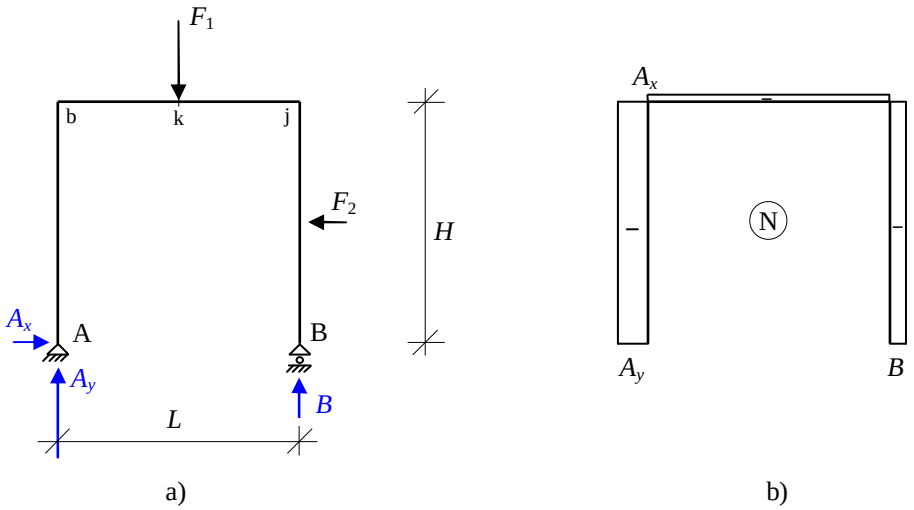
$$B = \frac{F_1 L - F_2 H}{2L} = \frac{F_1}{2} - \frac{F_2 H}{2L} \ (\uparrow)$$

A vízszintes vetületi egyenlet

$$\sum F_{i,x} = A_x - F_2 = 0$$

szolgáltatja az *A* támaszerő vízszintes összetevőjét:

$$A_x = F_2 \ (\rightarrow)$$



4.38 ábra. a) Kéttámaszú keret, b) N-ábra.

A „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = -F_1 \frac{L}{2} - F_2 \frac{H}{2} + A_y L = 0$$

nyomatéki egyenletből megkapjuk az *A* támaszerő függőleges összetevőjét:

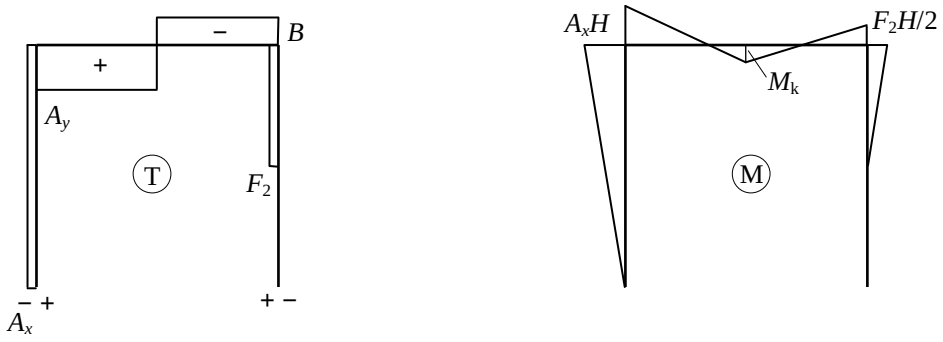
$$A_y = \frac{F_1 L + F_2 H}{2L} = \frac{F_1}{2} + \frac{F_2 H}{2L} \ (\uparrow)$$

Minden adat rendelkezésre áll az igénybevételi ábrák előállításához.

Először az N-ábrát készítjük el (4.38/b ábra). Az „A” támasztól – balról – indulunk. A függőleges oszlopot az „A” pontban az A_y nyomja. Fölfelé – „jobbra” – haladva a helyzet nem változik, így a baloldali oszlop mentén végig A_y értékű nyomás érvényesül. A bal felső „b” jelű sarokpontban áttérünk a vízszintes gerendára. A sarokponttól végtelen közel jobbra az összes baloldali erő (A_x és A_y) közül az A_x jelent normálerőt. Ez az erő balról nyomja a vízszintes gerendát. A helyzet nem változik, amíg el nem érünk a gerenda „j” jelű jobboldali végéig. (Ugyan a gerenda közepénél belép az F_1 erő, de ez az erő merőleges a rúdtengelyre, így normálerőként nem jön szóba.) A „j” sarokpontot lefelé elhagyva, megállunk a sarokponthoz végtelen közel. Most az ettől a ponttól „jobbra” – esetünkben lefelé – lévő erőket vesszük figyelembe. Két ilyen erő van: az F_2 erő és a *B* támaszerő. Az F_2 erő merőleges a rúdtengelyre, így normálerőként nem jön szóba. A *B* támaszerő nyomja a „j” sarokponttól végtelen közel lefelé lévő keresztmetszetet, így a normálerő-ábra itt *B* nagyságú nyomóerőt mutat. Ez a helyzet lefelé haladva a „B” támaszig nem változik.

Hasonló módon járunk el a nyíróerő-ábra előállításához (4.39/a ábra). Az „A” támasznál az *A* támaszerő vízszintes összetevője jelentkezik nyíróerőként. A baloldali előjelszabály szerint az A_x negatív nyíróerő. Ez az erő érvényes a „b” pontig. A „b” sarokpontban a tartó 90 fokban törik és az A_x megszűnik nyíróerő lenni. Jelentkezik viszont az A_y támaszerő-összetevő. Ez az

erő a baloldali előjelszabály szerint pozitív nyíróerő. A vízszintes gerenda feléig érvényes A_y mellé itt belép az ellenkező előjelű F_1 erő. A két erő együtt a B támaszerő ellentettjét adja, ami a feltételezett $F_1 >> F_2$ arány esetén nagy valószínűséggel negatív nyíróerőt eredményez. A jobboldal oszlopon a „B” ponttól az F_2 erő támadáspontjáig nincs a rúdtengelyre merőleges erő, így a nyíróerő ott zérus. Az oszlop felső felén az F_2 erő adja a nyíróerőt, ami jobbról – illetve az alsó rúdszakasz eltávolítása után – nézve pozitív.



a) T-ábra b) M-ábra

4.39 ábra. Kéttámaszú keret T- és M-ábrája.

A nyomatékábra (4.39/b ábra) előállítását is az „A” támasznál kezdjük. A függvény itt zérus értékkel indul, hiszen az „A” támasztól balra (illetve lefelé) nincsen erő, aminek nyomatéka lenne. A függőleges oszlopon felfelé haladva az A_y erőnek továbbra sincs nyomatéka, de az A_x erőnek van, mégpedig a karjával arányos mértékben. A „b” sarokponthoz érve ez a nyomaték A_xH értékű. A „b” sarokponttól jobbra tovább haladva belép az A_y erő nyomatéka is. A vízszintes gerenda közepén (a „k” pontban), az F_1 erő támadáspontjánál a nyomaték értéke – balról számolva:

$$M_k = A_y \frac{L}{2} - A_x H$$

Az F_1 erőn túlhaladva (és balról számolva) belép az F_1 erő nyomatéka is. A következő jellemző pont a „j” pont, a kéttámaszú keret jobboldali sarokpontja. A nyomaték itteni értékét egyszerűbb azonban jobbról számolni, amikor is egyetlen erő, az F_2 erő nyomatékát kell meghatározni:

$$M_j = F_2 \frac{H}{2}$$

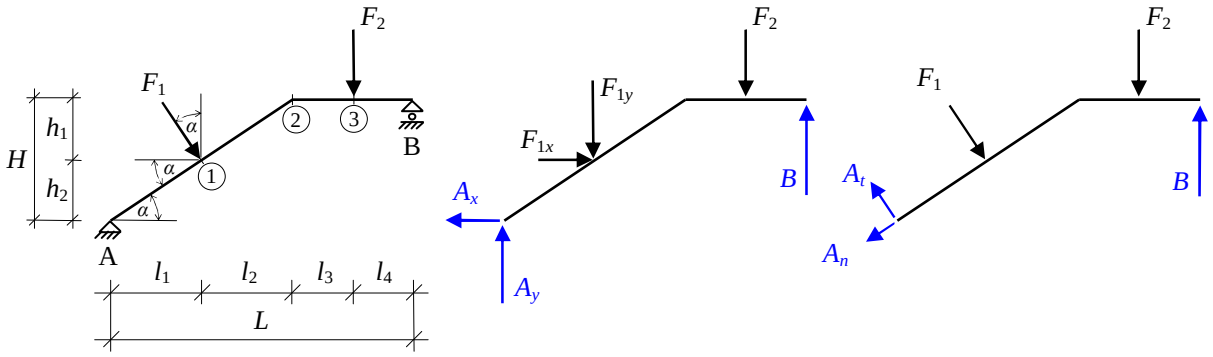
Ez a nyomaték a jobboldali oszlopon lefelé haladva az erő karjának csökkenésével arányosan csökken. Az F_2 erő támadáspontjában a nyomaték értéke zérus, és ez a zérus érték érvényes a „B” támaszig.

Törttengelyű kéttámaszú tartót látunk a 4.40/a ábrán is. Különbséget az előző feladathoz képest az okoz, hogy a tartó az A-2 szakaszon ferde rúddal rendelkezik. A ferde rúd hajlásszöge a vízszintessel legyen α. A tartót két koncentrált erő terheli: az F_1 erő a ferde rúdra, az F_2 erő pedig a vízszintes gerendára merőleges. Az igénybevételi ábrák előállítása során az előző feladat során bemutatott lépésekhez hasonlóan járunk el.

A támaszerők egyszerű meghatározása érdekében először az F_1 erőt felbontjuk egy

vízszintes és egy függőleges összetevőre. Az F_1 erő hatásvonala a függőlegessel α szöget zár be (4.40/a ábra). Így:

$$F_{1x} = F_1 \sin\alpha \ (\rightarrow) \qquad \text{és} \qquad F_{1y} = F_1 \cos\alpha \ (\downarrow)$$



a) b) c)

4.40 ábra. Törttengelyű tartó, a) eredeti terheléssel, b) vízszintes és függőleges terheléssel és támaszerőkkel, c) rúdtengely irányú és rúdtengelyre merőleges erőkkel.

A most már csak vízszintes és függőleges erőkből álló erőrendszer elemeinek ismeretében az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = F_{1x}h_2 + F_{1y}l_1 + F_2(l_1 + l_2 + l_3) - BL = 0$$

nyomatéki egyenletből a B támaszerőt azonnal meghatározhatjuk:

$$B = \frac{F_{1x}h_2 + F_{1y}l_1 + F_2(l_1 + l_2 + l_3)}{L} \ (\uparrow)$$

A vízszintes vetületi egyenlet

$$\sum F_{i,x} = -A_x + F_{1x} = 0$$

szolgáltatja az A támaszerő vízszintes összetevőjét:

$$A_x = F_{1x} \ (\leftarrow)$$

Már csak az A támaszerő függőleges összetevője van hátra. Ezt nyomatéki és y irányú vetületi egyenletből is meghatározhatjuk. Válasszuk a vetületi egyenletet:

$$\sum F_{i,y} = F_{1y} + F_2 - B - A_y = 0$$

Innen:

$$A_y = F_{1y} + F_2 - B \ (\uparrow)$$

Az *x* és *y* irányú támaszerő-összetevők az „A” támasznál (4.40/b ábra) nem használhatók fel közvetlenül normál- és nyíróerő-ábra előállítására, mert nem tengelyirányú és tengelyirányra merőleges erők. Meg kell tehát határozni az A_x és A_y erőkből számítható tengelyirányú és tengelyirányra merőleges A_n és A_t erőket (4.40/c ábra).



a) b)

4.41 ábra. A támaszerő-összetevők felbontása rúdtengely irányú és rúdtengelyre merőleges erőkre. a) A_x felbontása, b) A_y felbontása.

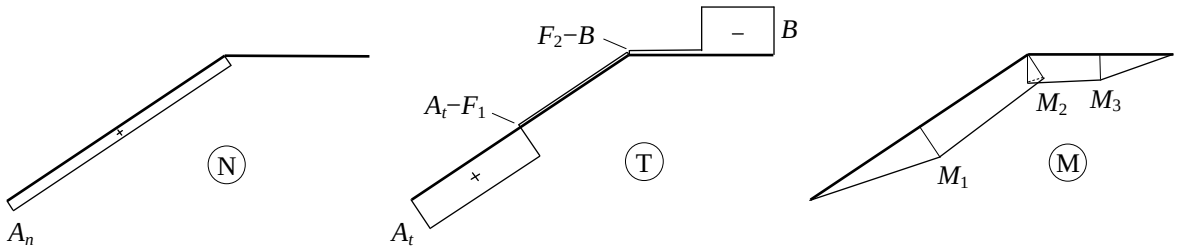
A rúdtengely iránnyal párhuzamos támaszerő-összetevő (4.41 ábra):

$$A_n = A_{xn} - A_{yn} = A_x \cos\alpha - A_y \sin\alpha$$

A rúdtengely irányra merőleges támaszerő-összetevő (4.41 ábra):

$$A_t = A_{xt} + A_{yt} = A_x \sin\alpha + A_y \cos\alpha$$

A tartóra ható A_n, A_t és B támaszerőkkel és az F_1 és F_2 két külső erővel (4.40/c ábra) az igénybevételi ábrák már egyszerűen előállíthatók.



a) b) c)

4.42 ábra. A törttengelyű tartó igénybevételi ábrái: a) N-ábra, b) T-ábra, c) M-ábra.

A 4.41 ábrán feltételezett erőarányok mellett a normálerő-függvény az „A” pontnál A_n húzóerővel indul (4.42/a ábra). A 2. pont felé haladva ez az érték érvényes a 2. pontig, mert az F_1 erőnek nincsen rúdtengely irányú összetevője. A vízszintes rúdszakaszon nincsen normálerő – a „B” támasztól a 2. pontig haladva csak a B és F_2 erők hatnak, amelyeknek nincsen rúdtengely irányú összetevője. A normálerő-függvényt így előállítottuk.

A nyíróerő-függvény az „A” pontnál az A_t erővel indul (4.42/b ábra). Ez az erő a baloldali előjelszabály szerint pozitív előjelű. Az 1. pontban belép az ellenkező előjelű F_1 erő és így az 1. pont másik oldalán a nyíróerő A_t-F_1 lesz. Ez az érték érvényes a 2. pontig. Áttérve a tartó jobb végére, a „B” pontnál a nyíróerőt a B támaszerő adja. A jobboldali előjelszabály szerint ez negatív nyíróerő. Balra haladva ezt az értéket az F_2 értéke csökkenti, így a 3. ponttól

végtelen közel balra a nyíróerő értéke F_2-B. Ez az érték nem változik a 2. pontig.

A nyomatékfüggvény értéke az „A” pontban zérus, hiszen az „A” ponttól balra nincs erő, amelynek nyomatéka lenne az „A” pontra (4.42/c ábra). Az 1. pontban a legegyszerűbben az A_x és A_y támaszerő-összetevők segítségével számíthatjuk ki a nyomaték értékét:

$$M_1 = A_x h_2 + A_y l_1$$

Az „A” támasz és az 1. pont között a függvény lineárisan változik. A többi jellemző értéket jobbról számítjuk ki.

A nyomatékfüggvény értéke a „B” pontban zérus, hiszen a „B” ponttól jobbra nincs erő, amelynek nyomatéka lenne a „B” pontra. A 3. pontban a nyomaték értékét – jobbról számolva – a B támaszerő nyomatéka adja:

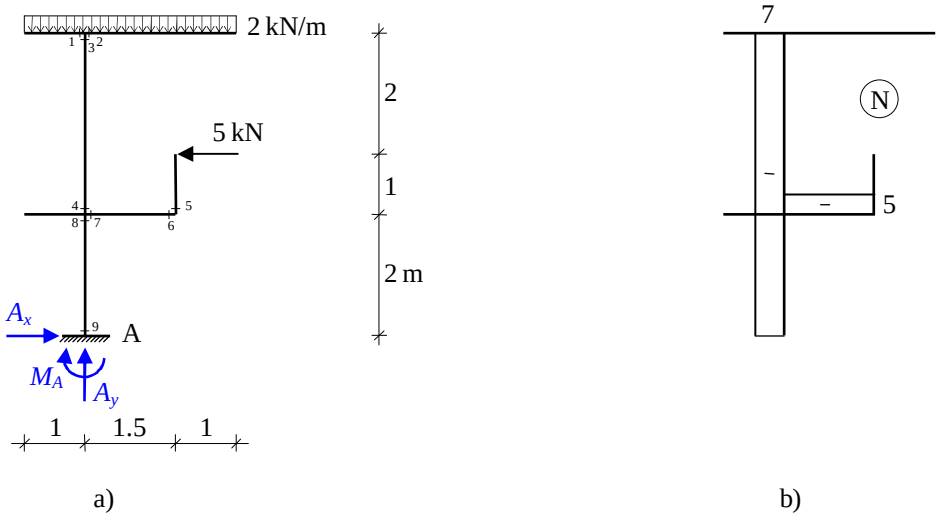
$$M_3 = -(-Bl_4) = Bl_4$$

Balra tovább haladva a vízszintes gerendán, a nyomaték értékét a 2. pontban – jobbról számolva – a B támaszerő és az F_2 erő nyomatékainak különbsége határozza meg:

$$M_2 = -\big(-B(l_3 + l_4) + F_2 l_3\big) = B(l_3 + l_4) - F_2 l_3$$

A 2. és 3. pontok között a függvény lineárisan változik. A 2. pontban most meghatározott értéket a ferde szakasz ábrájának befejezéséhez is felhasználhatjuk: a 2. pontbeli értéket átkörzőzzük a ferde rúd 2. végére, majd ezt a pontot összekötjük az 1. pontbeli M_1 értékkel.0

Törttengelyű, úgynevezett ágas tartót mutat a 4.43/a ábra. A függőleges oszlopról két szinten (2 és 5 méter magasságban) vízszintes gerendák ágaznak el mindkét irányban. A felső (tető-) szint 2 kN/m egyenletesen megoszló terhet hord. Az alsó szinten található vízszintes gerenda a jobboldali végén még egy egyméteres korlátszerű függőleges oszlopot is tart, amelyre egy 5 kN nagyságú balra mutató vízszintes erő hat. Az ágas tartó megtámasztását egyetlen befogás (A) biztosítja és így a konzolos tartók esetében szokásos módon a támaszerők meghatározása nem szükséges az igénybevételi ábrák előállításához.



4.43 ábra. Ágastartó: a) vázlata, b) N-ábrája.

A számítások és eredmények könnyebb azonosítása érdekében a tartó négy csomópontjá-

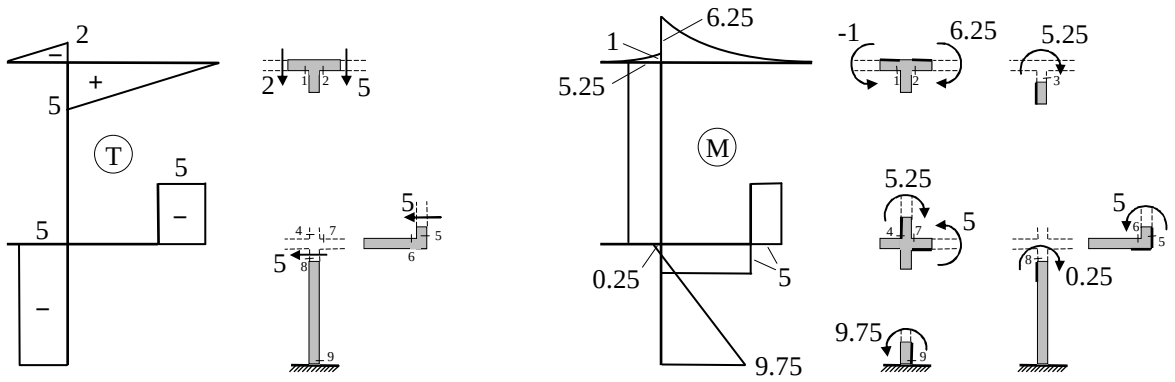
ban, lefelé haladva, a csomópontokhoz végtelen közel összesen kilenc pontot jelöltünk ki.

A normálerő-ábra (4.43/b ábra) igen egyszerűen előállítható. Célszerűen fentről lefelé haladunk. A felső vízszintes gerendára tengelyirányú erő nem hat. A függőleges oszlop felső csomópontja alatt végtelen közel lévő 3. pontban a fölötte lévő gerenda teljes terhe $N_3 = 2 \cdot 3.5 = 7$ kN normálerőként jelentkezik, mégpedig nyomja az oszlopot. Az oszlopon lefelé végig haladva a 9. pontig semmi sem változik, újabb tengelyirányú erő nem lép be, így az $N_3 = 7$ kN nagyságú nyomóerő az oszlopon végig érvényes. A 2 méter magasságban található vízszintes gerenda baloldali 1 méteres szakaszán teher nincs, így ott normálerő sem keletkezhet. A vizsgálatot a másfél méteres jobboldali gerendarészre támaszkodó 1 méteres oszlop tetején folytatjuk. Bár ott van egy 5 kN nagyságú balra mutató erő, ez az erő az 1 méteres oszlop esetében nem jelent normálerőt, mert nem párhuzamos az oszlop tengelyével. Normálerőként jelentkezik viszont ez az erő, amikor „befordulunk” a vízszintes gerendára, vagyis a 6. pontban. Az 5 kN nagyságú erő jobbról nyomja a 6. pontban lévő rúdkeresztmetszetet, így a normálerő ott $N_6 = -5$ kN nagyságú. A helyzet változatlan marad a 7. pontig. Ezzel a normálerő-ábrát előállítottuk.

Hasonló sorrendben járunk el a nyíróerő-ábra megszerkesztése során (4.44/a ábra). A felső gerenda baloldali végén a nyíróerő értéke zérus. A felső csomóponthoz baloldalon végtelen közel az 1. pontban a 2 kN/m intenzitású egyenletesen megoszló teher hatására keletkező nyíróerő értéke $T_1 = 2 \cdot 1 = 2$ kN. Ez az előjelszabály (4.6 ábra) szerint negatív nyíróerő. A felső gerenda jobboldali végén a nyíróerő értéke zérus. Balra haladva, a felső csomóponthoz jobboldalon végtelen közel a 2. pontban a 2 kN/m intenzitású egyenletesen megoszló teher hatására a nyíróerő értéke $T_2 = 2 \cdot 2.5 = 5$ kN. Ez az előjelszabály szerint pozitív nyíróerő.

A 3. pontban a nyíróerő értéke zérus, mert nincs a pont fölött olyan teher amely rúdtengelyre merőleges nyíróerőt okozna. Ugyanez a helyzet a 4. pontban.

Áttérünk az alsó gerendára. A baloldali 1 méteres szakasz terheletlen, így ott nyíróerő sem keletkezik. A jobboldali rész végén a korlát oszlop tetején az 5 kN nagyságú erő negatív nyíróerőt okoz. Ez a -5 kN érvényes az 5. pontig. Befordulva a vízszintes gerendára, a 6. pontban a nyíróerő értéke zérus, mert jobbról nézve nem található nyíróerőt okozó, rúdtengelyre merőleges erő. A helyzet ugyanez a 7. pontban.



a) T-ábra b) M-ábra

4.44 ábra. Ágastartó T- és M-ábrája.

Befordulva a függőleges oszlopra és lefelé haladva, a csomóponttól végtelen közel lefelé a 8. pontban a korlátról származó 5 kN nagyságú erő negatív nyíróerőként jelentkezik. Ugyanez a helyzet a 9. pontban: a pont fölött lévő teherből csak az 5 kN nagyságú koncentrált erő jelent nyíróerőt, mégpedig negatív nyíróerőt. A nyíróerő-ábrát ezzel előállítottuk. A 4.44/a ábrán feltüntettük az 1., 2., 5. és 8. jelű keresztmetszetek vizsgálatához felhasznált

csomóponti vázlatokat is. Mindegyik esetben úgy járhatunk el, hogy a kérdéses keresztmetszetnél átvágjuk a tartót, eltávolítjuk a tartó egyik felét (az eltávolított részeket szaggatottan jelöltük) és összegyűjtjük az eltávolított részekről a rúdtengelyre merőleges erőket. Ezek algebrai összege a kérdéses keresztmetszetben fellépő nyíróerő, amelynek előjelét az előjelszabály (4.6 ábra) adja meg.

A nyomatékábra megszerkesztése során is hasonlóan járunk el és a 4.44/b ábrán feltüntetjük a nyomaték meghatározásához felhasznált csomóponti vázlatokat. A nyomatékot mindig az eltávolítottnak képzelt tartórészről (algebrai összegzéssel) gyűjtjük össze. Az előjelszabállyal kapcsolatosan emlékeztetünk a 4.1 pontban már részletezett (és a 4.6 ábrán szemléletesen ábrázolt) szabályra, amely szerint a nyomatékábrát mindig a rúd húzott oldalára kell rajzolni. Annak eldöntésében hogy melyik a húzott oldal, nagy segítséget nyújtanak a csomóponti vázlatok.

A vizsgálatot a felső gerendán kezdjük. A gerenda bal szélén a nyomaték értéke zérus. A 1. pontnál átvágjuk a gerendát és a baloldali szakaszt eltávolítva képzeljük. Az eltávolított rész 2 kN/m intenzitású egyenletesen megoszló terhével számolva az 1. pontban működő nyomaték:

$$M_1 = -2 \cdot 1 \cdot 0.5 = -1\,\text{kNm}$$

A tartó mellett kirajzolt $\top$ csomóponti vázlat tanúsága szerint ez a negatív nyomaték a gerenda felső szélén okoz húzást (amit vastag vonallal jelöltünk), így ez a nyomatékábra rész a gerendán felülre kerül. A balszélső zérus érték és az 1. pontban számolt érték között a függvény másodfokú parabola megoszlású.

Áttérünk a felső gerenda jobb végére. Itt a nyomaték értéke zérus. Következő lépésként a 2. pontban átvágjuk a gerendát és a jobboldali részt eltávolítva képzeljük. Az eltávolított rész 2 kN/m intenzitású egyenletesen megoszló terhével számolva a 2. pontban a nyomaték értéke:

$$M_2 = 2 \cdot 2.5 \cdot \frac{2.5}{2} = 6.25\,\text{kNm}$$

A csomóponti vázlatunk azt mutatja, hogy ez a pozitív nyomaték a gerenda felső részén okoz húzást (amit most is vastag vonallal jelöltünk), ezért ez az érték is a gerenda felső oldalára kerül. A függvény lefutását a gerenda jobb szélén lévő zérus értékig másodfokú parabola jellemzi.

A következő jellemző pont a 3. pont, amely a felső csomópont alatt végtelen közel van. Átvágjuk itt az oszlopot és a teljes felső részt eltávolítva képzeljük. Ezt a helyzetet is ábrázoltuk a tartótól jobbra egy csomóponti vázlattal. Meghatározzuk az eltávolítottnak képzelt tartórészről a 3. pontban keletkező nyomatékot. A balra lévő 1 méteres szakaszról az óramutató járásával ellentétes, a jobbra lévő 2.5 méteres szakaszról pedig az óramutató járásával azonos értelmű nyomaték származik:

$$M_3 = -2 \cdot 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 2.5 \cdot \frac{2.5}{2} = 5.25\,\text{kNm}$$

A csomóponti vázlatunk azt mutatja, hogy ez a nyomaték az oszlop baloldali oldalán okoz húzást, ezért az 5.25 kNm nagyságú nyomatékot az oszlop baloldalára mérjük fel.

A helyzet a 4. pontig nem változik és ezért a nyomatékfüggvényt a baloldalon a 3. pontban már felmért 5.25 kNm érték jellemzi a 4. pontig.

A vizsgálatot a tartó jobb oldalán, az 1 méteres oszlop tetején folytatjuk. Itt a nyomaték értéke zérus, mert az itt működő 5 kN nagyságú erő karja zérus. A következő jellemző pont az

5. pont, ahol az erőnek már 1 méteres karja van. Itt a nyomaték értéke

$$M_5 = -5 \cdot 1 = -5\,\text{kNm}$$

Vázlatunk tanúsága szerint ez a nyomaték a függőleges korlátoszlop jobb oldalán okoz húzást, így a jobboldalra mérjük fel. A függvény megoszlása az korlátoszlop mentén lineáris. Az alsó sarokpontnál befordulva a vízszintes gerendára, a sarokponttól végtelen közel balra lévő 6. pontban a nyomaték értéke ugyanaz, mint az 5. pontban, hiszen mindkét pont végtelen közel van a sarokponthoz. Az 5 kNm értéket így „átkörzőzzük" a vízszintes gerenda jobb végére. Tovább haladunk a belső csomópontig. Nem változik a helyzet a 7. pontig, hiszen a 6. és 7. pontok között nem változik az 5 kN nagyságú erő karja. A 7. ponthoz tartozó ┼ csomópont vázlata megerősíti azt a tényt, hogy a nyomatékfüggvény a gerenda alsó oldalán van.

Áttérünk az alsó gerenda alatt végtelen közel megjelölt 8. pont vizsgálatára. Az eltávolított teljes felső tartórészről három tételből származik nyomaték:

$$M_8 = -2 \cdot 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 2.5 \cdot \frac{2.5}{2} - 5 \cdot 1 = 0.25\,\text{kNm}$$

Ez a nyomaték a 8. ponthoz tartozó csomóponti vázlat szerint az oszlop bal oldalán okoz húzást. Utolsó lépésben a 9. jelű pontban, a befogási keresztmetszetnél számítjuk ki a nyomatékot. Ez is három részből áll: az első két tétel az előző pontban szerepelt két tétellel azonos, míg a harmadik tag tartalmazza a vízszintes erő 3 méterre megnövekedett karját. A nyomaték így:

$$M_9 = -2 \cdot 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 2.5 \cdot \frac{2.5}{2} - 5 \cdot 3 = -9.75\,\text{kNm}$$

A 9. ponthoz tartozó csomóponti vázlatunk szerint ez a nyomaték az oszlop jobb oldalán okoz húzást, a nyomaték függvény értékét így a jobb oldalon mérjük fel. A 8. és 9. pontok között a függvény lineárisan változik. Bár a számítás elején leszögeztük, hogy az igénybevételi ábrák előállításához nem szükséges a támaszerőket kiszámítani, ez a számítás „automatikusan" megtörtént, hiszen az N_9, T_9 és M_9 értékek ellentettjei megadják az „A" támasz három támaszerő-összetevőjét, amelyeket a 4.43/a ábrán kék nyilakkal jelöltünk.

Mielőtt áttérünk a fejezet utolsó témájára, az előjeles összegzés elvének tárgyalására, az eddigiek alapján összefoglaljuk az igénybevételi ábrák előállításánál követendő eljárás lépéseit és a számítás során érvényes fontosabb megállapításokat és figyelembeveendő fontosabb szabályokat.

I. A támaszerők számítása

Kéttámaszú tartók esetében az igénybevételi ábrák előállítása csak a támaszerők ismeretében lehetséges.

I/1. A számításainkat rendszerint *x-y* derékszögű koordináta-rendszerben végezzük el, ezért ha a tartót ferde erők is támadják, célszerű ezeket felbontani *x* és *y* irányú összetevőkre.

I/2. A rendelkezésre álló egyensúlyi egyenletek segítségével sorban meghatározzuk a támaszerőket. A 4.45 ábrán vázolt kéttámaszú törttengelyű tartó esetében például a

$$\sum M^{(A)} = 0 \qquad \rightarrow \; B$$

$$\sum F_{i,x} = 0 \qquad \rightarrow \; A_x$$

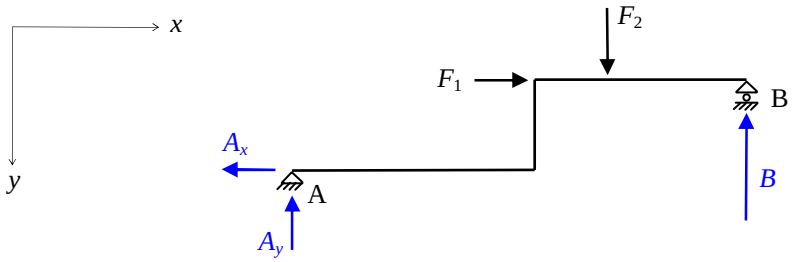
$$\sum M^{(B)} = 0 \qquad \rightarrow \; A_y$$

egyensúlyi egyenleteket alkalmazzuk, amelyek rendre szolgáltatják a három ismeretlen támaszerő(-összetevő)t. A

$$\sum F_{i,y} = 0$$

egyensúlyi egyenletet célszerűen ellenőrzésre használhatjuk.

Ha a vizsgálat tárgya befogott tartó, akkor az igénybevételi ábrák előállítása nem követeli meg a támaszerők meghatározását, de ellenőrzési célból ekkor is célszerű ezt a számítást a vizsgálat elején elvégezni.



4.45 ábra. Törttengelyű tartó.

II. Az igénybevételi ábrák előállítása

II/1. Az igénybevételi ábrák előállításához rúdtengely irányú és rúdtengelyre merőleges erőkre van szükség. Ferde ruda(ka)t tartalmazó tartó esetében ez azt jelenti, hogy szükségessé válhat bizonyos erők felbontása rúdtengely irányú és rúdtengelyre merőleges összetevőkre.

II/2. A számítást mindig a tartó egyik végéről (ágastartó esetében az egyik rúdszakasz végéről) kezdjük. Ettől a ponttól „befelé” haladva sorban jellemző pontokban átvágjuk a tartót és az átvágástól balra, illetve jobbra eltávolítottnak képzeljük a „levágott” tartórészt. Az átvágás helyén fellépő normálerő-, nyíróerő- és nyomatékfüggvény értékének megállapítása során az átvágástól balra (vagy jobbra) lévő összes erőt figyelembe kell venni. (Függőleges rudak esetében képzeletben 90 fokkal elfordítva hozhatunk létre olyan helyzetet, amikor a balra, illetve jobbra helyzetazonosítás érvényesíthető.)

II/3. A számítás során a 4.1 pontban bevezetett előjelszabályt alkalmazzuk, amelyet a 4.46 ábrán megismétlünk. Az előjelszabály értelmezését bal-, illetve jobboldalról számított normálerő, nyíróerő és nyomaték esetében a 4.46/a és 4.46/b ábra mutatja, ahol R_{bal} és R_{jobb} az eltávolítottnak képzelt baloldali, illetve jobboldali tartórészen meghatározott eredő.

A normálerő és nyíróerő előjelének megállapítása során a bal-, illetve jobboldalról számított értékek esetében azonos szabály fogalmazható meg: pozitív az a normálerő, amely a megmaradó tartórészt húzza, és pozitív az a nyíróerő amely a megmaradó tartórészen felvett tetszőleges pont körül az óramutató járásával egyezően forgat. A nyomaték előjelének megállapítása során különbséget kell tenni, aszerint, hogy balról, illetve jobbról számítottuk a nyomaték értékét. Baloldalról számított nyomaték esetében pozitív az előjel, ha a nyomaték az óramutató járásával egyező forgatásértelmű (4.46/a ábra). Jobboldalról számított nyomaték esetében pozitív az előjel, ha a nyomaték az óramutató járásával *ellentétes* forgatásértelmű (4.46/b ábra). A nyomaték esetében azonban az előjel megállapításánál is fontosabb az, hogy

a nyomatékfüggvényt a rúd húzott oldalára rajzoljuk. A húzott oldalt a 4.46/a és 4.46/b ábrákon vastag vonallal jelöltük.



a) b)

4.46 ábra. Előjelszabály. a) a baloldali tartórész eltávolítása esetén, b) a jobboldali tartórész eltávolítása esetén.

II/4. Az elkészült ábrák megrajzolása, illetve ellenőrzése során figyelembe vesszük a teher-, a nyíróerő- és a nyomatékfüggvény között meglévő törvényszerűségek gyakorlati számítások során közvetlenül felhasználható elemeit. Ezek közül a legfontosabbak:

− az *N*, *T* és *M* függvények fokszáma sorrendben eggyel növekvő,
− a nyomatékábrának ott van szélsőértéke, ahol a nyíróerő-függvény előjelet vált,
− a koncentrált erő helyén a nyíróerő-ábrában ugrás, a nyomatékábrában törés van,
− a terhelő erők nyila beleillik a nyomatékábra törésébe.

4.7 Az előjeles összegzés (szuperpozíció) elve

Tartószerkezeteink terhelése általában nem egyetlen teherből áll és így fontos elméleti és gyakorlati jelentőséggel bír az alábbiakban tárgyalt elv, amely *az előjeles összegzés elve*, illetve *a szuperpozíció elve* néven is ismert.

Az előjeles összegzés elve azt mondja ki, hogy minden összetett terhelésű tartó felbontható egyszerűbb terhelésű tartókra. A támaszerők és az igénybevételi ábrák az egyszerűbb terhelésű tartók támaszerőinek és igénybevételi ábráinak algebrai összegeként állíthatók elő. Az előjeles összegzés elvét a 4.47 ábrán illusztráljuk.

A 4.47/a ábrán vázolt tartót két *F* nagyságú koncentrált erő terheli. A tartó és a terhei szimmetrikus elrendezésűek: a két koncentrált erő a tartót az „a” és „b” jelölésű harmadpontokban terheli. A szimmetriának köszönhetően a két támaszerő értéke minden számítás nélkül felírható ($A = B = F$) és az igénybevételi ábrák is azonnal megrajzolhatók. A tartó nyomatékábráját az „a” és „b” harmadpontokban meghatározott értékkel jellemezhetjük, amely egyben a tartó maximális nyomatéka is:

$$M^{(a)} = M^{(b)} = M_{max} = \frac{Fl}{3}$$

Senkinek sem jutna eszébe ezt a tartót a szuperpozíció elvének alkalmazásával vizsgálni; az alábbiakban bemutatott eljárás kizárólag a szuperpozíció elvének illusztrálását szolgálja.

Helyettesítsük az eredeti terhelést két rész-terheléssel: az első esetben a tartót csak az „a” pontban terheli egy *F* erő (4.47/b ábra), a második esetben pedig csak a „b” pontban (4.47/c ábra).

Az első esetben (4.47/b ábra) a „B” pontra felírt

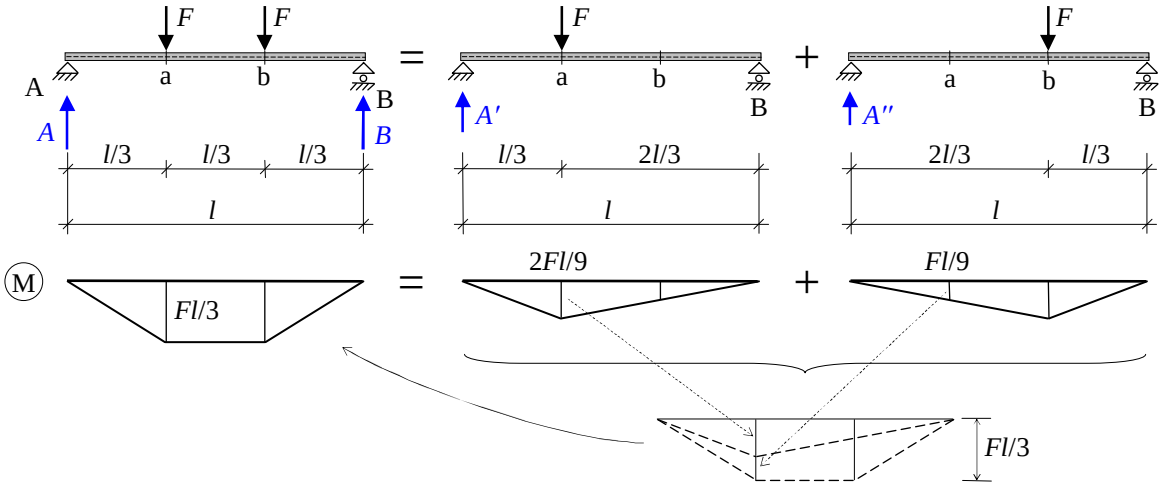
$$\sum M^{(B)} = -F\frac{2l}{3} + A'l = 0$$

nyomatéki egyenletből az A' támaszerő

$$A' = \frac{2}{3} F \ (\uparrow)$$

és a nyomaték értéke az „a” pontban

$$M^{(a)'} = A' \frac{l}{3} = \frac{2}{9} Fl$$



a) eredeti tartó két erővel b) tartó az egyik erővel c) tartó a másik erővel

4.47 ábra. Az előjeles összegzés elve.

A második esetben (4.47/c ábra) a „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = -F \frac{l}{3} + A'' l = 0$$

nyomatéki egyenletből az A'' támaszerő

$$A'' = \frac{1}{3} F \ (\uparrow)$$

és a nyomaték értéke az „a” pontban

$$M^{(a)''} = A'' \frac{l}{3} = \frac{1}{9} Fl$$

A két számítás eredményeit összeadva megkapjuk az eredeti tartó (4.47/a tartó) támaszerejét

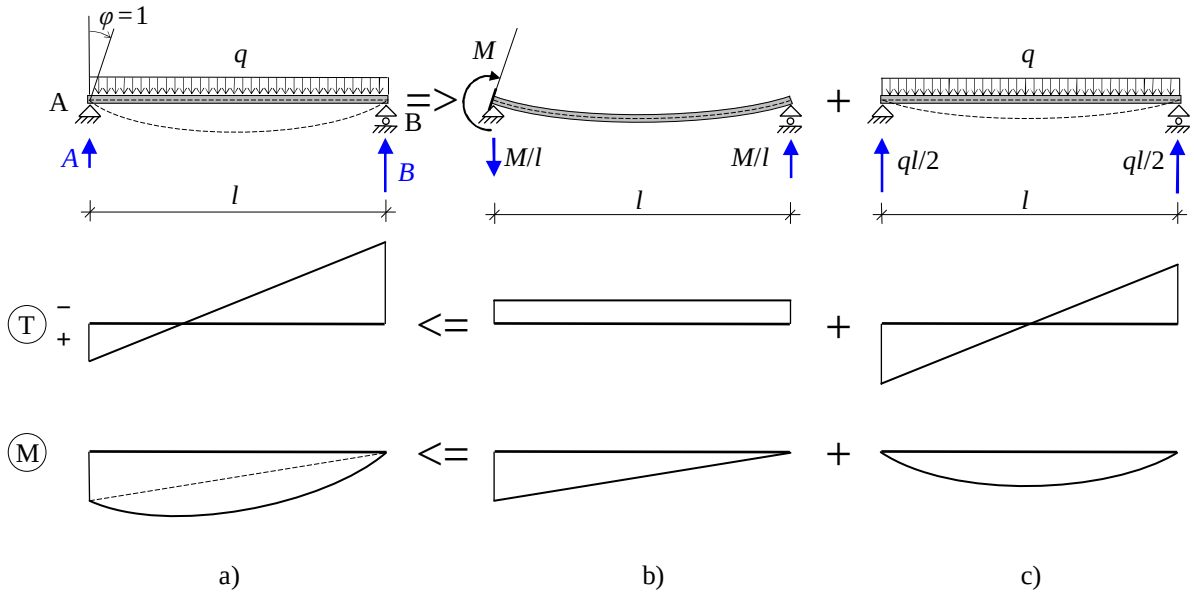
$$A = A' + A'' = \frac{2}{3} F + \frac{1}{3} F = F$$

és a tartót jellemző nyomatékot

$$M^{(a)} = M^{(a)'} + M^{(a)''} = \frac{2}{9}Fl + \frac{1}{9}Fl = \frac{Fl}{3}$$

Bár jelenlegi ismereteink nem terjednek ki a tartó alakváltozásainak meghatározására, már itt megjegyezzük, hogy a szuperpozíció elvének alkalmazása során az érintett terhek alakváltozásokból keletkező terheket is jelenthetnek.

A 4.48/a ábrán vázolt tartó esetében például a q egyenletesen megoszló teherrel terhelt tartó „A” támasza (egy M nyomaték hatására) φ = 1-el még el is fordul. Az elfordulást okozó M nyomaték (későbbi tanulmányaink során megismert) értékének ismeretében a feladat így két részre bontható: foglalkoznunk kell az M nyomaték hatásával (4.48/b ábra) és foglalkoznunk kell a q teher hatásával (4.48/c ábra). Mindkét részeset igen könnyen kezelhető és a megfelelő megoldások összeadásával azonnal végeredményhez – T- és M-ábra – jutunk.



4.48 ábra. Az előjeles összegzés elve. a) eredeti tartó támaszelfordulással és megoszló teherrel, b) a támaszelfordulás hatása, c) a megoszló teher hatása.

Két gyakorlati feladat bemutatásával fejezzük be a szuperpozíció elvének illusztrálását.

A 4.49/a ábra olyan kéttámaszú tartót mutat, amelyet a q egyenletesen megoszló teher mellett a támaszoknál egy-egy koncentrált nyomaték is terhel. A teljes terhelés így három részre bontható és a megoldás a három részeset összegzésével is előállítható. Vonzó lehet a feladat megoldása a szuperpozíció elvének alkalmazásával, mert a részesetek megoldása minden számítás nélkül, azonnal felírható. A T-ábra és M-ábra megszerkesztésekor azt tételezzük fel, hogy a q egyenletesen megoszló teher hatása dominál és $|M_1| > |M_2|$.

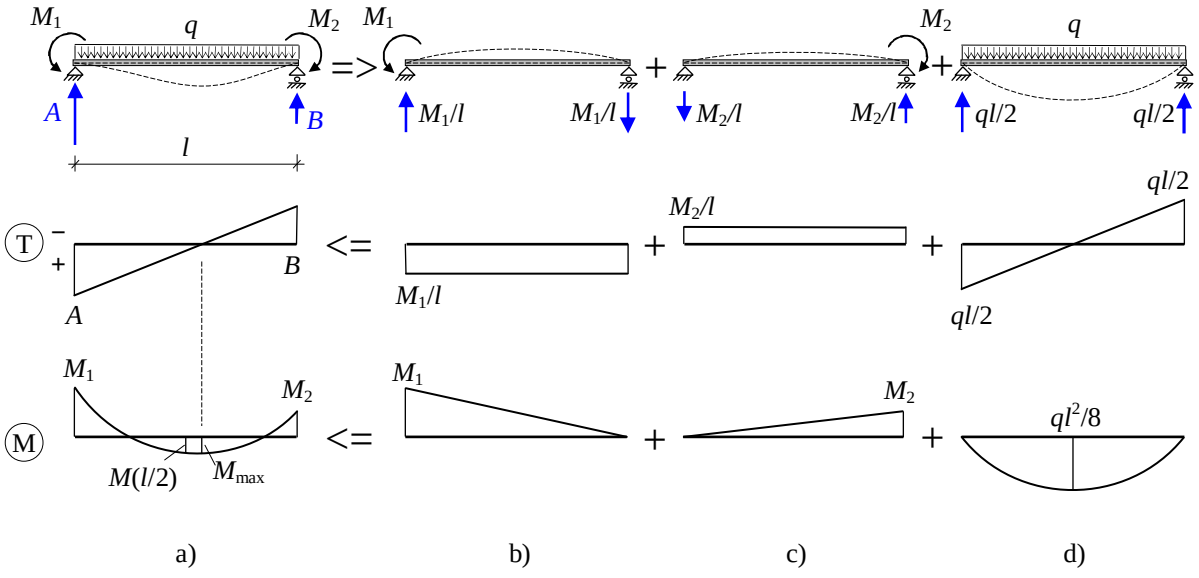
A részmegoldások ismeretében a két támaszerő:

$$A = -\frac{M_1}{l} + \frac{M_2}{l} - \frac{ql}{2} \ (\uparrow) \qquad\qquad B = \frac{M_1}{l} - \frac{M_2}{l} - \frac{ql}{2} \ (\uparrow)$$

A nyomatékfüggvény három jellemző értéke:

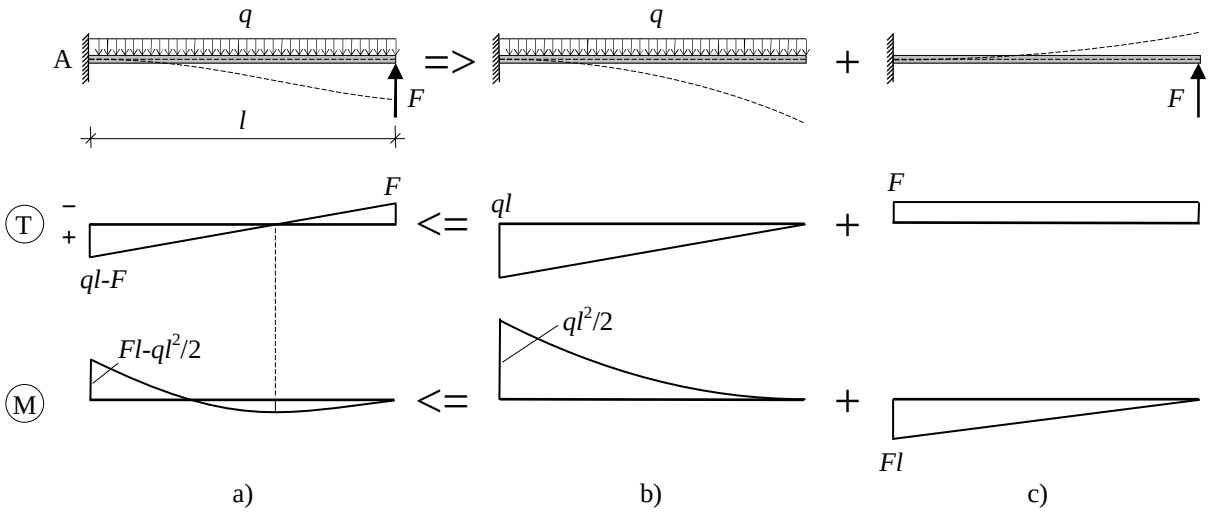
$$M^{(A)} = -M_1, \qquad M(l/2) = -\frac{M_1 + M_2}{2} + \frac{ql^2}{8}, \qquad M^{(B)} = -M_2$$

A három részmegoldás (4.49/b, 4.49/c és 4.49/d ábrák) ábráinak felhasználásával a T- és M-ábra (4.49/a ábra) is azonnal megrajzolható.



4.49 ábra. a) Megoszló teherrel és támasznyomatékokkal terhelt kéttámaszú tartó, b) M_1 támasznyomaték, c) M_2 támasznyomaték, d) megoszló teher.

A 4.50/a ábra befogott tartóját egy lefelé mutató q egyenletesen megoszló teher és egy a konzol végén működő, felfelé mutató F koncentrált erő terheli. A terhelés így két részre bontható és a megoldás a két részeset összegzésével előállítható. A két teherrel kapcsolatban azt tételezzük fel, hogy a q teher hatása a domináló. A részesetek megoldása minden számítás nélkül, azonnal felírható.



4.50 ábra. a) Megoszló teherrel és koncentrált erővel terhelt konzoltartó, b) megoszló teher, c) koncentrált erő.

A két részmegoldás felhasználásával a függőleges támaszerő:

$$A = ql - F$$

és a támasznyomaték:

$$M_A = -\frac{ql^2}{2} + Fl$$

A két részmegoldás (4.50/b és 4.50/c ábrák) ábráinak felhasználásával a T- és M-ábra (4.50/a ábra) is azonnal megrajzolható.

5

Statikailag határozott összetett tartók

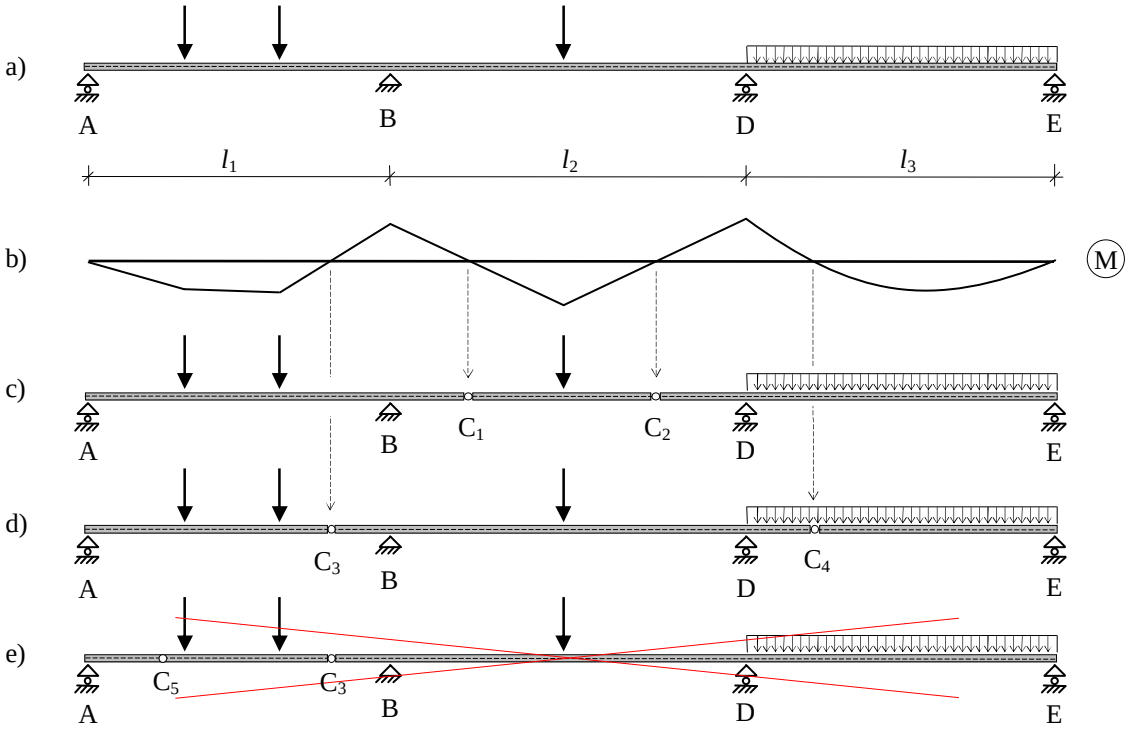
Az előző fejezetben bevezetett alapelvek és bemutatott egyszerű kéttámaszú és konzolos tartók vizsgálata után ebben a fejezetben néhány összetettebb kialakítású tartó igénybevételi ábráinak előállításával, illetve rúderőinek meghatározásával foglalkozunk.

5.1 Csuklós többtámaszú (Gerber-féle) gerendatartók

A többtámaszú tartók általában határozatlan szerkezetek (5.1/a ábra), amelyek esetében az ismeretlenek (támaszerők) száma (f) meghaladja a síkbeli szétszórt tartók esetében felírható egyenletek számát:

$$f > 3$$

Ilyen tartók vizsgálatával későbbi tanulmányaink során a Mechanika III c. tárgy keretein belül részletesen foglalkozunk. Illusztrációs célból most a többtámaszú tartó alatt megrajzoltuk az alakhelyes nyomatékábrát (5.1/b ábra).



5.1 ábra. a) Négytámaszú tartó, b) M-ábra, c) Gerber-tartó I., d) Gerber-tartó II., e) Labilis tartó.

A gyakorlatban sűrűn előfordul, hogy a többtámaszú tartó hosszú gerendáját csuklókkal szakítják meg (5.1/c és 5.1/d ábra) és így a teljes tartó több darabból állítható össze, ami mind

a gyártás, mind a szállítás, mind pedig az építés során előnyös lehet. Ezek az ún. belső csuklók nyomatékot nem, de erőt képesek átadni az általuk összekapcsolt merev testek között. Ily módon könnyen elérhető, hogy határozott tartót alakítsunk ki, amely esetében a jelenlegi ismereteink segítségével is meg tudjuk állapítani a támaszerőket és így elő tudjuk állítani az igénybevételi ábrákat. Ezeket a tartókat csuklós többtámaszú tartóknak nevezzük. A csuklós többtámaszú tartók Gerber-féle tartók, vagy egyszerűen Gerber-tartók néven is ismertek, utalva az első felhasználóra (Heinrich Gottfried Gerber, 1832-1912). Ha a Gerber-tartót többtámaszú tartóból származtatjuk, akkor úgy járunk el, hogy a többtámaszú tartó statikai határozatlanságának megfelelő számú belső csuklót iktatunk be. A csuklók elhelyezése során rendszerint több lehetőség van. Arra hangsúlyozottan ügyelni kell, hogy a keletkező Gerber-tartó állékony legyen, vagyis, hogy ne legyen labilis.

Az 5.1/a ábrán vázolt tartó például öt támaszerőt, illetve támaszerő-összetevőt tartalmaz, így a statikai határozatlanság foka

$$f - 3 = 5 - 3 = 2$$

Ez azt jelenti, hogy a statikailag határozott Gerber-tartó létrehozásához két belső csuklóra van szükség.

Egy lehetséges szerkezeti kialakítást mutat az 5.1/c ábra. A C_1 és C_2 belső csuklók elhelyezésével az eredeti tartót három részre bontottuk. Az A-C_1 gerenda az „A” és „B” támaszok segítségével önmagában is állékony. Hasonló a helyzet az E-C_2 gerendával. A harmadik rész a C_1-C_2 gerenda. Ez a gerenda a C_1 és C_2 pontokon az egyébként állékony A-C_1 és E-C_2 gerendákra támaszkodik, így ez a rész is állékony és ezzel az egész Gerber-tartó állékony. A C_1-C_2 gerenda a levegőben van és az A-C_1 és E-C_2 gerendákon keresztül csak közvetve van megtámasztva. Az ilyen tartót szokás „beakasztott” (vagy „befüggesztett”) tartónak nevezni. Az A-C_1 és E-C_2 gerendákat, amelyek két „saját” megtámasztással rendelkeznek, „sima” tartóknak nevezzük.

Egy másik lehetséges szerkezeti kialakítást mutat az 5.1/d ábra. A C_3 és C_4 belső csuklók elhelyezésével az eredeti tartót most is három részre bontottuk. A C_3-C_4 gerenda a „B” és „D” támaszok segítségével önmagában is állékony. Erre az önmagában is állékony gerendára támaszkodik balról az A-C_3 gerenda, amely egyrészt az „A” támaszon keresztül a földre, másrészt a C_3 ponton a C_3-C_4 (önmagában állékony) gerendára támaszkodik. Ezzel az A-C_3 gerenda is állékony. Ugyanez a helyzet a C_4-E gerendával, amely jobbról támaszkodik a C_3-C_4 gerendára és a jobb végén pedig az „E” ponton közvetlenül a földre támaszkodik. Így a teljes Gerber-tartó állékony.

Az 5.1/e ábra egy olyan próbálkozást mutat, amelynél a szükséges két csuklót az „A” és „B” támaszok között helyeztük el. Azonnal látható, hogy ez a szerkezet nem állékony: mivel az A-C_5 gerenda az „A” támasznál, a C_5-C_3 gerenda pedig a C_3 csuklónál el tud fordulni, a C_5 csukló „leesik” a földre. Ez a kialakítás tehát nem valósítható meg.

Hattámaszú határozatlan tartót mutat az 5.2/a ábra. A tartóhoz nyolc ismeretlen támaszerő-összetevő (*A*, *B*, *D*, *E*, *F*, G_x, G_y erők és M_G támasznyomaték) tartozik, így a tartó 8-3=5-szörösen határozatlan. A tartó alakhelyes nyomatékábráját az 5.2/b ábra mutatja. Ha a hattámaszú határozatlan tartó határozott megfelelőjét szeretnénk kialakítani, akkor ezt öt belső csukló elhelyezésével tehetjük meg, például az 5.2/c ábrán vázolt módon. A belső csuklókat célszerű oly módon elhelyezni, hogy azok az eredeti többtámaszú tartó nyomatékábrájának zéruspontjai közelében legyenek. (Az 5.1 ábra tanúsága szerint ez történt az előző esetben is.)

Egy Gerber-tartó kialakítása során az alábbi szempontokat célszerű figyelembe venni:

1) a tartó „sima” és „beakasztott” tartók sorozata,

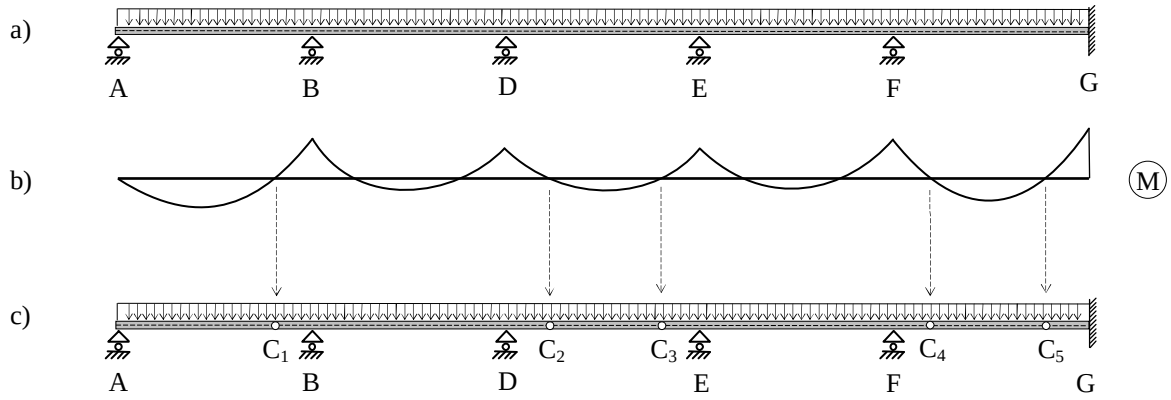
2) a „sima” tartó megtámasztásával/megtámasztásaival önmagában is állékony,

3) a „beakasztott” tartó mindig „sima” tartó(k)ra támaszkodik.

Az 5.1/c ábrán az A-C_1 és C_2-E tartók „sima”, a C_1-C_2 tartó pedig „beakasztott” tartók.

Az 5.1/d ábrán a C_3-C_4 tartó „sima”, az A-C_3 és C_4-E tartók pedig „beakasztott” tartók.

Az 5.2/c ábrán a C_1-C_2, C_3-C_4 és C_5-G tartók „sima”, az A-C_1, C_2-C_3 és C_4-C_5 tartók pedig „beakasztott” tartók.



5.2 ábra. a) Hattámaszú tartó, b) M-ábra, c) Gerber-tartó.

A Gerber-tartók számítása során a következők szerint járunk el.

1) a számítást visszavezetjük határozott kéttámaszú (és konzolos) tartók számítására.

2) először a „beakasztott” tartókat vizsgáljuk. Meghatározzuk a külső terhelés hatására keletkező támaszerőket. A támaszerők vagy valóságos támaszerők, vagy pedig a csuklóerők. Előállítjuk a „beakasztott” tartók igénybevételi ábráit.

3) meghatározzuk a „sima” tartók külső terhek és a csuklóerők ellentettjei hatására keletkező támaszerőit. Megrajzoljuk az igénybevételi ábrákat.

4) a „beakasztott” és „sima” tartók T- és M-ábráit egymás mellé rajzolva megkapjuk a Gerber-tartó T- és M-ábráit. Az N-ábra elkészítése külön figyelmet igényel: célszerű az *egész* tartó figyelembevételével eldönteni, hogy a teljes tartó mely szakaszán működik normálerő.

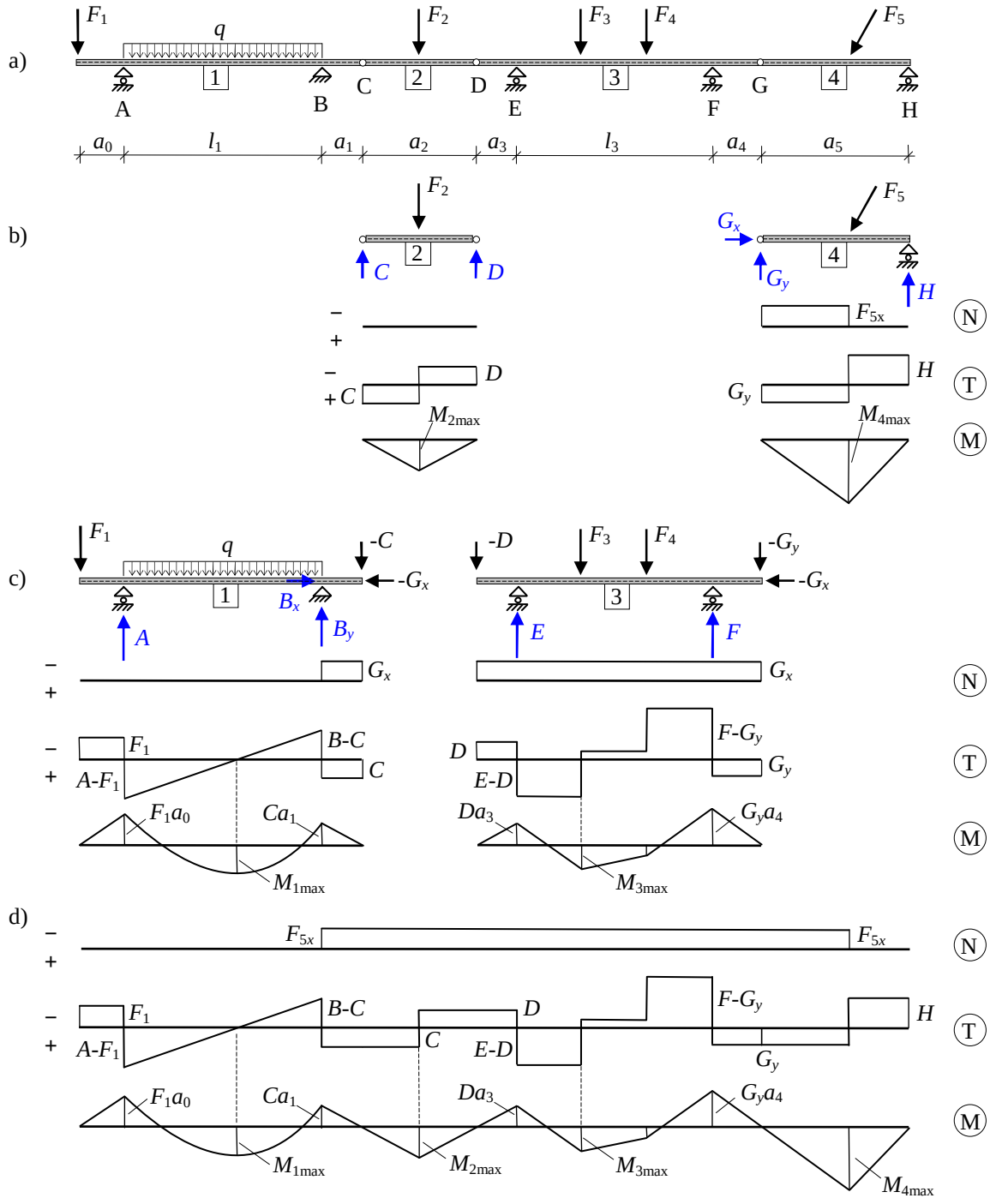
Egy általános elrendezésű és terhelésű Gerber-tartó fenti elvek szerint történő vizsgálatát az 5.3/a ábrán vázolt tartó segítségével mutatjuk be.

A teljes Gerber-tartót határozott („sima” és „beakasztott”) kéttámaszú tartókra bontjuk. Az A-B és E-F konzolos kéttámaszú tartók a két-két alátámasztásukkal önmagukban is állékonyak, így ezek a „sima” tartók. A C-D tartó csak úgy állékony, ha rátámaszkodik a két oldalán elhelyezkedő „sima” tartó konzolos végére. A C-D tartó így „beakasztott” tartó. Hasonló a helyzet a G-H tartóval, ami ugyan a „H” támaszon a földre támaszkodik, de a „G” ponton csak a mellette lévő kéttámaszú tartó segítségével tudja terhét a földre továbbítani. Így a G-H tartó is „beakasztott” tartó.

A számítást a két „beakasztott” tartóval kezdjük (5.3/b ábra). Az egyetlen koncentrált erővel terhelt C-D tartó két támaszerejét minden nehézség nélkül kiszámíthatjuk: ezek a *C* és *D*, esetünkben biztosan felfelé mutató erők. Hasonlóan eljárva, meghatározzuk a G-H „beakasztott” tartó esetében az F_{5y} függőleges teher hatására keletkező két támaszerőt: ezek a G_y és *H* felfelé mutató erők. Az F_{5x} balra mutató vízszintes teher-összetevő hatására a „G” csuklónál egy $G_x = F_{5x}$ nagyságú, jobbra mutató reakcióerő keletkezik. (A „H” támasz görgős megtámasztás, így ott vízszintes erő nem keletkezhet.) A támaszerők ismeretében a „beakasztott” tartók alatt előállítjuk az N-, T- és M-ábrákat.

Áttérünk a „sima” tartók vizsgálatára (5.3/c ábra). A „sima” tartókra a saját terhükön kívül hatnak a rájuk támaszkodó „beakasztott” tartók támaszerőinek az *ellentettjei* is. Különös tekintettel kell lennünk az átadódó *vízszintes* támaszerő-összetevőre, mert nem minden támasz

képes vízszintes erőt felvenni. Esetünkben az 1-jelű tartó „B” támasza képes csak vízszintes erőt felvenni, ezért a *másik*, 3-jelű tartóval kell kezdeni a vizsgálatot. A 3-jelű tartóra az F_3 és F_4 külső erőkön kívül a „beakasztott” tartók G_y és G_x, valamint D támaszerőinek ellentettjei is hatnak. Az E és F függőleges támaszerők meghatározása a szokásos módon történik. A $G_x = F_{5x}$ nagyságú, balra mutató vízszintes támaszerő-összetevőt sem a „H” támasz, sem a 3-jelű tartó megtámasztásai nem tudják felvenni. Így ez az erő a 3-jelű tartót majd a 2-jelű tartót nyomva végül a „B” támasznál fog a földre átadódni. Már most megjegyezzük, hogy a Gerber-tartó így az F_{5x} erő belépésétől a „B” pontig nyomott lesz. A támaszerők ismeretében a két „sima” tartó alatt előállítjuk az N-, T- és M-ábrákat.



5.3 ábra. a) Öttámaszú Gerber-tartó, b) a két „beakasztott” tartó, c) a két „sima” tartó, d) a teljes Gerber-tartó N-, T- és M-ábrája.

Utolsó lépésként egy-egy tengelyre összerajzoljuk a „beakasztott” és „sima” tartók igénybevételi ábráit és ezzel előállítottuk a Gerber-tartó N-, T- és M-ábráját (5.3/d ábra). Megfelelő rutin megszerzése után már kihagyhatjuk a „beakasztott” és „sima” tartók igénybevételi ábrarészeinek külön-külön történő megrajzolását és az elejétől kezdve egy-egy tengelyre rajzoljuk fel folyamatosan az egyes ábrarészeket.

A fent bemutatott eljárás alapján levonhatjuk a következő tanulságokat:

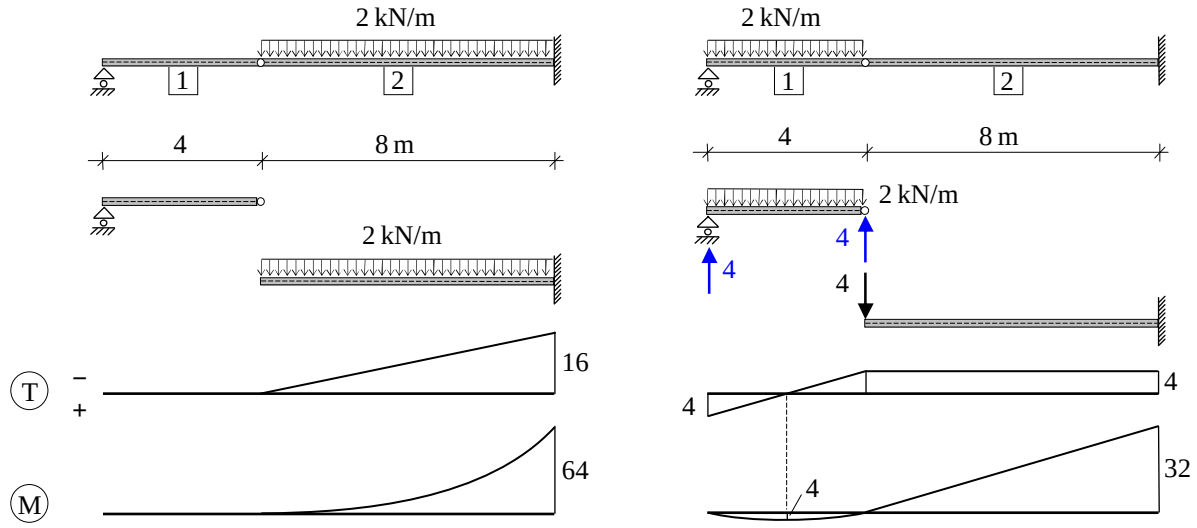
− a teljes tartó igénybevételi ábráinak előállításához csak a kéttámaszú és konzolos tartókra vonatkozó ismeretekre van szükség,

− a belső csuklóknál a nyomaték értéke zérus,

− a terheletlen belső csuklóknál a normál- nyíróerők értéke nem változik.

Egyszerű kialakítású Gerber-tartóval foglalkozunk az 5.4 ábrán. A 2-jelű (konzol)tartó önmagában is állékony, míg az 1-jelű tartó csak a baloldalon támaszkodik a földre és a jobboldali megtámasztást a 2-jelű tartó adja. Az 1-jelű tartó tehát a „beakasztott” tartó és a 2-jelű tartó a „sima” tartó. A tartót két terhelési esetre vizsgáljuk.

Az 5.4/a ábrán vázolt esetben az 1-jelű „beakasztott” tartó terheletlen. Mivel a vizsgálatot itt kell kezdenünk, teher (és támaszerők) hiányában azonnal tovább léphetünk a 2-jelű „sima” tartóra, amelyre a „beakasztott” tartóról nem adódik át teher. A „sima” tartó egy egyenletesen megoszló teherrel terhelt konzol, amelynek az igénybevételi ábrái balról jobbra haladva azonnal meghatározhatók. Ezeket a tartó alatt ábrázoljuk.



a) teher a „sima” konzoltartón

b) teher a „beakasztott” tartón

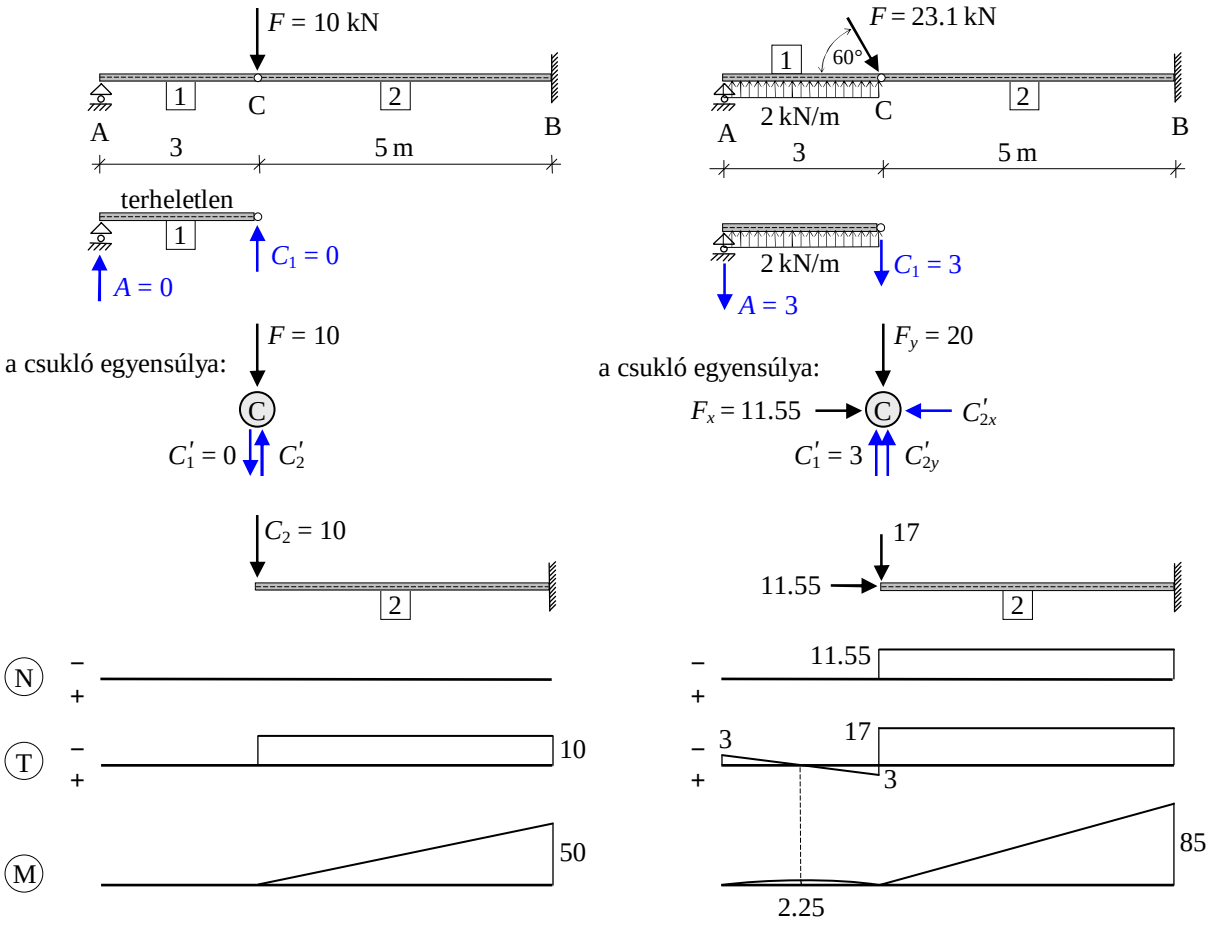
5.4 ábra. Gerber-tartó megoszló teherrel.

Az 5.4/b ábrán vázolt esetben az 1-jelű kéttámaszú „beakasztott” tartó egyenletesen megoszló teherrel terhelt. A $q = 2$ kN/m intenzitású egyenletesen megoszló teher szimmetrikusan 4 kN nagyságú felfelé mutató támaszerőket ébreszt. A „beakasztott” tartó igénybevételi ábrái azonnal megrajzolhatók a baloldali 4 méteres szakaszon. Az 1-jelű tartó jobboldali támaszerőjének ellentettje, 4 kN nagyságú, lefelé mutató erő adódik át a 2-jelű „sima” tartóra. Ez végig 4 kN nagyságú nyíróerőt jelent, és a befogáshoz érve 4·8 = 32 kNm nyomatékot eredményez. Ezekkel az adatokkal a teljes T- és M-ábra megrajzolható.

Speciális helyzetet teremt egy Gerber-tartó csuklón támadó terhe. Ilyenkor magának a csuklónak az egyensúlyát is vizsgálnunk kell. A következőkben két ilyen esetet mutatunk be. A csuklóerőket vesszővel jelöljük.

Az 5.5/a ábrán vázolt Gerber-tartót egyetlen koncentrált erő terheli. A 10 kN nagyságú erő a „C” csuklón működik. A vizsgálatot az 1-jelű „beakasztott” tartón kezdjük. A tartó terheletlen, így a két támaszerő zérus értékű:

$$A = 0 \qquad \text{és} \qquad C_1 = 0$$



a) koncentrált erő a csuklón

b) vegyes terhelés

5.5 ábra. Csuklón terhelt Gerber-tartó.

Mivel a csukló terhelt, a csukló egyensúlyát kell most vizsgálnunk. Ebben a lépésben megállapíthatjuk, hogy mekkora erőt kell majd működtetni a 2-jelű „sima” tartón. (Terheletlen csukló esetében igen egyszerűen járhatunk el: a „beakasztott” tartó csukló felőli oldalán ébredő reakcióerő ellentettje adódik át a „sima” tartóra.) A csuklóban az ott működő $F = 10$ kN nagyságú külső erőn kívül általános esetben szerepel még az 1-jelű tartóról átadódó C_1 jelű erő ellentettje (ezt az erőt C_1'-el jelöljük, és ez az erő esetünkben zérus nagyságú) és a 2-jelű tartón működő C_2 jelű erő C_2' ellentettje.

A csuklóra vonatkozó

$$\sum F_{i,y} = 10 + 0 - C_2' = 0$$

függőleges vetületi egyenletből megkapjuk a 2-jelű tartóra átadódó erő ellentettjét:

$$C_2' = 10 \text{ kN } (\uparrow)$$

Ennek az erőnek az ellentettje $C_2 = -C_2' = 10$ kN (↓) működik a 2-jelű tartón.

Mivel az 1-jelű tartó terheletlen, a 10 kN nagyságú lefelé mutató erővel terhelt 2-jelű tartó igénybevételi ábrái egyben a Gerber-tartó igénybevételi ábrái is.

Az 5.5/b ábrán vázolt Gerber-tartót a csuklón ható F = 23.1 kN nagyságú ferde erőn kívül az 1-jelű „beakasztott" tartón működő, felfelé mutató egyenletesen megoszló teher is terheli. A ferde erő két összetevője:

$$F_x = 23.1\cos 60° = 11.55 \text{ kN } (\rightarrow) \qquad \text{és} \qquad F_y = 23.1\sin 60° = 20.0 \text{ kN } (\downarrow)$$

Vizsgálatunk során az előző feladatnál bemutatott lépések szerint járunk el.

A vizsgálatot az 1-jelű „beakasztott" tartón kezdjük. A tartót felfelé mutató, 2 kN/m intenzitású egyenletesen megoszló teher terheli. A szimmetrikus elrendezés következtében a két támaszerő azonos értékű:

$$A = C_1 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{ kN } (\downarrow)$$

A C_1 jelű erő ellentettjét $\{C_1' = -C_1 = 3 \text{ kN } (\uparrow)\}$ felhasználva áttérhetünk a csukló egyensúlyának vizsgálatára. A csuklón vízszintes és függőleges erők hatnak. Foglalkozzunk először a vízszintes erők egyensúlyával. Az F_x = 11.55 kN nagyságú vízszintes erőt csak a „B" támasznál tudjuk a földre továbbítani (az „A" görgős támasz erre a feladatra alkalmatlan), így a csuklóban egy C_{2x}' csuklóerővel kell számolni. Ennek megfelelően a

$$\sum F_{i,x} = 11.55 - C_{2x}' = 0$$

vízszintes vetületi egyenlethez jutunk, ahonnan:

$$C_{2x}' = 11.55 \text{ kN } (\leftarrow)$$

Ennek a csuklóerőnek az ellentettje $\{C_{2x}$ = 11.55 kN (→)$\}$ adódik át 2-jelű „sima" tartóra.

A függőleges erők egyensúlyát a

$$\sum F_{i,y} = 20 - 3 - C_{2y}' = 0$$

vetületi egyenlet fejezi ki. Innen

$$C_{2y}' = 17 \text{ kN } (\uparrow)$$

Ennek a csuklóerőnek az ellentettje $\{C_{2y}$ = 17 kN (↓)$\}$ adódik át a 2-jelű „sima" tartóra.

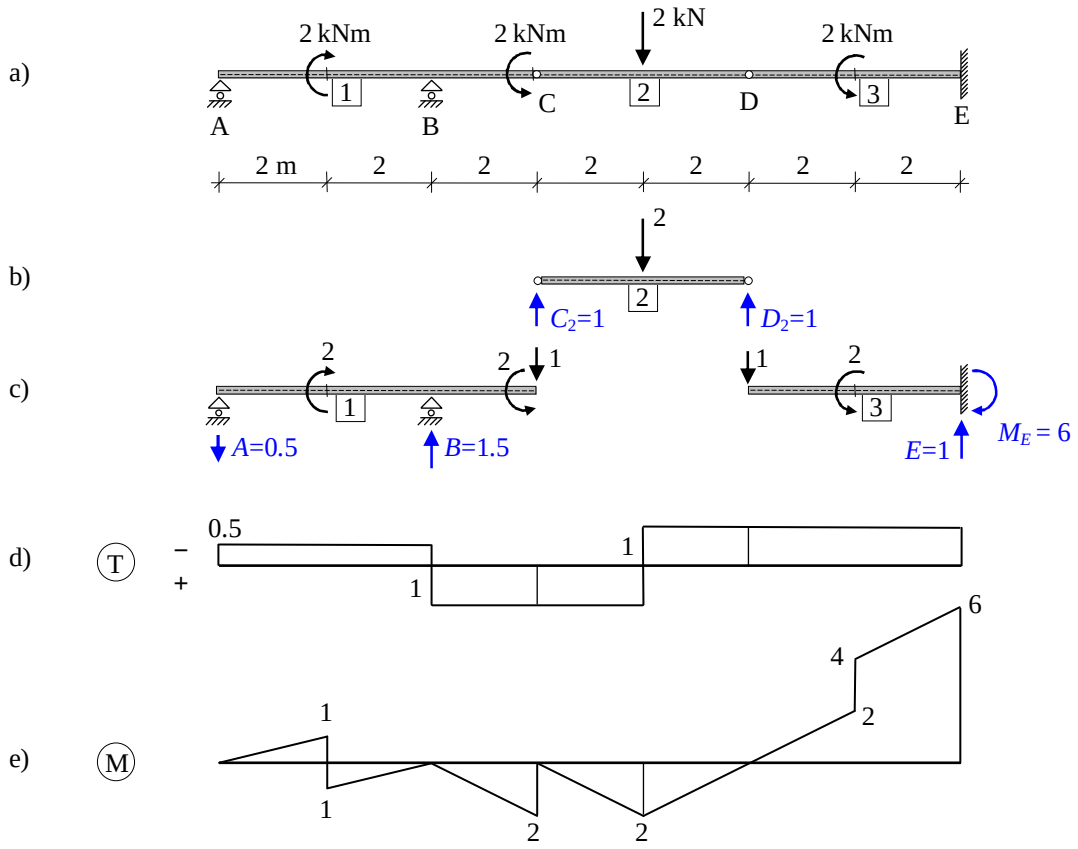
A két csuklóerő ismeretében áttérhetünk a 2-jelű „sima" tartó vizsgálatára. A 2-jelű konzoltartóra (eredeti) külső teher nem hat, így az igénybevételi ábráit a két csuklóerő ellentettjei segítségével határozhatjuk meg. Itt már világosan látszik, hogy a Gerber-tartó C-B szakasza a C_{2x} = 11.55 kN (→) erő hatására nyomott lesz. A T- és M-ábrát balról haladva a már ismert terhelő erők segítségével a „beakasztott" tartón, majd a „sima" tartón könnyen megrajzolhatjuk.

Az 5.6/a ábrán látható Gerber-tartót három koncentrált nyomaték és egy koncentrált erő

terheli. A 2-jelű „beakasztott” tartó szimmetrikus terhelésű (5.6/b ábra) és a két támaszerő értéke azonnal megállapítható:

$$C_2 = 1\,\text{kN}\ (\uparrow) \qquad \text{és} \qquad D_2 = 1\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

Ezek ellentettjei adódnak át az 1- és 3-jelű „sima” tartókra (5.6/c ábra).



5.6 ábra. a) Gerber-tartó, b) „beakasztott” tartó, c) „sima” tartók, d) T-ábra, e) M-ábra.

Az 1-jelű konzolos kéttámaszú tartó egyensúlyát vizsgálva, az „A” pontra vonatkozó

$$\sum M^{(A)} = 2 - 2 + 6 \cdot 1 - 4B = 0$$

nyomatéki egyenletből megkapjuk a B támaszerőt:

$$B = 1.5\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A „B” pontra vonatkozó

$$\sum M^{(B)} = 2 - 2 + 2 \cdot 1 - 4A = 0$$

nyomatéki egyenlet szolgáltatja az A támaszerőt:

$$A = 0.5\,\text{kN}\ (\downarrow)$$

A 3-jelű konzoltartó esetében nincs szükség egyensúlyi egyenletek felírására, mert a

támaszerő és támasznyomaték értéke azonnal felírható:

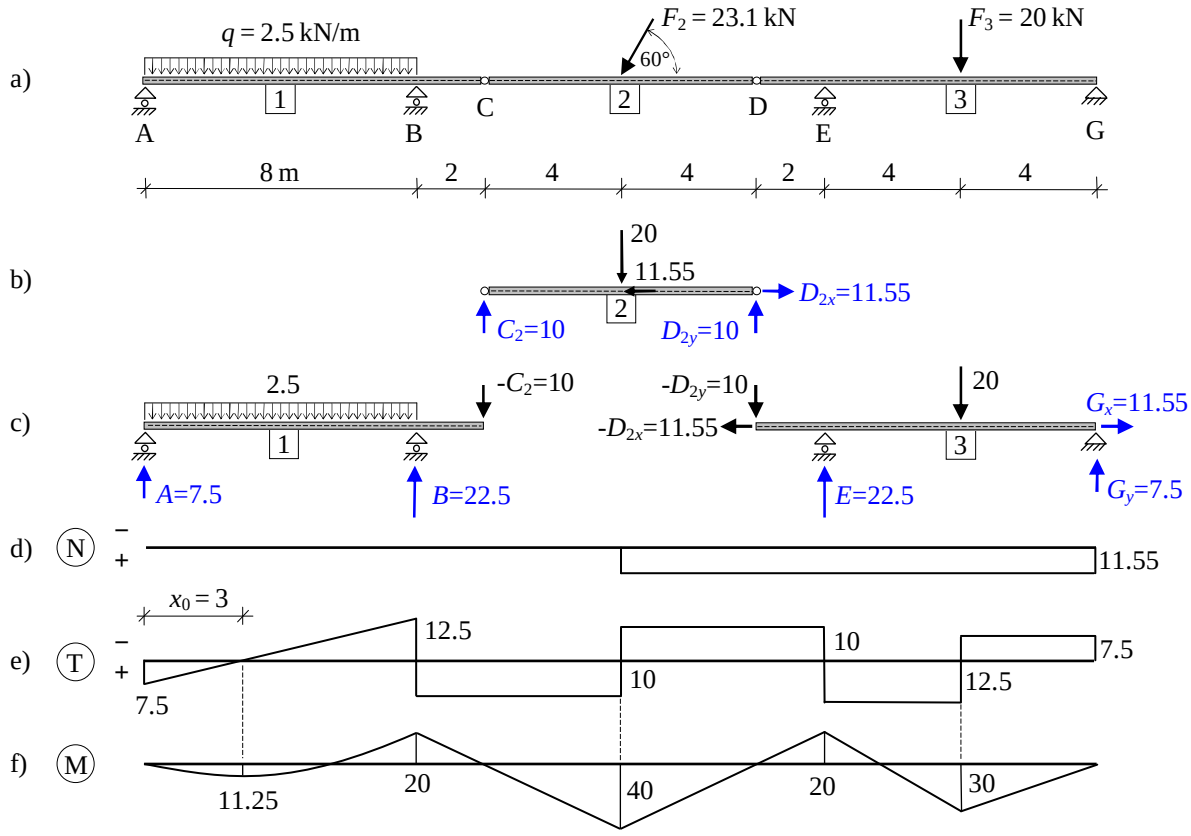
$$E = 1\,\text{kN}\ (\uparrow) \qquad \text{és} \qquad M_E = -(-1\cdot 4 - 2) = 6\,\text{kNm}\ (\circlearrowleft)$$

Az igénybevételi ábrák a terhek és támaszerők ismeretében balról jobbra haladva most már egyszerűen előállíthatók (5.6/d és 5.6/e ábrák).

Határozzuk meg végül az 5.7/a ábrán vázolt Gerber-tartó igénybevételi ábráit. A tartó terhei: q = 2.5 kN/m intenzitású teher az 1. támaszközben, F_2 = 23.1 kN ferde erő a 2. támaszköz közepén és F_3 = 20 kN erő a 3. támaszköz közepén.

A ferde erő két összetevője:

$$F_{2x} = 23.1\cos 60° = 11.55\,\text{kN}\ (\leftarrow) \qquad \text{és} \qquad F_{2y} = 23.1\sin 60° = 20.0\,\text{kN}\ (\downarrow)$$



5.7 ábra. a) Gerber-tartó, b) „beakasztott” tartó, c) „sima” tartók, d) N-ábra, e) T-ábra, f) M-ábra.

A szimmetrikusan elhelyezkedő F_{2y} =20 kN erő hatására a 2-jelű „beakasztott” tartó két függőleges támaszereje

$$C_2 = 10\,\text{kN}\ (\uparrow) \qquad \text{és} \qquad D_{2y} = 10\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

Az F_2 erő vízszintes összetevője (F_{2x} = 11.55 kN) csak a 3-jelű tartón keresztül, a Gerber-tartó jobbszélén lévő G támasznál tud a földre átadódni. Ebből az következik, hogy a 2-jelű tartó vízszintes támaszereje a tartó jobb oldalán a „D” pontnál jelentkezik, D_{2x} = 11.55 kN (→) formájában. A „beakasztott” tartóról így az 1-jelű tartóra a C_2 ellentettje, a 3-jelű tartóra pedig a D_{2y} és D_{2x} ellentettje adódik át.

A 3-jelű tartó egyensúlyát vizsgálva, az „E” pontra felírt

$$\sum M^{(E)} = -10 \cdot 2 + 20 \cdot 4 - 8G_y = 0$$

nyomatéki egyenlet szolgáltatja a „G” támasz függőleges támaszerő-összetevőjét:

$$G_y = \frac{80 - 20}{8} = 7.5\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A „G” pontra felírt

$$\sum M^{(G)} = -20 \cdot 4 - 10 \cdot 10 + 8E = 0$$

nyomatéki egyenletből megkapjuk az E támaszerőt:

$$E = \frac{80 + 100}{8} = 22.5\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A vízszintes erők

$$\sum F_{i,x} = 11.55 - G_x = 0$$

egyensúlyát vizsgálva azonnal látjuk, hogy

$$G_x = 11.55\,\text{kN}\ (\rightarrow)$$

Az 1-jelű tartó esetében a „B” pontra írunk fel nyomatéki egyenletet:

$$\sum M^{(B)} = 10 \cdot 2 - 2.5 \cdot 8 \cdot 4 + 8A = 0$$

Innen:

$$A = \frac{80 - 20}{8} = 7.5\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

Az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = 2.5 \cdot 8 \cdot 4 + 10 \cdot 10 - 8B = 0$$

nyomatéki egyenlet végül szolgáltatja a B támaszerőt:

$$B = \frac{80 + 100}{8} = 22.5\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A fenti eredmények birtokában balról jobbra haladva előállíthatjuk az igénybevételi ábrákat. A Gerber-tartó közepén ható $F_{2x} = 11.55$ kN ($\leftarrow$) vízszintes erőt a $G_x = 11.55$ kN támaszerő-összetevő egyensúlyozza: a két erő között a gerenda húzott (5.7/d ábra). A nyíróerő-ábra (5.7/e ábra) tanúsága szerint a nyíróerő-függvény az A-B pontok között előjelet vált. A zérushelyet a

$$T(x_0) = 7.5 - 2.5x_0 = 0$$

egyenletből kapjuk meg:

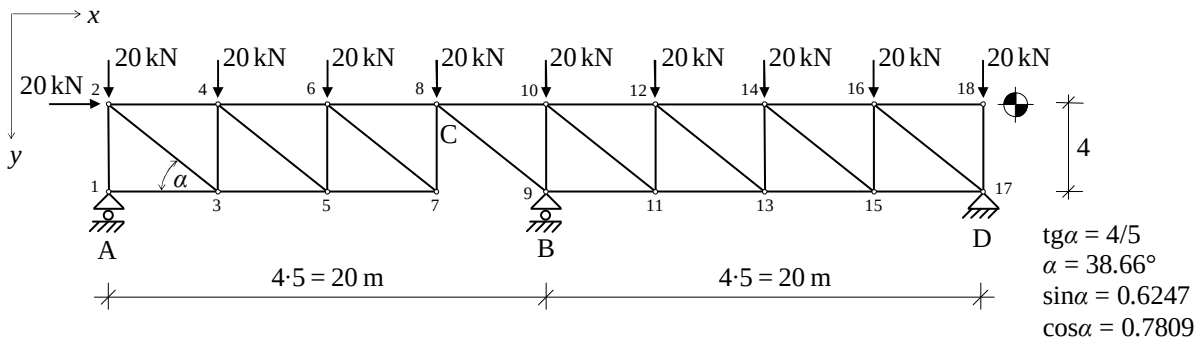
$$x_0 = \frac{7.5}{2.5} = 3\,\text{m}$$

Ezek szerint a nyomatékfüggvénynek (5.7/f ábra) az „A” támasztól 3 m-re helyi maximuma van. Ez az érték:

$$M_{\max} = 7.5 \cdot 3 - 2.5 \cdot 3 \cdot 1.5 = 11.25\,\text{kNm}$$

5.2 Csuklós többtámaszú (Gerber-féle) rácsos tartók

Csuklós többtámaszú tartók nemcsak gerendatartós kivitelben készülnek, hanem rácsos kivitelben is. Ilyen tartót mutat az 5.8 ábra. Mivel a csuklós többtámaszú rácsos tartók megoldása során nincs szükség új elméleti ismeretekre, a megoldás menetét és végrehajtását az 5.8 ábrán látható tartó rúderőinek meghatározásával mutatjuk be.



5.8 ábra. Csuklós többtámaszú (Gerber-féle) rácsos tartó.

Könnyen belátható, hogy a 8. számú „C”-vel is jelölt csomópont Gerber-csuklóként működik, vagyis lehetővé teszi hogy a baloldali AC tartórész és a jobboldali CBD tartórész között relatív elfordulás jöjjön létre. Mivel a CBD tartórész két megtámasztással rendelkezik és önmagában is állékony, a CBD tartórész a „sima” tartó. Az AC tartó baloldalon az „A” támaszon keresztül közvetlenül a földre, a jobboldalon pedig a „C” csukló segítségével a CBD tartóra adja át a külső terhet. Az AC tartó tehát a „beakasztott” tartó.

A megoldás során az első lépésben a támaszerőket határozzuk meg, így lehetővé válik a második lépésben a rúderők kiszámítása.

A támaszerők számítását az 5.9/a ábrán vázolt „1” jelű AC beakasztott tartóval kell kezdeni, ahol a három ismeretlen (A, $C_{1,x}$ és $C_{1,y}$) a rendelkezésre álló három egyensúlyi egyenlet segítségével meghatározható. A

$$\sum F_{i,x} = 20 - C_{1,x} = 0$$

vízszintes vetületi egyenletből

$$C_{1,x} = 20\,\text{kN}\ (\leftarrow)$$

A „C” pontra felírt nyomatéki egyenlet

$$\sum M_i^{(C)} = -20 \cdot 5 - 20 \cdot 10 - 20 \cdot 15 + 15A = 0$$

szolgáltatja az A támaszerő értékét:

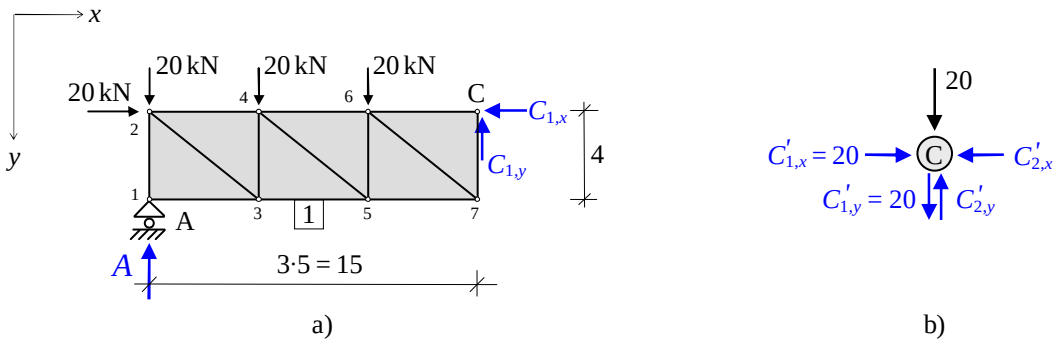
$$A = 40 \text{ kN } (\uparrow)$$

Az A támaszerő értékének ismeretében a

$$\sum F_{i,y} = -40 + 20 + 20 + 20 - C_{1,y} = 0$$

függőleges vetületi egyenlet segítségével most már meghatározható a C_1 csuklóerő y irányú összetevője:

$$C_{1,y} = 20 \text{ kN } (\uparrow)$$



5.9 ábra. a) az „1” beakasztott tartó, b) a „C” csukló egyensúlya.

A következő lépésben a „C” csukló egyensúlyát vizsgáljuk (5.9/b ábra). Erre a lépésre azért van szükség, mert a CBD tartó ismeretlen támaszerőinek meghatározása csak a „C” csuklóról a CBD tartóra átadódó csuklóerő-összetevők értékének ismeretében lehetséges. A „C” csuklóra a 20 kN külső erő és az AC tartóról átadódó C_1 csuklóerő x és y irányú összetevője ellentettjein kívül a CBD tartóról átadódó C_2 csuklóerő x és y irányú összetevője ellentettjei hatnak (5.9/b ábra). Ez utóbbi két összetevő a rendelkezésre álló két egyensúlyi egyenletből meghatározható.

Az x irányú erők egyensúlya

$$\sum F_{i,x} = 20 - C'_{2,x} = 0$$

alapján megkapjuk a $C_{2,x}$ ellentettjét:

$$C'_{2,x} = 20 \text{ kN } (\leftarrow)$$

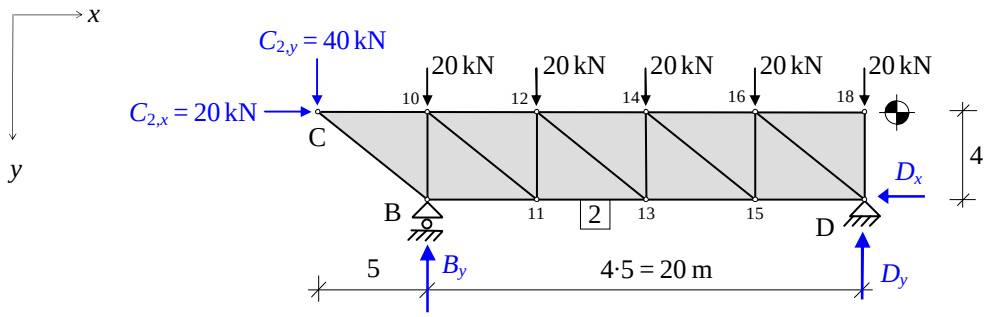
Hasonlóan eljárva, az y irányú erők egyensúlyát kifejező vetületi egyenlet

$$\sum F_{i,y} = 20 + 20 - C'_{2,y} = 0$$

szolgáltatja $C_{2,y}$ ellentettjét:

$$C'_{2,y} = 40\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A „2” jelű CBD tartó egyensúlyát vizsgálva (5.10 ábra) végül megkapjuk a még hiányzó B_y, D_y és D_x támaszerő-összetevők értékét.



5.10 ábra. A „2” jelű „sima” tartó.

A „B” pontra felírt

$$\sum M_i^{(B)} = -40\cdot 5 + 20\cdot 4 + 20(5+10+15+20) - 20D_y = 0$$

nyomatéki egyensúlyi egyenletből:

$$D_y = 44\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

Hasonlóan eljárva, a „D” pontra felírt

$$\sum M_i^{(D)} = -40\cdot 25 + 20\cdot 4 - 20(20+15+10+5) + 20B_y = 0$$

nyomatéki egyensúlyi egyenlet szolgáltatja a B_y támaszerő értékét:

$$B_y = 96\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

Az utolsó ismeretlen támaszerő-összetevő értékét a

$$\sum F_{i,x} = 20 - D_x = 0$$

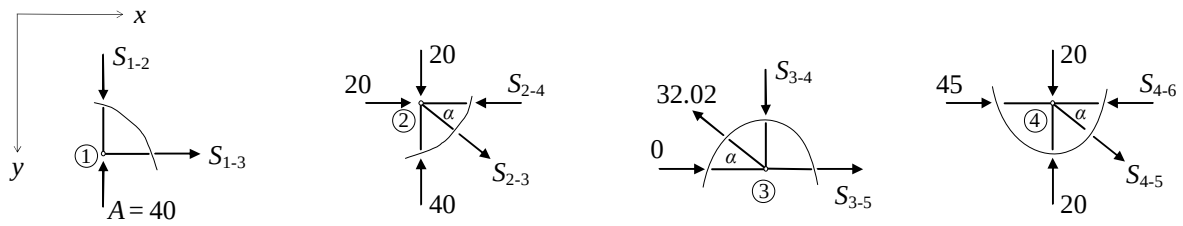
vetületi egyensúlyi egyenlet adja meg:

$$D_x = 20\,\text{kN}\ (\leftarrow)$$

Ez utóbbi értéket minden számítás nélkül, szemléletből is megállapíthatjuk: a „2” csomópontban támadó 20 kN nagyságú vízszintes erőt csak a „D” támasz képes felvenni vízszintes támaszerő-összetevőjével, hiszen az „A” és „B” támasz vízszintes erő felvételére alkalmatlan.

A támaszerő-összetevők értékének ismeretében meghatározhatók a rácsos tartó rúderői. A számítást balról jobbra haladva csomópontonként hajtjuk végre. A csomóponti vázlatokon a rúderőket feltételezett előjellel ábrázoljuk. Ha egy számítás végén a rúderő értéke pozitív előjellel adódik, akkor az azt jelenti, hogy a feltételezés helyes volt. Negatív eredmény esetén

a feltételezett erőirányt ellenkezőjére kell változtatni. A következőkben meghatározzuk az első nyolc rúderő értékét, majd a végeredményeket az 5.1 táblázatban foglaljuk össze.



a) az „1” csomópont b) a „2” csomópont c) a „3” csomópont d) a „4” csomópont

5.11 ábra. Az „1”, „2”, „3” és „4” csomópontokban működő erők.

Az 1. csomópont egyensúlyát vizsgálva (5.11/a ábra) a két ismeretlen rúderőt minden számítás nélkül megkapjuk. Az *x* irányú vetületi egyensúlyi egyenletben csak egyetlen erő szerepel

$$\sum F_{x,i} = S_{1-3} = 0$$

amelynek értéke egyensúly esetén csak zérus lehet:

$$S_{1-3} = 0 \text{ (vakrúd)}$$

A függőleges vetületi egyensúlyi egyenlet két erőt tartalmaz:

$$\sum F_{y,i} = -40 + S_{1-2} = 0$$

Innen:

$$S_{1-2} = 40\,\text{kN}\ (-)$$

Az $S_{1\text{-}2}$ erőt pozitív előjellel kaptuk meg és ez azt jelenti, hogy az erő irányát jól tételeztük fel az 5.11/a ábrán. Ez az erő az 1-2 rúd ábrán látható csonkját nyomja, tehát az 1-2 rúd nyomott. Ezt a tényt a rúderő értéke mellett a zárójelben elhelyezett negatív jellel rögzítjük.

Az $S_{1\text{-}2}$ rúderő értékének ismeretében áttérhetünk a „2” csomópont egyensúlyának vizsgálatára (5.11/b ábra), ahol a két ismert külső erő és a most már ismert $S_{1\text{-}2}$ erő mellett két ismeretlen erő van. Az $S_{1\text{-}2}$ erőt – amely nyomott rúderőt jelent – úgy helyezzük el a csomóponti vázlaton, hogy az 1-2 rúdcsonkot nyomja.

A függőleges vetületi egyenlet

$$\sum F_{y,i} = 20 - 40 + S_{2-3}\sin\alpha = 0$$

csak egy ismeretlent, az $S_{2\text{-}3}$ rúderőt tartalmazza. Értéke innen

$$S_{2-3} = 32.02\,\text{kN}\ (+)$$

Felírható most már a vízszintes vetületi egyensúlyi egyenlet

$$\sum F_{x,i} = 20 + 32.02\cos\alpha - S_{2-4} = 0$$

ahonnan

$$S_{2-4} = 45\,\text{kN}\ (-)$$

A „3” csomópont egyensúlyát vizsgálva (5.11/c ábra) először az *y* irányú vetületi egyenletet írjuk fel:

$$\sum F_{y,i} = 32.02 \sin\alpha - S_{3-4} = 0$$

Innen:

$$S_{3-4} = 20\,\text{kN}\ (-)$$

Az $S_{2\text{-}3}$ rúderő értékének ismeretében a

$$\sum F_{x,i} = 32.02 \cos\alpha - S_{3-5} = 0$$

vízszintes vetületi egyensúlyi egyenletből megkapjuk az $S_{3\text{-}5}$ rúderő értékét:

$$S_{3-5} = 25\,\text{kN}\ (+)$$

A „4” csomópontban a külső erő és a már ismert értékű $S_{2\text{-}4}$ és $S_{3\text{-}4}$ rúderők mellett két ismeretlen erő van (5.11/d ábra). A csomópont egyensúlyának vizsgálatát az *y* irányú függőleges vetületi egyenlet felírásával kell kezdeni, mert ebben az egyenletben csak egy ismeretlen lesz:

$$\sum F_{y,i} = -20 + 20 + S_{4-5} \sin\alpha = 0$$

Innen:

$$S_{4-5} = 0\ \text{(vakrúd)}$$

Most már felírható az *x* irányú vízszintes vetületi egyenlet

$$\sum F_{x,i} = 45 - S_{4-6} = 0$$

ahonnan az egyetlen ismeretlen meghatározható:

$$S_{4-6} = 45\,\text{kN}\ (-)$$

A pozitív előjelű eredmény jelzi, hogy az előzetesen feltételezett erő-irány helyes. A balra mutató erő nyomja az ábrán látható 4-6 rúdcsonkot, tehát a 4-6 rúd nyomott. Ezt a tényt jelzi a rúderő értéke mellé zárójelben elhelyezett negatív előjel.

Csomópontonként tovább haladva az összes rúderő meghatározható a 3. fejezetben bemutatott és a fentiekben is részletezett módon. Utolsónak hagyva a 17. csomópontot, az ott felírt egyensúlyi egyenletek egy-egy ellenőrzési lehetőséget is biztosítanak.

A tartó összes rúderőjét az 5.1 táblázatban találjuk.

5.1 táblázat. Rúderő-táblázat az 5.8 ábrán látható többtámaszú rácsos tartóhoz.

A rúd		Rúderő [kN]	
		húzott	nyomott
Felső övrudak	2-4		45
	4-6		45
	6-8		20
	8-10	30	
	10-12		15
	12-14		35
	14-16		30
	16-18		0
Alsó övrudak	1-3	0	
	3-5	25	
	5-7	25	
	9-11		50
	11-13		5
	13-15	15	
	15-17	10	
Oszlopok	1-2		40
	3-4		20
	5-6		0
	7-8	20	
	9-10		56
	11-12		36
	13-14		16
	15-16	4	
	17-18		20
Rácsrudak	2-3	32.02	
	4-5	0	
	6-7		32.02
	8-9		64.03
	10-11	57.63	
	12-13	25.61	
	14-15		6.4
	16-17		38.42

5.3 Háromcsuklós gerendatartók

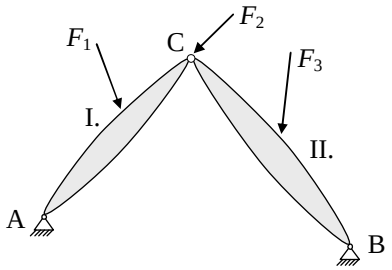
Ha két merev testet csuklóval kapcsolunk össze, majd egy-egy csukló segítségével megtámasztjuk őket a földön, az eredményt háromcsuklós tartónak nevezzük. A kialakítás során egyetlen követelményt kell kielégíteni: a három csukló nem eshet egy egyenesre. A merev testek általában egyenestengelyű gerendák, vagy íves tartók, így beszélhetünk háromcsuklós keretekről és ívtartókról. (Amikor az összekapcsolt két merev test már önmagában is összekapcsolt merev testekből – rudakból – áll, háromcsuklós rácsos tartó az eredmény, amelynek vizsgálatával a következő pont foglalkozik.)

A háromcsuklós tartók kedvelt tartószerkezeteink közé tartoznak. A kisebb méreteknek köszönhetően előnyösek építéstechnológiai szempontból és a statikai határozottságuk pedig kedvező lehet olyan helyszíneken, amelyek támaszsüllyedésre hajlamosak. Jellegzetes felhasználási területek a tetőszerkezetek és a csarnokok.

A statikai vizsgálat három elemet érint: a két merev testet és az őket összekapcsoló csuklót. Az 5.12 ábrán vázolt esetben a két merev testet I. és II. azonosítóval jelöljük. Az I. testet az „A”, a II. testet a „B” támasszal rögzítjük a földhöz. A két merev testet a „C” jelű csukló köti össze.

Az I. és II. jelű merev testeket síkbeli szétszórt erőrendszer terheli. Ez három-három egyensúlyi egyenlet felírását teszi lehetővé. A „C” csuklóban csak közös metszéspontú erők működhetnek, így a csukló két újabb egyenletet jelent. Az egyensúlyi kijelentéseket részletezve:

1)	I. merev test:	$(A, F_1, C_\mathrm{I}) \doteq 0$	→	3 egyenlet
2)	II. merev test:	$(B, F_3, C_\mathrm{II}) \doteq 0$	→	3 egyenlet
3)	„C” csukló:	$(F_2, -C_\mathrm{I}, -C_\mathrm{II}) \doteq 0$	→	2 egyenlet
			Összesen:	8 egyenlet



5.12 ábra. Háromcsuklós tartó.

Az ismeretlenek száma nyolc: A_x, A_y, $C_{\mathrm{I},x}$, $C_{\mathrm{I},y}$, $C_{\mathrm{II},x}$, $C_{\mathrm{II},y}$, B_x és B_y. A rendelkezésre álló nyolc egyenletből a nyolc ismeretlen minden esetben meghatározható. Nem jelenti ez azt, hogy a gyakorlatban nyolcismeretlenes egyenletrendszert kell megoldanunk. A gyakorlati megoldás során jelentősen megkönnyíti a helyzetet az, hogy rendelkezésre áll egy negyedik egyensúlyi kijelentés. A teljes szerkezetre vonatkozó

4)	teljes szerkezet:	$(A, F_1, F_2, F_3, B) \doteq 0$	→	3 egyenlet

egyensúlyi kijelentés ugyan nem ad új *független* egyenleteket, de lehetővé teszi a gyakorlati megoldás egyszerűsítését. Az esetek többségében kétismeretlenes egyenleteket kell megolda-

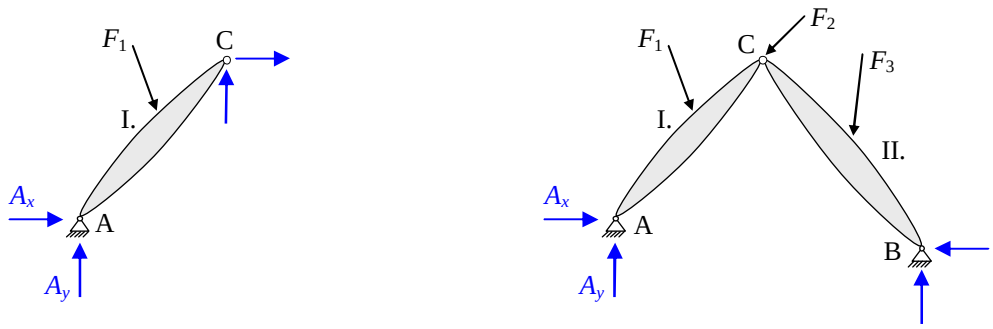
nunk, de sok gyakorlati esetben a helyzet még ennél is egyszerűbb. A fenti négy egyensúlyi kijelentésre épülő megoldás négylépéses menetét a következők szerint foglaljuk össze.

1. lépés (5.13 ábra)

Az *A* támaszerő két összetevőjét az 1. és 4. egyensúlyi kijelentés alapján a következő két egyenletből határozhatjuk meg:

$$1) \quad \text{I. merev test:} \quad \rightarrow \quad \sum M^{(C)} = 0 \qquad \{A_x, A_y\}$$

$$4) \quad \text{teljes szerkezet:} \quad \rightarrow \quad \sum M^{(B)} = 0 \qquad \{A_x, A_y\}$$



a) az I. test egyensúlya b) a teljes tartó egyensúlya

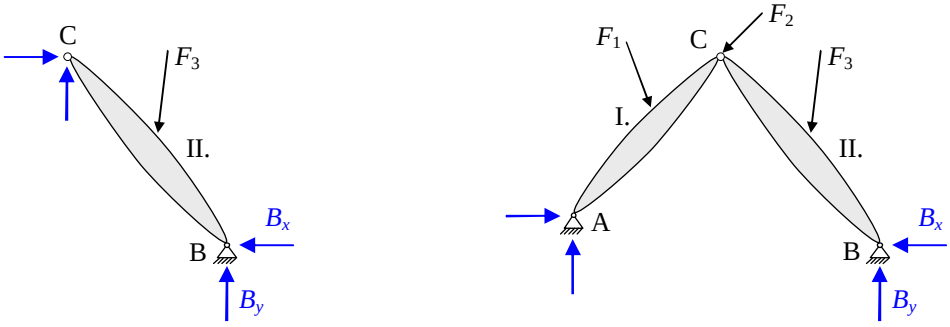
5.13 ábra. Az A_x és A_y támaszerő-összetevők meghatározás két kétismeretlenes egyenlet segítségével.

2. lépés (5.14 ábra)

A *B* támaszerő két összetevőjét a 2. és 4. egyensúlyi kijelentés alapján a következő két egyenletből határozhatjuk meg:

$$2) \quad \text{II. merev test:} \quad \rightarrow \quad \sum M^{(C)} = 0 \qquad \{B_x, B_y\}$$

$$4) \quad \text{teljes szerkezet:} \quad \rightarrow \quad \sum M^{(A)} = 0 \qquad \{B_x, B_y\}$$



a) a II. test egyensúlya b) a teljes tartó egyensúlya

5.14 ábra. A B_x és B_y támaszerő-összetevők meghatározása két kétismeretlenes egyenlet segítségével.

A fenti 2. lépés alternatívája lehet a 4. egyensúlyi kijelentés alapján a teljes tartóra vonatkozó két vetületi egyenlet felírása és megoldása:

4) teljes szerkezet: $\rightarrow$ $\sum F_{i,x} = 0$ $\rightarrow$ B_x

4) teljes szerkezet: $\rightarrow$ $\sum F_{i,y} = 0$ $\rightarrow$ B_y

3. lépés (5.15/a ábra)

Az 1. egyensúlyi kifejezés alapján az I. testre vonatkozó vetületi egyenletek segítségével egy-egy egyenletből meghatározhatjuk a C_I csuklóerő két összetevőjét:

1) I. merev test: $\rightarrow$ $\sum F_{i,x} = 0$ $\rightarrow$ $C_{\mathrm{I},x}$

1) I. merev test: $\rightarrow$ $\sum F_{i,y} = 0$ $\rightarrow$ $C_{\mathrm{I},y}$



a) az I. test egyensúlya b) a II. test egyensúlya

5.15 ábra. a) a $C_{\mathrm{I},x}$ és $C_{\mathrm{I},y}$ csuklóerő-összetevők meghatározása, b) a $C_{\mathrm{II},x}$ és $C_{\mathrm{II},y}$ csuklóerő-összetevők meghatározása.

4. lépés (5.15/b ábra)

A 2. egyensúlyi kifejezés alapján a II. testre vonatkozó vetületi egyenletek segítségével egy-egy egyenletből meghatározhatjuk a C_II csuklóerő két összetevőjét:

2) II. merev test: $\rightarrow$ $\sum F_{i,x} = 0$ $\rightarrow$ $C_{\mathrm{II},x}$

2) II. merev test: $\rightarrow$ $\sum F_{i,y} = 0$ $\rightarrow$ $C_{\mathrm{II},y}$

Két speciális eset érdemel külön említést.

Ha az „A” és „B” támaszok egy magasságban vannak, akkor a számítás egyszerűsödik és egyismeretlenes egyenletek megoldásával jutunk eredményhez.

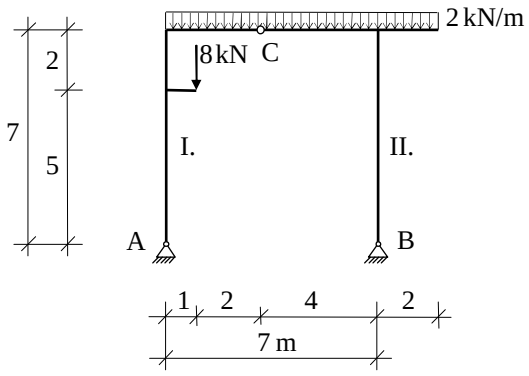
Abban az esetben is egyszerűbb módon jutunk végeredményhez, amikor a „C” csukló terheletlen. Ekkor a 4. lépés elmaradhat, mert érvényes hogy

$$C_\mathrm{II} = -C_\mathrm{I}$$

A következőkben három feladat részletes számításának bemutatásával illusztráljuk a háromcsuklós tartók igénybevételi ábráinak előállítását.

Az 5.16 ábra egy olyan háromcsuklós keretet ábrázol, amelyet a felső vízszintes gerendán 2 kN/m intenzitású, egyenletesen megoszló teher terhel. A tartó baloldali oszlopához

csatlakozik egy rövid konzol, amelyet egy 8 kN nagyságú koncentrált erő terhel.



5.16 ábra. Háromcsuklós tartó.

1. lépés (5.17/a és 5.17/b ábra)

Az *A* támaszerő két összetevőjét az 1. és 4. egyensúlyi kijelentés alapján határozhatjuk meg. Az „A” és „B” támaszok egy magasságban vannak, így egyismeretlenes egyenleteket kell csak megoldani. A 4. egyensúlyi kijelentés a teljes tartó (5.17/b ábra) egyensúlyára vonatkozik:

$$\sum M^{(B)} = -8 \cdot 6 - 2 \cdot 9 \cdot 2.5 + 7A_y = 0$$

Az A_y támaszerő-összetevő innen azonnal meghatározható:

$$A_y = \frac{8 \cdot 6 + 2 \cdot 9 \cdot 2.5}{7} = 13.3 \text{ kN } (\uparrow)$$

Az 1. egyensúlyi kijelentés a baloldali tartórész (5.17/a ábra) egyensúlyára vonatkozik:

$$\sum M^{(C)} = -8 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 1.5 + 13.3 \cdot 3 - 7A_x = 0$$

Az A_x támaszerő-összetevő innen:

$$A_x = \frac{-8 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 1.5 + 13.3 \cdot 3}{7} = 2.1 \text{ kN } (\rightarrow)$$

2. lépés (5.17/c és 5.17/d ábra)

A *B* támaszerő két összetevőjét a 2. és 4. egyensúlyi kijelentés alapján határozhatjuk meg. Ismét egyismeretlenes egyenletekhez jutunk, mert az „A” és „B” támaszok egy magasságban vannak. A 4. egyensúlyi kijelentés a teljes tartó (5.17/d ábra) egyensúlyára vonatkozik:

$$\sum M^{(A)} = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 9 \cdot 4.5 - 7B_y = 0$$

A B_y támaszerő-összetevő innen azonnal meghatározható:

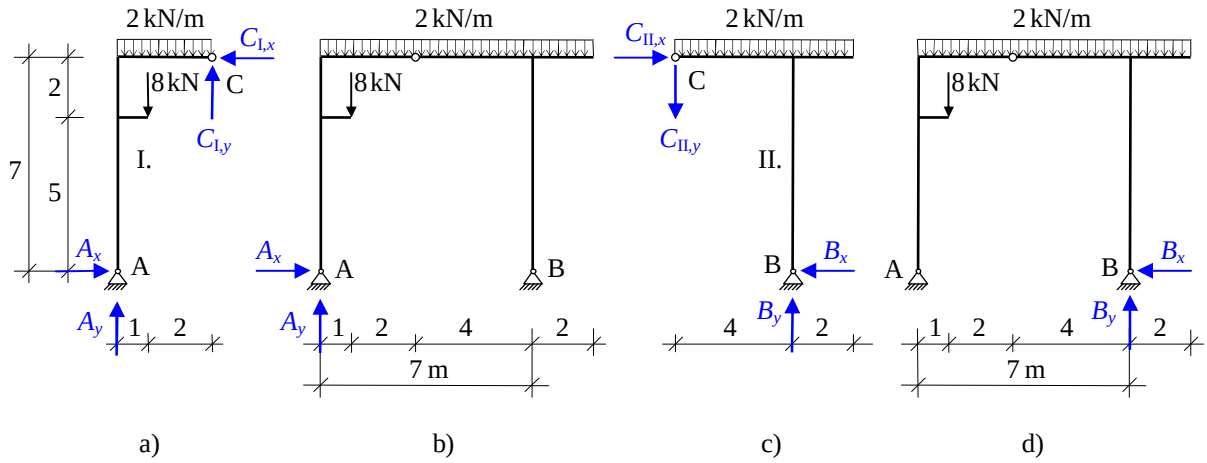
$$B_y = \frac{8 \cdot 1 + 2 \cdot 9 \cdot 4.5}{7} = 12.7 \text{ kN } (\uparrow)$$

A 2. egyensúlyi kijelentés a jobboldali tartórész (5.17/c ábra) egyensúlyára vonatkozik:

$$\sum M^{(C)} = 2 \cdot 6 \cdot 3 - 12.7 \cdot 4 + 7B_x = 0$$

A B_x támaszerő-összetevő innen:

$$B_x = \frac{12.7 \cdot 4 - 2 \cdot 6 \cdot 3}{7} = 2.1 \text{ kN } (\leftarrow)$$



5.17 ábra. Vázlat a) az A_x meghatározásához, b) az A_y meghatározásához, c) a B_x meghatározásához, d) a B_y meghatározásához.

3. lépés (5.17/a ábra)

Az 1. egyensúlyi kifejezés alapján a baloldali tartórészre vonatkozó két vetületi egyenletből meghatározhatjuk a C_I csuklóerő két összetevőjét. A vízszintes vetületi egyenlet szerint:

$$\sum F_{i,x} = 2.1 - C_{I,x} = 0$$

Innen:

$$C_{I,x} = 2.1 \text{ kN } (\leftarrow)$$

A függőleges vetületi egyenlet szerint:

$$\sum F_{i,y} = 8 + 2 \cdot 3 - 13.3 - C_{I,y} = 0$$

Innen:

$$C_{I,y} = 0.7 \text{ kN } (\uparrow)$$

A „C” csukló terheletlen, így a C_{II} csuklóerő értéke azonnal felírható a C_I csuklóerő ellentettjeként. De ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha a C_{II} csuklóerő értékét a 2. egyensúlyi kijelentés felhasználásával a jobboldali tartórészre (5.17/c ábra) vonatkozó két vetületi egyenlet segítségével határozzuk meg.

A vízszintes vetületi egyenlet szerint:

$$\sum F_{i,x} = -2.1 + C_{\mathrm{II},x} = 0$$

Innen:

$$C_{\mathrm{II},x} = 2.1 \text{ kN } (\rightarrow)$$

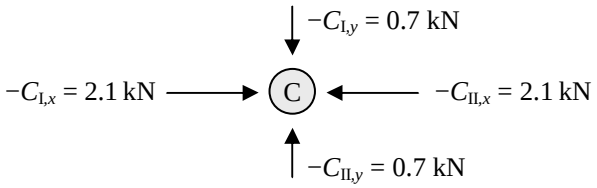
A függőleges vetületi egyenlet szerint:

$$\sum F_{i,y} = 2 \cdot 6 - 12.7 + C_{\mathrm{II},y} = 0$$

Innen:

$$C_{\mathrm{II},y} = 0.7 \text{ kN } (\downarrow)$$

A „C” csukló egyensúlyának vizsgálata ellenőrzési lehetőségét biztosít. A csuklóban a C_{I} és C_{II} csuklóerők ellentettjei működnek (5.18 ábra).



5.18 ábra. A „C” csukló egyensúlya.

A támaszerők ismeretében megszerkeszthetők az igénybevételi ábrák. A számítást segítő vázlatot az 5.19/a ábrán találjuk. A jellemző csomópontok környezetében a csomópontokhoz végtelen közel keresztmetszeteket jelöltünk ki, ahol majd meghatározzuk az igénybevételek értékét.

A normálerő-ábra minden számítás nélkül azonnal előállítható (5.19/b ábra). A „B” támasztól felfelé haladva azt látjuk, hogy a jobboldali oszlopot végig – a 8. jelű keresztmetszetig – nyomja a $B_y = 12.7$ kN nagyságú támaszerő-összetevő. A jobb felső sarokponttól jobbra végtelen közel lévő 7. jelű keresztmetszettől jobbra normálerő nem található, így ezen a szakaszon a normálerő-függvény zérus értékű. A sarokponttól végtelen közel balra a 6. jelű keresztmetszet esetében jobbról belép viszont a „B” támasznál fellépő $B_x = 2.1$ kN támaszerő-összetevő, ami a gerendán végig (az 5. pontig) nyomóerőként jelentkezik. Áttérve a baloldali oszlopra, az „A” támasztól fölfelé az $A_y = 13.3$ kN nagyságú támaszerő-összetevő okoz nyomást. Ez az érték érvényes az 1. jelű keresztmetszetig. A 3. jelű keresztmetszetben ez az érték lecsökken 5.3 kN-ra az itt belépő 8 kN nagyságú, de ellentétes irányú koncentrált erő hatására. Az 5.3 kN érvényes a baloldali oszlop tetejéig. Az N-ábrát ezzel előállítottuk.

A nyíróerő-ábra (5.19/c ábra) elkészítését az „A” támasznál kezdjük. Itt az $A_x = 2.1$ kN jobbra mutató támaszerő-összetevő negatív nyíróerőt jelent. Ez az érték a baloldali oszlop tetejéig érvényes. A baloldali oszlopról elágazó kis konzolon végig a 8 kN nagyságú koncentrált erő okoz pozitív nyíróerőt. A baloldali oszlop tetejénél befordulva a gerendára az 5. keresztmetszetnél a baloldali erőkből származó nyíróerő értéke

$$T_5 = 13.3 - 8 = 5.3 \text{ kN}$$

Megjegyezzük, hogy a fenti összegzésben szereplő 8 kN nagyságú erő térben jobbra lévőnek *látszik*, de valójában a vizsgált keresztmetszettől balra van, mert az 5. jelű keresztmetszettől *balra* lévő eltávolítottnak képzelt tartórészen van.

Ahogyan a gerendán jobbra haladunk, negatív nyíróerőt okozva belép a 2 kN/m intenzitású egyenletesen megoszló teher, amely csökkenti a fenti értéket, majd a 6. keresztmetszetben

$$T_6 = 13.3 - 8 - 2\cdot 7 = -8.7 \text{ kN}$$

nyíróerőt eredményez. A nyíróerő-függvény előjelváltásának x_0 helye a

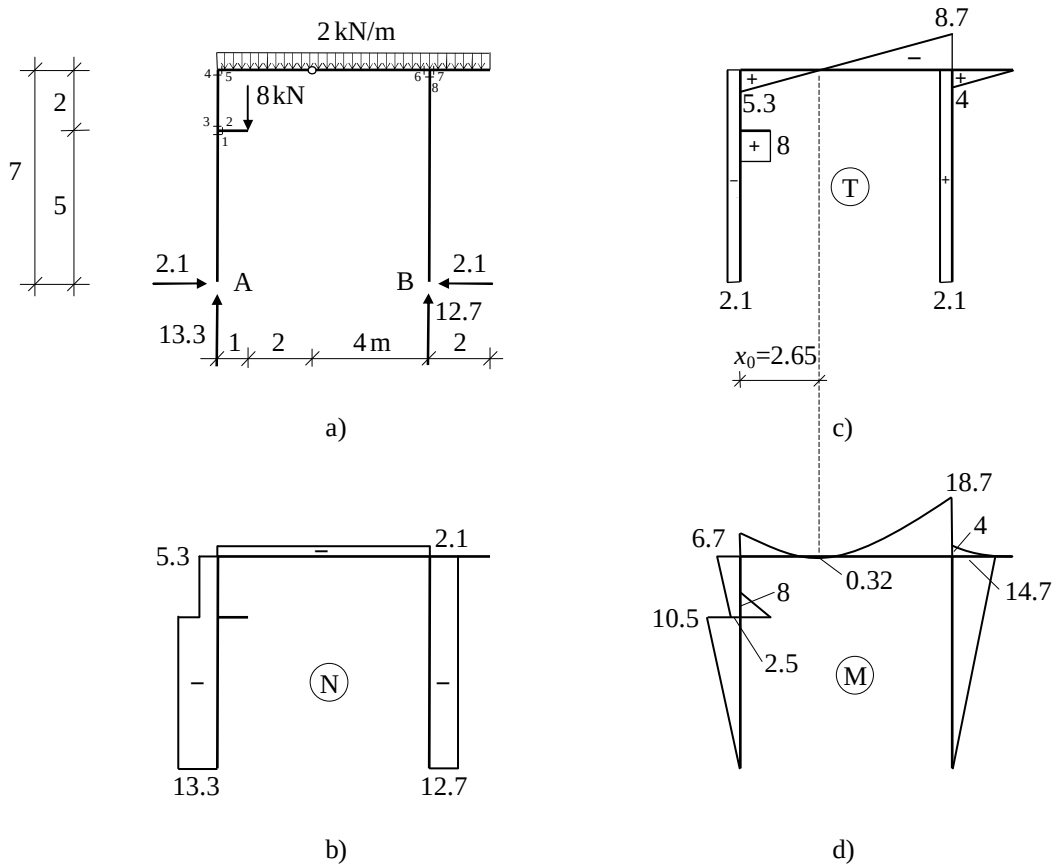
$$T(x_0) = 13.3 - 8 - 2x_0 = 0$$

egyenletből $x_0 = 2.65$ m.

A jobboldali felső sarokpontnál befordulunk a jobboldali oszlopra és a 8. keresztmetszet alatti tartórészt képzeljük eltávolítva. Innen a B_x támaszerő-összetevő ad nyíróerőt:

$$T_8 = 2.1 \text{ kN}$$

Ez az érték az oszlop aljáig nem változik.



5.19 ábra. A háromcsuklós tartó a) terhelési vázlata, b) N-ábrája, c) T-ábrája, d) M-ábrája.

Már csak a gerenda jobboldali sarokpontján túlnyúló 2 méteres konzolos rész van hátra. Ennek jobb szélső pontján zérus a nyíróerő, a 7. jelű keresztmetszetben pedig:

$$T_7 = 2\cdot 2 = 4 \text{ kN}$$

A nyomatékábra (5.19/d ábra) előállítását is az „A” támasznál kezdjük, ahol a nyomaték értéke zérus. A baloldali oszlopon felfelé haladva a következő jellemző hely az 1. jelű keresztmetszet. A nyomaték értéke itt alulról, illetve „balról” számolva:

$$M_1 = -2.1 \cdot 5 = -10.5 \text{ kNm}$$

Ez a nyomaték az oszlop külső oldalán okoz húzást, ezért a nyomatékot a külső oldalon mérjük föl. A 2. keresztmetszetnél elvágva az 1 méteres konzolt, a jobbról számolt nyomaték a koncentrált erőből

$$M_2 = -(8 \cdot 1) = -8 \text{ kNm}$$

Ez a nyomaték a konzolon felül okoz húzást, így felülre mérjük fel.

Érdekes helyzet alakul ki a 3. jelű keresztmetszet vizsgálata során. Eltávolítottnak képzeljük a keresztmetszet alatti tartórészt (az 1 méteres konzollal együtt!) és az eltávolítottnak képzelt részről – „balról” – gyűjtjük össze a nyomatékokat:

$$M_3 = -2.1 \cdot 5 + 8 \cdot 1 = -2.5 \text{ kNm}$$

Ez a nyomaték az oszlop külső oldalán okoz húzást, ezért a nyomatékot a külső oldalon mérjük föl.

Hasonló a helyzet a 4. jelű keresztmetszet vizsgálatakor, csak itt az $A_x = 2.1$ kN nagyságú erő karja megnőtt:

$$M_4 = -2.1 \cdot 7 + 8 \cdot 1 = -6.7 \text{ kNm}$$

Befordulva az 5. jelű keresztmetszethez, ugyanezekkel a szereplőkkel ugyanez az érték érvényes. Átkörzőzzük tehát a 6.7 kNm értéket. A nyomaték felül okoz húzást.

Áttérünk a jobboldali oszlopra. A „B” támasznál a nyomaték értéke zérus. Felfelé haladva és a 8. jelű keresztmetszet alatt lévő tartórészt eltávolítva képzelve, az eltávolítottnak képzelt részről – jobbról – számolva a 8. pontban a nyomaték értéke

$$M_8 = -2.1 \cdot 7 = -14.7 \text{ kNm}$$

Ez a nyomaték az oszlop külső oldalán okoz húzást, így a külső oldalra mérjük fel.

Jellemző hely a 7. jelű keresztmetszet is, ahol a jobbra lévő megoszló teherből

$$M_7 = -2 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \text{ kNm}$$

nyomaték ébred. Húzás a vízszintes konzolos gerenda keresztmetszetének felső részében keletkezik, ezért ezt a nyomatékot felülre mérjük fel. A jobb felső sarokpont mellett a 6. jelű keresztmetszetben – jobbról

$$M_6 = -(2 \cdot 2 \cdot 1 + 2.1 \cdot 7) = -18.7 \text{ kNm}$$

nagyságú nyomaték számítható. Ez a nyomaték felül okoz húzást, így felülre mérjük fel.

Hátra van még az 5. és 6. pontok közötti szakasz. Erről azt tudjuk, hogy másodfokú parabola megoszlású függvény jellemzi a nyomatékfüggvényt (a megoszló terhelés következtében), amelynek az értéke a „C” pontban zérus (a csukló miatt). További információ az, hogy a függvénynek a nyíróerő-függvény előjelváltása helyén helyi szélsőértéke van. Ez az érték (balról számolva):

$$M_{\max} = -2.1 \cdot 7 + 13.3 \cdot 2.65 - 8 \cdot 1.65 - 2\frac{2.65^2}{2} = 0.32\,\text{kNm}$$

Ezzel a nyomatékábrát is előállítottuk.

Az 5.20/a ábrán vázolt háromcsuklós tartót q = 2 kN/m intenzitású egyenletesen megoszló vízszintes teher terheli a jobboldali oszlop mentén és egy F = 10 kN nagyságú koncentrált erő a „C” csuklón. Először a támaszerőket határozzuk meg, majd előállítjuk az igénybevételi ábrákat. A támaszok egy magasságban vannak, így a támaszerőket egyismeretlenes egyenletekből határozhatjuk meg.

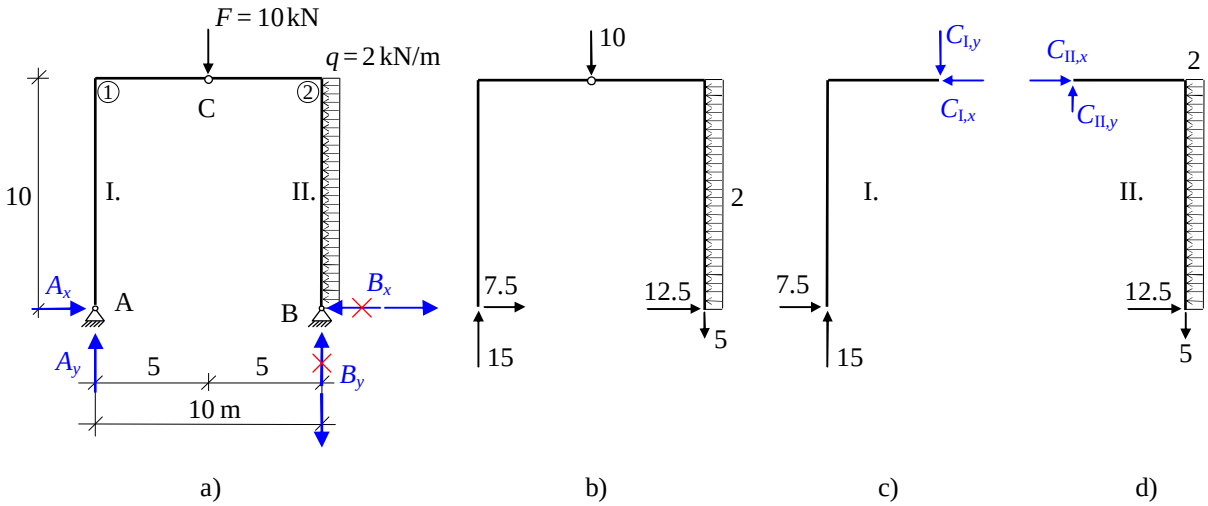
Feltételezzük, hogy az A_y és B_y függőleges támaszerő-összetevők felfelé, az A_x jobbra és a B_x pedig balra mutat.

Az egész szerkezet egyensúlyát kifejező és a „B” támaszra vonatkozó

$$\sum M^{(B)} = -10 \cdot 2 \cdot 5 - 10 \cdot 5 + 10A_y = 0$$

nyomatéki egyenletből az A támaszerő függőleges összetevője

$$A_y = \frac{10 \cdot 2 \cdot 5 + 10 \cdot 5}{10} = 15\ \text{kN}\ (\uparrow)$$



5.20 ábra. a) háromcsuklós tartó, b) terhelési vázlata, c) I. j. baloldali tartórész, d) II. j. jobboldali tartórész.

A baloldali I. jelű A-C tartórész egyensúlyát kifejező és a „C” csuklóra vonatkozó

$$\sum M^{(C)} = 15 \cdot 5 - 10A_x = 0$$

nyomatéki egyenletből az A támaszerő vízszintes összetevője:

$$A_x = \frac{15 \cdot 5}{10} = 7.5\ \text{kN}\ (\rightarrow)$$

Az egész szerkezet egyensúlyát kifejező és az „A” támaszra vonatkozó

$$\sum M^{(A)} = -10 \cdot 2 \cdot 5 + 10 \cdot 5 - 10 B_y = 0$$

nyomatéki egyenletből a *B* támaszerő függőleges összetevője:

$$B_y = \frac{-10 \cdot 2 \cdot 5 + 10 \cdot 5}{10} = -5 \text{ kN } (\downarrow)$$

Az eredményt negatív előjellel kaptuk, ami azt jelenti, hogy a B_y-ra vonatkozó eredeti feltételezésünk nem volt helyes és a B_y támaszerő-összetevő nem felfelé, hanem lefelé mutat. Ezt a tényt azonnal korrekció formájában jelöljük az 5.20/a ábrán is.

A jobboldali II. jelű C-B tartórész egyensúlyát kifejező és a „C” csuklóra vonatkozó

$$\sum M^{(C)} = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 10 \cdot 5 + 10 B_x = 0$$

nyomatéki egyenletből a *B* támaszerő vízszintes összetevője:

$$B_x = \frac{-5 \cdot 5 - 2 \cdot 10 \cdot 5}{10} = -12.5 \text{ kN } (\rightarrow)$$

Ezt az eredményt is negatív eredménnyel kaptuk. Ez azt jelenti, hogy a B_x-re vonatkozó eredeti feltételezésünk sem volt helyes és a B_x támaszerő-összetevő nem balra, hanem jobbra mutat. Ezt a tényt is azonnal korrekció formájában jelöljük az 5.20/a ábrán.

Minden rendelkezésre áll az igénybevételi ábrák előállításához. Mielőtt azonban tovább megyünk, határozzuk meg a „C” csuklóban ébredő erőket is.

Abból a célból hogy meghatározzuk a C_{I} csuklóerő két összetevőjét, vizsgáljuk ismét az I. jelű, baloldali A-C tartórész egyensúlyát (5.20/c ábra).

Ezúttal az *x* és *y* irányú vetületi egyenleteket írjuk fel. A

$$\sum F_{i,x} = 7.5 - C_{\mathrm{I},x} = 0$$

egyenletből

$$C_{\mathrm{I},x} = 7.5 \text{ kN } (\leftarrow)$$

és a

$$\sum F_{i,y} = -15 + C_{\mathrm{I},y} = 0$$

egyenletből pedig

$$C_{\mathrm{I},y} = 15 \text{ kN } (\downarrow)$$

Hasonlóan járunk el a C_{II} csuklóerő két összetevőjének meghatározása során. Ekkor a II. jelű, jobboldali C-B tartórész egyensúlyát vizsgáljuk (5.20/d ábra). Most is az *x* és *y* irányú vetületi egyenleteket írjuk fel. A

$$\sum F_{i,x} = -2 \cdot 10 + 12.5 + C_{\mathrm{II},x} = 0$$

egyenletből

$$C_{\mathrm{II},x} = 7.5\,\mathrm{kN}\ (\rightarrow)$$

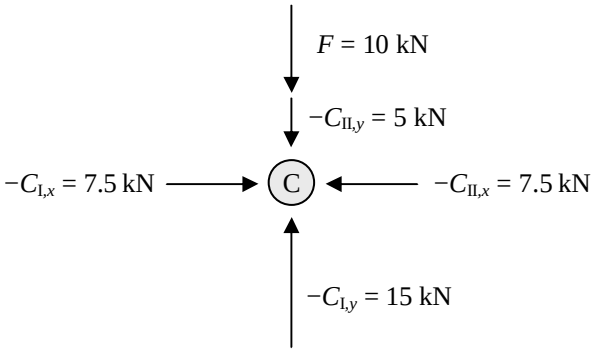
és a

$$\sum F_{i,y} = 5 - C_{\mathrm{II},y} = 0$$

egyenletből pedig

$$C_{\mathrm{II},y} = 5\,\mathrm{kN}\ (\uparrow)$$

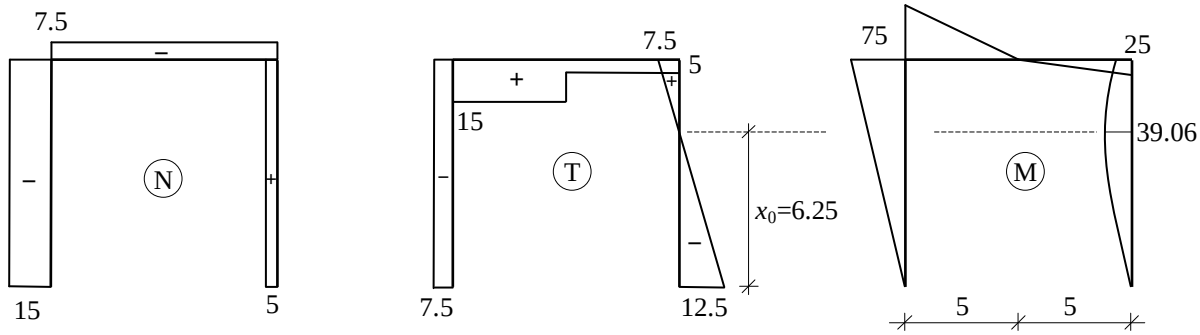
Ellenőrzést tesz lehetővé a „C” csukló egyensúlyának vizsgálata. A csuklóra a C_{I} és C_{II} csuklóerők ellentettjei és a 10 kN külső erő hat. Az 5.21 ábra tanúsága szerint a „C” csukló egyensúlyban van.



5.21 ábra. A „C” csukló egyensúlya.

Az igénybevételi ábrák előállítása során az 5.20/b ábrán összefoglalt adatokat használjuk fel.

A normálerő-ábra (5.22/a ábra) a baloldali oszlopon az A_y = 15 kN nagyságú erővel indul. Ez az erő nyomja az oszlopot. Az érték az 1. jelű baloldali felső sarokpontig nem változik. A felső gerendára befordulva – és balról gyűjtve az erőket – az A_x = 7.5 kN nagyságú erő jelenik meg normálerőként, mégpedig nyomóerőként. Áttérünk a „B” támaszhoz. Itt a B_y = 5 kN nagyságú erő jelentkezik normálerőként. Ez az erő az oszlopon végig húzást okoz.



a) N-ábra b) T-ábra c) M-ábra

5.22 ábra. Csuklón is terhelt háromcsuklós tartó igénybevételi ábrái.

A nyíróerő-ábra (5.22/b ábra) a baloldali oszlopon az A_x = 7.5 kN nagyságú erővel indul. Ez az erő az „A” keresztmetszet fölött lévő tartórészen felvett tetszőleges pont körül az óramutató járásával ellentétesen forgat, így az 1. jelű pontig végig negatív nyíróerőt jelent. A gerendára befordulva – és balról gyűjtve az erőket – az A_y = 15 kN nagyságú erő jelenik meg nyíróerőként. Ez az erő az 1. pont és a „C” pont között kijelölt tetszőleges pont körül az óramutató járásával egyezően forgat, így pozitív nyíróerőt jelent. A „C” ponton túlhaladva ez a pozitív nyíróerő az F =10 kN nagyságú erővel csökken, de továbbra is pozitív marad. Áttérünk a „B” támaszhoz. Itt a B_x = 12.5 kN nagyságú erő jelentkezik nyíróerőként. Ez az erő az oszlopon tetszőlegesen felvett pont körül az óramutató járásával ellentétesen forgat, így negatív nyíróerőt jelent. Értékét „B” pont és az oszlop tetejénél kijelölt 2. jelű pont között folyamatosan csökkenti a q = 2 kN/m intenzitású egyenletesen megoszló teherből számított erő. A 2. jelű ponthoz érve már a megoszló teherből számított erő hatása dominál és a nyíróerő a 2. jelű pontban már pozitív előjelű lesz. Értéke $T_2 = -12.5 + 2 \cdot 10 = 7.5$ kN. Az előjelváltás helye a

$$-12.5 + 2x_0 = 0$$

egyenletből x_0 = 6.25 m.

A nyomatékábra (5.22/c ábra) az „A” pontban zérus értékkel indul. A baloldali oszlopon felfelé haladva az A_x = 7.5 kN nagyságú erő növekvő karral növekvő értékű nyomatékot okoz. Az 1. jelű sarokponthoz érve a nyomaték értéke

$$M_1 = -7.5 \cdot 10 = -75 \text{ kNm}$$

Az óramutató járásával ellentétesen forgató nyomaték az oszlop külső oldalán okoz húzást, így oda mérjük föl. A sarokponton befordulva a gerendára ugyanez az érték érvényes, ezért átkörzőzzük a gerendára. A következő jellemző pont a „C” pont. Itt a nyomaték értéke – balról számolva:

$$M_C = -7.5 \cdot 10 + 15 \cdot 5 = 0$$

Zérusnak is kell lennie, hiszen a csuklóban nem ébredhet nyomaték.

Tovább megyünk jobbra a 2. jelű pontig. A nyomaték itt – továbbra is balról számolva:

$$M_2 = -7.5 \cdot 10 + 15 \cdot 10 - 10 \cdot 5 = 25 \text{ kNm}$$

Ez az óramutató járásával egyezően forgató nyomaték a gerenda alján okoz húzást. Befordulva a jobboldali oszlopra, átkörzőzzük a nyomatékot. A nyomaték az oszlop baloldalán, a belső oldalon van. Látható, hogy a „C” pontban a nyomatékfüggvénynek törése van. Ez összhangban van azzal a szabállyal, hogy a koncentrált erő helyén a nyomatékfüggvény töréssel rendelkezik, amelybe beleillik a koncentrált erő nyila.

A „B” támasznál a nyomaték értéke zérus. A „B” pont és a 2. jelű pont között a nyomatékfüggvényt (az egyenletesen megoszló tehernek megfelelően) másodfokú parabola jellemzi. A függvénynek a nyíróerő-függvény előjelváltása helyén (x_0 = 6.25-nál) helyi szélsőértéke van. Ez az érték – jobbról számolva:

$$M_{\max} = -(-12.5 \cdot 6.25 + 2\frac{6.25^2}{2}) = 39.06 \text{ kNm}$$

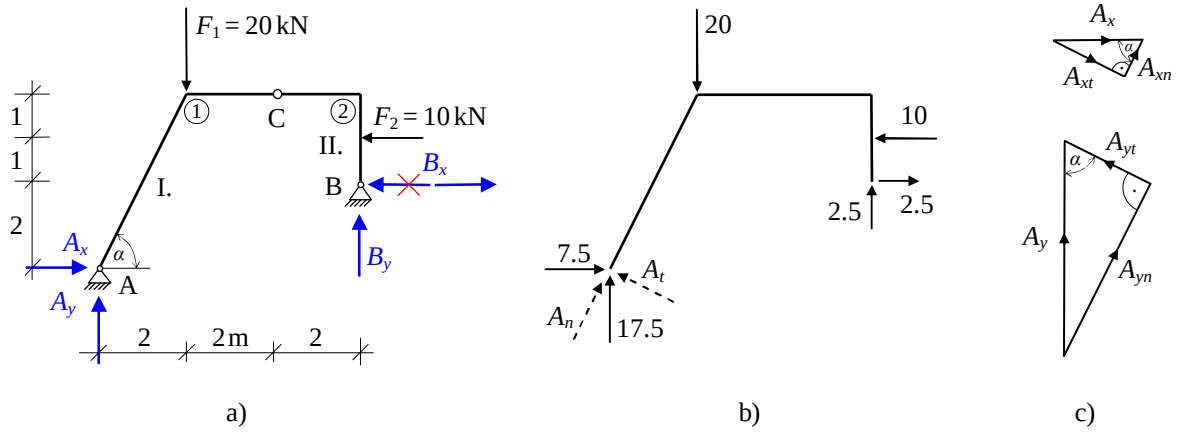
Balról számolva természetesen ugyanezt az értéket kapjuk:

$$M_{\max} = 15 \cdot 10 - 7.5 \cdot 6.25 - 10 \cdot 5 - 2\frac{3.75^2}{2} = 39.06\ \text{kNm}$$

Az 5.23/a ábrán vázolt háromcsuklós tartót két koncentrált erő terheli. A tartó baloldali rúdja ferde, így szükség lesz majd az A támaszerő-összetevők rúdtengely irányú és rúdtengely irányra merőleges felbontására. A ferde rúd hajlásszöge a vízszintessel

$$\alpha = \arctan\frac{4}{2} = 63.44°$$

Először a támaszerőket határozzuk meg, majd előállítjuk az igénybevételi ábrákat. A támaszok különböző magasságban vannak, így a támaszerőket csak kétismeretlenes egyenletek segítségével tudjuk majd meghatározni.



a) b) c)

5.23 ábra. a) Háromcsuklós tartó, b) terhelési vázlata, c) az A_x és A_y támaszerő-összetevők felbontása rúdtengely irányú és rúdtengelyre merőleges összetevőkre.

Az A támaszerő két összetevőjét határozzuk meg először. Ebből a célból két nyomatéki egyensúlyi egyenletet írunk fel: az első ($\sum M^{(B)} = 0$) az egész szerkezet egyensúlyára vonatkozik, míg a második ($\sum M^{(C)} = 0$) a baloldali A-C tartórész egyensúlyát fejezi ki:

$$\sum M^{(B)} = -10 \cdot 1 - 20 \cdot 4 - 2A_x + 6A_y = 0$$

$$\sum M^{(C)} = -20 \cdot 2 - 4A_x + 4A_y = 0$$

Egyszerűsítés és átrendezés után innen a

$$-45 - A_x + 3A_y = 0$$

$$10 + A_x - A_y = 0$$

egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása:

$$A_y = 17.5\ \text{kN}\ (\uparrow) \qquad \text{és} \qquad A_x = 7.5\ \text{kN}\ (\rightarrow)$$

Hasonlóan járunk el a B támaszerő-összetevőinek meghatározása során. Az első

($\sum M^{(A)} = 0$) egyenlet az egész szerkezet egyensúlyára vonatkozik, míg a második ($\sum M^{(C)} = 0$) egyenlet a jobboldali B-C tartórész egyensúlyát fejezi ki:

$$\sum M^{(A)} = 20 \cdot 2 - 10 \cdot 3 - 2B_x - 6B_y = 0$$

$$\sum M^{(C)} = 10 \cdot 1 + 2B_x - 2B_y = 0$$

Rendezés után innen az

$$5 - B_x - 3B_y = 0$$

$$5 + B_x - B_y = 0$$

egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása:

$$B_y = 2.5 \text{ kN } (\uparrow) \qquad \text{és} \qquad B_x = -2.5 \text{ kN } (\rightarrow)$$

A B_x értékét negatív előjellel kaptuk meg, ezért az eredetileg balra feltételezett irányát jobbra mutatóra kell módosítani. Ezt az 5.23/a ábrán megtettük.

Az A-1 rúdszakasz ferde. A normálerő- és nyíróerő ábra előállításához rúdtengely irányú és rúdtengely irányra merőleges erőkre van szükség, így meg kell határozni az A_x és A_y támaszerő-összetevők rúdtengely irányú (A_n) és rúdtengely irányra merőleges (A_t) összetevőit. Az 5.23/c ábrán látható vázlatok szerint ezek:

$$A_n = A_{xn} + A_{yn} = A_x \cos\alpha + A_y \sin\alpha = -7.5\cos(63.44°) - 17.5\sin(63.44°) = -19.0 \text{ kN } (\nearrow)$$

és

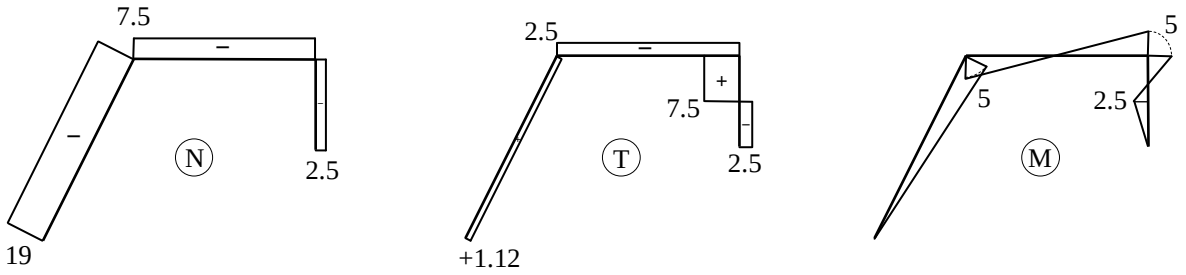
$$A_t = A_{xt} + A_{yt} = A_x \sin\alpha + A_y \cos\alpha = -7.5\sin(63.44°) + 17.5\cos(63.44°) = 1.12 \text{ kN } (\nwarrow)$$

Minden rendelkezésre áll az igénybevételi ábrák előállításához (5.23/b ábra).

A normálerő-ábra (5.24/a ábra) elkészítését az „A” pontnál kezdjük. A ferde rúd „A” keresztmetszetét itt az $A_n = 19.0$ kN nagyságú támaszerő-összetevő nyomja. Ez az érték érvényes a ferde rúd és a vízszintes gerenda csatlakozási pontjáig. A 2. jelű ponttól végtelen közel jobbra a normálerő értékét – balról nézve – az $A_x = 7.5$ kN nagyságú támaszerő-összetevő adja. Ez az erő nyomja a keresztmetszetet. A helyzet nem változik a vízszintes gerenda jobb oldali végpontjáig. A 2. jelű pontnál befordulunk a függőleges oszlopra. Most jobbról (vagyis alulról) keressük a normálerőt. A $B_y = 2.5$ kN nagyságú támaszerő-összetevő a „B” támasztól kezdve a 2. jelű pontig végig nyomja a függőleges oszlopot. Ezzel a normálerő-ábrát előállítottuk.

Hasonlóan járunk el a nyíróerő-ábra (5.24/b ábra) előállítása során. A ferde rúd „A” keresztmetszetére az $A_t = 1.12$ kN nagyságú támaszerő-összetevő hat pozitív nyíróerőként. Ez az érték érvényes a ferde rúd és a vízszintes gerenda csatlakozási pontjáig. Az 1. jelű pontnál belép az $F_1 = 20$ kN nagyságú erő. A ponttól végtelen közel jobbra a nyíróerő értékét – balról nézve – az $A_y = 17.5$ kN nagyságú pozitív és az $F_1 = 20$ kN nagyságú negatív erő különbsége (−2.5 kN) adja. A helyzet nem változik a vízszintes gerenda jobb oldali végpontjáig. A 2. jelű pontnál befordulunk a függőleges oszlopra, majd átugrunk a „B” pontra. Most jobbról (vagyis alulról) keressük a nyíróerőt. A $B_x = 2.5$ kN nagyságú támaszerő-összetevő a „B” támasznál negatív nyíróerőként jelentkezik. Ez az érték az $F_2 = 10$ kN nagyságú erőig érvényes, ahol a

pozitív nyíróerőként fellépő F_2 erő „átviszi” a nyíróerő függvényt a másik oldalra, vagyis a B_x és az F_2 erő különbsége pozitív 7.5 kN nagyságú nyíróerőt eredményez. Ez az érték érvényes 2. jelű pontig. Ezzel a nyíróerő-ábrát előállítottuk.



a) N-ábra b) T-ábra c) M-ábra

5.24 ábra. Háromcsuklós tartó igénybevételi ábrái.

A három csuklóban lévő zérus értékeken kívül a nyomatékábrának (5.24/c ábra) három jellemző értéke van. Az 1. jelű pontban – balról számolva – az *A* támaszerő *x* és *y* irányú összetevője okoz nyomatékot:

$$M_1 = -7.5 \cdot 4 + 17.5 \cdot 2 = 5 \text{ kNm}$$

Ez a nyomaték a háromcsuklós tartó belső oldalán okoz húzást, így a belső oldalra mérjük fel.

Hasonlóan balról számolva, a 2. jelű pontban a nyomaték nagysága:

$$M_2 = -7.5 \cdot 4 + 17.5 \cdot 6 - 20 \cdot 4 = -5 \text{ kNm}$$

Ez a nyomaték a háromcsuklós tartó külső oldalán okoz húzást. Az 1. és 2. jelű pontok között az ábra lineárisan változik.

A nyomatékfüggvény helyi szélsőértékkel rendelkezik az F_2 koncentrált erő támadáspontjában. Értékét jobbról határozzuk meg (mert jobbról csak egy erővel kell számolni):

$$M_{\max} = -(-2.5 \cdot 1) = 2.5 \text{ kNm}$$

Ez a nyomaték a függőleges oszlop belső (bal) oldalán okoz húzást.

5.4 Háromcsuklós rácsos tartók

Háromcsuklós tartók nemcsak gerendatartók formájában, hanem rácsos tartókként is épülnek. Ilyen tartót láthatunk az 5.25 ábrán. Az „A” és „B” csuklós megtámasztás mellett a középső „6” csomópont belső csuklóként lehetővé teszi a baloldali „1-4-6” tartórész és a jobboldali „11-9-6” tartórész közötti relatív elfordulást, és így a rácsos tartó statikai modellje háromcsuklós tartó. A tervezés során meg kell határozni a tartó rúderőit.

A megoldás során nincs szükség új ismeretekre, csak a háromcsuklós tartókra és a rácsos tartókra vonatkozó, már ismert szabályokat kell alkalmazni. A számítás menetét az 5.25 ábrán vázolt háromcsuklós tartó baloldali kilenc rúderőjének kiszámításával mutatjuk be. A teljes rúderő-táblázatot az 5.2 táblázat tartalmazza.

Először az „A” és „B” támaszerőket kell meghatározni.

A teljes tartó egyensúlyának vizsgálatával a „B” pontra felírt

$$\sum M^{(B)} = 20 \cdot 6 - 30(16+12+8+4) + 16A_y = 0$$

nyomatéki egyenlet szolgáltatja az A_y támaszerő-összetevőt:

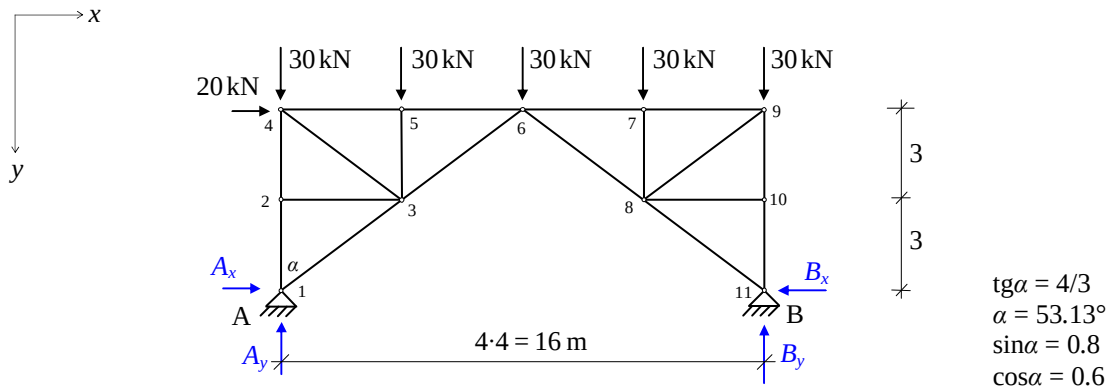
$$A_y = 67.5\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

A baloldali „1-4-6” tartórész egyensúlya külön is vizsgálható, és ez a vizsgálat lehetővé teszi az A_x támaszerő-összetevő meghatározását. A „6” pontra felírt és a baloldali tartórészre vonatkozó

$$\sum_{\text{bal}} M^{(6)} = 67.5 \cdot 8 - A_x \cdot 6 - 30(8+4) = 0$$

nyomatéki egyenletből az A támaszerő vízszintes összetevője:

$$A_x = 30\,\text{kN}\ (\rightarrow)$$



5.25 ábra. Háromcsuklós rácsos tartó.

A B támaszerő meghatározása a fentiekhez hasonló módon történik.
A teljes tartó egyensúlyának vizsgálatával az „A” pontra felírt

$$\sum M^{(A)} = 20 \cdot 6 + 30(4+8+12+16) - 16B_y = 0$$

nyomatéki egyenlet szolgáltatja a B_y támaszerő-összetevőt:

$$B_y = 82.5\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

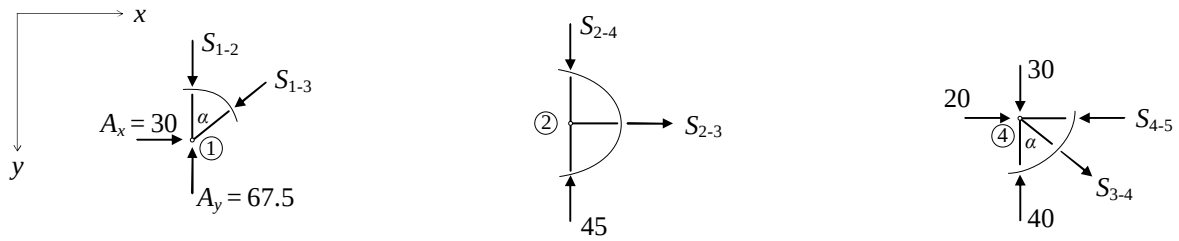
A jobboldali „11-9-6” tartórész egyensúlyának vizsgálatával meghatározhatjuk a B_x támaszerő-összetevő értékét. A „6” pontra felírt és a jobboldali tartórészre vonatkozó

$$\sum_{\text{jobb}} M^{(6)} = -82.5 \cdot 8 + 6B_x + 30(4+8) = 0$$

nyomatéki egyenletből a B támaszerő vízszintes összetevője:

$$B_x = 50\,\text{kN}\ (\leftarrow)$$

Minden rendelkezésre áll a rúderők meghatározására. A következőkben meghatározzuk a baloldali tartórész kilenc rúderőjét, majd az összes rúderőt az 5.2 táblázatban foglaljuk össze. A számítást balról jobbra haladva csomópontonként hajtjuk végre. A csomóponti vázlatokon a rúderőket feltételezett előjellel ábrázoljuk. Ha a rúderőre vonatkozó számítás végén a rúderő értéke pozitív előjellel adódik, akkor az azt jelenti, hogy a feltételezés helyes volt. Negatív eredmény esetén a feltételezett erőirányt ellenkezőjére kell változtatni.



a) az „1” csomópont b) a „2” csomópont c) a „4” csomópont

5.26 ábra. Az „1”, a „2” és a „4” csomópontban működő erők.

Az 1. csomópont egyensúlyát vizsgálva (5.26/a ábra) a két ismeretlen rúderő értékét a két vetületi egyensúlyi egyenlet szolgáltatja. Az *x* irányú vetületi egyensúlyi egyenletben csak egyetlen erő szerepel:

$$\sum F_{x,i} = 30 - S_{1-3}\sin\alpha = 0$$

Innen:

$$S_{1-3} = 37.5\ (-)$$

Az $S_{1\text{-}3}$ ismeretében a függőleges vetületi egyensúlyi egyenlet is csak egy ismeretlen erőt tartalmaz:

$$\sum F_{y,i} = -67.5 + S_{1-2} + 37.5\cos\alpha = 0$$

Innen:

$$S_{1-2} = 45\,\text{kN}\ (-)$$

A „2” csomópontot vizsgálva (5.26/b ábra) azonnal látható, hogy egyensúly esetén az egyetlen *x* irányú rúd csak vakrúd lehet:

$$S_{2-3} = 0\ (\text{vakrúd})$$

Az *y* irányú erőket tekintve

$$\sum F_{y,i} = -45 + S_{2-4} = 0$$

azonnal megkapjuk az $S_{2\text{-}4}$ rúderőt:

$$S_{2-4} = 45\,\text{kN}\ (-)$$

Áttérhetünk a „4” csomópontra (5.26/c ábra), ahol csak két ismeretlen erő van. Az *y* irányú vetületi egyensúlyi egyenletet írjuk fel először, mert ebben csak egy ismeretlen szerepel:

$$\sum F_{y,i} = 30 - 45 + S_{3-4}\cos\alpha = 0$$

Innen:

$$S_{3-4} = 25\,\text{kN}\ (+)$$

Most már az *x* irányú egyensúlyi egyenlet is csak egy ismeretlent tartalmaz

$$\sum F_{x,i} = 20 + 25\sin\alpha - S_{4-5} = 0$$

ahonnan:

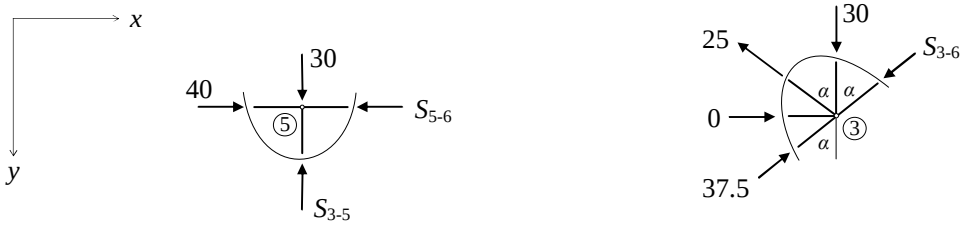
$$S_{4-5} = 40\,\text{kN}\ (-)$$

Két ismeretlent tartalmaz az „5” csomópont (5.27/a ábra). A rúderők értéke és előjele ránézéssel megállapítható:

$$S_{3-5} = 30\,\text{kN}\ (-)$$

és

$$S_{5-6} = 40\,\text{kN}\ (-)$$



a) az „5” csomópont b) a „3” csomópont

5.27 ábra. Az „5” és a „3” csomópontokban működő erők.

Bár a „3” csomópontba öt rúd köt be (5.27/b ábra), közöttük már csak egy ismeretlen van. A vízszintes vetületi egyensúlyi egyenlet

$$\sum F_{x,i} = -25\sin\alpha + 37.5\sin\alpha - S_{3-6}\sin\alpha = 0$$

felhasználásával:

$$S_{3-6} = 12.5\,\text{kN}\ (-)$$

Az eddigiekhez hasonló módon eljárva, például a „B” támasztól balra haladva, az összes

többi rúderő meghatározható. Utolsó lépésként a 6. csomóponthoz érve, az ott felírt egyensúlyi egyenletek egy-egy ellenőrzési lehetőséget is biztosítanak. A tartó összes rúderőjét az 5.2 táblázatban találjuk.

5.2 táblázat. Rúderő-táblázat az 5.25 ábrán látható háromcsuklós rácsos tartóhoz.

A rúd		Rúderő [kN]	
		húzott	nyomott
Baloldali tartórész	1-2		45
	1-3		37.5
	2-3	0	
	2-4		45
	3-4	25	
	3-5		30
	3-6		12.5
	4-5		40
	5-6		40
Jobboldali tartórész	6-7		20
	6-8		37.5
	7-8		30
	7-9		20
	8-9	25	
	8-10	0	
	8-11		62.5
	9-10		45
	10-11		45

5.5 Csuklós többtámaszú törttengelyű gerendatartók

Az 5.28 ábrán vázolt négylábas keret egyben csuklós többtámaszú és törttengelyű tartó. Terhelése a két belső csukló között q egyenletesen megoszló teher. A szerkezet viselkedése összetettnek tűnik, de az egyszerű terhelése és a szimmetrikus geometria miatt igen könnyen és gyorsan előállíthatjuk az igénybevételi ábrákat. A belső csuklók (C) és a támaszok (A és B) jelölésénél már figyelembe vettük a szimmetriát.

Első lépésben a beakasztott tartót vizsgáljuk (5.29/a ábra). Ránézésre megállapítható, hogy a szimmetrikus terhelésű, $2a$ fesztávolságú tartó két támaszánál azonos nagyságú, $C = qa$ nagyságú, felfelé mutató reakcióerők keletkeznek.

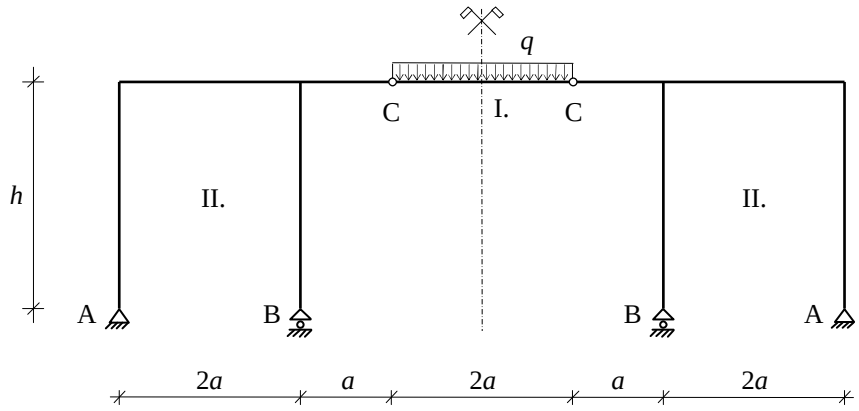
A $C = qa$ felfelé mutató reakciók ellentettjei hatnak a II. jelű tartókra. A szimmetria miatt elegendő az egyik tartót vizsgálni. Legyen ez a baloldali tartó (5.29/b ábra).

A „B” pontra felírt

$$\sum_{\text{bal}} M^{(B)} = qa^2 - 2aA = 0$$

nyomatéki egyenletből megkapjuk az *A* támaszerőt:

$$A = \frac{qa}{2}(\downarrow)$$



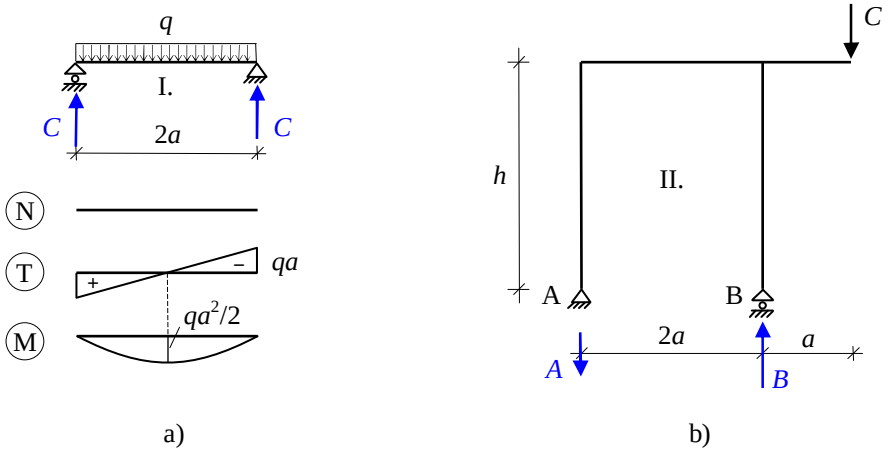
5.28 ábra. Négylábas keret.

Hasonlóképpen eljárva, az „A” pontra felírt

$$\sum_{\text{bal}} 3aqa - 2aB = 0$$

nyomatéki egyenletből megkapjuk a *B* támaszerőt:

$$B = \frac{3qa}{2}(\uparrow)$$



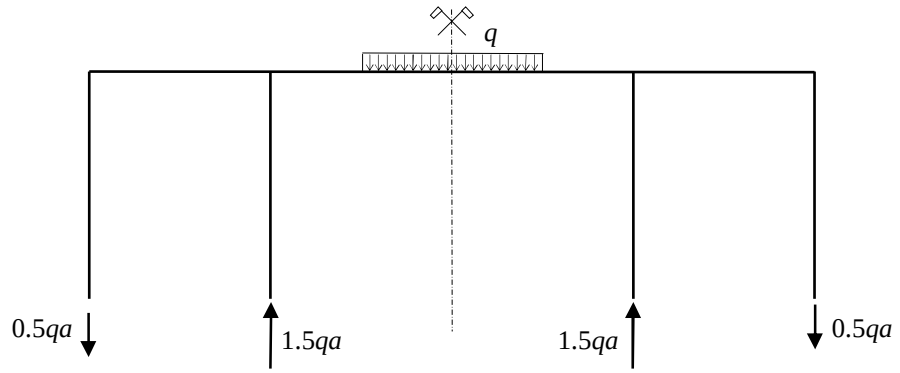
a) b)

5.29 ábra. a) beakasztott tartó, b) baloldali tartórész.

A külső teher és a támaszerők ismeretében (5.30 ábra) és felhasználva a beakasztott tartó már elkészített ábráit (5.29/a ábra), az igénybevételi ábrák most már könnyen előállíthatók.

A normálerő-ábra (5.31/a ábra) elkészítését a balszélső oszlopnál kezdjük. Az oszlop alján működik az $A = 0.5qa$ nagyságú támaszerő (5.30 ábra), amely a rúd teljes hossza mentén húzást okoz. A felső sarokpontnál jobbra fordulva – és balról keresve az erőket – nincs

normálerő ami a vízszintes gerendára hatna. Ez a helyzet érvényes végig a gerenda teljes hosszán. Áttérünk a balról második oszlopra. Ennek alján a „B” pontban a $B = 1.5qa$ támaszerő nyomja a rudat és a helyzet nem változik a felső sarokpontig. Ezzel a normálerő-ábrát elő is állítottuk, mert a szimmetria következtében a jobboldali két oszlopon a normálerő-ábra megegyezik a nekik szimmetrikusan megfelelő két baloldali oszlop ábráival.



5.30 ábra. Négylábas keret terhelési vázlata az igénybevételi ábrák előállításához.

Hasonlóan járunk el a nyíróerő-ábra (5.31/b ábra) előállítása során. Mind a négy oszlop esetében igaz, hogy az oszlop alján nyíróerő nem hat és a helyzet nem változik az oszlopok hossza mentén. A gerenda balszélén az $A = 0.5qa$ nagyságú támaszerő okoz nyíróerőt, mégpedig negatív nyíróerőt. Elérve a második oszlop csatlakozását, itt belép az ellenkező előjelű $B = 1.5qa$ támaszerő. A két erő különbsége qa nagyságú pozitív nyíróerőt okoz. Ez az érték érvényes a baloldali „C” csuklóig. Itt elkezdi hatását kifejteni a q intenzitású egyenletesen megoszló függőleges teher, amely negatív nyíróerőt okoz. A szimmetriatengelyt elérve a nyíróerő értéke zérus. Tovább haladva jobbra, a megoszló teher hatása dominál és amikor a jobboldali „C” csuklót elérjük, a nyíróerő értéke $-qa$. Ez az érték érvényes a „B” támaszról induló oszlop csatlakozásáig. Itt belép a $B = 1.5qa$ támaszerő, amely pozitív nyíróerőt okoz. Ezzel az értékkel a nyíróerő $0.5qa$ értéket vesz fel és ez az érték már nem változik a gerenda jobbszélső pontjáig. Ezzel a nyíróerő-ábra elkészült.

A nyomatékábra (5.31/c ábra) elkészítését is az oszlopokon kezdjük. Mivel mind a négy oszlop támaszában csak függőleges erő ébred, az oszlopokon a nyomaték értéke zérus. A gerenda balvégéről jobbra indulva – és balról keresve az erőket – az $A = 0.5qa$ nagyságú támaszerő okoz nyomatékot, egyre növekvő karral ahogy jobbra haladunk. A nyomaték értéke a második oszlop és a gerenda találkozásánál qa^2. Ez a nyomaték a gerenda keresztmetszetének felső részén okoz húzást, ezért felülre mérjük fel. Elhagyva a balról második oszlop és gerenda csatlakozási pontját, a balról figyelembe vett erők közé belép a $B = 1.5qa$ támaszerő. A „C” csuklóban számítható nyomaték értéke így

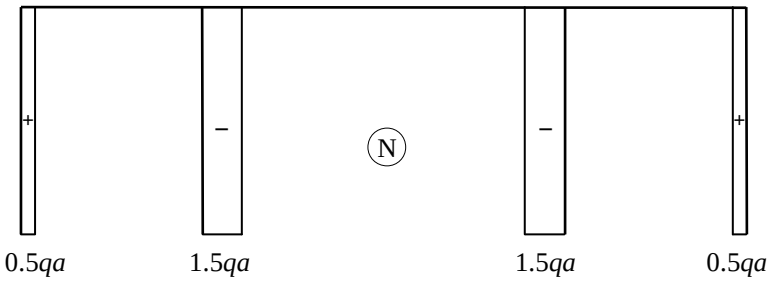
$$M^{(C)} = -\frac{qa}{2}3a + \frac{3qa}{2}a = 0$$

ami persze természetes, hiszen a csukló nem tud nyomatékot felvenni.

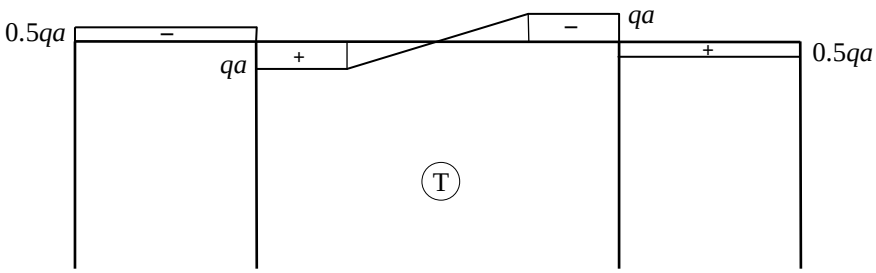
A két csukló között érvényes a beakasztott tartón már megrajzolt nyomatékábra (5.29/a ábra), amit csak be kell másolni a végleges nyomatékábrába. A szimmetriatengelyben keletkező helyi maximum értéke:

$$M_{\max} = \frac{qa^2}{2}$$

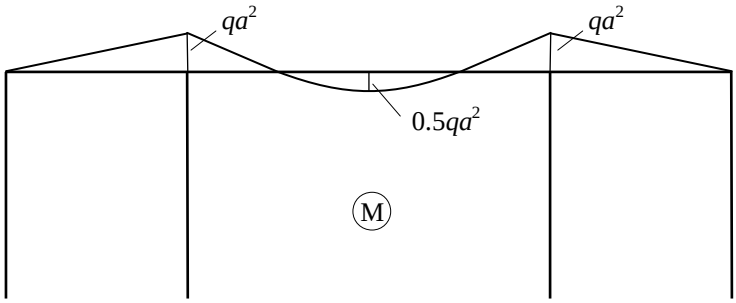
a)



b)



c)



5.31 ábra. Négylábas keret. a) N-ábra, b) T-ábra és c) M-ábra.

6

Síkidomok keresztmetszeti tényezői

Ez az utolsó fejezet nem illeszkedik szorosan a határozott tartókat tárgyaló előző fejezetek sorába, hanem inkább átmenetet képez a mostani statikai és a következő félévben tárgyalásra kerülő szilárdságtani anyagrészek között.

Szerkezetek tervezése és méretezése során szükségessé válik annak meghatározása, hogy a tartószerkezetek elemeiben az igénybevételek hatására milyen feszültségek keletkeznek és a tartók mekkora alakváltozásokat szenvednek. Ezekhez a számításokhoz ismernünk kell a tartók keresztmetszetét jellemző síkidomok keresztmetszeti tényezőit. A keresztmetszeti tényezők egy részét már ismerhetjük korábbi tanulmányainkból, de a többségükkel valószínűleg most találkozunk először.

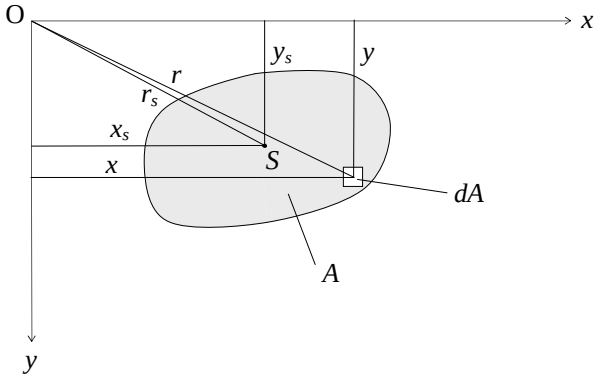
6.1 Bevezetés

Tartószerkezeteink között kiemelkedő szerepet játszanak a rúdszerkezetek. Rúdról akkor beszélünk, ha a test három jellemző mérete közül kettő jóval kisebb a harmadiknál. Ezek a keresztirányú méretek, amelyek jóval kisebbek a hosszirányú méretnél. A keresztirányú méretek a rúd keresztmetszetét határozzák meg, amely a legkisebb síkmetszet. Az alábbiakban ilyen keresztmetszetek jellemzőit ismertetjük.

Tekintsük a 6.1 ábrán vázolt, *x-y* síkban fekvő síkidomot és képzeletben osszuk fel kis, ΔA nagyságú részekre. A részek méretét zérushoz közelítve és a darabszámukat minden határon túl növelve a *keresztmetszeti területet* az

$$A = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{1}^{n \to \infty} \Delta A = \int_{(A)} dA$$

összefüggéssel definiáljuk. A keresztmetszeti terület, vagy röviden terület statikai gyakorlatban használt mértékegységei: mm^2, cm^2 és m^2.



6.1 ábra. Terület és súlypont.

Az *x*-*y* koordináta-rendszerben minden *dA* elemi rész helyzete egyértelműen megadható az *x* és *y* koordinátákkal (6.1 ábra). Az *x* és *y* koordináták és a *dA* elemi részek segítségével definiáljuk az *x* tengelyre és az *y* tengelyre vonatkozó *statikai nyomatékot*, az

$$S_x = \int_{(A)} y dA \qquad \text{és} \qquad S_y = \int_{(A)} x dA$$

összefüggések segítségével. A fenti összefüggésekben az *x* és *y* koordináták az első hatványon szerepelnek, így ezeket elsőrendű nyomatékoknak nevezzük. A képletek tanúsága szerint a statikai nyomaték előjeles mennyiség, hiszen a távolságok előjeles mennyiségek. A statikai nyomaték gyakorlatban használt mértékegységei: mm^3, cm^3 és m^3.

A szilárdságtani számítások során ismernünk kell a keresztmetszeti síkidomok súlypontjának helyét. A *súlypont* helyét egy tetszőleges *x*-*y* koordináta-rendszerben (6.1 ábra) két koordinátájával definiáljuk:

$$x_s = \frac{\int_{(A)} x dA}{A} = \frac{S_y}{A} \qquad \text{és} \qquad y_s = \frac{\int_{(A)} y dA}{A} = \frac{S_x}{A}$$

ahol *x* és *y* a *dA* területelem távolsága a tetszőlegesen felvett *y* és *x* koordinátatengelyektől, és *A* a keresztmetszet teljes területe.

A súlypont két koordinátájának fenti képletében S_x és S_y a keresztmetszet statikai nyomatéka a tetszőlegesen felvett *x*, illetve *y* tengelyre. A súlypont definíciójából következik, hogy a statikai nyomaték a súlyponti tengelyre zérus.

6.2 Másodrendű nyomatékok

Másodrendű nyomatékról akkor beszélünk, ha a területelemet valamely távolság négyzetével, vagy két távolsággal szorozzuk meg (6.1 ábra).

Ilyen nyomaték a *tehetetlenségi nyomaték*, más néven inercianyomaték:

$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA \qquad \text{és} \qquad I_y = \int_{(A)} x^2 dA$$

és a *centrifugális nyomaték*:

$$I_{xy} = \int_{(A)} xy dA$$

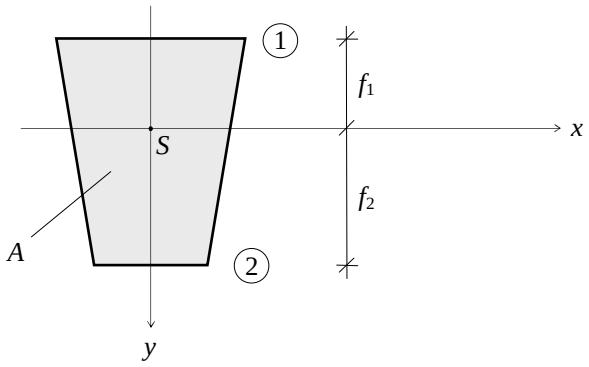
A centrifugális nyomatékot szokás C_{xy}-al is jelölni.

A másodrendű nyomatékok mértékegysége mm^4 (vagy cm^4, vagy m^4). Amíg az I_x és I_y tehetetlenségi nyomatékok mindig pozitív mennyiségek, addig az I_{xy} centrifugális nyomaték előjeles mennyiség.

A szilárdságtani számítások során kiemelt fontosságú az az eset, amikor az inercianyomatékot súlyponti *x* vagy *y* tengelyre számítjuk ki. Ilyen esetekben a számítások során az inercianyomaték helyett gyakran a *keresztmetszeti tényezőt* (vagy keresztmetszeti modulust) használjuk. Az *x* súlyponti tengelyre vonatkozó inercianyomaték esetében például:

$$W_{x,1} = \frac{I_x}{f_1} \qquad \text{és} \qquad W_{x,2} = \frac{I_x}{f_2}$$

ahol „1” és „2” a keresztmetszet szélső szálait jelölik, f_1 és f_2 a szélsőszál-távolságok (a súlyponttól), $W_{x,1}$ és $W_{x,2}$ az 1. és 2. szélső szálhoz tartozó keresztmetszeti modulus és I_x a keresztmetszet inercianyomatéka az x súlyponti tengelyre (6.2 ábra).



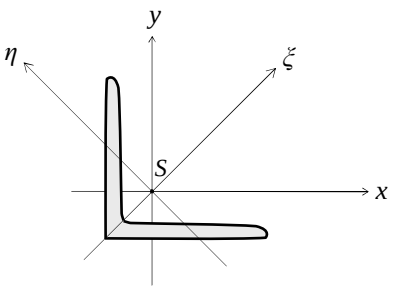
6.2 ábra. Keresztmetszet x-y súlyponti tengelyekkel és a két szélső szállal.

A koordináta-rendszer kezdőpontjára (6.1 ábra) vonatkozik a *poláris inercianyomaték*:

$$I_o = \int\limits_{(A)} r^2 dA = \int\limits_{(A)} (x^2 + y^2) dA = \int\limits_{(A)} x^2 dA + \int\limits_{(A)} y^2 dA = I_x + I_y$$

A szilárdságtani számítások során kiemelt szerepet játszanak a *tehetetlenségi főtengelyek*. A tehetetlenségi főtengelyek olyan súlyponti tengelyek, amelyekre az inercianyomaték szélső értéket vesz fel és a centrifugális nyomaték értéke zérus (6.3 ábra):

$$I_{\max} = I_\xi, \qquad I_{\min} = I_\eta \qquad \text{és} \qquad I_{\xi\eta} = 0$$



6.3 ábra. L-keresztmetszet a szárakkal párhuzamos x-y súlyponti tengelyekkel és a ξ-η tehetetlenségi főtengelyekkel.

A tehetetlenségi nyomatékok gyakorlati meghatározását néhány fontos tétel könnyítheti meg.

Az *összegzési tétel* azt mondja ki, hogy a síkidom egészének tehetetlenségi nyomatéka a síkidom részeinek tehetetlenségi nyomatékai összegével egyenlő.

A *Steiner-tétel* a súlyponti és egy vele párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték között fennálló összefüggést definiálja. A tétel képlet formájában történő megfogalmazása érdekében tekintsük a 6.4 ábrán vázolt síkidomot.

A síkidomot egy „O” kezdőpontú x'-y' koordináta-rendszerben helyezzük el. Az x' tengellyel párhuzamos a síkidom S súlypontján átmenő x tengelye.

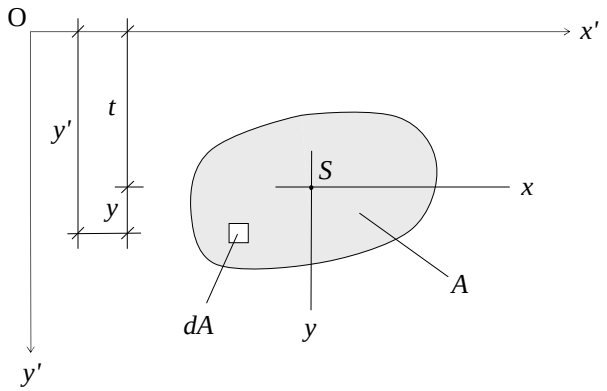
Határozzuk meg a síkidom tehetetlenségi nyomatékát az x' tengelyre:

$$I_{x'} = \int_{(A)} y'^2 dA = \int_{(A)} (t+y)^2 dA = \int_{(A)} (t^2 + 2ty + y^2) dA = t^2 \int_{(A)} dA + 2t \int_{(A)} y dA + \int_{(A)} y^2 dA$$

Mivel az első tag integrálos része az A felszín, a második tag integrálos része – statikai nyomaték a súlyponti tengelyre – zérus, a harmadik tag pedig a síkidom tehetetlenségi nyomatéka az x súlyponti tengelyre, a feladatként megfogalmazott tehetetlenségi nyomaték:

$$I_{x'} = t^2 A + I_x$$

Ha tehát ismerjük egy síkidom tehetetlenségi nyomatékát egy x súlyponti tengelyére, akkor az ezzel a tengellyel párhuzamos és t távolságban lévő x' tengelyre a tehetetlenségi nyomatékot úgy kapjuk meg, hogy a síkidom súlyponti tengelyre vonatkozó I_x tehetetlenségi nyomatékához hozzáadjuk a síkidom A felszínének és a t távolság négyzetének a szorzatát.



6.4 ábra. Elrendezés a Steiner-tétel értelmezéséhez.

A Steiner-tétel ismeretében azt a megállapítást is megfogalmazhatjuk, hogy egy síkidom egymással párhuzamos tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai közül a súlyponti tengelyre vonatkozó a legkisebb:

$$I_x = I_{x'} - t^2 A$$

ahol x a síkidom súlyponti tengelye és x' az x súlyponti tengellyel párhuzamos tengely (6.4 ábra).

Fontos megjegyezni, hogy a Steiner-tétel alkalmazásakor a tengelyek mindig párhuzamosak. A tétel *közvetlen* alkalmazása során az egyik tengely súlyponti tengely kell, hogy legyen.

A Steiner-tétel *közvetett* alkalmazásával sikerrel járhatunk el olyan esetekben is, amelyekben nem ismert egy síkidom tehetetlenségi nyomatéka a súlyponti tengelyre. Ha például ismerjük egy síkidom tehetetlenségi nyomatékát egy tetszőleges (de nem súlyponti) tengelyre és kíváncsiak vagyunk egy másik (de nem súlyponti) tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékra, akkor a Steiner-tétel ismételt felhasználásával a súlyponti tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték ismerete *nélkül* is eredményre jutunk.

Tekintsük a 6.5 ábrán vázolt síkidomot. Tételezzük fel, hogy ismerjük a síkidom A felszínét és az 1. jelű tengelyre vonatkozó I_1 tehetetlenségi nyomatékát. Feladatunk legyen a 2. jelű tengelyre vonatkozó I_2 tehetetlenségi nyomaték meghatározása. A feladatot három

rövid lépésben oldjuk meg. Először felírjuk az *x* súlyponti tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot az 1. jelű és a súlyponti tengelyek közötti kapcsolat felhasználásával:

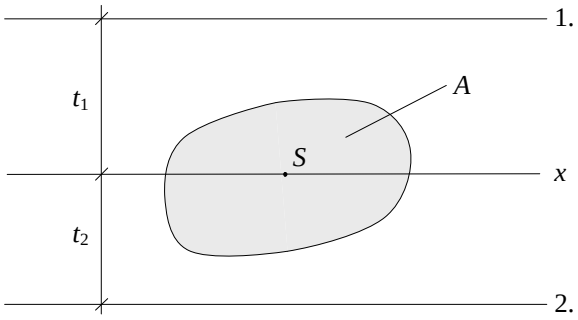
$$I_x = I_1 - t_1^2 A$$

A Steiner-tételt ezután a 2. jelű és a súlyponti tengelyek viszonylatában írjuk fel:

$$I_2 = I_x + t_2^2 A$$

Végül a fenti képletbe behelyettesítjük a súlyponti tengelyre vonatkozó összefüggést:

$$I_2 = I_1 - t_1^2 A + t_2^2 A = I_1 + (t_2^2 - t_1^2) A$$

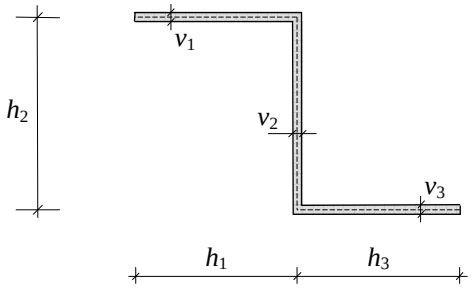


6.5 ábra. A Steiner-tétel alkalmazása külső tengelyek esetén.

Vékonyfalú szelvényekből összetett keresztmetszetek esetében fontos szerepet játszhat a *csavarási tehetetlenségi nyomaték*. Ha a keresztmetszet nyitott, vagyis a keresztmetszet „keskeny", tömör négyszögkeresztmetszetek – falelemek – összeépített rendszere (6.6 ábra), akkor az ún. Saint-Venant-féle csavarási tehetetlenségi nyomaték a

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{m} h_i v_i^3$$

összefüggésből számítható ki. A fenti képletben *v* a falelemek vastagsága, *h* a falelemek másik mérete és *m* a nyitott szelvényt alkotó falelemek száma.



6.6 ábra. Három falelemből álló (m = 3) vékonyfalú szelvény nyitott keresztmetszettel.

A Saint-Venant-féle csavarási tehetetlenségi nyomatékot tiszta csavarási tehetetlenségi nyomatéknak is nevezik. A csavarási tehetetlenségi nyomaték jelölésére az I_{cs} és az I_t jelölés

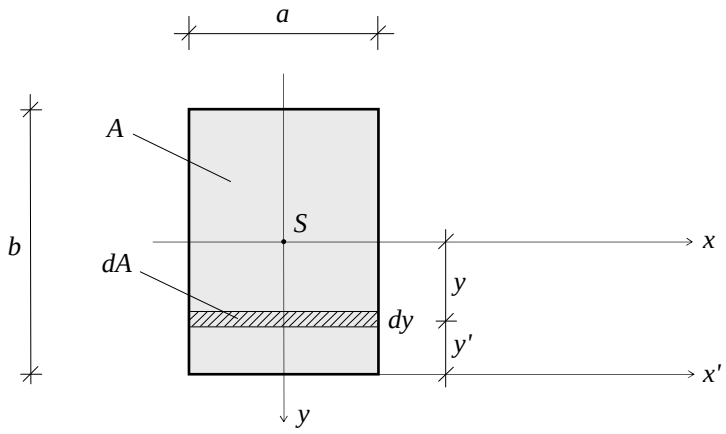
is szokásos. [A klasszikus csavaráselmélet kidolgozója a francia Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886) volt.]

Zárt szelvények csavarási tehetetlenségi nyomatékával, valamint az öblösödési tehetetlenségi nyomatékkal a „Mechanika II. Szilárdságtan” c. jegyzet foglalkozik.

6.3 Gyakorló feladatok

A tehetetlenségi nyomatékok számítására igen nagy szükségünk lesz a „Mechanika II. Szilárdságtan” c. tárgy keretein belül. Több évtizedes tapasztalatok azt mutatják, hogy a hallgatóknak az akkor esedékes szilárdságtani ismeretek elsajátítása jelentős gondot okozhat. Ha a nehézségeket fokozzák a tehetetlenségi nyomatékok meghatározásával kapcsolatos gondok, akkor gyakran előfordulhat, hogy a sikertelen félév oka nem a szilárdságtani ismeretek hiányára, hanem a tehetetlenségi nyomatékok számításának nem megfelelő elsajátítására vezethető vissza. Ezt szeretnénk elkerülni az ebben a pontban bemutatott gyakorló jellegű feladatokkal.

Tekintsük először a 6.7 ábrán vázolt téglalap alakú keresztmetszetet. Az x és y tengelyek a keresztmetszet súlyponti (és egyben szimmetria-) tengelyei. Az x' tengely párhuzamos az x súlyponti tengellyel és érinti a keresztmetszet alsó szélét. Határozzuk meg a keresztmetszet statikai nyomatékát és a tehetetlenségi nyomatékát az x' tengelyre, valamint a tehetetlenségi nyomatékot az x súlyponti tengelyre.



6.7 ábra. Téglalap keresztmetszet.

A statikai nyomaték az x' tengelyre:

$$S_{x'} = \int_{(A)} y' dA = \int_{(A)} y' a dy = a \int_{(A)} y' dy = a \left[\frac{y'^2}{2} \right]_0^b = \frac{ab^2}{2}$$

A tehetetlenségi nyomaték az x' tengelyre:

$$I_{x'} = \int_{(A)} y'^2 dA = \int_{(A)} y'^2 a dy = a \int_{(A)} y'^2 dy = a \left[\frac{y'^3}{3} \right]_0^b = \frac{ab^3}{3}$$

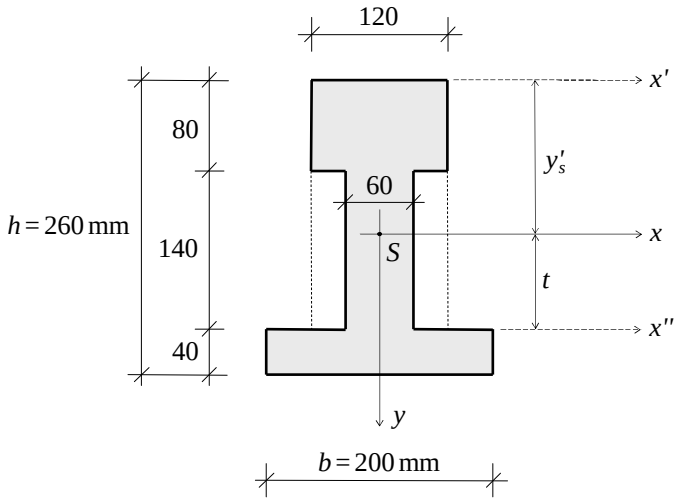
A tehetetlenségi nyomaték az x súlyponti tengelyre:

$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA = \int_{(A)} y^2 a dy = a \int_{(A)} y^2 dy = a\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = a\left[\frac{b^3}{8\cdot 3} + \frac{b^3}{8\cdot 3}\right] = \frac{ab^3}{12}$$

Az x' tengelyre vonatkozó $I_{x'}$ tehetetlenségi nyomaték ismeretében gyakorlásképpen határozzuk meg az x súlyponti tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot a Steiner-tétel segítségével is:

$$I_x = I_{x'} - t^2 A = \frac{ab^3}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 ab = \frac{ab^3}{3} - \frac{ab^3}{4} = \frac{ab^3}{12}$$

I-keresztmetszetet mutat a 6.8 ábra. Határozzuk meg az x és y súlyponti tengelyekre vonatkozó I_x és I_y tehetetlenségi nyomatékokat.



6.8 ábra. I-keresztmetszet.

A keresztmetszet területe:

$$A = 120\cdot 80 + 140\cdot 60 + 200\cdot 40 = 26000\ \text{mm}^2$$

A keresztmetszet az y tengelyre szimmetrikus, így az S súlypont az y tengelyen helyezkedik el. Határozzuk meg a súlypont függőleges helyzetét. Ez célszerűen az y_s' távolság meghatározásával történhet. A keresztmetszet x' segédtengelyre vonatkozó $S_{x'}$ statikai nyomatékát kétféleképpen írhatjuk fel: vesszük a teljes keresztmetszet (A) statikai nyomatékát az y_s' karral és vesszük a keresztmetszetet alkotó három területrész statikai nyomatékának összegét. A két mennyiség azonos:

$$Ay_s' = S_{x'} = 120\cdot 80\cdot 40 + 140\cdot 60\cdot 150 + 200\cdot 40\cdot 240 = 3564000\ \text{mm}^3$$

Innen:

$$y_s' = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{3564000}{26000} = 137.1\ \text{mm}$$

A súlypont helyzetének ismeretében most már felírhatjuk a két tehetetlenségi nyomatékot.

Az *x* súlyponti tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot a Steiner-tétel segítségével határozzuk meg. Segédtengelynek most az *x''* tengelyt választjuk. Felhasználjuk az előző feladatnál levezetett összefüggést, amely szerint egy téglalap tehetetlenségi nyomatéka az oldalán futó tengelyre $ab^3/3$, ahol *b* az oldalra merőleges méret (6.7 ábra).

Az *x''* tengely esetünkben három téglalap oldalát érinti (6.8 ábra). Ezek az alsó 200·40 méretű téglalap, a szaggatott kiegészítésekkel kialakított felső 120·220 méretű téglalap és a kiegészítések miatt levonandó két 30·140 méretű téglalap. Ezt a három tételt egészíti ki a Steiner-féle képlet második tagja (a síkidom *A* felszínének és a két tengely *t* távolsága négyzetének a szorzata). Ez a tag negatív előjelű, mert súlyponti tengelyre térünk át egy másik tengelyről (és a tehetetlenségi nyomaték mindig a súlyponti tengelyre a legkisebb):

$$I_x = I_{x''} - t^2 A = \frac{200 \cdot 40^3}{3} + \frac{120 \cdot 220^3}{3} - \frac{2 \cdot 30 \cdot 140^3}{3} - 26000(220 - 137.1)^2 = 1.96 \cdot 10^8 \,\mathrm{mm}^4$$

Az *y* súlyponti tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték kiszámításakor egyszerűbb a helyzetünk, mert a teljes keresztmetszet három olyan kisebb téglalapra bontható fel, amelyeknek az *y* tengely súlyponti tengelye. A tehetetlenségi nyomaték így:

$$I_y = \frac{80 \cdot 120^3}{12} + \frac{140 \cdot 60^3}{12} + \frac{40 \cdot 200^3}{12} = 4.07 \cdot 10^7 \ \mathrm{mm}^4$$

Gyakorlásképpen határozzuk meg a keresztmetszeti modulusokat is.

$$W_{x,\min} = \frac{I_x}{y_s'} = \frac{1.96 \cdot 10^8}{137.1} = 1.43 \cdot 10^6 \,\mathrm{mm}^3 \qquad \text{és} \qquad W_{x,\max} = \frac{I_x}{h - y_s'} = \frac{1.96 \cdot 10^8}{122.9} = 1.59 \cdot 10^6 \,\mathrm{mm}^3$$

és

$$W_y = \frac{I_y}{\frac{b}{2}} = \frac{4.07 \cdot 10^7}{100} = 4.07 \cdot 10^5 \,\mathrm{mm}^3$$

A következő feladat tárgya a 6.9 ábrán látható L keresztmetszet. Határozzuk meg az *x* és *y* súlyponti tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékokat.

Az

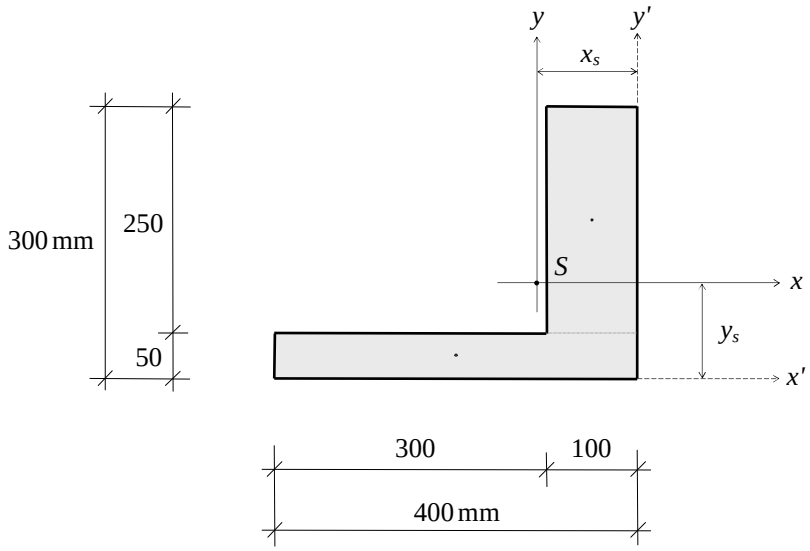
$$A = 50 \cdot 300 + 100 \cdot 300 = 45000 \,\mathrm{mm}^2$$

keresztmetszeti terület és az *x'* és *y'* segédtengelyekre felírt statikai nyomatékok segítségével meghatározhatjuk a súlypont két koordinátáját:

$$x_s = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{400 \cdot 50 \cdot 200 + 250 \cdot 100 \cdot 50}{45000} = 116.67 \,\mathrm{mm}$$

és

$$y_s = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{500 \cdot 300 \cdot 25 + 100 \cdot 300 \cdot 150}{45000} = 108.33 \,\mathrm{mm}$$



6.9 ábra. L-keresztmetszet.

Mindkét tehetetlenségi nyomatékot úgy határozzuk meg, hogy a Steiner-tétel alkalmazásával először két részben vesszük az L keresztmetszetet alkotó téglalapok tehetetlenségi nyomatékát a megfelelő segédtengelyre (x' és y'), majd a két párhuzamos tengely távolságának és a felszínnek a segítségével áttérünk a súlyponti tengelyre:

$$I_x = I_{x'} - y_s^2 A = \frac{300 \cdot 50^3}{3} + \frac{100 \cdot 300^3}{3} - 108.33^2 \cdot 45000 = 3.844 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

és

$$I_y = I_{y'} - x_s^2 A = \frac{50 \cdot 400^3}{3} + \frac{250 \cdot 100^3}{3} - 116.67^2 \cdot 45000 = 5.375 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

A centrifugális nyomaték értékének meghatározásához az L keresztmetszetet most egy alsó (fekvő) 50×400 és egy felső (álló) 100×250 téglalapra bontjuk. A centrifugális nyomaték értéke így:

$$I_{xy} = 50 \cdot 400 \cdot \left[-(108.33 - \frac{50}{2}) \right] \cdot \left[-(\frac{400}{2} - 116.67) \right] +$$

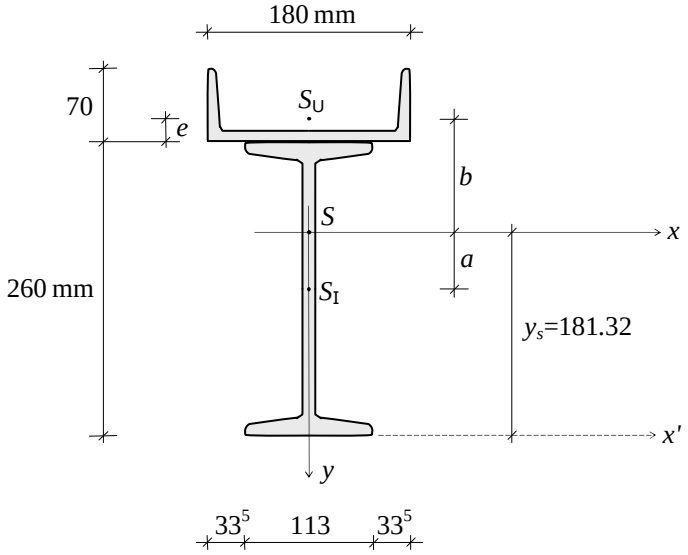
$$+100 \cdot 250 \cdot (116.67 - 50) \cdot \left(300 - \frac{250}{2} - 108.33 \right) = 2.5 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

Határozzuk meg végül a 6.10 ábrán látható összetett szelvény tehetetlenségi nyomatékait. A keresztmetszetet egy álló I-260 és egy fekvő U-180 hengerelt acél szelvény alkotja.

Az U-180 szelvény súlypontját S_U, az I-260 szelvény súlypontját S_I, az összetett szelvény súlypontját S jelöli. A keresztmetszetet alkotó két szelvénynek a számításunkhoz szükséges adatait a „Segédletek” alapján a 6.1 táblázatban foglaljuk össze.

Az első lépés a súlypont helyének meghatározása. Az y tengely szimmetriatengely, így csak a súlypont függőleges koordinátája igényel számítást. Felhasználva a táblázati adatokat és az x' segédtengelyre felírt statikai nyomatékot, a súlypont y_s távolsága az I-tartó talpvonalától:

$$y_s = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{2800 \cdot 279.2 + 5340 \cdot 130}{2800 + 5340} = 181.32 \text{ mm}$$



6.10 ábra. Álló I és fekvő U szelvényekből összetett keresztmetszet.

6.1 táblázat. I-260 és U-180 hengerelt acél szelvény számításhoz szükséges adatai.

	A [mm^2]	I_1 (max) [mm^4]	I_2 (min) [mm^4]	e [mm]
I-260	5340	57400000	2880000	–
U-180	2800	13300000	1140000	19.2

A súlypont helyének ismeretében most már kiszámíthatjuk az összetett keresztmetszet x súlyponti tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát. A Steiner-tétel alkalmazásával járunk el: vesszük először az I-tartó és az U-tartó tehetetlenségi nyomatékét a saját vízszintes súlyponti tengelyére, majd a 6.10 ábrán bejelölt a és b távolság segítségével áttérünk az összetett keresztmetszet x súlyponti tengelyére:

$$I_x = I_{\mathrm{I},x} + I_{\mathrm{U},x} + a^2 A_{\mathrm{I}} + b^2 A_{\mathrm{U}} =$$

$$= 57400000 + 1140000 + (181.32 - 130)^2 5340 + (260 - 181.32 + 19.2)^2 2800 = 9.94 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Az összetett keresztmetszet y súlyponti tengelye egyben az I-tartó és az U-tartó súlyponti tengelye is. Az y tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot így egyszerű összegzéssel kapjuk meg:

$$I_y = I_{\mathrm{I},y} + I_{\mathrm{U},y} = 2880000 + 13300000 = 1.618 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Irodalom

Cholnoky Tibor:	Mechanika I. Sztatika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1964
Freund Péter:	SEGÉDLETEK a Mechanika és Tartószerkezetek c. tárgyhoz. Terc Szakkönyvkiadó, Budapest, 2015
Zalka Károly:	Mechanika I. Statika. Előadásvázlatok. Kézirat, Budapest, 1983-1990
Zalka Károly:	Mechanika II. Szilárdságtan. v1, 2015; v1.26 e-kiadás, 2024
Zalka Károly:	Mechanika III. Határozatlan tartók. v1, 2010; v5.15, e-kiadás, 2024