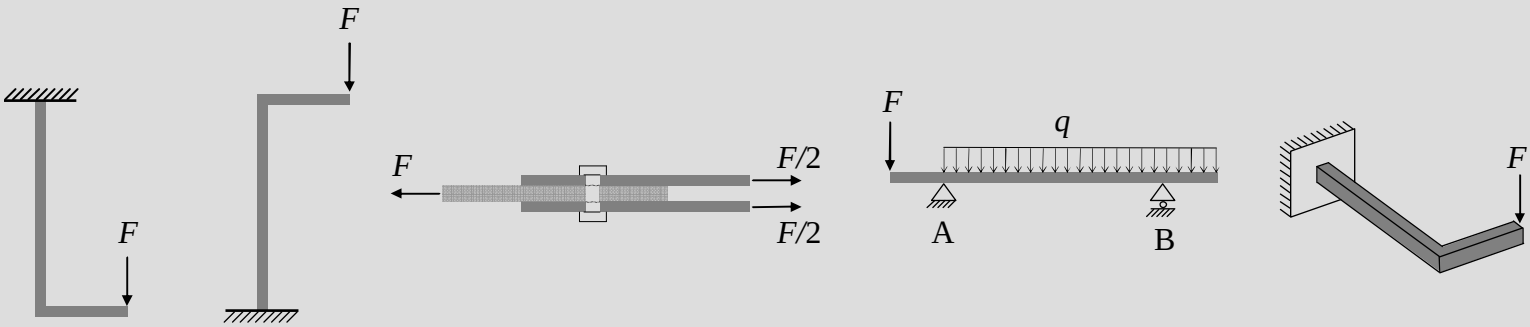
Mechanika II

Szilárdságtan

Zalka Károly



Budapest, e-kiadás
2024

© Zalka Károly, 1983; 2015-2024, e-kiadás

Szabad ezt a kiadványt sokszorosítani, terjeszteni és elektronikus vagy bármely formában tárolni.
Tilos viszont a kiadványt bármely formában megváltoztatni és bármely formában értékesíteni.

Lektorok:

Rákóczy Katalin okl. építészmérnök	Lőrincz György PhD okl. építőmérnök	Horváth Lászlóné Fazakas Margit okl. építőmérnök

v1.26, 2024 november 8

Tartalomjegyzék

Előszó **1**

1. Bevezetés **3**

2. Központos húzás **8**
2.1 Feszültségszámítás 8
2.2 Az alakváltozás meghatározása 9
2.3 Gyakorlati alkalmazás 13
2.3.1 Központosan húzott rudak méretezése 13
2.3.2 Gyakorló feladat 15

3. Központos nyomás **17**
3.1 Zömök rudak 18
3.2 Karcsú rudak 19
3.3 Gyakorlati alkalmazás 26
3.3.1 Központosan nyomott zömök és karcsú szerkezetek méretezése 26
3.3.2 Gyakorló feladatok 34

4. Tiszta nyírás **38**
4.1 Feszültség és alakváltozás 38
4.2 A nyírófeszültségek reciprocitási (dualitási) tétele 40
4.3 Gyakorlati alkalmazás 40
4.3.1 Tisztán nyírt rudak méretezése 41
4.3.2 Egy speciális gyakorlati alkalmazás: csavarkötés 42
4.3.3 Gyakorló feladatok 46

5. Síkbeli feszültségállapot **49**
5.1 Főirányok és főfeszültségek 49
5.2 A feszültségi állapot Mohr-féle ábrázolása 52
5.3 Gyakorlati alkalmazás 55

6. Egyszerű, egyenes hajlítás **57**
6.1 Rugalmas anyagú tartók egyszerű, egyenes hajlítása. A feszültségek meghatározása 58
6.2 Keresztmetszeti tényezők 61
6.3 Rugalmas-képlékeny anyagú tartók egyszerű, egyenes hajlítása 62
6.4 Gyakorlati alkalmazás 65
6.4.1 Hajlított tartók méretezése 65
6.4.2 Gyakorló feladatok 67

7. Ferde hajlítás **74**
7.1 A feszültségek meghatározása 75
7.2 Gyakorlati alkalmazás 77

7.2.1 Méretezés ferde hajlítás esetén 77
7.2.2 Gyakorló feladatok 77

8. Összetett hajlítás 83
8.1 A nyírófeszültségek meghatározása 84
8.2 Nyírófeszültségek egyszerű keresztmetszeteknél 86
8.3 Gyakorlati alkalmazás 89

9. Hajlított tartók rugalmas alakváltozása 94
9.1 A tartó meggörbült tengelyvonalának differenciálegyenlete 95
9.2 Az alakváltozások meghatározása Otto Mohr módszerével 100
9.3 Az alakváltozások meghatározása munkatételek segítségével 102
9.4 Merevségi követelmények 104
9.5 Gyakorlati alkalmazás 105

10. Hajlított tartók méretezése 115
10.1 Hajlított tartó szükséges keresztmetszetének megállapítása 116
10.2 Hajlított tartó kiosztásának meghatározása 119

11. Külpontos húzás 123
11.1 A húzóerő döféspontja az egyik főtengelyre esik 124
11.1.1 A feszültségképlet és a semleges tengely helyzete 124
11.1.2 Maghatárpont 128
11.1.3 Gyakorlati alkalmazás 130
11.2 A húzóerő döféspontja általános helyzetű 134
11.2.1 A feszültségképlet és a semleges tengely helyzete 135
11.2.2 A keresztmetszet magidoma 136
11.2.3 Gyakorlati alkalmazás 138

12. Külpontos nyomás 141
12.1 Külpontosan nyomott zömök rudak 141
12.1.1 Húzószilárdsággal rendelkező zömök rudak 142
12.1.2 Húzószilárdsággal nem rendelkező zömök rudak 142
12.1.2.1 Erő a magidomon belül 143
12.1.2.2 Erő a magidomon kívül, de a keresztmetszetet érintő egyeneseken belül 143
A: Rugalmas megoldás 144
B: Képlékeny megoldás 148
12.1.3 Gyakorlati alkalmazás 150
12.2 Külpontosan nyomott karcsú rudak 160
12.2.1 Húzószilárdsággal rendelkező karcsú rudak 161
12.2.2 Húzószilárdsággal nem rendelkező karcsú rudak 161
12.2.2.1 Betonszerkezetek 161
12.2.2.2 Falazott szerkezetek 164
12.2.3 Gyakorlati alkalmazás 165
12.3 A keresztmetszet teherbírási vonala 167

13. Csavarás 171
13.1 Kör keresztmetszetű tömör rudak csavarása 171
13.2 Négyszög keresztmetszetű rudak csavarása 174
13.3 Vékonyfalú szelvények csavarása 176
13.4 Gyakorlati alkalmazás 180

Irodalom 183

Előszó

Korábbi tanulmányaink során a Mechanika I (Statika) című tárgy merev testek statikáját tárgyalta. Ismertette a mechanika alapfogalmait, és megismerkedtünk a határozott tartók viselkedésével és a terhek hatására keletkező igénybevételek meghatározásával.

Jelen jegyzet tárgya a Mechanika II (Szilárdságtan). Ez a tantárgy azt mutatja be, hogy a szerkezetekben keletkező igénybevételek milyen feszültségeket és alakváltozásokat okoznak. Mire valaki sikeresen befejezi (építő-, építész-) mérnöki tanulmányait, számos tárgyat kell teljesítenie a mechanika és tartószerkezetek témakörökben. Sokéves tapasztalatok azt mutatják, hogy ezek közül talán a Szilárdságtan a legnehezebben elsajátítható tárgy. Ennek valószínűleg az az oka, hogy a félév során sokféle, meglehetősen különböző területtel és jelenséggel – pl. húzás, nyomás, nyírás, hajlítás, csavarás – kell foglalkozni. A különböző viselkedési módok és jelenségek megértése már külön-külön is nehézségeket okozhat. Ezen túlmenően azonban az esetenként egymásra épülő anyagrészek időnként megkövetelik a korábban elhangzottak naprakész ismeretét, illetve bizonyos elvek azonnali alkalmazását. A jegyzet elkészítésével ehhez a nehéz feladathoz szeretnénk segítséget nyújtani.

A Szilárdságtan kurzus elsődleges feladata jelenségek bemutatása és alapelvek ismertetése. A végső cél azonban az, hogy a megszerzett ismeretek gyakorlati alkalmazáshoz vezethessenek. A tárgy így a gyakorlati alkalmazásokhoz is igyekszik hátteret biztosítani és olyan eljárásokat bemutatni, amelyek felhasználhatók a gyakorlati munka során is. A gyakorlati alkalmazást a jegyzet 46 részletesen kidolgozott számpélda bemutatásával segíti.

A szilárdságtan alapelvei segítségével levezetett összefüggések legtöbbször közvetlenül alkalmazhatók gyakorlati számítások elvégzésére. Néhány esetben azonban az elméleti összefüggések olyan bonyolult és esetleg hosszadalmas eljárásokhoz vezetnének, amelyek módosítás nélküli alkalmazása kevéssé átlátható számításokhoz vezetne. A gyakorlati munka egyszerűsítése és megkönnyítése céljából ilyen esetekben célszerű bizonyos egyszerűsítéseket bevezetni. Lehetséges például egyes elméleti részproblémák általános megoldását táblázatos, illetve grafikus formában előre megadni, hogy az adott gyakorlati problémát megoldó szakembernek csak ki kelljen választani a saját adatai segítségével a ő problémájához tartozó részmegoldást, amivel utána viszonylag egyszerűen jut problémája megoldásához.

Az ilyen egyszerűbb eljárások megalkotása általában a kutatók, közzététele pedig a szabványkészítők feladatkörébe tartozik. Amíg a szilárdságtan alapösszefüggései nem függenek szabványoktól, addig ezek az egyszerűsített eljárások tartalmukban és formájukban is változhatnak a mindenkori érvényes szabványelőírásoknak megfelelően. Esetünkben a karcsú nyomott rudak méretezésével foglalkozó 3.2 és 12.2.2 pontokban és a tiszta nyírás egy speciális gyakorlati esetét tárgyaló 4.3.2 pontban ismertetünk ilyen eljárásokat. Ezek az eljárások összhangban vannak a jegyzet 2015 januári első kéziratának elkészülésekor érvényben lévő szabványokkal. Fontos azonban megjegyezni, hogy ennek a jegyzetnek *nem* célja, hogy a szilárdságtan alapvető összefüggéseit bemutató anyag formailag is megegyezzen a mindenkori szabványok elnevezéseivel és jelöléseivel. A jegyzet elkészítése során nem is vettük át az éppen aktuális szabványok jelölésrendszerét és a szilárdságtan klasszikus, hagyományos elnevezéseit és jelöléseit alkalmaztuk. (A jegyzet például a

húzó/nyomófeszültséget így σ-val, a nyírófeszültséget τ-val jelöli és a biztonság mértékét a *biztonsági tényező*vel jellemzi.) Ezért is, és az esetleges tartalmi változások miatt is, célszerű az éppen aktuális szabványok tanulmányozása. Minden gyakorlati alkalmazás során a felhasználó kötelessége és felelőssége ellenőrizni, hogy az alkalmazott eljárások az alkalmazás idején is megfelelnek-e a vonatkozó szabványelőírásoknak.

A legújabb szabványok részletes ismertetésével egyébként későbbi félévek szaktantárgyai, például a „Fa- és acélszerkezetek”, a „Vasbeton szerkezetek” és a „Kő-, falazott és egyéb szerkezetek” foglalkoznak.

A legfontosabb szabványelőírások, az éppen aktuális jelölésrendszer és a méretezésekhez szükséges adatok egyébként a „SEGÉDLETEK a Mechanika és Tartószerkezetek c. tárgyhoz” kiadványban is megtalálhatók.

A jegyzetet Rákóczy Katalin, Lőrincz György és Horváth Lászlóné Fazakas Margit lektorálta. A szokásos lektori tevékenységet messze meghaladó, gondos és lelkiismeretes munkájukért ezúton is szeretném hálás köszönetemet kifejezni.

Budapest, 2016 október

Jelen v1.26 verzió néhány kisebb módosítást tartalmaz.

Budapest, 2024 november

Zalka Károly

1

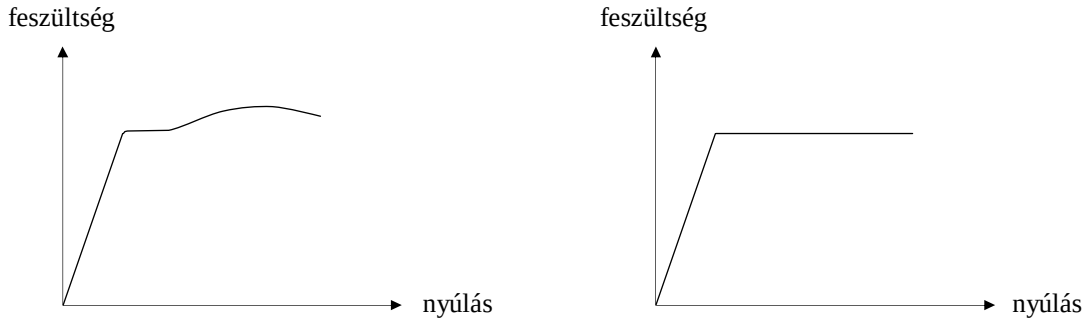
Bevezetés

A merev testek statikája tanulmányozása során (az előző félévben) azzal a feltételezéssel éltünk, hogy a szerkezetek méret- és alakváltozásokat nem szenvednek. Ez a feltételezés lehetővé teszi a tartókon keletkező igénybevételek viszonylag egyszerű és a pontossági igényeknek megfelelő meghatározását. Tartószerkezeteink azonban szilárd testek, amelyek a rájuk ható külső erők hatására megváltoztatják a méretüket és alakjukat. Az alakváltozás során a szilárd testekben feszültségek keletkeznek.

A külső erők hatására a szilárd testekben bekövetkező alakváltozások és a keletkező feszültségek meghatározásával a szilárdságtan foglalkozik. A keresett szilárdságtani mennyiségek meghatározása rendszerint bonyolult feladatokhoz vezet. Éppen ezért vizsgálataink során egyszerűsítő feltételezésekkel élünk és felhasználunk kísérleti tapasztalatokat is. Az egyszerűsítő feltételek a következők:

1) a terhelés statikus jellegű (amikor is a külső erő nagysága zérustól a legnagyobb értékig folyamatosan, lassú ütemben növekszik),
2) az alakváltozások kicsinyek (amelyeket az egyensúlyi egyenletek felírásánál nem kell figyelembe venni),
3) a szilárd testek anyaga homogén (minden *pontban* azonos fizikai tulajdonságú) és izotróp (egy pontban minden *irányban* azonos tulajdonságú),
4) a szilárd testek anyaga ideálisan rugalmas-képlékeny.

Az 1. és 2. feltételt a jegyzetben tárgyalt összes jelenség esetén (minden fejezetben) maradéktalanul érvényesnek tekintjük; a 3. és 4. feltétel esetenként módosított formában, illetve bizonyos kiegészítéssel vagy megszorítással érvényes. Ezeket az esetleges módosításokat, illetve kiegészítéseket minden esetben az érintett fejezetben ismertetjük.



a) tényleges diagram b) idealizált diagram

1.1 ábra. Rugalmas-képlékeny anyagú húzott acél próbapálca feszültség-nyúlás diagramja.

Az ideálisan rugalmas-képlékeny anyag jellemzőivel a 2. fejezetben még részletesebben foglalkozunk; itt most csak annyit rögzítünk, hogy az anyag összetett, görbevonallal jellemezhető feszültség-nyúlás diagramját (1.1/a ábra) a szilárdságtani vizsgálatokhoz két egyenes szakasszal helyettesítjük (1.1/b ábra). Az első (ferde) szakasz a rugalmas, a második (vízszintes) szakasz pedig a képlékeny viselkedés tartományát jellemzi.

A szilárdságtan feladata tehát a terhek hatására a szerkezetekben keletkező feszültségek és alakváltozások meghatározása, abból a célból hogy biztonságos és gazdaságos szerkezeteket tervezhessünk. Ez az ún. erőtani tervezés. Az erőtani tervezés gyakorlati végrehajtását szabványok szabályozzák.

Mielőtt rátérhetünk a különböző típusú feszültségek és alakváltozások tárgyalására, néhány alapfogalmat kell bevezetni.

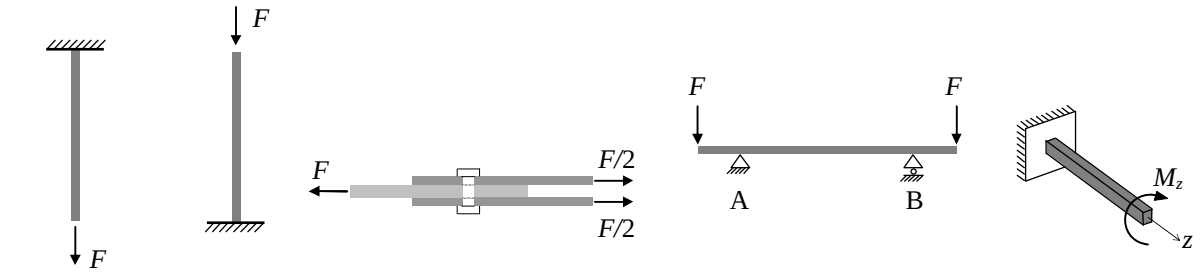
Igénybevétel

A szerkezetre ható külső erőknek a keresztmetszetre gyakorolt hatását – a normálerő, nyíróerő és nyomaték összességét – igénybevételnek nevezzük.

Az igénybevételek két nagy csoportra oszthatók: a) egyszerű (egyfajta) és b) összetett (többfajta) igénybevételek.

a) Egyszerű igénybevételek (1.2 ábra):
- központos húzás/nyomás ($\pm N$)
- tiszta nyírás (T)
- egyszerű (vagy tiszta) hajlítás (M)
- csavarás (M_z)

b) Összetett igénybevételek (1.3 ábra):
- külpontos húzás/nyomás ($\pm N$, M)
- összetett hajlítás (M, T)
- csavarás és összetett hajlítás (M_z, M, T)



a) központos húzás | b) központos nyomás | c) tiszta nyírás | d) egyszerű (vagy tiszta) hajlítás (az AB szakaszon) | e) csavarás

1.2 ábra. Egyszerű igénybevételek.

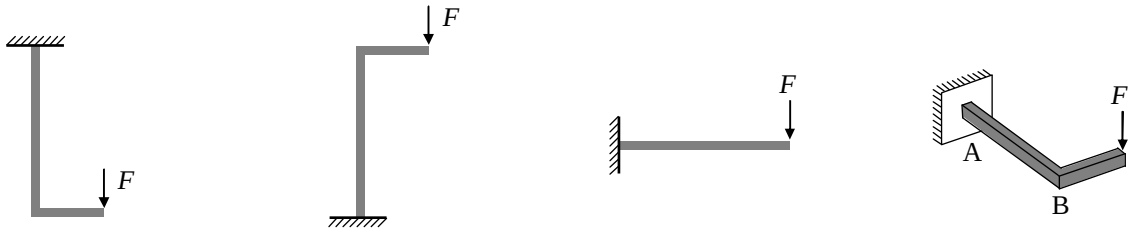
A gyakorlatban az egyszerű igénybevételek – amelyeket alapigénybevételeknek is nevezünk – ritkábban fordulnak elő.

Mértékadó teher

A vonatkozó szabványok előírásainak megfelelően, teherkombinációk alapján meghatározott teher.

Mértékadó igénybevétel

A mértékadó teher hatására keletkező igénybevétel.



a) b) c) d)

1.3 ábra. Összetett igénybevételek. a) külpontos húzás (a függőleges rúdon) és összetett hajlítás (a vízszintes rúdon), b) külpontos nyomás (a függőleges rúdon) és összetett hajlítás (a vízszintes rúdon), c) összetett hajlítás, d) csavarás (az AB szakaszon) és összetett hajlítás (a tartón végig).

Törőigénybevétel

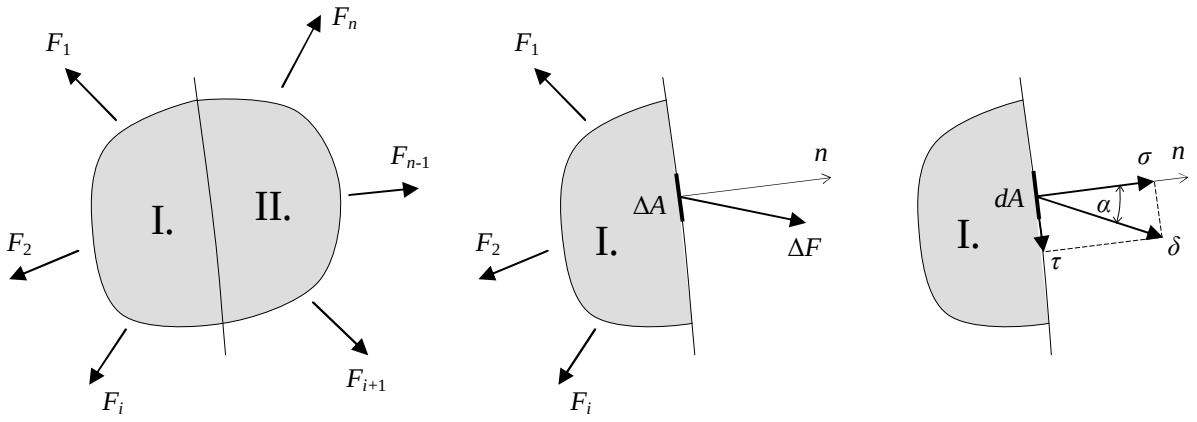
A törőigénybevétel az az igénybevétel, amely hatására a szerkezet tönkremegy.

Határigénybevétel

A határigénybevétel az az igénybevétel, amelyet a szerkezet lényeges méretváltozás nélkül elbír.

Feszültség

Tekintsük az 1.4/a ábrán vázolt, egyensúlyban lévő erőrendszerrel terhelt merev testet.



a) egyensúlyban lévő merev test b) egyensúlyban lévő I. rész c) az *n* normálishoz tartozó feszültségek

1.4 ábra. A feszültség származtatása.

Egy tetszőleges felület mentén vágjuk a testet két részre. A jobboldali rész eltávolítása után az I. jelű baloldali rész továbbra is egyensúlyban van. Az egyensúlyt az átvágási felület mentén jelentkező – a II. jelű rész hatását pótló – *belső erők* biztosítják. Jellemezzük az átvágási felület ΔA felületelemét az *n* normálissal. Jelölje a felületelemen működő belső erők eredőjét ΔF (1.4/b ábra). (Az átvágási felületen nagyszámú ilyen belső erő van, de most csak egyet, a ΔA felületelem *n* normálisához tartozót tüntettük fel az ábrán.) A felületelemek számát növelve és a méretüket csökkentve bevezethetjük a

$$\delta = \lim \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

fajlagos belső erőt. A továbbiakban az *n* normálishoz tartozó fajlagos belső erőt *feszültségnek* nevezzük. A feszültség dimenziója erő/felület, pl. N/mm^2.

A δ feszültség vektormennyiség, amely mindig egy átvágási felület adott pontjához tartozó normális függvénye.

A gyakorlati számítások során gyakran a δ feszültség összetevőivel dolgozunk (1.4/c ábra). Ezek a

$$\sigma = \delta \cos \alpha$$

normálfeszültség és a

$$\tau = \delta \sin \alpha$$

nyírófeszültség.

Törőfeszültség

A törőigénybevétel hatására fellépő feszültséget törőfeszültségnek nevezzük.

Határfeszültség

A szabványokban megadott feszültség, amit az anyag káros alakváltozások nélkül képes elviselni. A határfeszültség a törőfeszültségnél kisebb feszültség, amelyet úgy is származtathatunk, hogy a törőfeszültséget egy egynél nagyobb számmal elosztjuk. Ez az egynél nagyobb szám a biztonság nagyságát is jellemző ún. *biztonsági tényező*. A biztonsági tényező nagyságát szabványok írják elő.

Az erőtani tervezés alapegyenlete; a méretezés elvei

Az erőtani tervezés *részletei* különböző időkben, különböző országokban és különböző „tervezés-filozófiát” követve kismértékben különbözők lehetnek. Az erőtani tervezés *elve* azonban mindig ugyanaz: a terhek hatására keletkező mértékadó feszültségek és alakváltozások (Y_M) ne haladják meg a szabvány által megadott, a szerkezet által még károsodás nélkül elviselhető határfeszültségeket és alakváltozásokat (Y_H). Ezt az alapelvet a méretezés alapegyenlete (egyenlőtlensége) fejezi ki matematikai formában:

$$Y_H \geq Y_M \tag{1.1}$$

A méretezéskor tehát két dolgot kell vizsgálnunk:

1) a tartó rendelkezik-e kellő szilárdsággal, hogy biztonságosan, tönkremenetel nélkül el tudja viselni a terhekből származó igénybevételeket. Ez a *szilárdsági vizsgálat*.

2) a tartó rendelkezik-e kellő merevséggel és nem szenved-e túlságosan nagy alakváltozásokat, melyek a használatot zavarják (és ellentétesek a kis alakváltozásokra vonatkozó feltétellel). Ez a *merevségi vizsgálat*.

A szilárdsági vizsgálatot a teherbírási határállapotban végezzük el, azaz az érvényes szabvány szerinti, biztonsági tényezővel beszorzott terhekből számított igénybevételekre méretezünk.

A merevségi vizsgálat során a használhatósági határállapotra vonatkozó terhekből (a terhek biztonsági tényező nélküli alapértékéből) számított alakváltozást vizsgáljuk: nem haladja-e meg a szabvány által megengedett határértéket.

A méretezés történhet feszültség-összehasonlítással és igénybevétel-összehasonlítással. A méretezés során a feladat kétféleképpen jelentkezhet:

a) Ellenőrzés. Ez az egyszerűbb feladat, amikor minden adott és a megfelelőséget kell igazolni, vagyis ki kell mutatni, hogy az (1.1) feltétel teljesül.

b) Tervezés. Az (1.1) feltétel ismeretlent tartalmaz, pl. a keresztmetszet méretét, vagy a fesztávot, vagy a határfeszültséget, stb. A megoldást a feltétel átrendezésével állítjuk elő, úgy hogy az egyik oldal csak az ismeretlent tartalmazza.

Az (1.1) alapegyenlet általános alakú. Gyakorlati esetekben vonatkozhat feszültségekre, illetve erőkre és nyomatékokra, valamint alakváltozásokra, úgy, hogy teljesüljön a

$$\text{határfeszültség} \geq \text{mértékadó feszültség}$$

illetve

$$\text{határerő} \geq \text{mértékadó erő}$$

és

$$\text{határnyomaték} \geq \text{mértékadó nyomaték}$$

feltétel, valamint a

$$\text{megengedett alakváltozás} \geq \text{mértékadó (maximális) alakváltozás}$$

feltétel.

2

Központos húzás

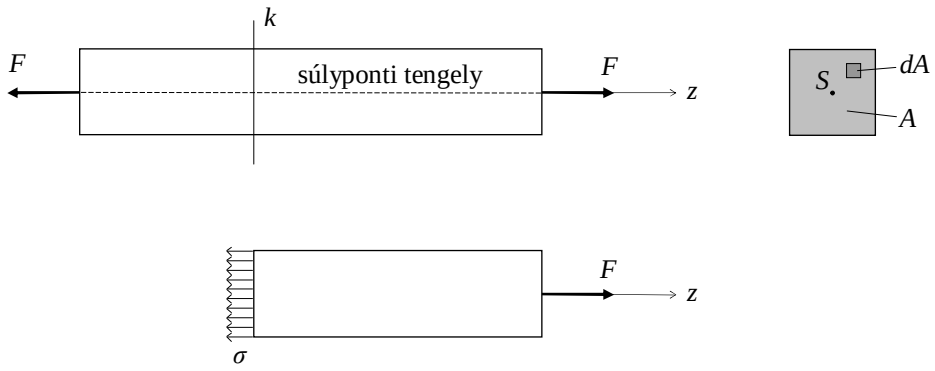
A Bevezetésben tett egyszerűsítő feltételezéseken túlmenően feltételezzük még azt is, hogy a vizsgált szerkezetek egyenestengelyű, prizmatikus (a rúdtengely mentén állandó keresztmetszetű) rudak, amelyek rugalmasan viselkednek.

Központos húzás az az igénybevételi mód, melynek során a rudat a két végkeresztmetszetén két olyan azonos nagyságú, de ellentétes irányú húzóerő terheli, amelyek közös hatásvonala a rúd súlyponti tengelye. Máshogy fogalmazva: központos húzásról akkor beszélünk, ha az igénybevételi ábrákon azt látjuk, hogy a vizsgált keresztmetszetben csak normálerő működik (és $T = 0$ és $M = 0$) és ez a normálerő húzóerő.

A központos húzás esetében két feladat jelentkezik: meg kell határozni a keresztmetszeten keletkező feszültségeket és ki kell számítani a rúd megnyúlását.

2.1 Feszültségszámítás

Tekintsük a 2.1 ábrán vázolt egyenestengelyű, állandó A keresztmetszetű rudat, amelyre a két rúdvégen két közös hatásvonalú, azonos nagyságú, de ellentétes irányú koncentrált húzóerő hat. A közös hatásvonal a keresztmetszet S súlypontján átmenő súlyponti tengely. Célunk a rúdban keletkező feszültségek meghatározása.



2.1 ábra. Központosan húzott rúd.

A Bevezetésben részletezett és az 1.4 ábrán bemutatott eljárást követve a vizsgált rudat a k keresztmetszetnél két részre vágjuk (2.1 ábra). A jobboldali rész bal oldalán az átvágási felületen ébredő – az egyensúlyt biztosító – feszültségeket σ-val jelöljük. A jobboldali rész egyensúlyát vizsgálva a

$$\sum F_{z,i} = 0$$

vetületi egyenlet a

$$-\int_{(A)} \sigma dA + F = 0$$

egyenlethez vezet. Feltételezve hogy a σ feszültségek megoszlása egyenletes, a σ konstansként kiemelhető az integráljel elé:

$$-\sigma \int_{(A)} dA + F = 0$$

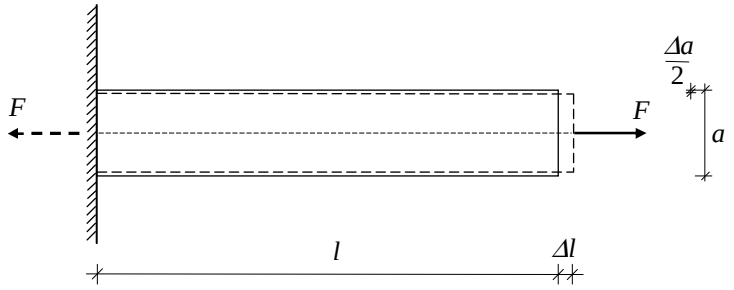
Mivel az integrálkifejezés a keresztmetszeti területet jelenti, a feszültség meghatározására szolgáló képletet a

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{2.1}$$

igen egyszerű formában kapjuk. A feszültség ebben az esetben merőleges a keresztmetszetre, így a fajlagos belső erő *normálfeszültség*. Dimenziója N/mm^2, illetve MPa.

2.2 Az alakváltozás meghatározása

A 2.2 ábrán vázolt l hosszúságú rúd baloldali végét rögzítettnek tekintjük, a jobboldali végét pedig egy F nagyságú húzóerővel terheljük. A rúd súlyától eltekintünk. Célunk a húzott rúd alakváltozásának vizsgálata. A rúd a húzóerő hatására megnyúlik, miközben keresztirányú megrövidülést szenved. Feladatunk a Δl megnyúlás és a Δa keresztirányú megrövidülés meghatározása.



2.2 ábra. A központosan húzott rúd megnyúlása és keresztirányú megrövidülése.

Mielőtt a megnyúlást meghatároznánk, vezessünk be néhány új fogalmat és vizsgáljuk meg részletesebben a húzott rúd viselkedését.

A hosszirányú megnyúlás és az eredeti rúdhossz hányadosát *fajlagos megnyúlásként* definiáljuk:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{2.2}$$

Hasonlóképpen, a keresztirányú megrövidülés és az eredeti keresztirányú méret hányadosa a keresztirányú fajlagos megrövidülés:

$$\varepsilon_k = \frac{\Delta a}{a}$$

Mind a fajlagos megnyúlás, mind pedig a keresztirányú fajlagos megrövidülés dimenziótlan mennyiség.

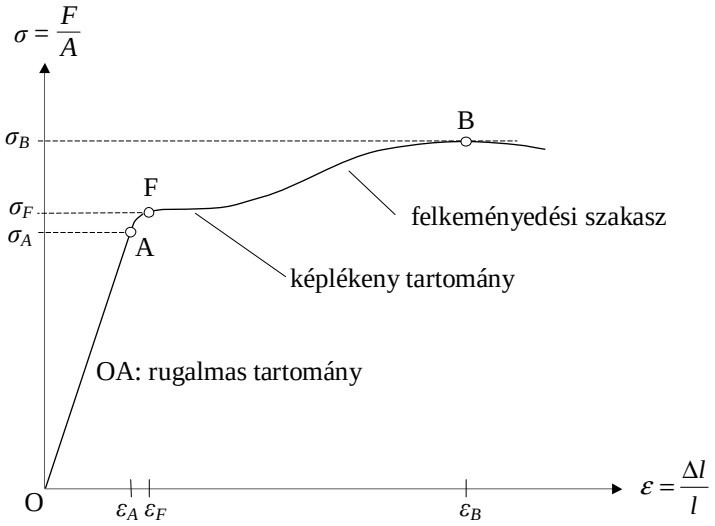
A Poisson-féle szám

$$m = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_k}$$

az anyagok fontos jellemzője. Szokásos értéke fémek esetében 3–4, kő, beton és tégla esetében pedig 6–8 között van anyagtól függően, azaz a fajlagos hosszirányú megnyúlás 3-4-szerese, illetve 6-8-szorosa a fajlagos keresztirányú megrövidülésnek. Szokásos a Poisson tényezőt is használni, ami a Poisson-féle szám reciproka:

$$\nu = \frac{1}{m} = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon}$$

A Bevezetésben az 1.1 ábrán vázlatosan bemutattuk a feszültség és alakváltozás közötti kapcsolatot. Most egy kicsit részletesebben foglalkozunk ezzel a fontos kapcsolattal. A húzófeszültség és a fajlagos nyúlás közötti kapcsolatot szemléletesen a húzódiagram segítségével ábrázolhatjuk. A húzódiagram megszerkesztéséhez a vizsgálandó anyagból próbapálcát készítenek, amelyet szakítógépbe fognak, majd fokozatosan növekvő nagyságú húzóerővel terhelik. Az egymáshoz tartozó feszültség és fajlagos nyúlás értékeit koordinátarendszerben ábrázolják.



2.3 ábra. Folytacél húzódiagramja.

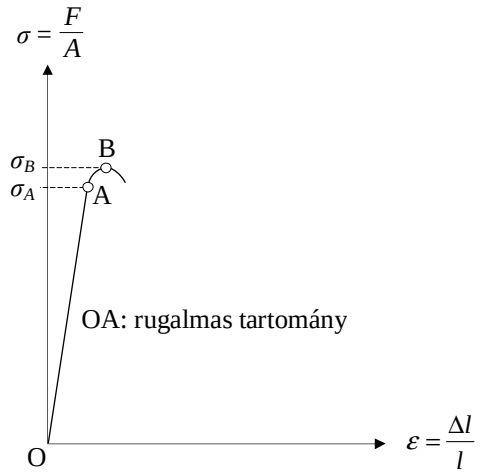
Egy ilyen diagramot mutatunk be a 2.3 ábrán, ahol a folytacél jellegzetes viselkedése látható. A diagram első – OA – szakasza az acél rugalmas viselkedését mutatja. A σ feszültség és az ε fajlagos megnyúlás ezen a szakaszon arányosak egymással és így ez a szakasz egyenes vonallal ábrázolható. Felírható tehát a ferde egyenest jellemző

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2.3}$$

összefüggés, ahol az *E* állandó az arányossági tényező, a ferde egyenes meredeksége. Ezt az állandót *rugalmassági tényezőnek* (vagy *rugalmassági modulusnak*, vagy *Young modulusnak*) hívják. Mivel a fajlagos megnyúlás dimenziótlan mennyiség, az *E* rugalmassági tényező dimenziója azonos a feszültség dimenziójával, vagyis N/mm^2, illetve MPa. A σ_A arányossági határig érvényes (2.3) összefüggést Robert Hooke angol fizikus 1660-ban állította fel és *Hooke törvényének* nevezzük. Gyakorlati szempontból is igen fontos rámutatni az anyagnak arra a tulajdonságára, hogy amíg az OA *rugalmas* tartományban vagyunk, addig a feszültség megszüntetése esetén a szerkezet – most a próbapálca – visszanyeri az eredeti hosszát, vagyis nem következik be maradó alakváltozás. Ez a viselkedés csak a rugalmas tartományra érvényes.

A σ_A arányossági határt (és az A pontot) túllépve a diagram egy rövid görbe szakasszal folytatódik, majd a σ_F folyási határt (és az ε_F folyási nyúlást) elérve igen nagy nyúlások következnek be, miközben a feszültség nem csökken. Ez a *képlékeny* viselkedés. (A képlékeny viselkedés során keletkező – képlékeny – alakváltozások a terhelés megszűnése után nem nyerhetők vissza.) A képlékeny tartományt az ún. felkeményedési szakasz követi. Ekkor a feszültség a nagy nyúlások mellett tovább növelhető. Végül elérjük a σ_B szakítószilárdságot (a B pontnál), ami után a próbapálca elszakad.

A 2.3 ábrán „átlagos minőségű" folytacél anyag sematikus σ-ε diagramját láthatjuk. Különböző anyagminőségű acélanyagok diagramjai egymástól jelentősen eltérhetnek. A folytacélhoz hasonló anyagokat, amelyeknél jelentősebb maradó alakváltozások keletkeznek és legtöbbször folyási határral rendelkeznek, *szívós* anyagoknak nevezzük. Ezekkel ellentétben, az olyan anyagokat amelyek jelentős mértékben csak rugalmas alakváltozásra képesek, az alakváltozásuk viszonylag kicsiny és folyási határt nem mutatnak, *rideg* anyagoknak nevezzük. Egy rideg anyag jellegzetes σ-ε diagramját láthatjuk a 2.4 ábrán. Rideg anyagok tartószerkezetek készítésére nem alkalmasak, mert a tartószerkezetektől „elvárjuk", hogy a tönkremenetelt megelőzően jelentős alakváltozást szenvedjenek (megfolyjon az anyag), így lehetőség legyen a menekülésre.

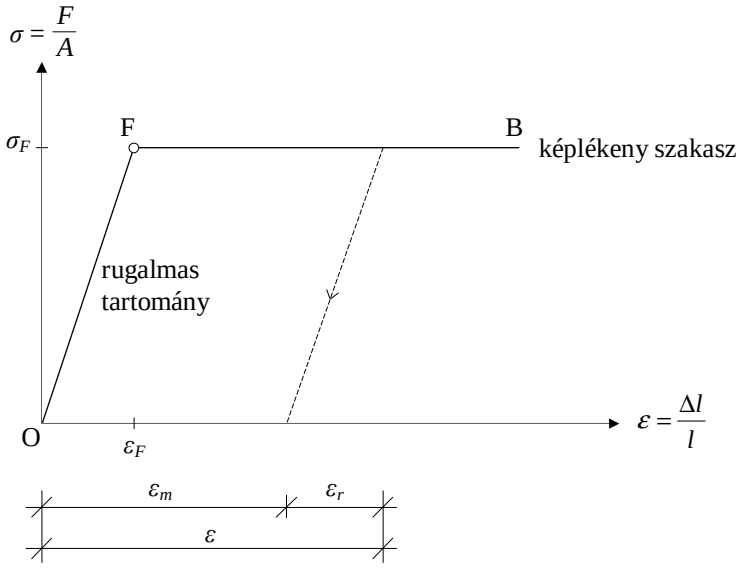


2.4 ábra. Rideg anyag húzódiagramja.

A szilárdságtan fő feladata a szilárd test belsejében keletkező feszültségek és az alakváltozások vizsgálata. A vizsgálatok során fontos szerepet játszik a kérdéses anyag feszültség-alakváltozás diagramja. Jelentős nehézséget okozhat azonban a diagramok sokfélesége és az a tény hogy alakjuk gyakran nehezen írható le egyszerű matematikai összefüggésekkel. Ezen a nehézségen úgy lehet segíteni, hogy a tényleges diagramot olyan jól kezelhető egyszerűbb diagrammal helyettesítjük, amely a valóságot jól megközelíti. Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy a szóban forgó anyagot olyan idealizált tulajdonságokkal

ruházzuk fel, amelyek igen közel állnak a tényleges tulajdonságokhoz, de jóval egyszerűbb vizsgálatokat tesznek lehetővé. Ilyen idealizált modellre utaltunk a Bevezetésben, amikor a 4. egyszerűsítő feltételben azt rögzítettük, hogy a vizsgált szerkezetek anyaga „*ideálisan rugalmas-képlékeny*”. Az ilyen – elasztoplasztikusnak is nevezett – anyag feszültség-nyúlás diagramját mutatjuk be a 2.5 ábrán.

Az idealizált diagramot úgy kapjuk, hogy a szívós anyag eredeti húzódiagramját (2.3 ábra) egyenes vonalakkal helyettesítjük. Az ideálisan rugalmas-képlékeny anyag a folyási határ eléréséig rugalmasan viselkedik és érvényes a Hooke-törvény, majd azonnal egy vízszintes szakasz következik, amely a képlékeny viselkedést jellemzi.



2.5 ábra. Ideálisan rugalmas-képlékeny anyag húzódiagramja.

Figyelmet érdemel egy ideálisan rugalmas-képlékeny anyag viselkedése a próbapálca tehermentesítése esetén. Ha a tehermentesítés az OF rugalmas tartományban történik, vagyis amíg érvényesek a $\sigma \le \sigma_F$ és $\varepsilon \le \varepsilon_F$ összefüggések, akkor a próbapálca visszanyeri a teljes addig elszenvedett megnyúlását. Ha viszont a tehermentesítés az FB képlékeny szakaszon történik (szaggatott vonal a 2.5 ábrán), vagyis amikor a fajlagos nyúlás meghaladta a folyási nyúlást, akkor a próbapálca az addig elszenvedett teljes ε fajlagos megnyúlásnak csak egy részét, az ε_r rugalmas megnyúlást nyeri vissza és az ε_m képlékeny megnyúlás megmarad. Az ábrán érvényes hogy $\varepsilon_F = \varepsilon_r$, és ε a teljes nyúlás.

A Hooke-törvény ismeretében, az ideálisan rugalmas-képlékeny anyagmodell bevezetésével és rugalmas viselkedés feltételezésével most már meghatározható a központosan húzott rúd megnyúlása. A (2.3) Hooke-törvény, a feszültség meghatározására szolgáló (2.1) összefüggés és a fajlagos megnyúlás (2.2) képletének kombinálásával felírható hogy

$$\sigma = \frac{F}{A} = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l}$$

ahonnan megkapjuk az F erővel terhelt, l hosszúságú, A keresztmetszeti területtel és E rugalmassági tényezővel rendelkező központosan húzott rúd megnyúlását:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \qquad \text{[mm]} \tag{2.4}$$

2.3 Gyakorlati alkalmazás

Előbb összefoglaljuk a központosan húzott rudak méretezésével kapcsolatos tudnivalókat, majd a képletek alkalmazását egy gyakorló feladat segítségével mutatjuk be. Bár a méretezéssel kapcsolatos alábbi összefoglalás központosan húzott rudakra vonatkozik, a méretezés itt ismertetett *elvei* a későbbi fejezetekben tárgyalt igénybevételek esetében is érvényesek és felhasználhatók.

2.3.1 Központosan húzott rudak méretezése

A méretezést a szilárdsági vizsgálattal kezdjük. A feladat kétféleképpen jelentkezhet: vagy (méreteivel és anyagával) már adott egy központosan húzott szerkezet, vagy pedig valamely adat már rendelkezésre áll, de nem mind, és nekünk kell megállapítani a hiányzó adatot. Az első esetben *ellenőrzésről*, a második esetben pedig *tervezésről* beszélünk.

Mindkét esetben a méretezés $Y_H \geq Y_M$ alapegyenletét alkalmazzuk a központos húzás esetére, ami a feszültség-összehasonlítás esetében a

$$\sigma_H \geq \sigma_M = \frac{F_M}{A_h} \tag{2.5a}$$

az igénybevétel-összehasonlítás esetében pedig az

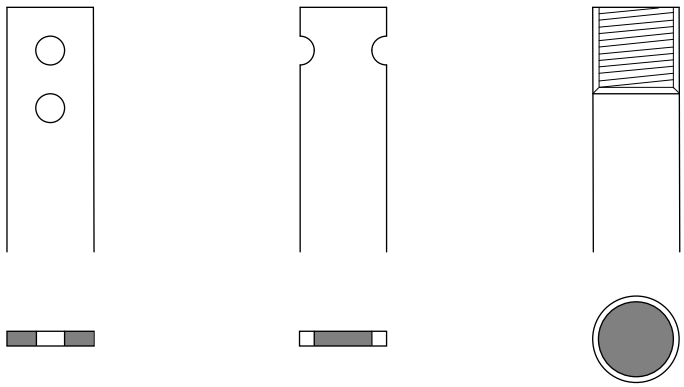
$$F_H = A_h \sigma_H \geq F_M \tag{2.5b}$$

összefüggéshez vezet. A két vizsgálat egyenértékű. A (2.5a) és (2.5b) összefüggésekben

F_H a rúd határereje,
A_h a rúd hasznos keresztmetszete,
σ_H a rúd anyagának (szabvány szerinti) határfeszültsége,
F_M a rúd mértékadó terhe, vagyis a rúdban működő húzóerő (amit a vonatkozó szabványelőírások szerint kell meghatározni).

A rúd A_h *hasznos* keresztmetszetével kapcsolatban megjegyezzük, hogy a *hasznos* jelző arra utal, hogy ha a rúd keresztmetszete a hossz mentén valahol valamilyen módon gyengítve van, akkor itt a gyengített, vagyis a legkisebb keresztmetszettel kell számolni.

Különböző módon gyengített rudakat mutat a 2.6 ábra, ahol a hasznos keresztmetszeteket satírozás jelöli.



a) lyukkal b) beharapással c) csavarmenettel

2.6 ábra. Húzott rudak szokásos gyengítései.

Ellenőrzés

Az ellenőrzés során adott a keresztmetszet hasznos mérete (A_h), a rúd határfeszültsége (σ_H) és a szabványelőírásoknak megfelelően meghatározott húzóerő nagysága (F_M). Feszültség-összehasonlítás esetén a (2.5a) egyenlőtlenség alkalmazásával a rúd *megfelel*, ha a rúd anyagának határfeszültsége nem kisebb mint a mértékadó feszültség:

$$\sigma_H \geq \sigma_M = \frac{F_M}{A_h}$$

Ha az ellenőrzéshez az igénybevétel-összehasonlítást választjuk, akkor a (2.5b) egyenlőtlenség alkalmazásával a rúd *megfelel*, ha a rúd határereje nem kisebb mint a rúd mértékadó terhe:

$$F_H = A_h \sigma_H \geq F_M$$

Tervezés

A tervezési feladat kétféleképpen jelentkezhet. Ha adott a húzóerő nagysága (F_M) és a rúd anyaga (σ_H), akkor a feladat a keresztmetszet A_h méretének meghatározása. A (2.5b) összefüggés átrendezésével ekkor az

$$A_h \geq \frac{F_M}{\sigma_H} \tag{2.6}$$

képlethez jutunk.

A tervezés során előfordulhat olyan eset is, amikor a rúd mérete kötött – például a rendelkezésre álló hely miatt – és ilyenkor a húzóerő F_M nagysága és a keresztmetszet A_h hasznos méretének ismeretében keressük azt a σ_H anyagminőséget, ami kielégíti a (2.5b) feltételt. A (2.5b) összefüggés a

$$\sigma_H \geq \frac{F_M}{A_h} \tag{2.7}$$

formában alkalmazható, vagyis megmutatja, hogy mekkora határfeszültségű anyagot kell alkalmazni.

A gyakorlati esetek többségében a (2.6) és (2.7) képletekkel kapott eredmény nem ad azonnali végeredményt, vagyis keresztmetszeti méretet, illetve határfeszültséget. Az egyenlőtlenségnek megfelelően kerekíteni kell, és ez minden esetben *felfelé* történő kerekítést jelent.

A szilárdsági vizsgálatot követi a merevségi vizsgálat, amely az alakváltozások meghatározásával foglalkozik.

Alakváltozás

A húzott rúd méretezése után szükség lehet a rúd megnyúlásának meghatározására. Ezt a (2.4) összefüggés felhasználásával tehetjük meg:

$$\Delta l = \frac{F_a l}{AE} \tag{2.8}$$

A (2.8) képletben F_a a húzott rúdban keletkező, a vonatkozó szabványelőírások szerint a terhek alapértékéből meghatározandó rúderő és A a rúd „jellemző” – általában a teljes –

keresztmetszete. Az esetleges helyi gyengítést az alakváltozás vizsgálatánál az egyszerűség kedvéért nem szokás figyelembe venni.

Gyakorlati esetek

A gyakorlatban központosan húzott rudakkal leggyakrabban függesztő rudak, kábelek, rácsos tartó húzott rúdjai és különböző – például háromcsuklós tartóknál alkalmazott – vonórudak formájában találkozhatunk.

2.3.2 Gyakorló feladat

Határozzuk meg a 2.7/a ábrán vázolt szerkezet „B” jelű lehorgonyzó rúdjának szükséges átmérőjét és a rúd megnyúlását. A kör keresztmetszetű lehorgonyzó rúd betonacélból készül, amely mindkét végén csavaros kapcsolattal rendelkezik. Az alkalmazott betonacél határfeszültsége legyen $\sigma_H = 209\ \mathrm{N/mm^2}$, a rugalmassági modulusának értéke pedig $E = 200000\ \mathrm{N/mm^2}$. A szabványelőírások szerint meghatározott teher értéke legyen $F_M = 10$ kN a szilárdsági tervezéshez és $F_a = 8.33$ kN az alakváltozási számításhoz.

A számításokhoz szükség lesz a lehorgonyzó rúdban keletkező erő értékére. Ez az érték a

$$\sum M_A = 3.5F - 2B = 0$$

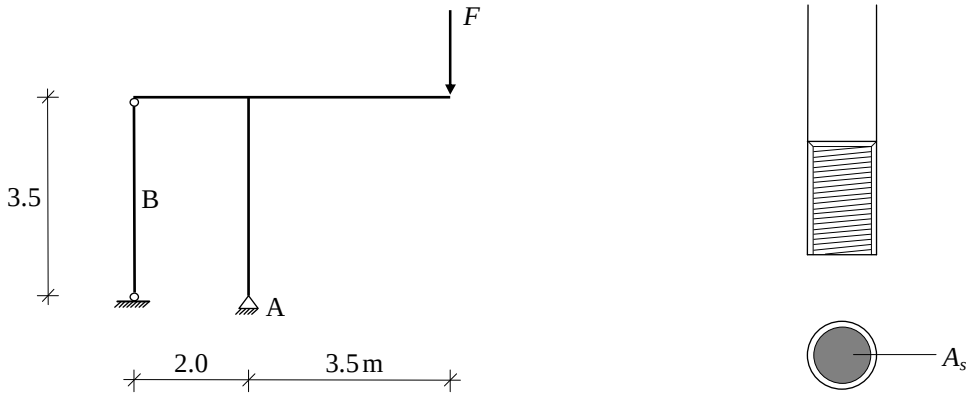
nyomatéki egyenlet segítségével

$$B_M = \frac{3.5 \cdot 10}{2} = 17.5\,\mathrm{kN}$$

a szilárdsági tervezéshez ($F_M = 10$ kN értékkel számolva) és

$$B_a = \frac{3.5 \cdot 8.33}{2} = 14.58\,\mathrm{kN}$$

a rúd megnyúlásának meghatározásához ($F_a = 8.33$ kN értékkel számolva).



a) a tartó vázlata b) a rúdvég csavaros kapcsolata

2.7 ábra. Kéttámaszú gerenda „B” lehorgonyzó rúddal.

Tervezés

A rúderő és a határfeszültség ismeretében a (2.6) összefüggés megadja a keresztmetszet minimálisan szükséges méretét:

$$A_h \geq \frac{B_M}{\sigma_H} = \frac{17500}{209} = 83.73\,\text{mm}^2$$

Mivel a rúd csavarmenettel gyengített (2.7/b ábra) és így a gyengített keresztmetszet a veszélyes keresztmetszet, olyan köracélt kell választani (például a SEGÉDLETEK csavaradatokat tartalmazó táblázata segítségével), amelyik esetében a gyengített (ún. nettó) keresztmetszetet kielégíti a fenti feltételt. A Ø12 átmérőjű betonacél ilyen, mert a csavarmenet okozta gyengítés után figyelembe vehető hasznos keresztmetszet

$$A_s = 84.3\ \text{mm}^2$$

Megnyúlás

A lehorgonyzó rúd megnyúlását a (2.8) összefüggés segítségével határozzuk meg. A számításhoz a rúd teljes keresztmetszeti területét vesszük, mert az a 3.5 m hosszú rúd „jellemző” területe. A Ø12 átmérőjű betonacél

$$A = \frac{12^2 \cdot \pi}{4} = 113.1\,\text{mm}^2$$

bruttó keresztmetszeti területével számolva a rúd megnyúlása

$$\Delta l = \frac{B_a l}{AE} = \frac{14580 \cdot 3500}{113.1 \cdot 200000} = 2.3\,\text{mm}$$

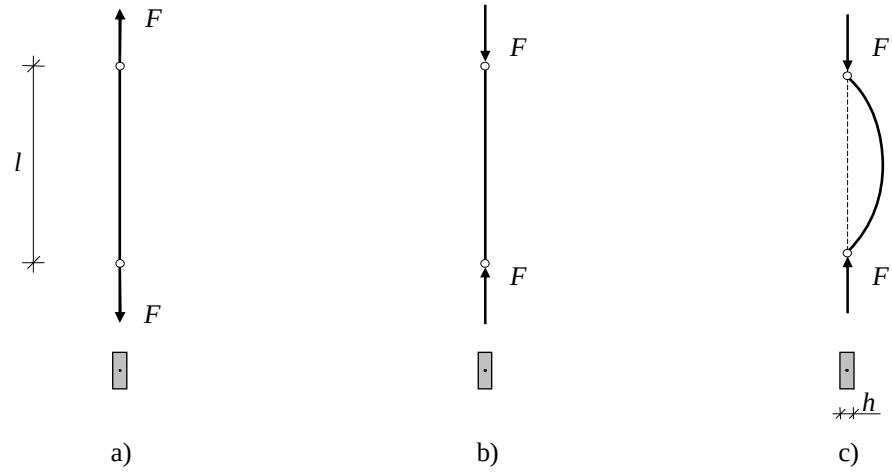
3

Központos nyomás

A Bevezetésben tett egyszerűsítő feltételezéseken túlmenően feltételezzük még azt is, hogy a vizsgált szerkezetek egyenestengelyű, prizmatikus (a rúdtengely mentén állandó keresztmetszetű) rudak.

Központos nyomás az az igénybevételi mód, melynek során a rudat a két végkeresztmetszetén két olyan azonos nagyságú, de ellentétes irányú nyomóerő terheli, amelyek közös hatásvonala a rúd súlyponti tengelye. Másképp fogalmazva: központos nyomásról akkor beszélünk, ha az igénybevételi ábrákon azt látjuk, hogy a vizsgált rúd keresztmetszetében csak normálerő működik (és $T = 0$ és $M = 0$) és ez a normálerő nyomóerő.

Ha az előző fejezetben tárgyalt központos húzás és a most tárgyalandó központos nyomás fenti definícióját és a két jelenséget felületesen összehasonlítjuk, azt gondolhatnánk, hogy elegendő az erő előjelét megváltoztatni és minden a központos húzásra levezetett összefüggés azonnal alkalmazható (ellenkező előjellel). Ez azonban nagy tévedés lenne. A nyomás esetében ugyanis felléphet egy olyan jelenség, amely alapvetően megkülönböztetheti a központos húzást (3.1/a ábra) és a központos nyomást (3.1/b ábra). A gyakorlati esetek túlnyomó részében ezt a jelenséget számításba kell vennünk a szerkezetek méretezésekor.



3.1 ábra. a) központos húzás, b) központos nyomás, c) karcsú nyomott rúd kihajlása.

Ez a jelenség a *kihajlás*, melynek során a nyomott rúd eredetileg egyenes tengelye (az összenyomódáson kívül) meg is görbül (3.1/c ábra). A kihajlás a rúd teherbírására és alakváltozására nézve kedvezőtlen jelenség. Attól függően, hogy a nyomott rúd kihajlik-e, vagy nem, a rudakat két csoportra osztjuk: a *karcsú rudak* és a *zömök rudak* csoportjára.

Sajnos nem adható egzakt, egyszerű és a gyakorlatban is jól alkalmazható szabály arra nézve, hogy egy rúd karcsú vagy zömök, illetve hogy kell-e a kihajlással számolni vagy nem. Így most gyakorlati útmutatásként csak azt rögzítjük, hogy ha a rúd karcsúságát jellemző

$$\frac{l_0}{h} \tag{3.1}$$

hányados nagy (például 10-nél nagyobb), akkor a rudat karcsú rúdnak tekintjük, ha pedig a hányados kicsi (például 5-nél kisebb), akkor a rúd általában zömök rúdnak tekinthető. A fenti hányadosban h a keresztmetszet mérete és l_0 a rúd kihajlási hossza a vizsgált irányban. Az l_0 kihajlási hossz függ a rúd l hosszától és a megtámasztási viszonyaitól; a 3.1/c ábrán vázolt esetben $l_0 = l$. – A kihajlási hosszal és a karcsúsággal a 3.2 pontban részletesen foglalkozunk, ahol azt is látni fogjuk, hogy a karcsúságot szokás az l_0/i hányadossal is jellemezni (ahol i az inerciasugár).

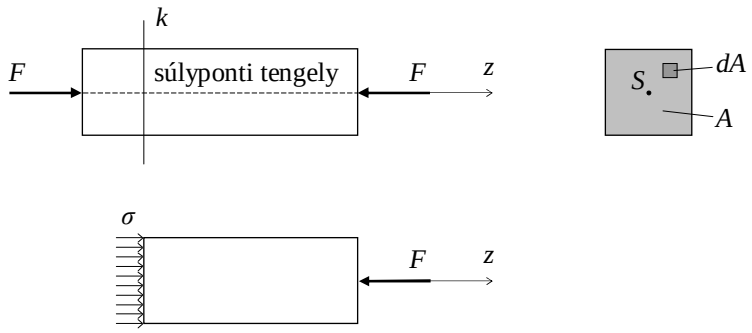
A gyakorlatban nem szokott problémát okozni annak eldöntése, hogy egy rúd karcsú vagy zömök. Ha mégis, akkor a megoldás igen egyszerű: a rudat karcsúnak kell tekinteni.

Foglalkozzunk először a jóval egyszerűbb, bár a gyakorlatban talán ritkábban előforduló esettel, amikor a vizsgált rúd zömök.

3.1 Zömök rudak

A zömök rudakat a gyakorlatban úgy szokás jellemezni, hogy nincs nagyságrendi különbség a keresztmetszet kisebbik mérete és a rúd hossza között.

A vizsgálat teljesen a 2. fejezetben bemutatott módon hajtható végre, annak figyelembevételével, hogy a) most nyomófeszültségek lépnek fel (3.2 ábra) és b) a rúd összenyomódik.



3.2 ábra. Központosan nyomott zömök rúd.

A z tengelyre vonatkoztatott vetületi egyenletből most – a központos húzásnál levezetett képlethez hasonlóan – a

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{3.2}$$

összefüggést kapjuk, amit a határerő számításakor az

$$F_H = A\sigma_H \tag{3.3}$$

formában alkalmazunk.

A többi képlet is átvehető a 2. fejezetből, vagyis a rúd összenyomódása a

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

a fajlagos összenyomódás pedig az

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

összefüggésből határozható meg.

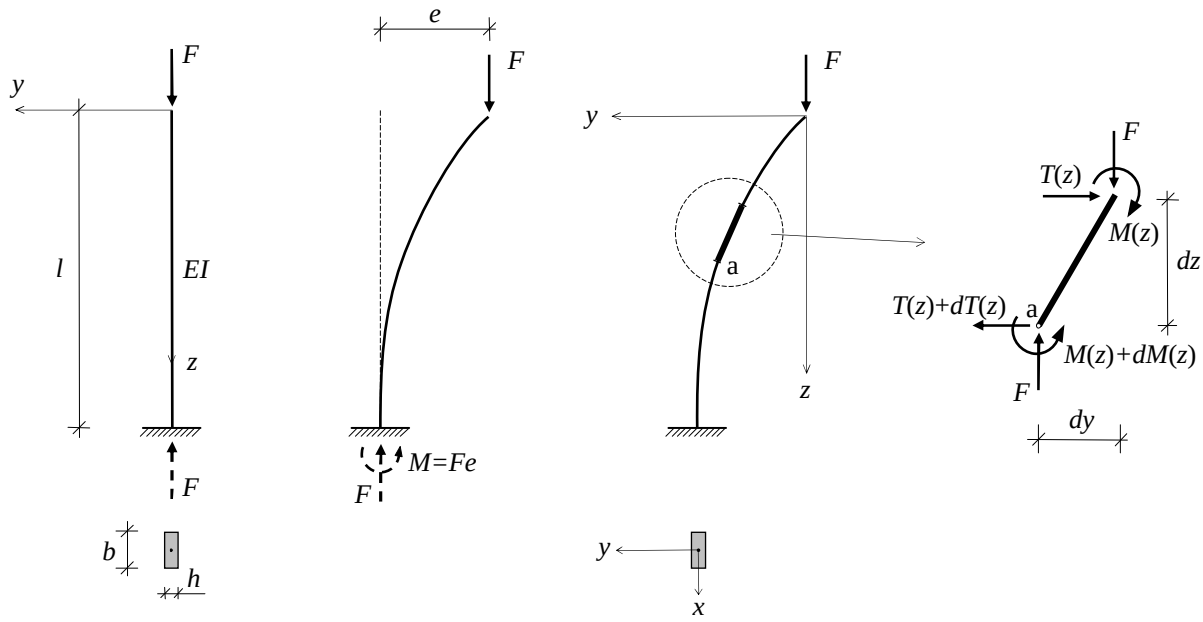
Megjegyezzük, hogy amíg egy húzott rúd megnyúlásának értékére a tervezési folyamat során gyakran szükség lehet, addig egy zömök rúd összenyomódása nem szokott érdekes lenni és a gyakorlatban nem is szokás kiszámítani.

További eltérést jelent a központosan húzott rudak esetétől az, hogy itt

a) a Bevezetőben rögzített feltételezésektől eltérve nemcsak homogén, hanem inhomogén anyagú nyomott szerkezeteket (például falazott szerkezeteket) is vizsgálhatunk,
b) a gyengítések – például téglafúgák – nem okoznak nagy problémát és a kisebb gyengítéseket a tervezés során gyakran el is szokták hanyagolni, valamint
c) olyan anyag is szóba jöhet, amelynek nincs számottevő húzószilárdsága (például beton és tégla). A kísérletek azt mutatják, hogy kis húzószilárdságra azért szükség van a keresztirányú húzás miatt.

3.2 Karcsú rudak

Az olyan rudat, amelynek a hossza a keresztmetszet méreteihez viszonyítva nagy, karcsú szerkezetnek nevezzük. A karcsú rudak viselkedése jóval bonyolultabb a zömök rudak viselkedésénél. Ez könnyen belátható, például egy hosszú, a hosszához képest nagyon vékony léccel végzett kísérlet segítségével. Az eredetileg egyenes tengelyű rúd a nyomóerő fokozatos növelése mellett hirtelen meggörbül, bekövetkezik a 3.1/c ábrán már vázolt kihajlás jelensége, melynek során az alakváltozások rohamosan nőnek és a rúd tönkremegy. Ez egy igen veszélyes jelenség. A tönkremenetel ugyanis stabilitásvesztés, ami kisebb, esetleg jóval kisebb nyomóerőnél bekövetkezik, mint a zömök viselkedés feltételezésével meghatározott törőerő értéke.



a) kihajlás előtt b) kihajlás után c) egyensúlyi állapot d) a rúd egy elemi szakasza

3.3 ábra. Karcsú rúd.

Az egyenestengelyű prizmatikus rudak kihajlásproblémáját Euler már 1757-ben megoldotta. A megoldást olyan homogén, izotróp rudakra adta meg, amelyek rugalmas viselkedésére érvényes a (2.3) Hooke-törvény.

A kihajlás részletesebb vizsgálata és az Euler-féle kritikus erő levezetése céljából tekintsük a 3.3 ábrán vázolt, a tetőponton F erővel terhelt karcsú rudat, amely alul mereven befogott és a felső vége szabad. A konzoltartó hossza l és a keresztmetszet méretei b és h ($< b$). Jelölje E a rúd rugalmassági tényezőjét. A keresztmetszet x tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $I = bh^3/12$. Az y-z tengelyű koordinátarendszer kezdőpontját a rúd tetőpontjához rögzítjük (3.3/a ábra).

A kezdeti pillanatokban, amíg a nyomóerő kicsiny, a rúd tengelye egyenes marad. A tetőponti F erő és a vele egy egyenesen működő, a befogási keresztmetszetnél keletkező F reakcióerő biztosítja a rúd egyensúlyát (3.3/a ábra). A rúd ekkor zömök rúdként viselkedik és érvényesek a 3.1 pontban (a húzott rúd analógiája segítségével) megadott összefüggések.

A tetőponti erő értékének növelésével azonban a tetőpont hirtelen elmozdul vízszintesen, például e távolságra, és a rúd csak oly módon maradhat egyensúlyban, ha a befogásnál keletkező F reakcióerő mellett keletkezik egy $M = Fe$ nyomaték is (3.3/b ábra). Ezen túlmenően, most már nem közös hatásvonalú a rúdra ható két F erő. A rúdra ható erők elrendezése és a rúd viselkedése tehát alapvetően megváltozott és így nem érvényesek a zömök rúdra megadott összefüggések.

A megoldást a kihajlott állapotot jellemző egyensúlyi állapot (3.3/c ábra) vizsgálata adja. A rúdban működő erő függőleges komponense a rúd mentén állandó (F). A rúdban működő nyomaték viszont nem állandó a rúd mentén.

Tekintsük a rúd egy elemi szakaszát (3.3/d ábra). Az y irányú

$$\sum F_{y,i} = -T(z) + T(z) + dT(z) = 0$$

vetületi egyenletből $dT(z) = 0$, vagyis

$$T'(z) = 0$$

A

$$\sum M_{\mathrm{a}} = M(z) + T(z)dz + Fdy - M(z) - dM(z) = 0$$

nyomatéki egyenlet alapján

$$T(z) = M'(z) - Fy'(z)$$

ahonnan egyszeri deriválás után azt kapjuk hogy

$$T'(z) = M''(z) - Fy''(z)$$

Vegyük figyelembe a fenti $T'(z) = 0$ összefüggést és az $M(z)$ helyére helyettesítsük be a hajlított tartó meggörbült tengelyvonalára vonatkozó $M(z) = -EIy''(z)$ összefüggést (amelynek levezetése korábbi matematikai tanulmányainkból már ismert, de e jegyzet 9.1 pontjában is megtalálható):

$$T'(z) = -EIy''''(z) - Fy''(z) = 0$$

Innen:

$$y''''(z)+\frac{F}{EI}y''(z)=0$$

Ez a probléma negyedrendű, homogén, lineáris differenciálegyenlete, ami általános alakban az

$$y''''(z)+\alpha^2 y''(z)=0 \tag{3.4}$$

formában írható, ahol bevezettük az

$$\alpha=\sqrt{\frac{F}{EI}} \tag{3.5}$$

jelölést. A differenciálegyenlethez a következő négy peremfeltétel tartozik.

1) a tartó tetőponti eltolódása zérus (a koordinátarendszerünkben, amelynek a kezdőpontja a tetőpontban van és amely együtt mozog a tetőponttal – 3.3/c ábra):

$$y(0)=0$$

2) az érintő (első derivált) a befogásnál függőleges (vagy máshogyan megfogalmazva: az érintő a befogásnál párhuzamos a *z* tengellyel):

$$y'(l)=0$$

3) a nyomaték [amely az $M(z) = -EIy''(z)$ összefüggés tanúsága szerint az $y''(z)$-vel arányos] a tetőpontban zérus, így:

$$y''(0)=0$$

4) a nyíróerő [amely az $M(z) = -EIy''(z)$ és $M'(z) = T(z)$ összefüggések tanúsága szerint az $y'''(z)$-vel arányos] a befogásnál zérus, így:

$$y'''(l)=0$$

A (3.4) differenciálegyenlet rendszáma csökkenthető. E célból integráljuk az egyenletet egyszer:

$$y'''(z)+\alpha^2 y'(z)+C_1=0$$

A második és negyedik peremfeltétel felhasználásával a C_1 konstans kiküszöbölhető

$$y'(l)=y'''(l)=0 \qquad \rightarrow \qquad C_1=0$$

és így az

$$y'''(z)+\alpha^2 y'(z)=0$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ismételt integrálással

$$y''(z)+\alpha^2 y(z)+C_2=0$$

és az első és harmadik peremfeltétel felhasználásával

$$y(0) = y''(0) = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_2 = 0$$

egyenletünk tovább egyszerűsödik:

$$y''(z) + \alpha^2 y(z) = 0 \tag{3.6}$$

Ehhez a másodrendű, homogén, lineáris differenciálegyenlethez az első és második (eredeti) peremfeltétel tartozik.

A (3.6) differenciálegyenlet szerkezetileg a matematika és fizika jól ismert egyenlete. A megoldás

$$y(z) = A\sin\alpha z + B\cos\alpha z \tag{3.7}$$

formában kereshető.

Az első és második derivált előállítása

$$y'(z) = A\alpha\cos\alpha z - B\alpha\sin\alpha z$$

$$y''(z) = -A\alpha^2\sin\alpha z - B\alpha^2\cos\alpha z$$

és visszahelyettesítés után látható, hogy a megoldás valóban kielégíti a (3.6) differenciálegyenletet.

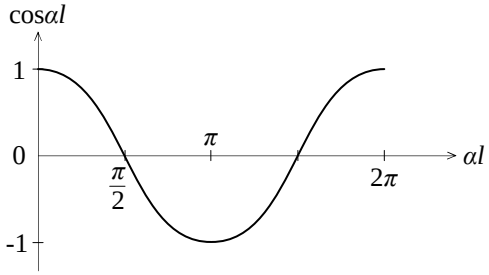
A megoldás tényleges előállításához meg kell határozni a (3.7) összefüggésben szereplő A és B állandókat. Ez a peremfeltételek segítségével történik. Az első peremfeltétel megadja a B értékét

$$y(0) = A\sin(0) + B\cos(0) = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = 0$$

A második peremfeltétel az

$$y'(l) = A\alpha\cos\alpha l = 0$$

összefüggést eredményezi.



3.4 ábra. A koszinusz függvény 0 és 2π között.

Mivel sem az α sem az A nem lehet zérus [a (3.7) összefüggés tanúsága szerint ez a triviális megoldás], innen a

$$\cos \alpha l = 0$$

egyenletet kapjuk. Az egyenlet (első) megoldása (3.4 ábra):

$$\alpha l = \frac{\pi}{2}$$

Ha ebből az α-t kifejezzük és felhasználjuk a (3.5) képletet

$$\frac{\pi}{2l} = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

akkor innen előállítható a kihajlást végző, alul befogott és felül szabad végű rúd egyensúlyát definiáló erő. Ez az erő a rúd *kritikus* ereje:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \tag{3.8}$$

A kritikus erő egyenes arányban függ a rúd *EI* merevségétől, fordított és négyzetes arányban a rúd *l* hosszától, és a rúd megtámasztási viszonyaitól. Érdemes a (3.8) képletet az

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \tag{3.9}$$

alakba átírni, ahol $l_0 = \nu l$ a rúd *kihajlási hossza*. Alul befogott és felül szabad végű rúd esetében $\nu = 2$ (3.5/a ábra). Azért érdemes a kritikus erő képletére bevezetni a (3.9) szerkezetű képletet, mert ez a képlet több, más megtámasztási viszonyokkal rendelkező központosan nyomott rúd kritikus erejének meghatározására is alkalmas, ha a ν tényező megfelelő értékét alkalmazzuk.

Ha például a rúd alul-felül csuklós megtámasztással rendelkezik, akkor az itt bemutatott levezetés mintájára (de a csuklós megtámasztásoknak megfelelő peremfeltételekkel) végrehajtott levezetés a kritikus erő értékére az

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{3.10}$$

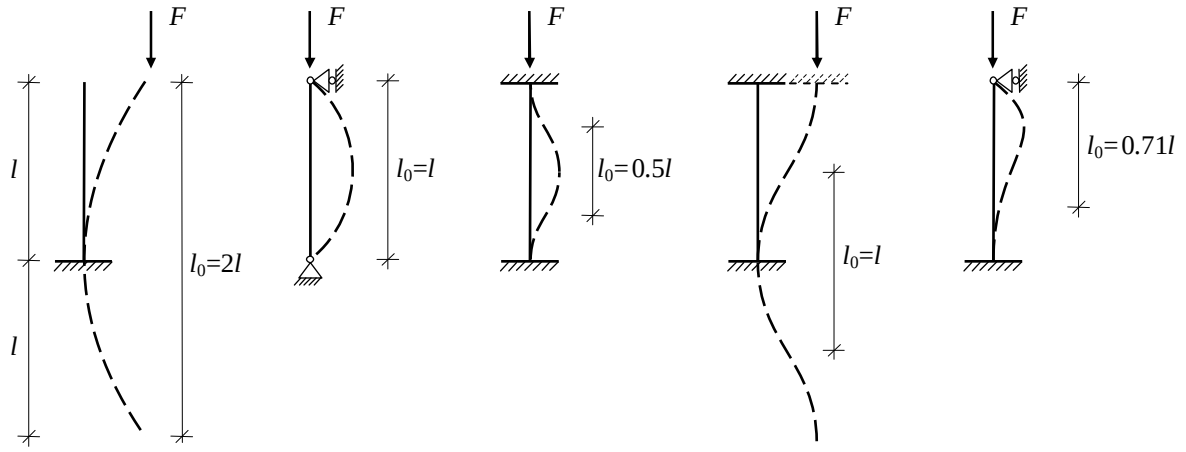
képletet eredményezi. Ekkor is használható tehát a (3.9) összefüggés, ha a rúd kihajlási hosszának meghatározására a $\nu = 1$ értéket alkalmazzuk (3.5/b ábra).

Ezen túlmenően, a (3.9) összefüggés használható például a mindkét végén befogott (de vízszintesen nem elmozduló) megtámasztású (3.5/c ábra), a mindkét végén befogott (és vízszintesen elmozduló) megtámasztású (3.5/d ábra) és az egyik végén befogott és a másik végén csuklós megtámasztású rúd (3.5/e ábra) esetében is. A kritikus erő értékének meghatározásához szükséges ν értékeket a 3.5 ábrán adjuk meg. Az ábrán a kihajlási hossz szemléletes jelentését is bemutatjuk (amely a fél szinusz hullámhossz, azaz a valós vagy képzeletbeli kihajlott tartóalak két inflexiós pontjának távolsága).

Hangsúlyozni kell, hogy a fent megadott eredmények csak a rugalmas viselkedés tartományában érvényesek, amikor a nyomófeszültség nem haladja meg az arányossági határt, vagyis amíg $\sigma \leq \sigma_A$ (2.3 ábra).

Vizsgáljuk meg részletesebben, hogy mi történik, amikor a nyomófeszültség eléri, illetve

túllépi az arányossági határt. Ehhez vezessük be az Euler-féle kritikus nyomófeszültséget és nézzük meg értékének alakulását annak függvényében, hogy a rúd mennyire érzékeny a kihajlásra.



a) $v = 2$ b) $v = 1$ c) $v = 0.5$ d) $v = 1$ e) $v = 0.71$

3.5 ábra. Különböző megtámasztási viszonyokkal rendelkező rudak v tényezői és l_0 kihajlási hosszai.

Az Euler-féle kritikus nyomófeszültséget az Euler-féle kritikus erő és a rúd keresztmetszeti területének hányadosával definiáljuk:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{Al_0^2}$$

Ha felhasználjuk az *inerciasugár* négyzetére vonatkozó $i^2 = I/A$ összefüggést, akkor a fenti képlet a következőképpen rendezhető át:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_0}{i}\right)^2}$$

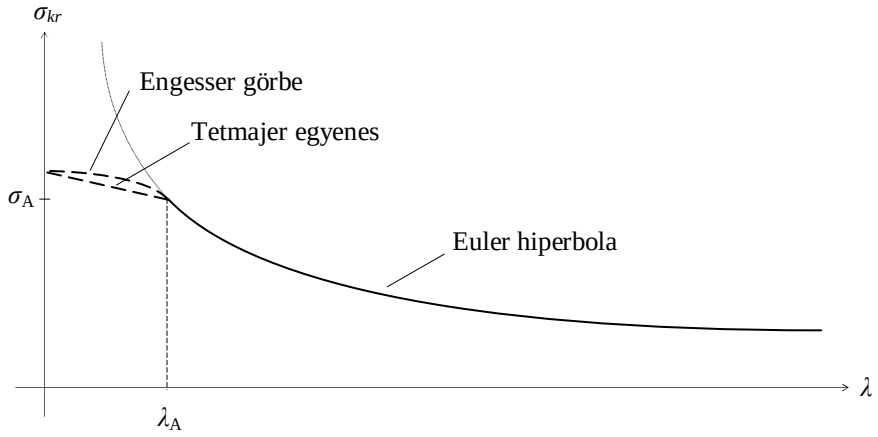
Ha itt bevezetjük a *karcsúsági tényező* fogalmát a

$$\lambda = \frac{l_0}{i}$$

formában, amely a rúdhosszal egyenesen és az inerciasugárral fordítottan arányos, akkor az Euler-féle kritikus nyomófeszültség a

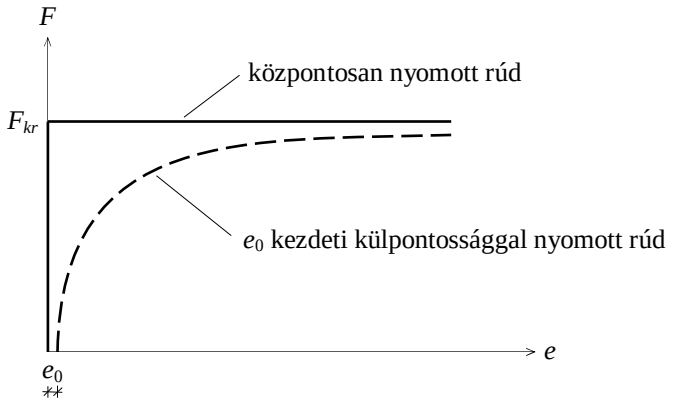
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

alakban adható meg.



3.6 ábra. Kritikus nyomófeszültség a karcsúság függvényében.

Az Euler-féle kritikus nyomófeszültség alakulása a karcsúság függvényében a 3.6 ábrán látható. Az Euler hiperbola csak a rugalmas tartományban, vagyis a σ_A pontig érvényes. Ezt a szakaszt folytonos vonal ábrázolja. Az arányossági határt túllépve a nyomott rúd képlékeny alakváltozást végez. Ennek a bonyolult viselkedésnek a kísérleti és elméleti vizsgálatával többen is foglalkoztak, akik közül itt csak kettőt említünk: a képlékeny tartományban a magyar Tetmajer (1886) egyenes alkalmazását javasolta, míg a német Engesser (1898) változó rugalmassági tényezőt feltételezve görbe szakasszal fejezte be az Euler-féle hiperbolát (3.6 ábra).



3.7 ábra. Nyomott rúd viselkedése kezdeti külpontosság nélkül, illetve kezdeti külpontossággal.

A kihajlás jelenségének veszélyességével kapcsolatban még egy szempontot érdemes szem előtt tartani. A karcsú rúd kritikus erejének fenti levezetése során feltételeztük, hogy a vizsgált rúd egyenestengelyű és központosan nyomott (3.3/a ábra). A rúd elméleti viselkedése ennek megfelelően olyan, hogy a nyomóerő folyamatos növelése során a kezdeti időszakban a rúdtengely egyenes marad, majd egy bizonyos ponton (a kritikus erő értékének elérésekor) hirtelen nagy tetőponti elmozdulások jönnek létre és a rúd eltörik. Ezt az elméleti viselkedést mutatja a 3.7 ábrán a két egyenes szakaszból álló (folytonos vonallal ábrázolt) függvény, amelynek első szakasza a függőleges tengelyen fekszik, majd a második szakasz az F_{kr}-nál jobbra vízszintesen elágazik. A gyakorlatban viszont a rudak tengelye még a leggondosabb gyártás esetén sem tökéletesen egyenes és a teher központos elhelyezése sem biztosítható maradéktalanul. A gyakorlati esetek nagy részében vízszintes kitérítő erő is jelentkezhet (például szélerő vagy a nem tökéletesen függőleges rúd önsúlyának következtében). Kezdeti

külpontosság (e_0) jelentkezhet tehát, ami már a kritikus erő elérése előtt – esetleg jóval korábban – elfogadhatatlanul nagy vízszintes elmozdulásokat eredményezhet. Ezt a viselkedést az e_0-ból induló (szaggatott vonallal ábrázolt) görbe mutatja.

Ebből az is következik, hogy a gyakorlatban a kihajlás jelensége *mindig* – de különböző mértékben – befolyásolja a nyomott rúd viselkedését. – Lásd a 3.11 ábrát a 3.3.1 pontban.

Itt jegyezzük meg, hogy van olyan méretezési filozófia, amely szerint központosan nyomott rúd nem is létezik és minden rudat külpontosan nyomott szerkezetként kell kezelni.

3.3 Gyakorlati alkalmazás

Előbb összefoglaljuk a központosan nyomott zömök és karcsú szerkezetek méretezésével kapcsolatos tudnivalókat, majd a képletek alkalmazását két gyakorló feladat segítségével mutatjuk be. Helyzetünk jóval bonyolultabb, mint a központosan húzott rudaknál volt. Ennek nemcsak az az oka, hogy itt most zömök és karcsú szerkezetekkel is foglalkozunk, amelyek viselkedése alapvetően eltér egymástól, hanem az is, hogy a szerkezetek viselkedése jelentősen függ attól is, hogy milyen anyagból készültek. Fa, acél és vasbeton szerkezetekkel szaktantárgyak külön kurzusok keretein belül foglalkoznak, így ebben a pontban az alkalmazási területet beton- és falazott szerkezetekre korlátozzuk.

3.3.1 Központosan nyomott zömök és karcsú szerkezetek méretezése

A gyakorlati alkalmazás során is élesen elkülönül a zömök és a karcsú rudak csoportja. A zömök rudak esetében a kihajlás veszélyével nem számolunk és a 3.1 pontban összefoglalt elméleti összefüggések közvetlenül alkalmazhatók. A karcsú rudaknál a kihajlás jelenségének figyelembe vétele a probléma vizsgálatát megnehezíti és valamiféle egyszerűsítések bevezetése szükséges, ha a gyakorlat számára könnyebben kezelhető eljárásokat akarunk létrehozni. Ezek az egyszerűsítések szabványelőírások felhasználásával, egyszerű képletek illetve diagramok formájában egészítik ki a 3.2 pontban tárgyalt elméleti összefüggéseket.

A 2.3.1 pontban a központosan húzott rudak méretezésével – a tervezéssel és ellenőrzéssel – kapcsolatban elmondott elvek most, a nyomás esetében is, érvényesek. Mindig a méretezés $F_H \geq F_M$ alapegyenletét (egyenlőtlenségét) használjuk, ahol az F_M a szabványelőírások szerint meghatározott mértékadó teher (nyomóerő) és F_H a nyomott szerkezet határereje, amelynek meghatározását az alábbiakban mutatjuk be különböző esetekre és anyagokra. Ellenőrzéskor az egyenlőtlenség teljesülését kell kimutatni, tervezéskor pedig az éppen hiányzó adatot határozzuk meg az egyenlőtlenség segítségével.

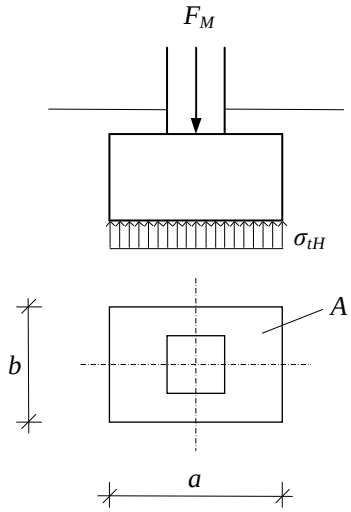
<u>Zömök rudak</u>

A gyakorlatban központosan nyomott zömök szerkezetekkel leggyakrabban különböző típusú alapozásoknál találkozhatunk. Központosan nyomott, zömök rúd lehet az alaptest és az alaptest alatti talaj is.

A 3.8 ábra egy központosan nyomott pillér központosan megépített alapozását mutatja. A zömök rúdra érvényes (3.3) képlet alapján felírható

$$F_M \leq F_H = \sigma_{tH} A \tag{3.11}$$

összefüggés mind az ellenőrzéshez, mind pedig a tervezéshez alkalmazható. A talaj határfeszültsége (σ_{tH}) általában adott szokott lenni. Értékét egy igényesen elkészített talajmechanikai szakvéleményből vehetjük ki, ami szokásos talajok esetén általában 0.2 N/mm^2 és 0.6 N/mm^2 között mozog.

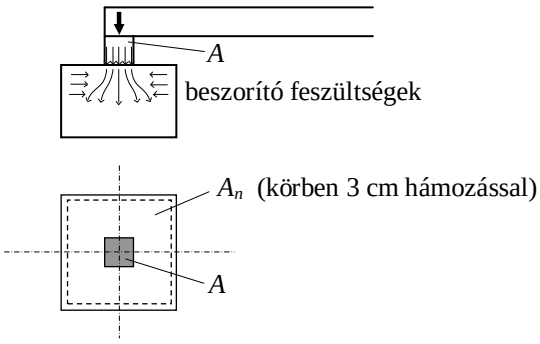


3.8 ábra. Központosan nyomott alaptest.

A mértékadó központos teher meghatározásánál figyelemmel kell lenni arra, hogy az F_M tartalmazza az alaptest önsúlyát is. Az alaptest A területének megállapításakor a névleges (a, b) méreteket a számítások során csökkentett értékekkel kell figyelembe venni, a talajban végzett munkák kisebb pontosságának ellensúlyozása céljából. A csökkentés szokásos mértéke 1-1 cm.

Helyi nyomás

Az építőipari gyakorlatban előfordulnak olyan esetek, amikor viszonylag nagy erő adódik át viszonylag kis felületen, úgy, hogy közben lehetőség van a kialakuló feszültségek szétterjedésére az alátámasztó szerkezetben (3.9 ábra).



3.9 ábra. Helyi nyomás vizsgálata központos alátámasztás esetében.

Ilyen helyzet alakul ki például, amikor egy nagy fesztávú és teherbírású (pl. acél) tartó betontömbre támaszkodik. Nagyobb terhelésű födémgerendák felfekvésénél hasonló helyzettel találkozhatunk. A jelenséget – ami pecsétnyomásként is ismeretes – az jellemzi, hogy a felső (támaszkodó) és alsó (alátámasztó) szerkezettel kapcsolatban érvényesek a

$$\sigma_{H,\text{felső}} >> \sigma_{H,\text{alsó}} \qquad \text{és} \qquad A_{\text{felső}} << A_{\text{alsó}} \tag{3.12}$$

egyenlőtlenségek. Ilyen esetekben szükségessé válhat a felfekvés ellenőrzése.

Mivel itt a kihajlás jelenségével nem kell számolni, kis módosítással alkalmazható a

zömök rudakra megadott (3.3) összefüggés.

Kísérleti tapasztalatok azt mutatják, hogy az erőátadódás során úgynevezett beszorító feszültségek keletkeznek, miközben nő az a felület ahol nyomófeszültségek ébrednek az alátámasztó szerkezetben (3.9 ábra). Ez a teherbírás megnövekedéséhez vezet. A megnövekedett teherbírás egy *m* növelő tényezővel vehető figyelembe:

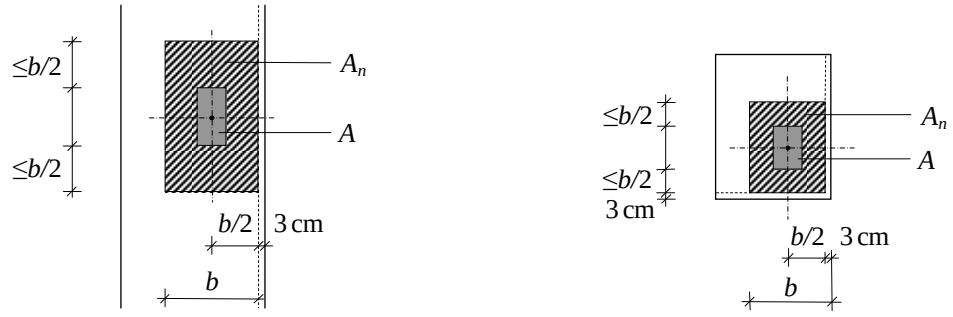
$$F_H = mA\sigma_H \tag{3.13}$$

ahol A a tényleges megtámasztó felület (a 3.9 ábra szerint) és σ_H a megtámasztó szerkezet anyagának határfeszültsége. Az *m* növelő tényező az

$$m = \sqrt{\frac{A_n}{A}} \tag{3.14}$$

képlettel számítható, ahol A_n a megtámasztó szerkezeten kialakítható legnagyobb központos felület. Az A_n felületet körbe-körbe 3 cm „hámozással” kell kialakítani. Ez a keresztmetszet-csökkentés azt hivatott figyelembe venni, hogy az alaptest szélei lerepedések formájában hajlamosak a különböző sérülésekre. A szabványelőírások az *m* tényező értékét maximálják; betonnál például $m_{\max} = 3$.

A helyi nyomás vizsgálata akkor is elvégezhető, ha az alátámasztó szerkezet (pl. alaptest) nem központosan helyezkedik el. Ilyen esetekben eljárhatunk úgy, hogy a „felesleges” részek eltávolításával az elrendezést központossá tesszük (3.10 ábra).



a) szélső helyzet b) sarokhelyzet

3.10 ábra. Helyi nyomás vizsgálata aszimmetrikus alátámasztás esetében.

Itt jegyezzük meg, hogy a 3.8 és 3.9 ábrák összehasonlítása után arra a (téves) következtetésre is juthatnánk, hogy az alaptestek felső szintjén rutinszerűen mindig el kell végezni a helyi nyomás vizsgálatát. A gyakorlatban előforduló szerkezetek esetében azonban általában nem teljesül a (3.12) alatti első feltétel, ugyanis az alaptestre felülő fal/pillér határfeszültsége nem szokott *sokkal* nagyobb lenni az alaptest határfeszültségénél és így a pecsétnyomás jelensége az esetek túlnyomó részében nem szokott mértékadó lenni az alaptestek felső síkján.

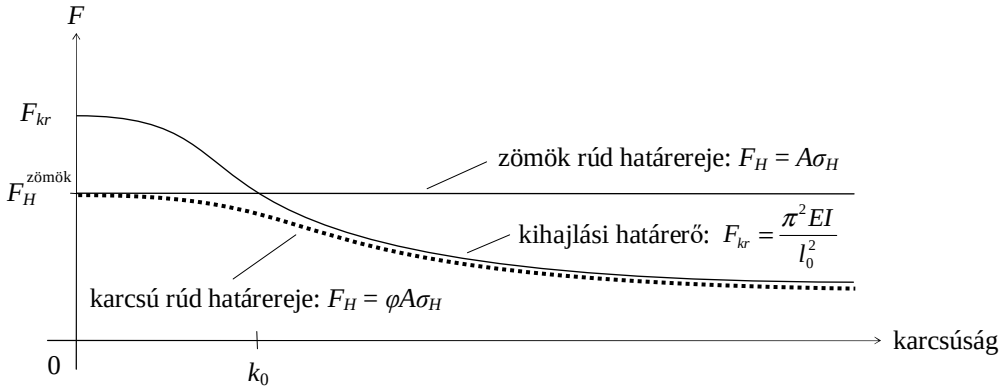
A méretezési eljárás során természetesen a helyi nyomás vizsgálatakor is az

$$F_M \le F_H$$

összefüggés teljesülését kell kimutatni.

Karcsú rudak

A 3.1 és 3.2 pontokban bemutatott vizsgálatok azt mutatják, hogy amíg a zömök rudak az egyenes tengely megtartása mellett számítható törőerő elérésével mennek tönkre, addig a karcsú rudak szokásos tönkremenetele jellegében egészen más. A karcsú rúd meggörbül és az egyre növekvő oldalirányú elmozdulások a rúd tönkremeneteléhez vezethetnek, még akár jóval a zömök (kihajlás nélküli) viselkedés feltételezésével számítható törőerő értékének elérése előtt. Ez a felismerés egyben a probléma gyakorlati szempontból könnyen kezelhető megoldásának előállítását is elősegíti. Ábrázoljuk e célból a kétfajta tönkremeneteli módot jellemző (határ-)erőket egy koordinátarendszerben (3.11 ábra).



3.11 ábra. Központosan nyomott rúd határereje zömök és karcsú viselkedés feltételezése esetén.

Külön-külön tételezzük fel, hogy a vizsgált rúd zömök rúdként (kihajlás nélkül), illetve karcsú rúdként (de a nyomási törőerő elérését nem vizsgálva) viselkedik. Mindkét esetben ábrázoljuk a határerőt a karcsúság függvényében. A zömök rúd esetében természetesen vízszintes egyenest kapunk, hiszen a karcsúság nem befolyásolja a (kihajlást nem végző) rúd határerejét. A karcsú rúd határerejét (kritikus erejét) a 3.6 ábrán vázolt görbéhez hasonló görbe jellemzi, amelynek a kezdeti szakaszát a képlékeny viselkedés határozza meg. A 3.11 ábrán (folytonos vonallal) ábrázolt két határerő-függvénnyel kapcsolatban három fontos következtetés vonható le:

1) a rúd teherbírását kisebb karcsúság mellett (a 0-k_0 szakaszon) a zömök rúdként kiszámított határerő határozza meg, majd a karcsú rúdként kiszámított kritikus erő a meghatározó,
2) egy adott rúd teherbírása nem lehet nagyobb sem a zömök, sem pedig a karcsú viselkedéshez tartozó teherbírásnál,
3) egy adott rúd teherbírása kifejezhető a zömök rúdként kiszámított teherbírás arányában.

Ez utóbbi megfigyelés lehetővé teszi egy igen egyszerű eljárás bevezetését. A központosan nyomott rúd határteherbírása meghatározható a zömök rúdra alkalmazott (3.3) összefüggés felhasználásával, ha azt egy megfelelő – a kihajlást figyelembe vevő – csökkentő tényezővel egészítjük ki:

$$F_H = \varphi A\sigma_H \tag{3.15}$$

Ez a tényező a *φ kihajlási tényező*, amely a kihajlás veszélyes következményét hivatott érvényesíteni. Egy jellegzetes *φ* függvény*alakot* a 3.11 ábrán pontvonallal ábrázolunk. A kihajlási tényező elméleti maximális értéke 1.0, ami a tökéletesen kihajlásmentes zömök rúdra vonatkozik (3.11 ábra). A *φ* kihajlási tényező értékét elsősorban a rúd karcsúsága, a megtámasztási viszonyok, a rúd anyaga, valamint a keresztmetszet alakja befolyásolják. Kiterjedt kísérleti és kutatómunka eredményeire támaszkodva a kihajlási tényező értékei

táblázatosan és grafikonok segítségével előállíthatók és gyakran függvénykapcsolattal is jellemezhetők. Ezek segítségével a gyakorlati munka jelentősen egyszerűsíthető. Erre mutatunk be két eljárást a következő két pontban, ahol beton- és falazott szerkezetek méretezésével foglalkozunk. A méretezési eljárás során mindkét esetben azt kell kimutatni, hogy teljesül az

$$F_H \geq F_M \tag{3.16}$$

feltétel. Mind a beton-, mind pedig a falazott szerkezeteknél előírjuk, hogy az l_0/h-val definiált karcsúság maximális értéke 25.

Karcsú betonszerkezetek

Kisebb létesítmények – egy-két szintes épületek – függőleges teherhordó szerkezeteihez gyakran alkalmaznak betonszerkezeteket, pillér, illetve fal formájában. Ezek központos terhelése esetén az előző pontban vázolt eljárás az alábbiak szerint alkalmazható.

A szerkezet határerejét az

$$F_H = \varphi A \sigma_H \tag{3.17}$$

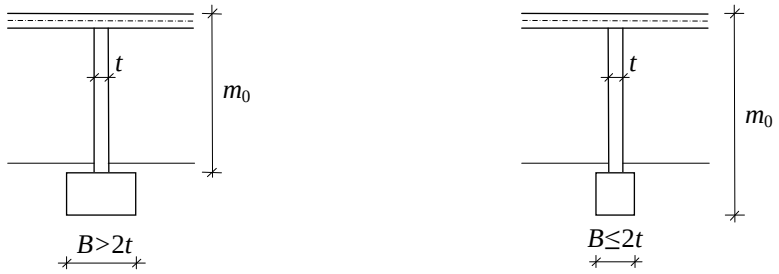
összefüggés szolgáltatja, ahol a φ kihajlási tényező a

$$\varphi = 0.9 - \frac{l_0}{200h} - 0.1\left(\frac{l_0}{10h}\right)^2 \tag{3.18}$$

képletből számítható. A határerő (3.17) képletében A a függőleges teherviselő elem keresztmetszeti területe és σ_H a betonszerkezet nyomási határfeszültsége. A φ kihajlási tényező fenti képletében h a keresztmetszet mérete és l_0 a vizsgált szerkezet kihajlási hossza a vizsgált irányban. A kihajlási hossz az F_{kr} kritikus erő ismeretében általános esetben az

$$l_0 = \pi\sqrt{\frac{EI}{F_{kr}}}$$

összefüggésből határozható meg. Gyakran előforduló gyakorlati esetekben a kihajlási hosszat egyszerűbben, az $l_0 = \nu m_0$ összefüggés szerint is meghatározhatjuk, ahol m_0 a megtámasztások közötti távolság/emeletmagasság (3.12 ábra).



a) szélesebb alaptest b) keskenyebb alaptest

3.12 ábra. Az m_0 megtámasztások közötti távolság/emeletmagasság értelmezése beton pillérek és falak esetében.

A ν tényező a megtámasztási viszonyoktól függő állandó, amely elviekben a 3.5 ábrán bemutatott módon működik; konkrét értékeit a gyakorlati esetek többségében a szerkezet jellegzetességének megfelelően és a merevítési viszonyoktól függően a 3.1 táblázatból vehetjük ki.

3.1 táblázat. A *v* tényező értékei különböző megtámasztási viszonyok esetében.

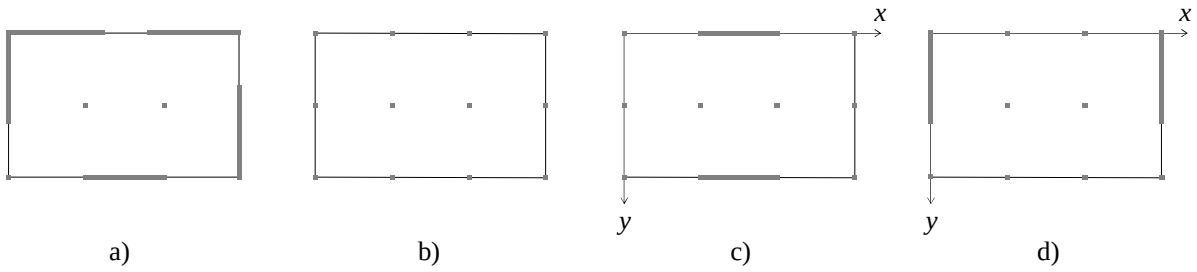
A *v* tényező értékei	Megtámasztás módja
1.0	két végén megtámasztott fal/pillér (pl. merevített épületben)
1.25	fal/pillér többnyílású merevítetlen épületben
1.5	fal/pillér egynyílású merevítetlen épületben
1.2	szabadon álló, önsúlyával terhelt elem
2.0	szabadon álló, fent koncentrált erővel terhelt elem

A φ kihajlási tényező értékeit az l_0/h karcsúság függvényében a 3.2 táblázatban adjuk meg.

3.2 táblázat. A φ kihajlási tényező értékei betonszerkezeteknél az l_0/h karcsúság függvényében.

$\frac{l_0}{h}$	0	5	10	15	20	25
φ	0.90	0.85	0.75	0.60	0.40	0.15

A vizsgált szerkezet kihajlási hosszát jelentősen befolyásolja, hogy merevített vagy merevítetlen épületben található. A merevítettség/merevítetlenség eldöntése során az alaprajzi két meghatározó (*x* és *y*) irányt mindig külön-külön meg kell vizsgálni. Négy jellegzetes esetet mutat a 3.13 ábra.



3.13 ábra. a) mindkét irányban merevített épület, b) mindkét irányban merevítetlen épület, c) *x* irányban merevített, *y* irányban merevítetlen épület, d) *y* irányban merevített, *x* irányban merevítetlen épület.

Szokásosan alkalmazott betonszerkezetek nyomási határfeszültségét a 3.3 táblázat tartalmazza. (A táblázat első két oszlopa nem szabványos betont tartalmaz.)

3.3 táblázat. A σ_H nyomási határfeszültség értékei betonszerkezeteknél.

Szilárdsági jel	$C^8/_{10}$	$C^{10}/_{12}$	$C^{12}/_{15}$	$C^{16}/_{20}$	$C^{20}/_{25}$	$C^{30}/_{37}$	$C^{40}/_{50}$
σ_H [N/mm^2]	5.0	6.6	8.0	10.7	13.3	20.0	26.7

Betonszerkezetek kialakítása során szerkesztési szabályokat kell betartani. Ezeket minden esetben az éppen érvényes szabványból kell kivenni. Itt most csak azt rögzítjük, hogy a legkisebb hasznos keresztmetszet A_{min} = 600 cm^2.

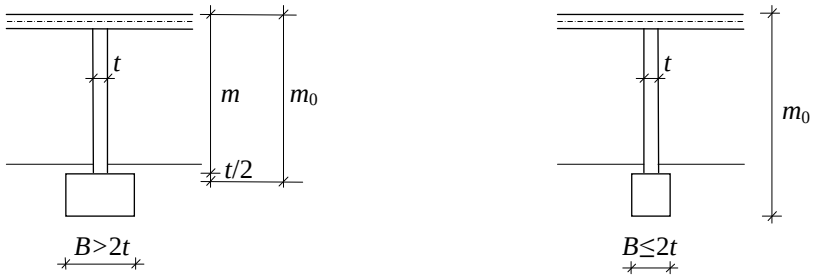
Falak esetében a tervezői gyakorlatban 1 folyóméterrel szokás dolgozni.

Karcsú falazott szerkezetek

Karcsú falazott szerkezetek méretezése során a betonszerkezeteknél bemutatottakhoz igen hasonlóan járhatunk el. A határerőt az

$$F_H = \varphi A \sigma_{fH} \tag{3.19}$$

összefüggés adja meg, ahol φ a kihajlási tényező, A a hasznos keresztmetszeti terület és σ_{fH} a fal vagy pillér nyomási határfeszültsége.



a) szélesebb alaptest b) keskenyebb alaptest

3.14 ábra. Az m_0 megtámasztások közötti távolság/emeletmagasság értelmezése falazatoknál.

A φ kihajlási tényező értéke a

$$\varphi = 0.9 - \frac{l_0}{225h} - 0.05\left(\frac{l_0}{10h}\right)^2 \tag{3.20}$$

összefüggésből számítható, ahol h a keresztmetszet mérete és l_0 a vizsgált szerkezet kihajlási hossza a vizsgált irányban. A kihajlási hossz az $l_0 = \nu m_0$ összefüggés szerint határozható meg, ahol m_0 a megtámasztások közötti távolság/emeletmagasság (3.14 ábra). A ν tényező a megtámasztási viszonyoktól függő állandó, amelynek értékei a merevítési viszonyoktól függően most is a 3.1 táblázatban megadottak szerint alakulnak. A φ kihajlási tényező értékeit az l_0/h karcsúság függvényében a 3.4 táblázatban foglaltuk össze.

3.4 táblázat. A φ kihajlási tényező értékei falazott szerkezeteknél az l_0/h karcsúság függvényében.

$\frac{l_0}{h}$	0	5	10	15	20	25
φ	0.90	0.87	0.81	0.72	0.61	0.48

A falazott szerkezetek azonosítása négy adat megadásával történik. Az első adat a falazóelem anyagára vonatkozik: K (kő), T (égetett agyag termék), MT (mészhomok tégla), B (beton) és BK (könnyűbeton). A második adat minden esetben a falazat jele, F. A harmadik adat a σ_{fH} nyomási határfeszültsége tízszerese. A negyedik adat a falazóelem fajtája. A TF 14 s.t. jelentése így: $\sigma_{fH} = 1.4$ N/mm^2 nyomási határfeszültséggel rendelkező téglafal/pillér soklyukú téglából.

Általános rendeltetésű habarcsokkal falazott falazat nyomási határfeszültségét néhány

téglafajtára a 3.5 táblázat vastag vonallal határolt része tartalmazza. A táblázatban σ_t a falazóelem nyomási határfeszültsége és σ_h a habarcs nyomási határfeszültsége.

A falazott szerkezetek kialakítási szabályait is szerkesztési szabályok írják elő, amelyeket minden esetben az érvényes szabványból kell kivenni. Itt most csak annyit rögzítünk, hogy egy falazott szerkezeti elem (pillér) minimális keresztmetszeti mérete: $A_{\min} = 625$ cm^2.

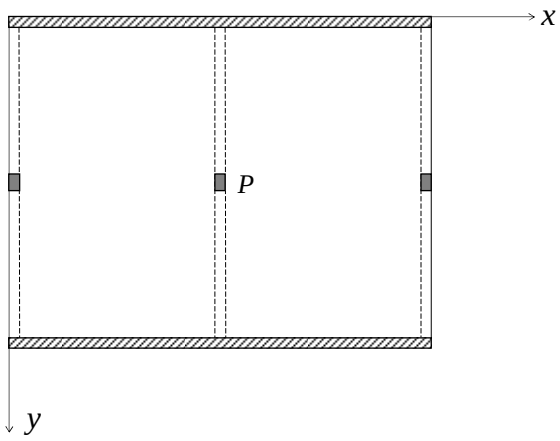
Az A hasznos keresztmetszet megállapításánál a vakolatot nem szabad figyelembe venni. A névleges kéménylyuk méreteket (körben) 3 cm növeléssel kell levonni a hasznos keresztmetszetből. A fugákat és téglalyukakat a hasznos keresztmetszet megállapításánál nem kell levonni.

3.5 táblázat. A σ_{fH} nyomási határfeszültség értékei falazott szerkezeteknél.

	$\sigma_t = 5$ N/mm^2	$\sigma_t = 10$ N/mm^2	$\sigma_t = 20$ N/mm^2	σ_h [N/mm^2] =
tömör tégla	0.7	1.1	1.8	1.0
tömör tégla	1.1	1.8	2.9	5.0
üreges tégla	0.5	0.9	1.4	1.0
üreges tégla	0.9	1.4	2.3	5.0

A gyakorlati számítások során falak esetében 1 folyóméterrel szokás számolni.

Végül a karcsú szerkezetek méretezésével kapcsolatban itt mutatunk rá egy fontos szempontra, amit a gyakorlati feladatok során mindig szem előtt kell tartani.



3.15 ábra. x irányban kihajlás-érzékeny pillér az y irányban kihajlás-érzékeny épületben.

Szerkezeteink – beleértve a karcsú rudakat is – általában térbeli szerkezetek és térbeli módon viselkednek. Utalva az l_0/h karcsúsággal kapcsolatos, a fejezet bevezető részében tett megjegyzésre, karcsú rudak esetében ennek az a következménye, hogy a kihajlás veszélyét általában két síkban (rendszerint x-z és y-z) kell vizsgálni. Mind a megtámasztási viszonyoktól függő l_0 kihajlási hossz, mind a h keresztmetszeti oldalhossz (vagy a keresztmetszet alakjától függő i inerciasugár) értéke „irányfüggő”, vagyis előfordulhat, hogy mindkét irányban más értékeket kell figyelembe venni a („legnagyobb”) karcsúság meghatározásához. Jól illusztrálja

a térbeli viselkedés ezen jellegzetességét a 3.15 ábrán alaprajzával vázolt épület, ahol például a „P” jelű pillér méretezése esetén nem lehet ránézésre eldönteni, hogy melyik a „veszélyes” irány. A pillért nézve (önmagában), a vizsgálatot az *x* irányban hajtanánk végre (mert a keresztmetszet kisebbik mérete ezt indokolja), míg ha az épületet nézzük, akkor a vizsgálatot az *y* irányban hajtanánk végre (mert abban az irányban az épület merevítetlen, míg a másik irányban merevített). Ilyen esetben mindkét irányt vizsgálni kell. A *teljes* vizsgálatot – vagyis a méretezést – nem kell mindkét irányban elvégezni. Elegendő a φ kihajlási tényező értékét kiszámolni a két irányban és amelyik irányban a kisebb értéket kapjuk ($\varphi_{\min}$), abban az irányban kell csak a teljes vizsgálatot végrehajtani.

3.3.2 Gyakorló feladatok

A méretezéssel kapcsolatos fent bemutatott eljárások gyakorlati alkalmazását két számpélda segítségével illusztráljuk.

1. Földszintes gépszín

Tervezzük meg a 3.16 ábrán alaprajz-részletével és metszetével megadott félig nyitott gépszín „P” jelű téglapillérét (b = ?) és a pillér alatti alaptestet (a = ?). A pillér tervezési nyomószilárdsága σ_{fH} = 1.8 N/mm^2. A talaj határfeszültsége σ_{tH} = 0.3 N/mm^2. A mértékadó födémteher q_M = 7.0 kN/m^2. A pillérre támaszkodó gerenda önsúlya G_{gerenda} = 8.0 kN/m. A pillér feltételezett önsúlya legyen $G_{\text{pillér}}$ = 25 kN. Az alaptest feltételezett önsúlya legyen G_{alaptest} = 28 kN.

Első lépésben a vizsgált pillér mértékadó terhét határozzuk meg. Ehhez szükség van a pillért terhelő terület nagyságára. Keresztirányban a födém kéttámaszú tartó, így a terület keresztirányú mérete a fesztáv fele + 0.38 m. A másik irányban a pillérre támaszkodó gerenda többtámaszú tartó, ahol a közbenső mezőkről a fesztáv fele, a szélső mező esetében pedig a fesztáv 5/8-a adja a pillérre terhelő szakasz méretét. A terhelő mező nagysága így

$$T = \left(\frac{6.0}{2} + 0.38\right)\left(\frac{6.0}{2} + 6.0\frac{5}{8}\right) = 22.82\,\text{m}^2$$

A pillér mértékadó terhe három tételből, a mértékadó födémteherből, a pillérre támaszkodó gerenda önsúlyából és a pillér (feltételezett) önsúlyából adódik össze:

$$F_M = 7 \cdot 22.82 + \left(\frac{6.0}{2} + 6.0\frac{5}{8}\right)8.0 + 25 = 238.74\,\text{kN}$$

A következő lépésben a pillér határerejét határozzuk meg. A gépszín az alaprajz tanúsága szerint hosszirányban merevített, keresztirányban merevítetlen. A b pillérméret ismeretének hiányában egyelőre nem dönthető el egyértelműen, hogy a határerő megállapítása során melyik a kedvezőtlenebb irány, de a keresztirányú merevítetlenség a keresztirányt valószínűsíti. Keresztirányban a gépszín egynyílású, így a v tényező értéke a 3.1 táblázatból v = 1.5 és a kihajlási hossz értéke (a 3.14/a ábrán értelmezett m_0 segítségével):

$$l_0 = 1.5m_0 = 1.5\left(4.42 + 0.20 + \frac{0.38}{2}\right) = 1.5 \cdot 4.81 = 7.215\,\text{m}$$

A karcsúságot jellemző

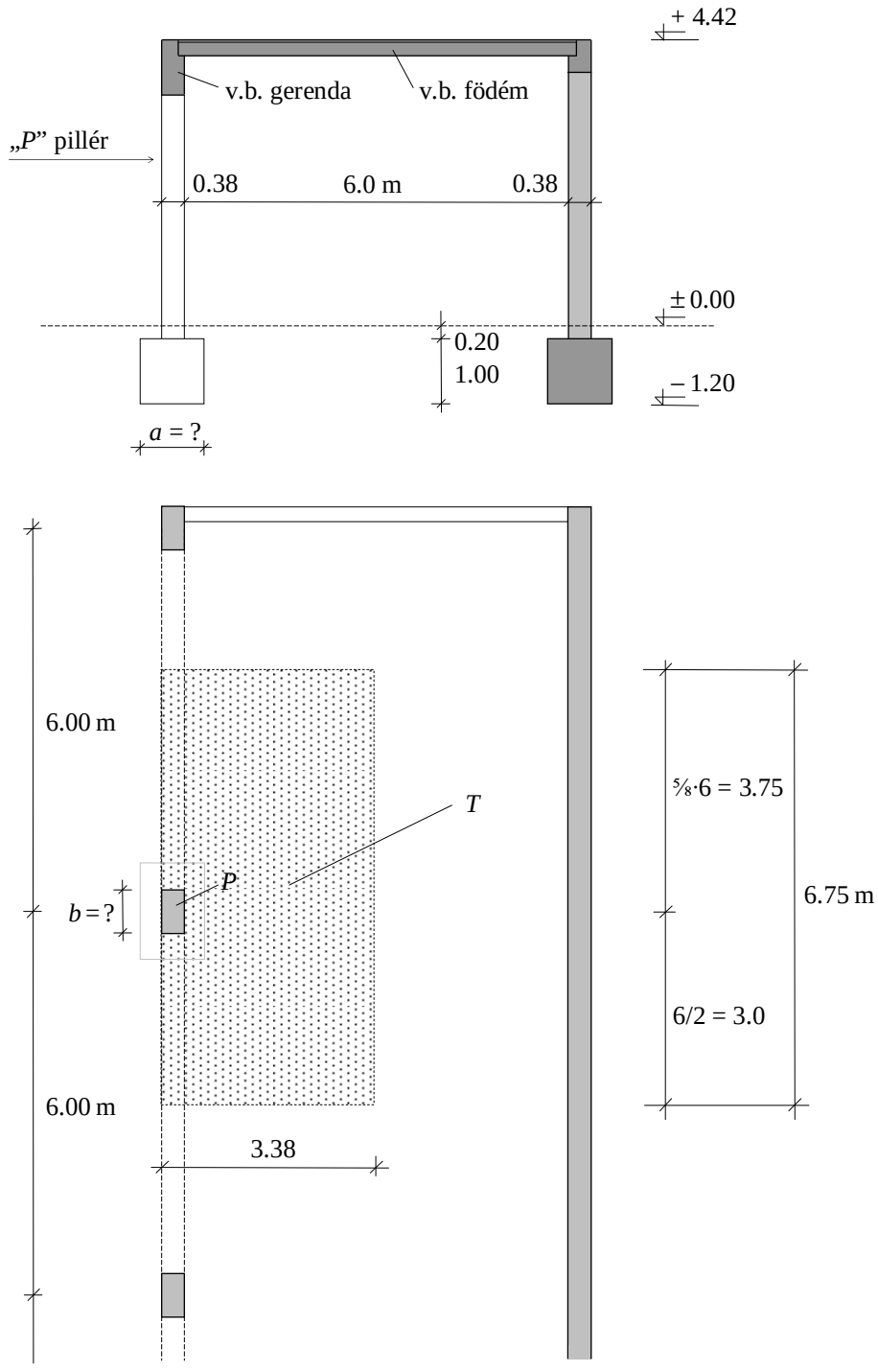
$$\frac{l_0}{h} = \frac{7.215}{0.38} = 19.0 \quad < \quad 25$$

arány függvényében a kihajlási tényező értéke a 3.4 táblázatból kapható:

$$\varphi = 0.72 - \frac{0.72 - 0.61}{5} 4.0 = 0.632$$

A határerő ezzel:

$$F_H = \varphi A \sigma_{fH} = 0.632 \cdot 380 \cdot b \cdot 1.8 = 432.3b \quad [\text{N}]$$



3.16 ábra. Gépszín.

Az ismeretlen b pillérméret megállapítása céljából felhasználjuk a (3.16) összefüggést, amely szerint a határerő nem lehet kisebb a mértékadó erőnél:

$$F_H = 432.3b \geq 238740$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$b \geq 552.3\,\text{mm}$$

Az alkalmazott téglaméretnek megfelelően a pillér mérete $b = 640$ mm. Most már azt is meg tudjuk állapítani, hogy a pillér méretezése során a φ kihajlási tényező értékét keresztirányú vizsgálat segítségével kell megállapítani, vagyis úgy, ahogyan eljártunk.

A pillér alatti alaptest méretének megállapítása céljából először megállapítjuk az alapozási síkon jelentkező a mértékadó erőt. Ez a pillér mértékadó terhéből és az alaptest (feltételezett) önsúlyából tevődik össze:

$$F_M = F_{\text{M,pillér}} + G_{\text{alaptest}} = 238.74 + 28 = 266.74\,\text{kN}$$

A határerő

$$F_H = A\sigma_{tH} = 0.3A\ \text{[N]}$$

Az alaptest egyik szélességi mérete legyen a, a másik $1.5a$. Az $F_H \geq F_M$ feltétel segítségével:

$$1.5a^2 \geq \frac{266740}{0.3} = 889133\,\text{mm}^2 \qquad \rightarrow \qquad a^2 \geq 592756\ \text{mm}^2$$

és innen

$$a \geq 770\,\text{mm} \qquad \rightarrow \qquad a = 80\ \text{cm}$$

Az alaptest két szélességi méretét így 80 cm-ben és 120 cm-ben állapítjuk meg.

(A pillér és az alaptest súlya nem nagyobb mint a feltételezett értékek.)

2. Nagyterhelésű tartó alátámasztásának vizsgálata

Tervezzük meg a 3.17 ábrán vázolt tartó alapozását és ellenőrizzük az alátámasztást helyi nyomásra. Az alaptest felső síkjában a mértékadó teher $F_M = 1000$ kN. A talaj határfeszültsége $\sigma_{tH} = 0.5$ N/mm^2. Az alaptest anyagának határfeszültsége $\sigma_H = 5$ N/mm^2.

Az alaptest méretének megállapítása céljából először megállapítjuk az alapozási síkon jelentkező mértékadó erőt. Ez a tartó mértékadó terhéből és az alaptest (feltételezett) önsúlyából tevődik össze. Az alaptest súlyát 60 kN-ra becsüljük. A mértékadó teher így:

$$F_M = F_{\text{M,tartóról}} + G_{\text{alaptest}} = 1000 + 60 = 1060\,\text{kN}$$

A határerő

$$F_H = A\sigma_{tH} = 0.5A\ \text{[N]}$$

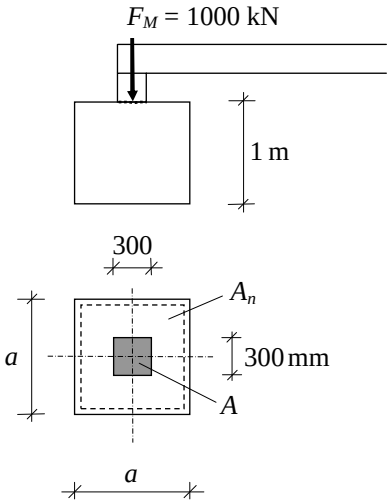
Az alaptest mindkét szélességi mérete legyen a. Az $F_H \geq F_M$ feltétel segítségével:

$$a^2 \geq \frac{1060000}{0.5} = 2120000\,\text{mm}^2$$

és innen

$$a \geq 1456\,\text{mm}$$

Az alaptest szélességi méretét így a = 1.5 m-ben állapítjuk meg. (Az 1.5×1.5×1.0 méretű alaptest súlya nem nagyobb, mint a feltételezett G_{alaptest} = 60 kN.)



3.17 ábra. Helyi nyomás vizsgálata.

Az alaptest méreteinek ismeretében ellenőrizzük a megtámasztást helyi nyomásra.
A közvetlenül terhelt felület:

$$A = 300 \cdot 300 = 90000\,\text{mm}^2$$

A megtámasztó szerkezeten kialakítható legnagyobb központos felület (a 3-3 cm levonás figyelembevételével):

$$A_n = 1440 \cdot 1440 = 2073600\,\text{mm}^2$$

A (3.14) képlet szerinti növelő tényező

$$m = \sqrt{\frac{A_n}{A}} = \sqrt{\frac{2073600}{90000}} = 4.8 \quad (> 3)$$

Ez az érték nagyobb mint 3 (a növelő tényező maximális értéke), így m = 3-mal számolunk. A határerő értékét a (3.13) képletből kapjuk:

$$F_H = Am\sigma_H = 90000 \cdot 3 \cdot 5 = 1350000\,\text{N} = 1350\,\text{kN}$$

Ez az érték nagyobb, mint az F_M = 1000 kN mértékadó erő, így az alátámasztás megfelel.

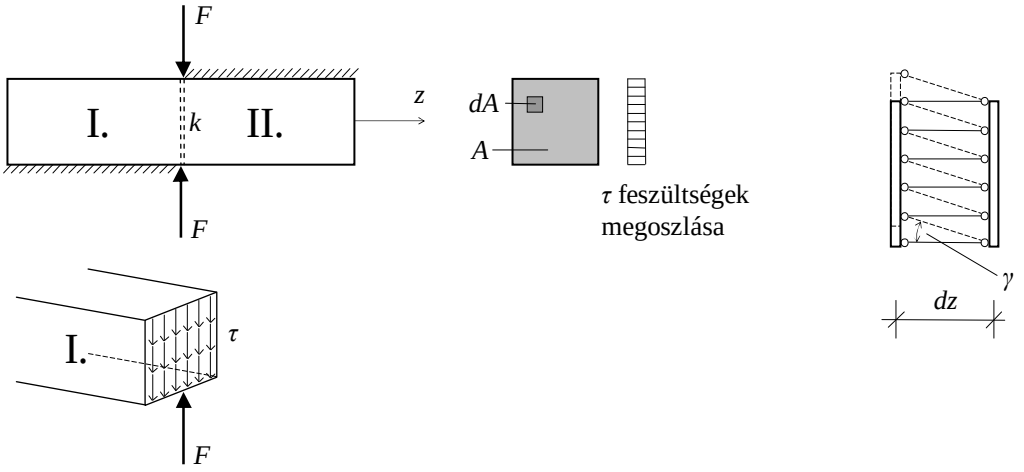
4

Tiszta nyírás

Ha a rúd egy keresztmetszetére a keresztmetszet síkjával párhuzamosan két egymással ellentétes irányú, azonos nagyságú és egymáshoz végtelen kis távolságra lévő erő működik, tiszta nyírásról beszélünk (4.1 ábra). Másképp fogalmazva: tiszta nyírás az az igénybevétel, amikor a rúd vizsgált keresztmetszetében csak nyíróerő működik (és $N = 0$ és $M = 0$). A gyakorlatban rúdszerkezetekben ilyet nem találunk, mert ha a nyíróerő nem zérus, akkor mindig működik nyomaték is. Tiszta nyírással leggyakrabban (húzott) rudak kapcsolataiban találkozhatunk.

4.1 Feszültség és alakváltozás

Határozzuk meg először a rúdban keletkező feszültséget. A Bevezetésben részletezett és az 1.4 ábrán bemutatott eljárást követve a vizsgált rudat a *k* keresztmetszetnél két részre vágjuk (4.1/a ábra).



a) tiszta nyírásra igénybevett rúd

b) szögváltozás

4.1 ábra. Tiszta nyírás.

A baloldali rész jobb oldalán az átvágási felületen ébredő – az egyensúlyt biztosító – feszültségeket τ-val jelöljük. A baloldali rész egyensúlyát vizsgálva a

$$\sum F_i = 0$$

függőleges vetületi egyenlet a

$$-\int_{(A)} \tau dA + F = 0$$

egyenlethez vezet. Feltételezve hogy a τ feszültségek megoszlása egyenletes, a τ konstansként kiemelhető az integráljel elé:

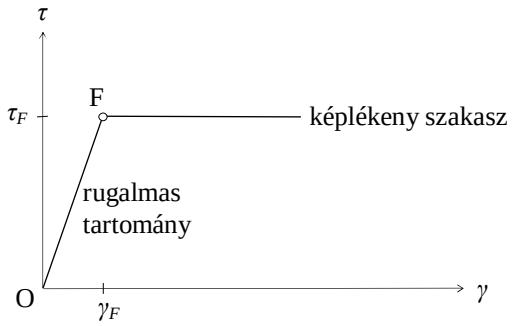
$$-\tau \int_{(A)} dA + F = 0$$

Mivel az integrálkifejezés a keresztmetszeti területet jelenti, a feszültség meghatározására szolgáló képletet a

$$\tau = \frac{F}{A} \tag{4.1}$$

igen egyszerű formában kapjuk, ahol A az elnyíródó keresztmetszet nagysága. A feszültség párhuzamos a keresztmetszettel, így a fajlagos belső erő nyírófeszültség. Dimenziója N/mm^2, illetve MPa.

A nyírás hatására a keresztmetszetek γ szögtorzulást szenvednek (4.1/b ábra). A rugalmas tartományban a szögtorzulás arányos a nyírófeszültséggel (4.2 ábra).



4.2 ábra. Rugalmas-képlékeny anyagú nyírt rúd idealizált feszültség-alakváltozás diagramja.

A húzott szerkezeteknél bevezetett Hooke-féle anyagegyenlet most a

$$\tau = G\gamma \tag{4.2}$$

alakban írható fel, ahol τ a nyírófeszültség, G a nyírási rugalmassági modulus és γ a szögtorzulás. A γ szögtorzulás dimenziótlan mennyiség, így a G nyírási rugalmassági modulus dimenziója N/mm^2, illetve MPa.

A (4.1) és (4.2) összefüggések segítségével a szögtorzulás kifejezhető a nyíróerő, a nyírási rugalmassági tényező és a nyírt keresztmetszet segítségével:

$$\gamma = \frac{F}{GA} \tag{4.3}$$

Végül megemlítjük, hogy a nyírási rugalmassági tényező és a rugalmassági tényező nem függetlenek egymástól. Fennáll közöttük a

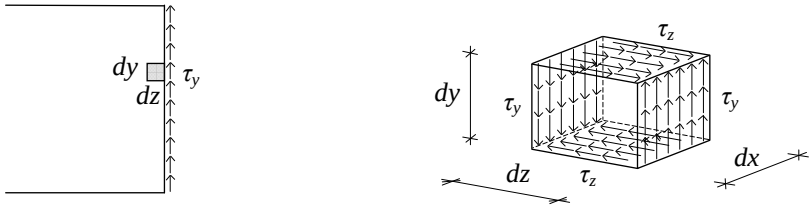
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4.4}$$

összefüggés, ahol ν a 2.2 pontban bevezetett Poisson tényező.

4.2 A nyírófeszültségek reciprocitási (dualitási) tétele

Későbbi tanulmányaink során alkalmazni fogjuk a reciprocitási tételt. A következőkben ezt a tételt ismertetjük.

Tekintsük a 4.3 ábrán vázolt, nyírt rúdból kivágott elemi méretű hasábot.



4.3 ábra. A nyírt rúdból kivágott elemi hasáb nyírófeszültségekkel.

A tiszta nyírásra igénybevett rúd egy keresztmetszetének vizsgálata során azt tapasztaltuk, hogy a keresztmetszet mentén τ nyírófeszültségek keletkeznek, amelyek a külső nyíróerőt egyensúlyozzák (4.1/a ábra). Jelölje most ezeket a nyírófeszültségeket τ_y a vizsgált elemi hasáb baloldali függőleges lapján (4.3 ábra). Az elemi hasáb függőleges vetületi egyensúlya csak úgy biztosítható, ha a jobboldali függőleges lap mentén ugyanekkora, de ellentétes irányú τ_y nyírófeszültségek működnek. A függőleges lapokon működő $dxdy\tau_y$ feszültségeredők így egy erőpárt képeznek. A nyomatéki egyensúly úgy biztosítható, hogy a vízszintes lapokon is működnek nyírófeszültségek és ezeknek a τ_z nyírófeszültségeknek az eredője ($dxdz\tau_z$) egy ugyanekkora, de ellentétes forgatóértelmű erőpárt képez, vagyis ha teljesül a

$$dxdy\,\tau_y dz - dxdz\,\tau_z dy = 0$$

feltétel. Innen azt kapjuk, hogy

$$\tau_y = \tau_z = \tau$$

Ez a reciprocitási tétel – más néven a dualitási tétel – amely tehát azt mondja ki, hogy ha egy metszeten τ nyírófeszültség működik, akkor a rá merőleges metszeten is τ nyírófeszültség működik. Ha az egyik nyírófeszültség a közös metszésvonal felé mutat, akkor a másik is a közös metszésvonal felé irányul. Ha az egyik nyírófeszültség a közös metszésvonaltól elmutat, akkor a másik is elmutat a közös metszésvonaltól.

4.3 Gyakorlati alkalmazás

Előbb összefoglaljuk a tisztán nyírt rudak méretezésével kapcsolatos tudnivalókat, majd bemutatunk egy speciális alkalmazást, végül a képletek alkalmazását három gyakorló feladat segítségével mutatjuk be.

4.3.1 Tisztán nyírt rudak méretezése

A 2.3.1 pontban foglalkoztunk a központosan húzott rudak méretezésével. A tisztán nyírt rudak méretezése az ott leírtakhoz nagyon hasonló lépésekben történik.

A méretezés során a feladat kétféleképpen jelentkezhet: vagy (méreteivel és anyagával) már adott egy tiszta nyírásnak kitett szerkezet, vagy pedig valamely adat már rendelkezésre áll, de nem mind, és nekünk kell megállapítani a hiányzó adatot. Az első esetben ellenőrzésről, a második esetben pedig tervezésről beszélünk.

Mindkét esetben a (4.1) képletet, illetve az annak átrendezésével kapott $F = A\tau$ összefüggést használjuk, amire alkalmazzuk a méretezés $Y_H \geq Y_M$ alapegyenletét:

$$F_H = A\tau_H \geq F_M \tag{4.5}$$

A (4.5) összefüggésben

F_H a rúd határereje,
A a rúd keresztmetszete,
τ_H a rúd anyagának (szabvány szerinti) nyírási határfeszültsége,
F_M a vizsgált keresztmetszetre ható mértékadó nyíróerő (amit a vonatkozó szabvány-előírások szerint kell meghatározni).

Ellenőrzés

Az ellenőrzés során adottak a keresztmetszet méretei (A), a rúd anyagának minősége (τ_H) és a szabványelőírásoknak megfelelően meghatározott nyíróerő nagysága (F_M). A (4.5) képlet változtatás nélkül alkalmazható. A rúd megfelel, ha a határereje nem kisebb mint a rúd mértékadó terhe:

$$F_H = A\tau_H \geq F_M$$

Tervezés

A tervezési feladat kétféleképpen jelentkezhet. Ha adott a nyíróerő nagysága (F_M) és a rúd anyaga (τ_H), akkor a feladat a keresztmetszet A méretének meghatározása. A (4.5) összefüggés átrendezésével ekkor az

$$A \geq \frac{F_M}{\tau_H} \tag{4.6}$$

képlethez jutunk.

A tervezés során előfordulhat olyan eset is, amikor a keresztmetszet mérete kötött – például a rendelkezésre álló hely miatt – és ilyenkor a nyíróerő F_M nagysága és a keresztmetszet A méretének ismeretében keressük azt a τ_H anyagminőséget, amely kielégíti a (4.5) feltételt. A (4.5) összefüggés ekkor a

$$\tau_H \geq \frac{F_M}{A} \tag{4.7}$$

formában alkalmazható, vagyis megmutatja, hogy milyen anyagot kell alkalmazni.

A gyakorlati esetek többségében a (4.6) és (4.7) képletekkel kapott eredmény nem ad azonnali végeredményt, vagyis keresztmetszeti méretet, illetve határfeszültséget. Kerekíteni kell az egyenlőtlenség irányának megfelelően, ami *felfelé* történő kerekítést jelent.

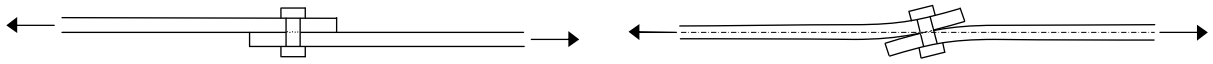
Alakváltozás

Tiszta nyírásnak alávetett szerkezetek esetében a gyakorlatban nem szokásos az alakváltozás-számítást elvégezni, mert nem szokott mértékadó lenni.

4.3.2 Egy speciális gyakorlati alkalmazás: csavarkötés

Gyakran előforduló feladat a húzott rudak toldása. Az egyik megoldás csavarok alkalmazása. (Régebben igen elterjedt volt a szegecsek alkalmazása. Az alábbiakban ismertetett eljárások értelemszerűen a szegecskötésekre is alkalmazhatók.) A csavarokkal kialakított kapcsolat méretezése során több tönkremeneteli módot is vizsgálni kell. Ezek egyike a kapcsolóelem elnyíródása veszélyének vizsgálata. A nyírásvizsgálat mellett kitérünk a palástnyomás hatására bekövetkező tönkremenetel vizsgálatára is. Hangsúlyozzuk viszont, hogy csak e két jelenség bemutatására koncentrálunk és nem vizsgáljuk az esetlegesen jelentkező többi jelenséget (pl. kigombolódás). Nem foglalkozunk továbbá a szabványok előírása szerint esetlegesen szükséges módosító, illetve egyéb biztonsági tényezőkkel sem. A csavarkötések komplex és részletes, szabvány szerinti vizsgálatával a „Fa- és acélszerkezetek” tantárgy foglalkozik a későbbi tanulmányaink során.

Bár a csavarkapcsolatok kialakítása során aranyszabály, hogy „egy csavar nem csavar”, a viselkedés könnyebb megértése céljából tekintsük először a 4.4/a ábrán vázolt kapcsolatot, amely egyetlen csavar segítségével toldja a húzott lemezt.



a) húzott rúd toldása b) lepattintó hatás

4.4 ábra. Egyszer nyírt, egy csavart tartalmazó kapcsolat.

A húzóerő felléptekor a két nem közös hatásvonalú erő nyomatékot is ébreszt a kapcsolatban és a kapcsolat „próbál kiegyenesedni”, vagyis a két erő próbál közös hatásvonalra kerülni. A kapcsolatnál ún. lepattintó hatás jön létre (4.4/b ábra), ami kedvezőtlenül befolyásolja a kapcsolat viselkedését. A keletkező nyomatékot és a lepattintó hatást azonban most nem vizsgáljuk, mert a) a keletkező nyomaték viszonylag kicsi és b) a gyakorlatban általánosan előforduló több-csavaros kapcsolatok esetében a lepattintó hatás elhanyagolható mértékűre csökken.

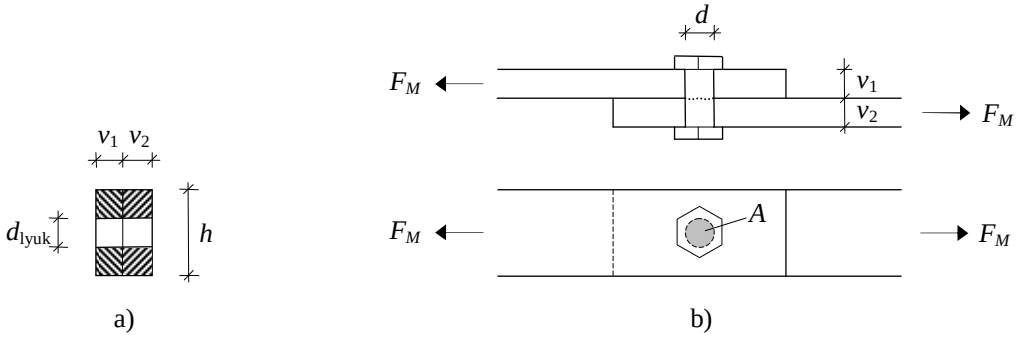
Azon túlmenően, hogy a húzott rúd a csavarlyukkal gyengített keresztmetszetnél elszakadhat, azaz húzásra tönkremehet, még két tönkremeneteli módot vizsgálunk. Ezek az elnyíródás és a palástnyomás.

Húzás

A kapcsolat egyik tönkremeneteli módja az, hogy a húzott rúd a csavarlyukkal gyengített keresztmetszetnél elszakad, azaz húzásra tönkremegy. A húzáshoz tartozó határerő a (2.5b) összefüggés alapján

$$F_H = A_h \sigma_H = (h - d_{\text{lyuk}}) v \sigma_H \tag{4.8}$$

ahol v a v_1 és v_2 lemezvastagságok közül a kisebbik (4.5 ábra) és σ_H a rúd anyagának határfeszültsége.



4.5 ábra. a) Hasznos keresztmetszet húzásnál, b) a csavar elnyíródása.

A hasznos keresztmetszet számításához (4.5/a ábra) a *d* átmérőjű csavar részére a csavarátmérőhöz tartozó lyukméretet a szabvány adja meg. (Szegecseknél *d* +1 mm nagyságú lyukat szokás figyelembe venni.)

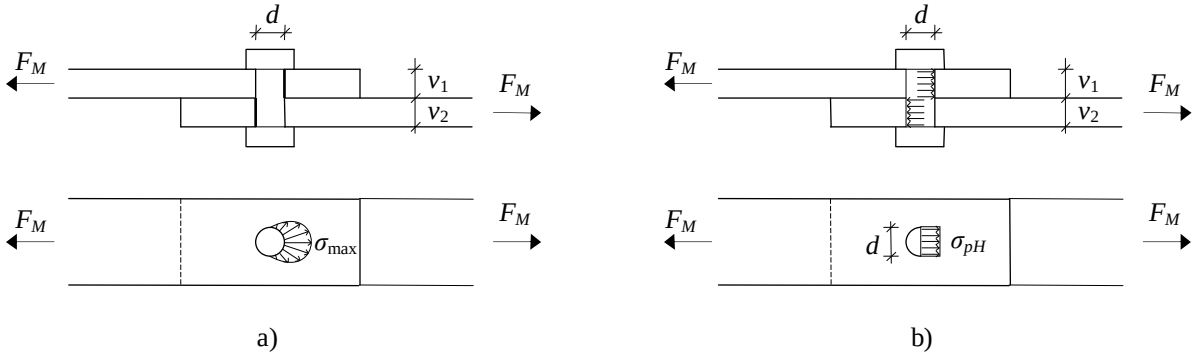
A csavar elnyíródása

A csavar a 4.5/b ábrán pontvonallal jelölt helyen, az *A* keresztmetszet mentén nyíródhat el. A 4.3.1 pontban bevezetett (4.5) képletben szereplő keresztmetszet és a csavar τ_H nyírási határfeszültsége ismeretében felírható a csavar elnyíródási határereje:

$$F_H = A\tau_H = \frac{d^2\pi}{4}\tau_H \tag{4.9}$$

Palástnyomás

A húzóerő felléptével a csavar a lemezzel érintkezve „beszorul” és a palástja mentén is fellépnek feszültségek. A keletkező nyomófeszültségek a csavarpalást két oldalán zérusról indulva a maximális értéket ($\sigma_{\max}$) a csavarpalástnak a húzóerő hatásvonalába eső részén érik el (4.6/a ábra). Ilyen változó intenzitású feszültségábrával nehéz méretezési feladatokat megoldani, de kísérleti tapasztalatok azt mutatják, hogy a félkör mentén változó megoszlású feszültségábra jó közelítéssel helyettesíthető a csavar átmérője mentén egyenletesen megoszló feszültségábrával (4.6/b ábra). A σ_{pH} palástnyomási határfeszültség értékeit a vonatkozó szabványban találhatjuk meg.



4.6 ábra. Palástnyomás. a) tényleges, b) helyettesítő modell a számításhoz.

A hatás-ellenhatás törvényének megfelelően, amikor a csavar palástján nyomófeszültségek keletkeznek, akkor ugyanakkora nyomófeszültségek keletkeznek a lemezben is. Ebből az következik, hogy a σ_{pH} palástnyomási határfeszültség értékének kiválasztásakor mindig a csavar és a lemez palástnyomási határfeszültsége közül a kisebbiket kell alkalmazni a

számításban.

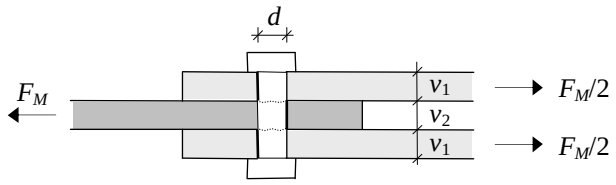
A palástnyomáshoz tartozó határerő így az

$$F_H = A\sigma_{pH} = vd\sigma_{pH} \tag{4.10}$$

képletből számítható, ahol d a csavar átmérője és v a v_1 és v_2 lemezvastagságok közül a kisebbik (4.6/b ábra).

A kapcsolat határerejét azt határozza meg, hogy melyik tönkremeneteli módhoz (esetünkben: húzás, nyírás, palástnyomás) tartozik a legkisebb határerő.

A fenti kapcsolatban úgynevezett *egyszernyírt* csavart alkalmaztunk, amelynél egy keresztmetszet mehet tönkre nyírásra. A gyakorlatban sűrűn előfordul a *kétszernyírt* csavarok alkalmazása (4.7 ábra). A kétszernyírt csavarok alkalmazásával növelhető a kapcsolat teherbírása, kiküszöbölhető a 4.4/b ábrán vázolt lepattintó hatás és csökkenthető a húzóerő mellett fellépő nyomaték.



4.7 ábra. Kétszernyírt csavar.

Most is háromféle tönkremeneteli lehetőséget vizsgálunk: vagy elszakad a csavarlyukkal gyengített keresztmetszet, vagy a két keresztmetszet mentén a csavar elnyíródik, vagy a kapcsolat palástnyomás miatt megy tönkre. Az egyszernyírt csavar esetében fent megadott képletek most a következőképpen alakulnak.

A nyírási tönkremenetel határereje:

$$F_H = A\tau_H = 2\frac{d^2\pi}{4}\tau_H \tag{4.11}$$

A palástnyomáshoz tartozó határerő:

$$F_H = A\sigma_{pH} = vd\sigma_{pH} \tag{4.12}$$

ahol v a v_2 és a $2v_1$ közül a kisebb.

A fenti egy darab csavarra vonatkozó képletek segítségével most már megadhatjuk a gyakorlati esetekben n darab csavart tartalmazó kapcsolatok nyírási és palástnyomási határerejét (4.1 táblázat).

A gyakorlatban a csavarokat gyakran több sorban és több oszlopban helyezik el. Most hallgatólagosan feltételeztük, hogy az erő a kapcsolatban egyenletesen oszlik meg a csavarok között. A csavarelrendezést szerkesztési szabályok szabályozzák, így különböző előírások vonatkoznak a kapcsolat hosszára, szélességére, a csavarok közötti távolságra (mindkét irányban), a szélső csavar és az elem széle közötti távolságra, stb. Ezeket a szabályokat szabvány írja elő.

4.1 táblázat. Az *n* csavart tartalmazó húzott kapcsolat nyírási és palástnyomási határerői.

„*n*” darab csavart tartalmazó kapcsolat határerői	egyszernyírt kapcsolat (4.5/b ábra, de *n* csavarral)	kétszernyírt kapcsolat (4.7 ábra, de *n* csavarral)
Nyírási határerő	$F_H = n\frac{d^2\pi}{4}\tau_H$	$F_H = 2n\frac{d^2\pi}{4}\tau_H$
Palástnyomási határerő	$F_H = nvd\sigma_{pH}$ ahol v a v_1 és v_2 kisebbike	$F_H = nvd\sigma_{pH}$ ahol v a v_2 és a $2v_1$ kisebbike

A határerők ismeretében most már összefoglalhatjuk a csavarkapcsolatok méretezésével kapcsolatos tudnivalókat.

Ellenőrzés

A csavarokkal kialakított húzott kapcsolat megfelel, ha teljesül az

$$F_H \geq F_M$$

feltétel, ahol F_M a szabványelőírások szerint meghatározott húzóerő és F_H a tönkremeneteli módokhoz tartozó határerők közül a legkisebb. A tönkremeneteli módokat szabványelőírások szabályozzák, amelyek közül a húzás, a csavarok elnyíródása és a palástnyomás jelenségével foglalkoztunk (biztonsági és módosító tényezők figyelembevétele nélkül).

Tervezés

A tervezés során leggyakrabban a csavarszám az ismeretlen. A 4.1 táblázat adatainak felhasználásával a 4.2 táblázatban foglaljuk össze a szükséges csavarszám minimális értékét. A táblázatban szereplő képletek nevezőiben egy csavar határerői szerepelnek.

4.2 táblázat. A minimális csavarszám nyírási és palástnyomási tönkremenetel esetén.

Minimális csavarszám	egyszernyírt kapcsolat	kétszernyírt kapcsolat
Nyírási tönkremenetel esetén	$n^{ny} \geq \frac{F_M}{\frac{d^2\pi}{4}\tau_H}$	$n^{ny} \geq \frac{F_M}{2\frac{d^2\pi}{4}\tau_H}$
Palástnyomási tönkremenetel esetén	$n^{p} \geq \frac{F_M}{vd\sigma_{pH}}$ ahol v a v_1 és v_2 kisebbike	$n^{p} \geq \frac{F_M}{vd\sigma_{pH}}$ ahol v a v_2 és a $2v_1$ kisebbike

A ténylegesen alkalmazott csavarok száma nagyobb kell hogy legyen a mindkét tönkremenetel feltételezésével kiszámított csavarszámnál:

$$n_{\text{tényleges}} \geq n^{ny}, n^{p}$$

A felkerekítés során gyakran a csavarkép-kialakítást is figyelembe kell venni és így

előfordulhat, hogy nem a legközelebbi egész számot választjuk, hanem nagyobbat, illetve esetleg azt is figyelembe kell venni, hogy például páros számú csavarra van szükség.

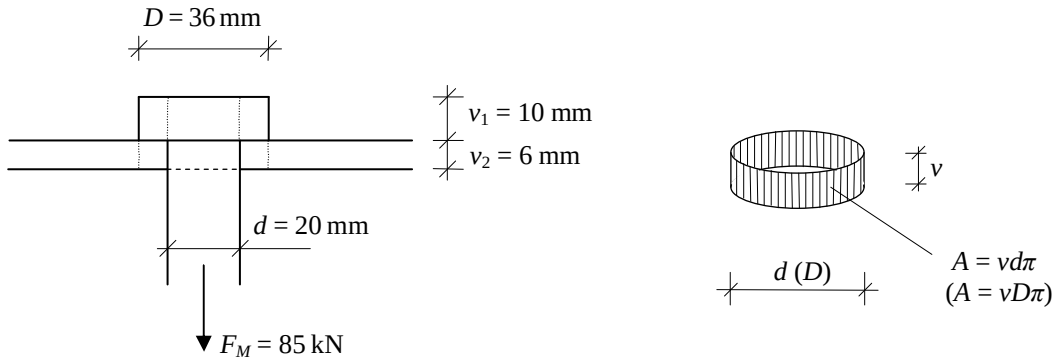
A tervezés során ismeretlen lehet a d csavarátmérő is, sőt (elméletileg), a lemezek v_1 és v_2 vastagsága és a σ_{pH} palástnyomási és τ_H nyírási határfeszültség. Ez utóbbiak azonban nem gyakorlati esetek.

Előfordulnak (kettőnél) többször nyírt csavarokat alkalmazó kapcsolatok, de ezek ritkák. Méretezésük a fentiek értelemszerű alkalmazásával történhet.

4.3.3 Gyakorló feladatok

1. Lemez-csapszeg kapcsolat

Ellenőrizzük a 4.8 ábrán vázolt lemez-csapszeg kapcsolatot. A lemez esetében a nyírófeszültség határértéke $\tau_H = 135$ N/mm^2, a csapszeg pedig $\tau_H = 160$ N/mm^2 és $\sigma_H = 275$ N/mm^2 határfeszültségekkel rendelkezik.



a) metszet b) elnyíródni akaró felület

4.8 ábra. Lemez-csapszeg kapcsolat.

Vizsgáljuk meg először a lemez elnyíródását. A határerő értéke:

$$F_H^{\text{lemez}} = A\tau_H = v_2 D\pi\tau_H = 6 \cdot 36 \cdot \pi \cdot 135 = 91609\,\text{N}$$

Ha a csapszeg nyíródik el, akkor a határerő

$$F_H^{\text{csapszeg}} = A\tau_H = v_1 d\pi\tau_H = 10 \cdot 20 \cdot \pi \cdot 160 = 100531\,\text{N}$$

Tönkremenetelt okozhat még az is, hogy elszakad a csapszeg szára. Az ehhez tartozó határerő:

$$F_H^{\text{húzás}} = A\sigma_H = \frac{20^2\pi}{4} 275 = 86394\,\text{N}$$

A kapcsolat határereje a három érték közül a legkisebbik, ami nagyobb a mértékadó erőnél, vagyis teljesül a

$$F_H = 86394\,\text{N} \geq F_M = 85000\,\text{N}$$

feltétel és így a kapcsolat megfelel. (A két elem közötti nyomást most nem vizsgáljuk.)

2. Ferde beeresztés

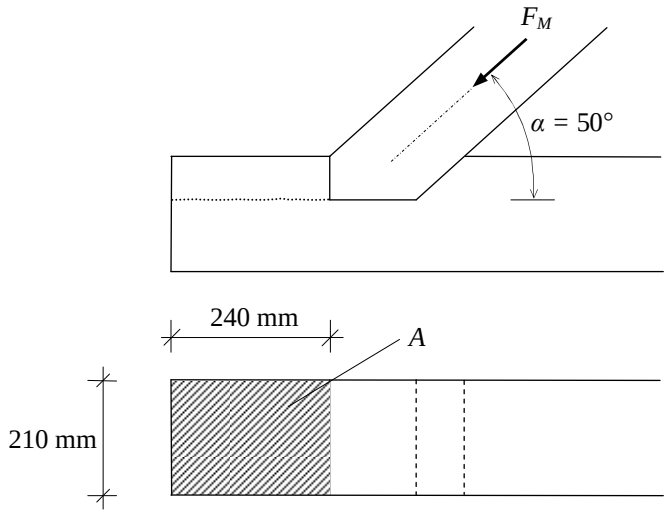
Ellenőrizzük nyírásra a 4.9 ábrán vázolt kapcsolatot. A ferde rúdban működő erő: F_M = 200 kN. A faanyag nyírási határfeszültsége: τ_H = 2.7 N/mm^2.

A kapcsolat határereje nyírásra:

$$T_H = A\tau_H = 210 \cdot 240 \cdot 2.7 = 136080\,\mathrm{N}$$

A kapcsolatra működő mértékadó nyíróerő:

$$T_M = F_M \cos\alpha = 200000 \cdot \cos 50° = 128558\,\mathrm{N}$$



4.9 ábra. Ferde beeresztés.

Teljesül a

$$T_H \geq T_M$$

feltétel, tehát a kapcsolat nyírásra megfelel. (A kapcsolat többi tönkremeneteli módját most nem vizsgáljuk.)

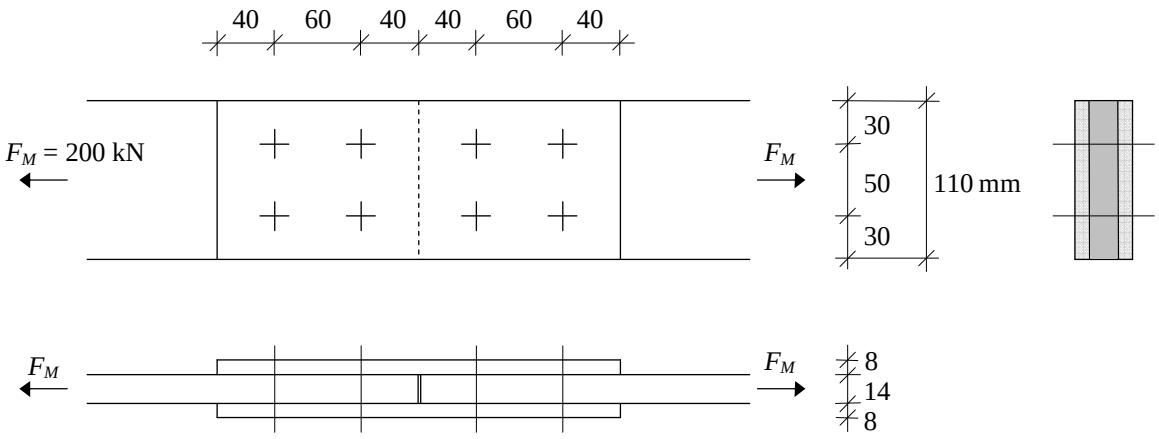
3. Kétszernyírt csavarkapcsolat

Ellenőrizzük az F_M = 200 kN erővel terhelt húzott rúd 4.10 ábrán vázolt toldását. A csavarok átmérője Ø16. A toldandó lemez (és a hevederek), valamint a csavarok esetében a figyelembeveendő határfeszültségek:

lemez: σ_{hH} = 235 N/mm^2, σ_{pH} = 360 N/mm^2
csavar: τ_H = 140 N/mm^2, σ_{pH} = 400 N/mm^2

A húzás vizsgálatakor a lemez vastagságával kell számolni (mert az kevesebb, mint a két heveder együttes vastagsága). A csavarlyuk átmérőjét 2 mm növeléssel 18 mm-rel vesszük figyelembe az A_h hasznos keresztmetszet megállapításához. A húzáshoz tartozó határerő így:

$$F_H^{\text{húzás}} = A_h\sigma_{hH} = 14(110 - 2 \cdot 18)235 = 243460\,\mathrm{N}$$



4.10 ábra. Húzott rúd toldása kétszernyírt csavarkapcsolattal.

A nyírásvizsgálathoz a kapcsolat egyik oldalán lévő csavarokkal, azaz $n = 4$ darab csavar kétszeres elnyíródásával kell számolni:

$$F_H^{\text{nyírás}} = A\tau_H = 2 \cdot \frac{nd^2\pi}{4}\tau_H = 2\frac{4 \cdot 16^2\pi}{4}140 = 225189\,\text{N}$$

A palástnyomás esetében a lemezt vizsgáljuk (mert vastagsága kisebb mint a két heveder együttes vastagsága és a határfeszültsége kisebb mint a csavar határfeszültsége). A határerő így:

$$F_H^{\text{palástnyomás}} = nvd\sigma_{pH} = 4 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 360 = 322560\,\text{N}$$

A kapcsolat határereje a három határerő legkisebbike, vagyis $F_H = 225189$ N. Mivel teljesül az

$$F_H = 225189\text{N} \geq F_M = 200000\,\text{N}$$

feltétel, a kapcsolat megfelel.

Itt is megjegyezzük, hogy a tervezett csavarelrendezésnek ki kell elégíteni a vonatkozó szabvány szerkesztési szabályait is.

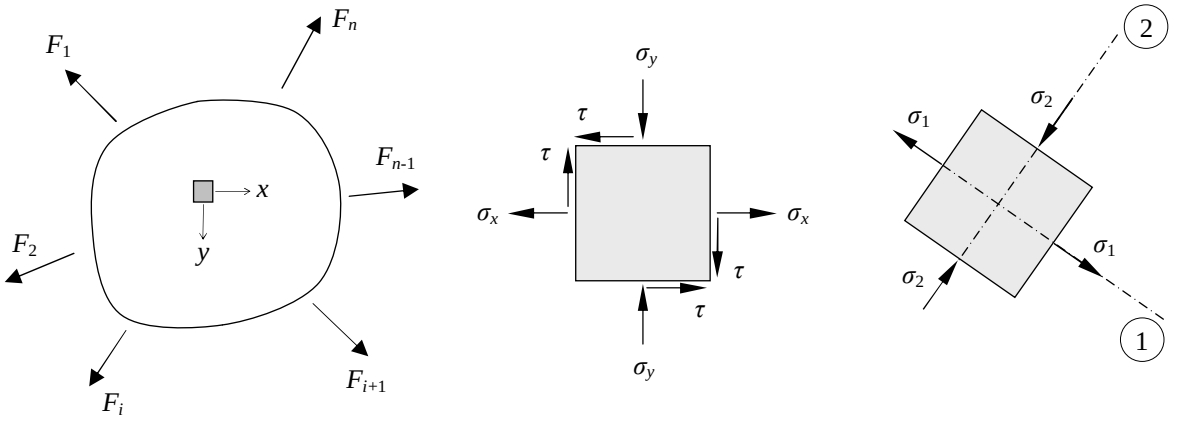
5

Síkbeli feszültségállapot

Eddig olyan egyszerű igénybevételekkel foglalkoztunk, melyek esetében csak egyfajta – normál- vagy nyíró- – feszültségek keletkeztek. Bonyolultabb és a gyakorlatban sűrűn előforduló esetekben viszont ezek a feszültségek egyszerre jelentkeznek és vizsgálnunk kell együttes hatásukat. Ilyen esetekben – ide tartoznak különböző talajmechanikai problémák is – előnyös lehet a síkbeli feszültségállapot törvényszerűségeinek az ismerete.

5.1 Főirányok és főfeszültségek

Tekintsük az 5.1/a ábrán vázolt tetszőleges alakú testet, amelyre egyensúlyban lévő síkbeli erőrendszer működik. Mivel a külső erőrendszer síkbeli erőket tartalmaz, a belső feszültségek is ebben a síkban működnek és *síkbeli feszültségállapotról* beszélhetünk.



a) egyensúlyban lévő test

b) tetszőlegesen kivágott elemi négyzet

c) speciális helyzetű elemi négyzet

5.1 ábra. Síkbeli feszültségállapot.

Válasszuk a síkbeli erők síkját *x-y* síknak és egy tetszőleges pontban tetszőleges módon vágjunk ki egy elemi négyzetet (5.1/b ábra). Általános esetben a négyzetre *x* irányú σ_x és *y* irányú σ_y normálfeszültségek és τ nyírófeszültségek hatnak. A reciprocitási tétel értelmében a τ nyírófeszültségek párosával jelentkeznek és azonos sarokpont felé mutatnak.

Ha az elemi négyzetet az *x-y* síkban elforgatjuk, akkor az oldalakra ható feszültségek nagysága változik. Létezik egy olyan 1-2 tengelykereszt (5.1/c ábra), amelyben a normálfeszültségek a legnagyobb (σ_1), illetve a legkisebb (σ_2) értéket veszik fel és ezzel egy időben a nyírófeszültségek értéke zérus. Az ezt a helyzetet jellemző irányokat *főirányoknak*, a

σ_1 és σ_2 feszültségeket pedig *főfeszültségeknek* nevezzük.

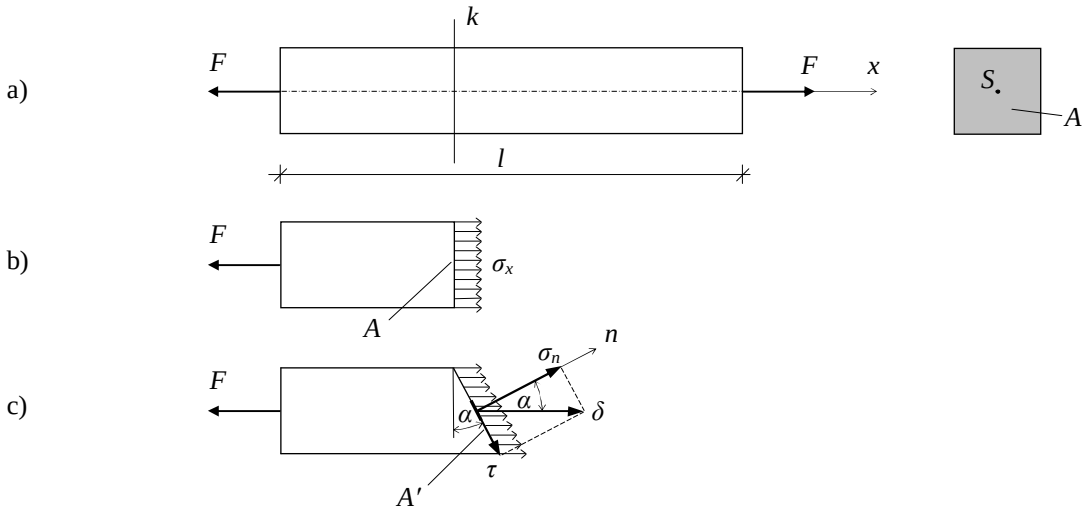
Fentiek ismeretében tekintsük ismét a 2. fejezetben már megismert és vizsgált központosan húzott rudat (5.2/a ábra). Vizsgáljuk először a rúd baloldali részének egyensúlyát, úgy, hogy a rudat a rúdtengelyre merőlegesen vágjuk ketté (5.2/b ábra). Az

$$F - \sigma_x A = 0$$

vízszintes vetületi egyenlet segítségével a már jól ismert

$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

összefüggéshez jutunk.



5.2 ábra. a) Húzott rúd, b) merőleges lemetszés, c) ferde lemetszés.

Vizsgáljuk meg most általánosabban az egyensúlyt, úgy, hogy a *k* keresztmetszetnél a rudat ferdén vágjuk ketté (5.2/c ábra). Az átvágás ferdeségét az α szög jellemzi. A ferde átvágás miatt a keresztmetszet mérete megváltozik, mégpedig az

$$A' = \frac{A}{\cos\alpha}$$

összefüggés szerint.

A vízszintes vetületi egyenlet tehát most

$$F - \delta A' = 0 \qquad \rightarrow \qquad F - \delta \frac{A}{\cos\alpha} = 0$$

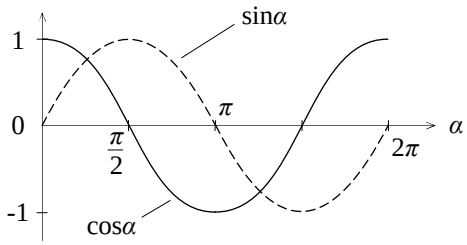
alakú és innen a feszültségvektor értéke:

$$\delta = \frac{F}{A}\cos\alpha = \sigma_x \cos\alpha$$

Mivel a cosα értéke egynél soha nem lehet nagyobb (5.3 ábra), a feszültség értékére érvényes a

$$\delta \le \sigma_x$$

összefüggés.



5.3 ábra. A sinα és cosα függvények a $0 \le \alpha \le 2\pi$ tartományban.

Ha az α értéke zérus – vagyis a vizsgált metszet merőleges a rúdtengelyre – akkor

$$\delta = \sigma_x$$

vagyis visszajutottunk az 5.2/b ábrán vázolt esetre. Abban az esetben, amikor az α értéke $\pi/2$,

$$\delta = 0$$

vagyis a hosszanti szálak között nem ébred normálfeszültség. Fontos felismerés, hogy a húzott rúd húzóerővel párhuzamos metszetei feszültségmentesek.

Bontsuk most fel a ferde metszethez tartozó δ feszültséget az n normális irányába eső és rá merőleges (a metszet síkjába eső) összetevőkre. A normálfeszültség értéke

$$\sigma_n = \delta \cos\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha \tag{5.1}$$

a nyírófeszültség értéke pedig

$$\tau = \delta \sin\alpha = \sigma_x \sin\alpha \cos\alpha = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha \tag{5.2}$$

Fentiekből két tanulság vonható le, figyelembe véve hogy az α értéke mindig 0 fok és 90 fok között van. Az első tanulság az, hogy a σ_n normálfeszültség értéke soha nem lehet nagyobb mint a σ_x értéke, vagyis:

$$0° \le \alpha \le 90°$$

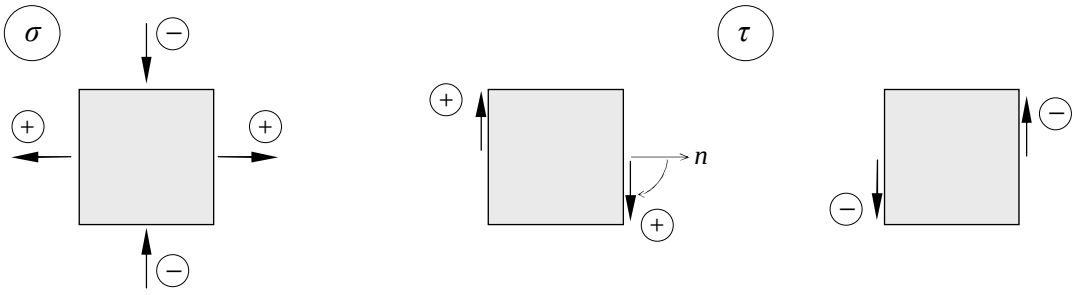
$$\sigma_{n,\max} = \sigma_x \qquad\qquad \sigma_{n,\min} = 0$$

A másik tanulság az, hogy a τ nyírófeszültség értéke soha nem lehet nagyobb mint $\sigma_x/2$, vagyis:

$$0° \le \alpha \le 90°$$

$$\tau = 0 \qquad\qquad \tau = 0 \qquad \text{és} \qquad \tau_{\max} = \tau(45°) = \frac{\sigma_x}{2} \sin(2 \cdot 45) = \frac{\sigma_x}{2}$$

A feszültségekkel kapcsolatban az 5.4 ábrán vázolt előjelszabály érvényes.



a) σ normálfeszültségek

b) τ nyírófeszültségek

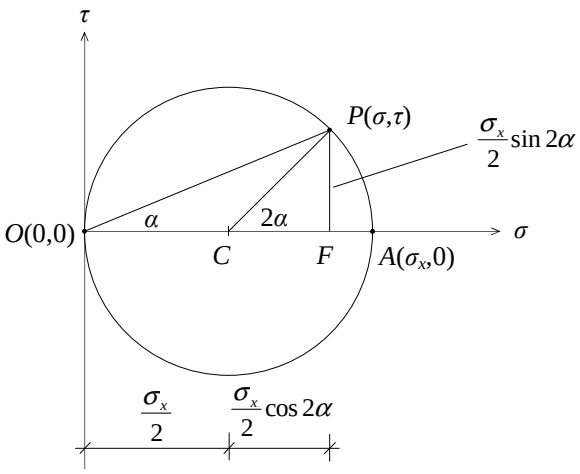
5.4 ábra. Előjelszabály.

A *főirányok* és *főfeszültségek* meghatározására különböző számítási és szerkesztési eljárások állnak rendelkezésre. Ezek közül az Otto Mohr (1835-1918) német mérnök által 1882-ben kidolgozott grafikus eljárást ismertetjük.

5.2 A feszültségi állapot Mohr-féle ábrázolása

Tekintsünk először egy speciális esetet és nézzük meg, hogy hogyan alakulnak a feszültségek egy húzott rúd esetében.

Ha a vizsgált keresztmetszet merőleges a rúdtengelyre, akkor az $\alpha = 0$ érvényes (5.2 ábra).



5.5 ábra. Mohr kör húzott rúdhoz.

A jellemző feszültségek értékét az (5.1) és (5.2) összefüggések segítségével határozhatjuk meg:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha = \sigma_x$$

és

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = 0$$

Ez a két érték egy σ–τ koordinátarendszerben egy pontot határoz meg. Jelöljük ezt a pontot *A*-val és ábrázoljuk a σ–τ koordinátarendszerben (5.5 ábra).

Ha a vizsgált keresztmetszet párhuzamos a rúdtengellyel, akkor az $\alpha = 90$ érvényes (5.2 ábra). A jellemző feszültségek értékét most is az (5.1) és (5.2) összefüggések segítségével határozhatjuk meg:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha = 0$$

és

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = 0$$

Ez a két érték is egy pontot határoz meg a σ–τ koordinátarendszerben. Jelöljük ezt a pontot *O*-val és ábrázoljuk a σ–τ koordinátarendszerben.

A két pont által meghatározott távolságot átmérőnek és a *C* felezőpontot egy kör középpontjának tekintve, most már megrajzolhatjuk a húzott rúd feszültségállapotát jellemző kört, amit Mohr körnek nevezünk.

A Mohr körrel kapcsolatban azt állítjuk, hogy a kör pontjainak koordinátái megadják az összes lehetséges metszősíkhoz tartozó σ és τ értékeket.

A bizonyításhoz állítsuk elő a *P* pont két koordinátáját, vagyis az *OF* és *PF* távolságokat.

$$OF = OC + CF = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\alpha = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\alpha) = \sigma_x \cos^2 \alpha \quad (= \sigma_n)$$

$$PF = CP \sin 2\alpha = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha \quad (= \tau)$$

Fentiek ismeretében a Mohr kör megszerkesztése és alkalmazása az alábbiak szerint történik:

1) Elhelyezzük az *O* és *A* pontokat a vízszintes σ tengelyen
2) Az *OA* távolság megfelezésével megkapjuk a kör középpontját
3) Bármely *P* pont a σ_n és τ koordinátákkal megadja az α szöghöz tartozó feszültségeket

Ez volt a tiszta húzás esete, amikor csak σ_x normálfeszültség ébred, de a szerkesztés általánosítható σ_x *és* σ_y feszültségekre. A következőkben ezt mutatjuk be.

Általános esetben $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y \neq 0$ és $\tau \neq 0$. A Mohr kör előállítása ekkor úgy történik, hogy először előállítjuk a kör két pontját [$P_1(\sigma_x, \tau)$ és $P_2(\sigma_y, \tau)$] a σ_x, σ_y és τ értékek segítségével. A két pont összekötésével megkapjuk a kör *C* középpontját, ami az összekötő egyenes és a vízszintes σ tengely metszéspontja (5.6/a ábra). Ezzel a lépéssel egyben a kör sugarát is megkapjuk és a kör megrajzolható.

A főfeszültségek nagysága az ábráról leolvasható – ehhez léptékhelyes ábrát kell rajzolni – vagy pedig az alábbi – az ábra segítségével előállított – képletek segítségével kiszámítható:

$$\sigma_1 = \sigma_y + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

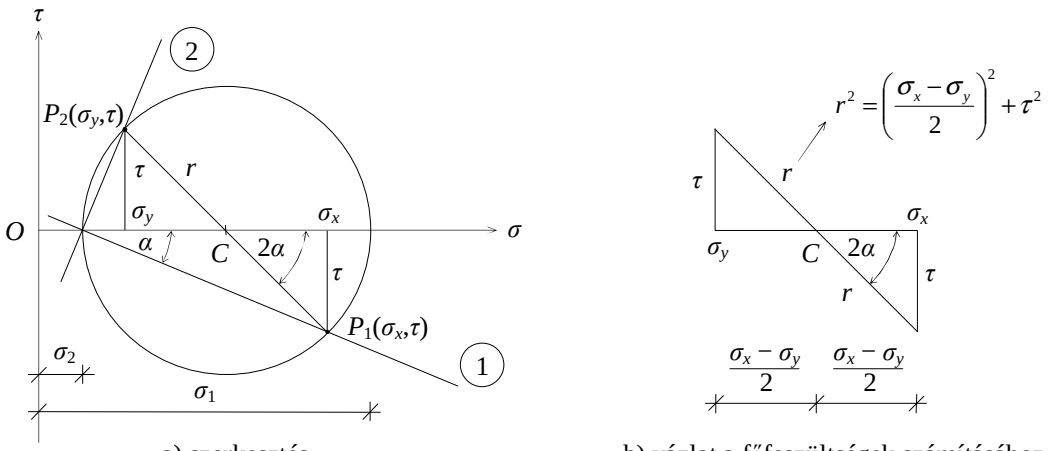
és

$$\sigma_2 = \sigma_y + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Az 1. főirány x tengellyel bezárt szöge az 5.6/b ábra alapján a

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

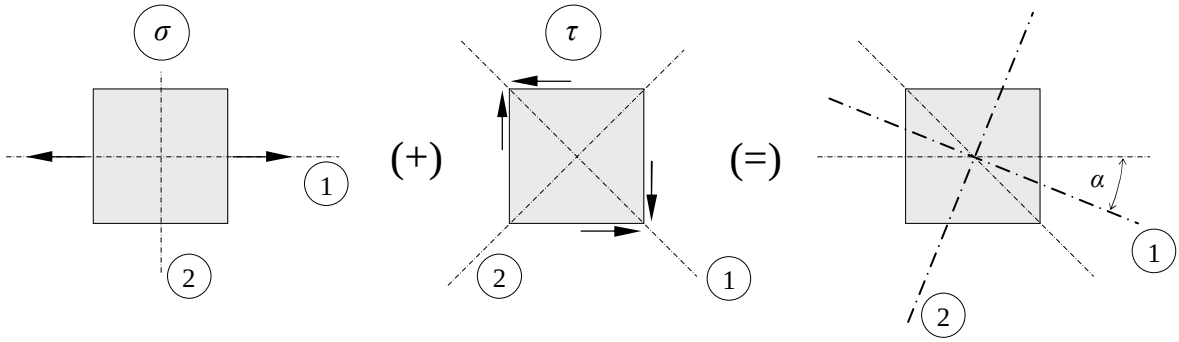
képletből határozható meg.



a) szerkesztés b) vázlat a főfeszültségek számításához

5.6 ábra. Mohr kör általános esetben.

A főirány szögének előjelét (vagyis hogy az α-t felfelé vagy lefelé kell mérni) szemléletből – „szuperpozícióval” – állapíthatjuk meg. Az 5.7 ábra vázlata szerint a csak normálfeszültségek (5.7/a ábra) és csak nyírófeszültségek (5.7/b ábra) feltételezésével megállapított főirányok *közé* kell elhelyezni az összetett feszültségállapotot jellemző főirányokat (5.7/c ábra).



a) főirányok σ esetén b) főirányok τ esetén c) a tényleges főirányok

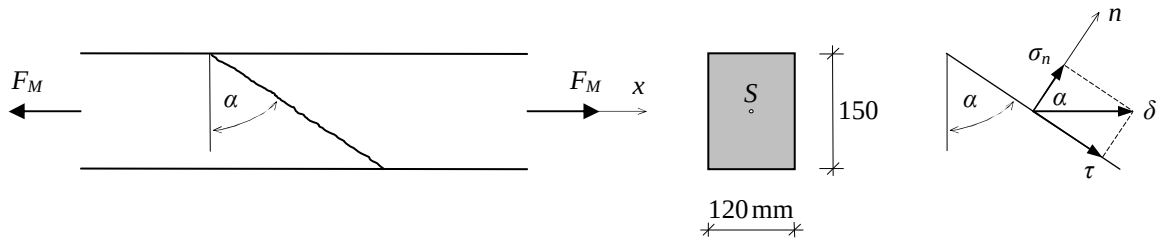
5.7 ábra. A főtengelyek irányának megállapítása.

5.3 Gyakorlati alkalmazás

Vizsgáljuk meg az 5.8 ábrán vázolt központosan húzott farúd ferdén toldott ragasztott kapcsolatát. A húzóerő $F_M = 100$ kN, a határfeszültségek értéke $\sigma_{H,\text{rag}} = 0.8$ N/mm^2 és $\tau_{H,\text{rag}} = 2.4$ N/mm^2. A keresztmetszet téglalap alakú, 120 mm és 150 mm méretekkel. Megfelel-e a kapcsolat $\alpha = 60°$, illetve $\alpha = 70°$ esetén?

A húzóerő irányába eső feszültség értéke:

$$\sigma_x = \frac{F_M}{A} = \frac{100000}{120 \cdot 150} = 5.56 \text{ N/mm}^2$$



5.8 ábra. Húzott rúd ragasztott toldása.

$\alpha = 60°$ ferdeségű kapcsolat

A jellemző feszültségek értékét az (5.1) és (5.2) képletek szolgáltatják. A normálfeszültség:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha = 5.56 \cos^2 60° = 1.39 \text{ N/mm}^2$$

a nyírófeszültség értéke pedig

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = \frac{5.56}{2} \sin 120° = 2.41 \text{ N/mm}^2$$

Mindkét feszültség nagyobb a megfelelő határfeszültségnél, így a ragasztott kapcsolat nem felel meg.

$\alpha = 70°$ ferdeségű kapcsolat

A jellemző feszültségek értéke:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha = 5.56 \cos^2 70° = 0.65 \text{ N/mm}^2$$

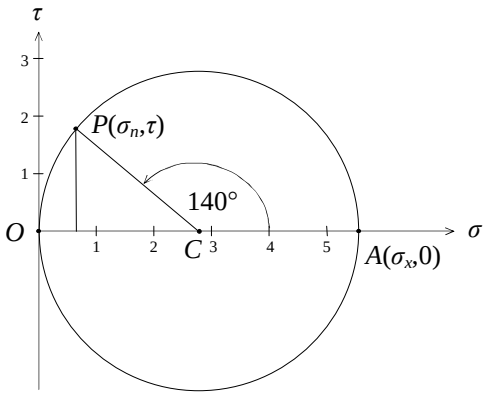
és

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = \frac{5.56}{2} \sin 140° = 1.79 \text{ N/mm}^2$$

Mindkét feszültség kisebb a megfelelő határfeszültségnél, így a ragasztott kapcsolat megfelel.

Oldjuk meg a feladatot szerkesztéssel is. Első lépésben a σ–τ koordinátarendszerben felmérjük a $\sigma_x = 5.56$ értékét. Ezzel megkapjuk a Mohr kör vízszintes átmérőjének jobboldali A pontját (5.9 ábra). A baloldali pont már ismert (hiszen $\sigma_y = 0$), így a Mohr kör előállítható.

Az átmérő megfelezésével a kör *C* középpontjához jutunk és megrajzoljuk a Mohr kört. Felmérve a $2\alpha = 140°$ értéket, megkapjuk a *P* pontot, amelynek két koordinátája szolgáltatja σ_n és τ értékeit. Ezek az értékek a léptékhelyes ábráról leolvashatók.



5.9 ábra. Húzott rúd ragasztott toldása: Mohr kör.

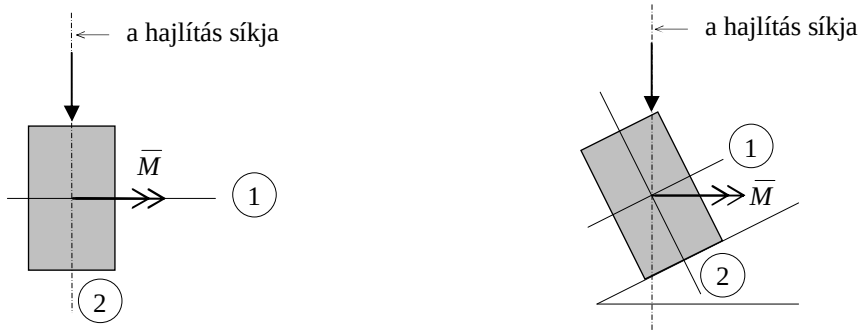
6

Egyszerű, egyenes hajlítás

Hajlításról akkor beszélünk, ha a külső erők hatására a rúdtengely és a terhek által meghatározott síkban *M* nyomaték keletkezik. Ezt a nyomatékot a keresztmetszet belső (húzó-nyomó) erőinek erőpárja egyensúlyozza. A hajlító igénybevétel következtében a rúdtengely meggörbül, de hosszváltozást nem szenved.

A hajlítás egy meglehetősen komplex jelenség és az egyszerűbb tárgyalhatóság érdekében különböző nézőpontokból szokás speciális eseteket megkülönböztetni, illetve előfordulási módokat elkülöníteni. Az alábbiakban röviden összefoglaljuk a hajlítás leggyakrabban megkülönböztetett alapeseteit, de ebben a fejezetben – a címnek megfelelően – csak az egyszerű, egyenes hajlítással foglalkozunk. A következő négy fejezet sorban tárgyalja a hajlítás további fontos területeit.

„Térbeli" oldalról megközelítve az osztályozást, a hajlítás alapesetei az egyenes hajlítás és a ferde hajlítás. *Egyenes hajlításkor* a hajlítás síkja (azaz a teher síkja) a rúd egyik tehetetlenségi fősíkjával egybeesik (6.1/a ábra), azaz a keresztmetszeti ábrán a hajlítás síkja az egyik főtengelyre illeszkedik. A *ferde hajlítás* esetében a hajlítás síkja nem esik egybe egyik tehetetlenségi fősíkkal sem (6.1/b ábra).



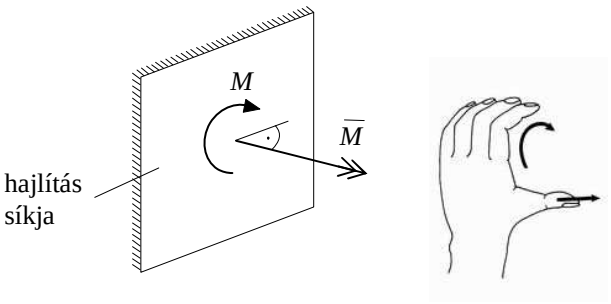
a) egyenes hajlítás b) ferde hajlítás

6.1 ábra. Hajlítás.

A gyakorlati előfordulási módok, illetve tervezési oldaláról megközelítve az osztályozás kérdését, beszélhetünk egyszerű és összetett hajlításról. *Egyszerű hajlítás* esetében a keresztmetszetre csak hajlítónyomaték hat (és nyíróerő nem). *Összetett hajlításról* akkor beszélünk, ha a keresztmetszetre ható hajlítónyomatékkal egy időben nyíróerő is fellép. Az egyszerű hajlítást tiszta hajlításnak is és az összetett hajlítást közönséges hajlításnak (vagy hajlítással egyidejű nyírásnak) is nevezik.

A tartó anyagától függően is különbséget tehetünk a hajlításnak kitett tartó viselkedését illetően. Ha a tartó anyaga rugalmas (OF szakasz a 2.5 ábrán), akkor *rugalmas hajlításról*

beszélünk, míg a rugalmas-képlékeny anyagú tartók esetében (OFB szakasz a 2.5 ábrán) a tartó *rugalmas-képlékeny* hajlítást végez.

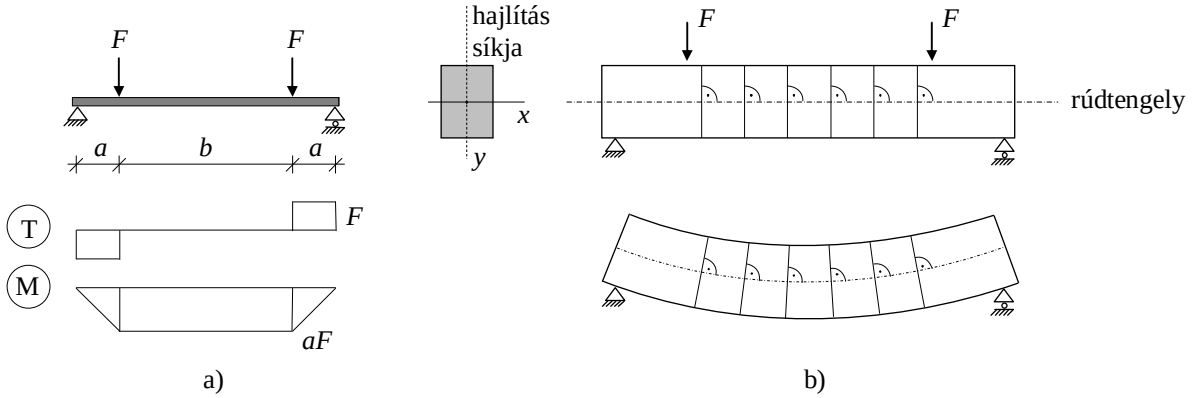


6.2 ábra. Balkéz-szabály.

Az *M* hajlítónyomaték ábrázolása a keresztmetszeten a nyomatékvektorral történik (6.1 ábra). A nyomatékvektort kettős nyílheggyel jelöljük és a nyilat a hajlítás síkjára merőlegesen ábrázoljuk, úgy, hogy ha a nyílheggyel szemben állunk, akkor a nyomaték az óramutató járásával egyezően forgat. A nyomatékvektort felülvonással szokás ellátni. A nyomatékvektorhoz tartozó nyomaték iránya bal kézzel jól modellezhető (6.2 ábra).

6.1 Rugalmas anyagú tartók egyszerű, egyenes hajlítása. A feszültségek meghatározása

Az első fejezetben (Bevezetésben) felsorolt feltételezésekkel összhangban homogén és izotróp anyagú rudakkal foglalkozunk, amelyek a hajlítás során rugalmasan viselkednek és így érvényes rájuk a Hooke-törvény. A rudakra nem hat nyíróerő. Feltételezzük továbbá, hogy a vizsgált szerkezetek egyenestengelyű, prizmatikus rudak. A keresztmetszet rendelkezik szimmetriatengellyel és a hajlítónyomaték a szimmetriasíkban működik (6.3/a ábra). Ez a szimmetriasík a terhek síkja, azaz a hajlítás síkja.



6.3 ábra. a) egyszerű hajlítás a „b” szakaszon, b) a geometriai tengelyre merőleges, sík keresztmetszetek.

A hajlítás problémájával már Leonardo da Vinci és Galileo Galilei is foglalkozott, de az elmélet kiforrott formában 1750 körül vált ismertté, amikor Daniel Bernoulli korábbi munkájára támaszkodva Leonhard Euler levezette és megoldotta a hajlított gerenda differenciálegyenletét.

Bernoulli megfigyelései szerint (6.3/b ábra):

1) a hajlított rúd eredetileg sík keresztmetszetei az alakváltozás után is síkok maradnak,

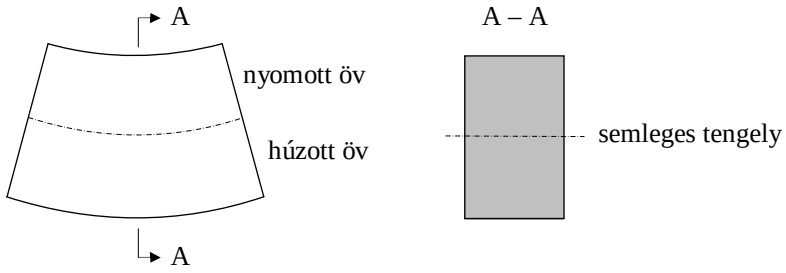
2) a rúdtengelyre merőleges síkok az alakváltozás után is merőlegesek lesznek a meggör-

bült rúdtengelyre (ez utóbbi megfigyelés Navier-féle hipotézisként is ismert).

A megfigyelésekből az alábbi következtetések vonhatók le:

1) ha a keresztmetszetek síkok, akkor biztosan lesznek húzott és nyomott szálak, illetve zérus megnyúlású helyek, ahol $\varepsilon = 0$. Ez a *semleges tengely* (6.4 ábra).
2) ha a keresztmetszetek merőlegesek maradnak a rúdtengelyre, akkor nincs szögtorzulás, és a (4.2) összefüggésből az következik, hogy nem keletkezik nyírófeszültség sem:

$$\gamma = 0 \quad \rightarrow \quad \tau = G\gamma \quad \rightarrow \quad \tau = 0$$



6.4 ábra. Hajlított rúdszakasz.

A hajlított rúd vizsgálata során két kérdés merül fel:

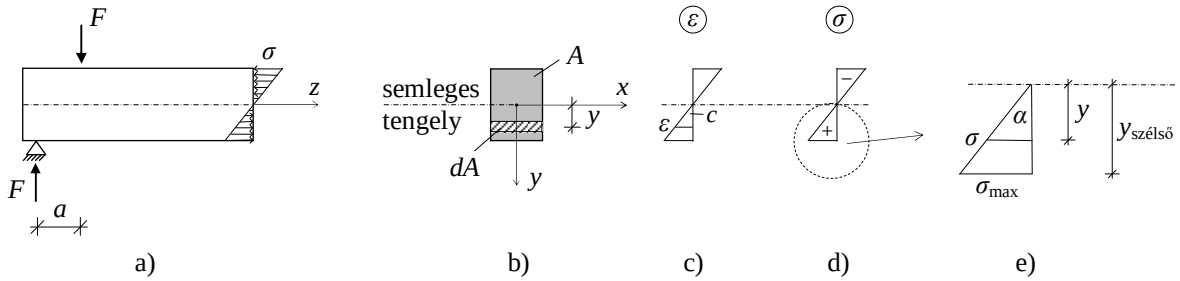
1) Hol zérus a megnyúlás (és ezzel együtt a normálfeszültség), vagyis hol van a semleges tengely?
2) Mekkorák a normálfeszültségek?

E kérdések megválaszolása céljából tekintsük ismét a 6.3 ábrán vázolt hajlított rudat. A rudat a vizsgált keresztmetszetben kettévágjuk. Vizsgáljuk a rúd baloldali részének egyensúlyát (6.5/a ábra).

Mivel a keresztmetszetek az alakváltozás után is síkok maradnak, a rúd hosszanti szálainak ε hosszváltozása arányos az – egyelőre ismeretlen helyen lévő – semleges tengelytől való y távolsággal (6.5/c ábra), vagyis felírható az

$$\varepsilon = cy$$

összefüggés, ahol c egy konstans.



6.5 ábra. a) hajlított rúd baloldali része, b) keresztmetszet, c) ε-ábra, d) σ-ábra, e) σ-ábra semleges tengely alatti része kinagyítva.

A fenti összefüggés felhasználásával a Hooke-törvény ($\sigma = E\varepsilon$) a

$$\sigma = Ecy$$

alakra hozható. Innen átrendezés után az

$$Ec = \frac{\sigma}{y}$$

összefüggéshez jutunk. Mivel E és c is konstans, a σ/y tört is konstans. A 6.5/e ábra tanúsága szerint

$$\tan\alpha = \frac{\sigma}{y}$$

és ezzel bebizonyítottuk, hogy – az ε-ábra mellett – a σ-ábra (6.5/d ábra) is lineáris.

Most visszatérünk a fent feltett két kérdésre, nevezetesen, hogy hol van a semleges tengely és mekkorák a feszültségek.

A rendelkezésünkre álló három egyensúlyi egyenlet segítségével vizsgáljuk az elmetszett rúdrész egyensúlyát (6.5/a ábra). (A $\Sigma F_{y,i} = 0$ függőleges vetületi egyenlet automatikusan teljesül.) A z tengelyre vonatkozó $\Sigma F_{z,i} = 0$ vetületi egyenlet szerint

$$\int_{(A)} \sigma dA = \int_{(A)} Ecy dA = Ec \int_{(A)} y dA = 0$$

(ahol figyelembe vettük, hogy $\sigma = Ecy$, majd az integráljel elé kiemeltük az Ec konstanst). Mivel az Ec szorzat nem lehet zérus, innen azt kapjuk, hogy

$$\int_{(A)} y dA = 0$$

Ez a keresztmetszet statikai nyomatéka a semleges tengelyre (6.5/b ábra). A keresztmetszet statikai nyomatéka akkor zérus, ha a súlyponti tengelyre írjuk fel. Ezek szerint a semleges tengely a keresztmetszet (jelen esetben x) súlyponti tengelyével azonos.

A semleges tengely helyének ismeretében most már foglalkozhatunk a normálfeszültségek meghatározásával. A rúd baloldali részének nyomatéki egyensúlyát a semleges tengelyre felírt $\Sigma M_i = 0$ egyenlet fejezi ki:

$$\int_{(A)} y\sigma dA - Fa = 0$$

A fenti egyenletben $Fa = M_x$.

Ha az integráljel mögött szorzunk és osztunk y-nal, majd az integráljel elé kiemeljük a σ/y törtet (amiről a fentiekben bebizonyítottuk, hogy konstans), a

$$\frac{\sigma}{y} \int_{(A)} y^2 dA = M_x$$

összefüggéshez jutunk. Mivel az integrál-kifejezés a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka az x tengelyre

$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA$$

a normálfeszültség meghatározására szolgáló képlet a következő egyszerű alakban adható meg:

$$\sigma(y) = \pm \frac{M_x}{I_x} y \tag{6.1}$$

A maximális feszültség meghatározásához a szélsőszál-távolsággal kell számolni (6.5/e ábra):

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_x}{I_x} y_{\text{szélső}} \tag{6.2}$$

6.2 Keresztmetszeti tényezők

A gyakorlati számítások során fontos szerepet játszhat a

$$W = \frac{I}{f}$$

összefüggéssel definiált keresztmetszeti tényező, ahol I a keresztmetszet súlyponti tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka és f a súlyponti tengelyre merőleges szélsőszál-távolság. A keresztmetszeti tényező alkalmazásával a maximális feszültség meghatározására levezetett (6.2) összefüggés a

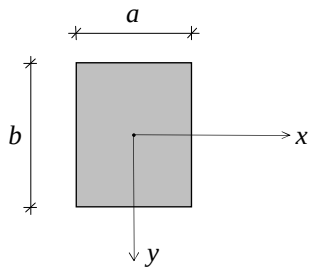
$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_x}{W_{\min}} \tag{6.3}$$

alakban írható, ahol $W_{\min}$ a keresztmetszet kisebbik keresztmetszeti tényezője (amelyet a nagyobbik szélsőszál-távolsággal számolunk ki). Itt is kiemeljük annak fontosságát, hogy a méretezés során a keresztmetszeti tényező kisebbik értékére ($W_{\min}$) van szükség. – Méretezéssel részletesen a 6.4 pontban foglalkozunk.

A keresztmetszeti tényező alkalmazása különösen előtérbe kerülhet tervezéskor, ha a tehetetlenségi nyomaték és a szélsőszál távolsága ismeretlen. Ilyen esetben célszerű kettejük hányadosát, a keresztmetszeti tényezőt ismeretlennek tekinteni. Érdemes a keresztmetszeti tényezővel dolgozni akkor is, amikor a tehetetlenségi nyomaték értéke nem áll rendelkezésre és/vagy nehezen meghatározható, viszont a keresztmetszeti tényező (például táblázatos formában) a tervező rendelkezésére áll. Ilyen gyakorlati eset például az idomacélok esete, amelyek keresztmetszeti tényezői táblázatokban (például a SEGÉDLETEK-ben) megtalálhatók.

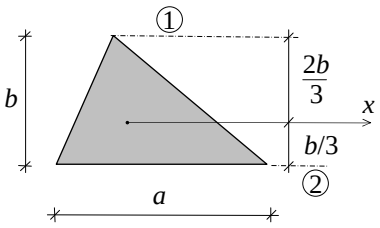
A következőkben meghatározzuk néhány jellegzetes alakú keresztmetszet keresztmetszeti tényezőjét.

Téglalap



$$I_x = \frac{ab^3}{12} \qquad W_x = \frac{I_x}{y} = \frac{\frac{ab^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{ab^2}{6}$$

Háromszög

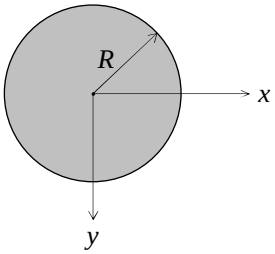


$$I_x = \frac{ab^3}{36}$$

$$W_{x_1} = \frac{I_x}{f_1} = \frac{\frac{ab^3}{36}}{\frac{2b}{3}} = \frac{ab^2}{24} \; (= W_{\min})$$

$$W_{x_2} = \frac{I_x}{f_2} = \frac{\frac{ab^3}{36}}{\frac{b}{3}} = \frac{ab^2}{12} \; (> W_{x_1})$$

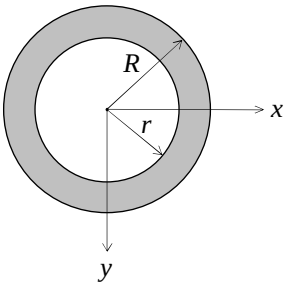
Kör



$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$W_x = W_y = \frac{I}{R} = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{R} = \frac{\pi R^3}{4}$$

Körgyűrű



$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi r^4}{4}$$

$$W_x = W_y = \frac{I}{R} = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{4R}$$

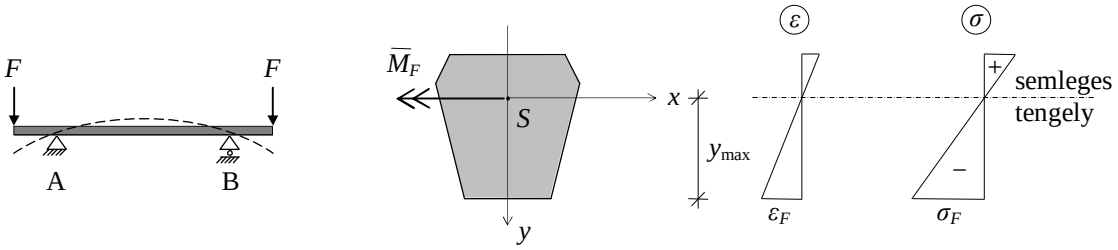
6.3 Rugalmas-képlékeny anyagú tartók egyszerű, egyenes hajlítása

Továbbra is egyenestengelyű, prizmatikus rudakkal foglalkozunk, melyek anyaga homogén és izotróp, de most azt tételezzük fel, hogy a tartó anyaga ideálisan rugalmas-képlékeny (2.5 ábra). A rúdra nem hat nyíróerő és a nyomaték a szimmetriasíkban működik.

Vizsgáljuk meg, hogy növekvő külső hajlítónyomaték esetében hogyan alakul a belső hajlítónyomaték (és a tartó teherbírása) és hogyan változik a normálfeszültségek megoszlása a 6.6/a ábrán vázolt tartó *AB* szakaszán.

Amíg az idealizált σ–ε diagram rugalmas szakaszán járunk (OF szakasz a 2.5 ábrán), addig az ε–ábrát és a σ–ábrát lineáris egyenes jellemzi (6.6 ábra). Rugalmas viselkedés mellett a terhelés addig növelhető, amíg a feszültség a keresztmetszet távolabbi szélső szálában eléri a σ_F folyási határt. Ez az első fázis. A felső (húzott) és az alsó (nyomott) keresztmetszet-részt a semleges tengely választja el egymástól. Az ehhez a fázishoz tartozó nyomatékot a rugalmas folyási határnyomatéknak tekintjük és M_F-el jelöljük. Értéke a (6.3) képlet alkalmazásával:

$$M_F = W_x \sigma_F \tag{6.4}$$

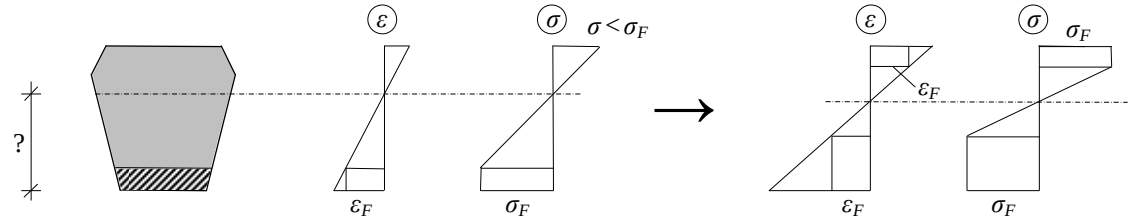


a) egyszerű hajlítás a tartó *AB* szakaszán b) keresztmetszet c) ε-ábra d) σ-ábra

6.6 ábra. A hajlítás I. fázisa.

Itt jegyezzük meg, hogy a méretezés során (rugalmas viselkedés esetén) a σ_H határfeszültséggel kell számolni. Rugalmas-képlékeny viselkedés elméleti vizsgálatakor szokás viszont a σ_F folyási határral dolgozni az esetleges későbbi összehasonlíthatóság érdekében. A σ_H határfeszültség a σ_F folyási határból a biztonsági tényezők figyelembevételével származtatható, a mindenkori szabványelőírások szerint.

Mivel a tartónk rugalmas-képlékeny módon viselkedik, a külső teher tovább növelhető. A feszültség ugyan a folyási határon túl nem nő – nem nőhet – de a már megfolyt szélső szál mellett egyre több szál folyik meg (6.7/c ábra). Ezen szálak fajlagos hosszváltozása nő (6.7/b ábra). Ez vizsgálatunk második fázisa, amikor a keresztmetszet egy része – de nem az egész keresztmetszet – képlékenyen viselkedik. Megváltozik a húzott és nyomott részeket elválasztó vonal helye, de nem tudjuk, hogy hol van (6.7/a ábra).



a) keresztmetszet b) ε-ábra c) σ-ábra d) növelt terheléshez tartozó ε- és σ-ábra

6.7 ábra. A hajlítás II. fázisának két jellegzetes pillanata.

Mivel a keresztmetszetnek még van olyan része amely rugalmasan viselkedik, a terhelés tovább növelhető. A II. fázis jellegzetes pillanatához érkezünk, amikor a keresztmetszet másik szélső szála is megfolyik. A terhelés még ekkor is tovább növelhető és a másik szélső szál mellett is egyre több szál folyik meg (6.7/d ábra).

A terhelés egészen addig növelhető, amíg a teljes keresztmetszet képlékeny állapotba kerül. Ezt a III. fázis (6.8 ábra). A felső húzott és alsó nyomott övet ekkor elválasztó vonalat *határvonalnak* nevezzük. Először ennek helyét határozzuk meg. A húzó és nyomófeszültségek H és N eredője a húzott és nyomott keresztmetszet-rész súlypontjában működik. A hatásvonalukkal párhuzamos tengelyre vonatkozó $\Sigma F_i = 0$ vetületi egyenlet szerint

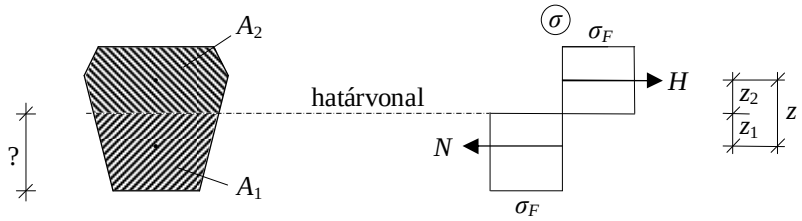
$$H - N = 0$$

vagyis

$$A_2\sigma_F = A_1\sigma_F$$

ahonnan azt kapjuk, hogy

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$$



a) keresztmetszet b) σ-ábra

6.8 ábra. A hajlítás III. fázisa: képlékeny hajlítás.

A határvonal tehát a keresztmetszetet két egyenlő nagyságú területre osztja. Ebből a feltételből a határvonal helye mindig meghatározható.

A σ-ábra alapján a határvonalra felírt nyomaték a képlékeny határnyomaték, más néven a *törőnyomaték*:

$$Hz_2 + Nz_1 = A_2\sigma_F z_2 + A_1\sigma_F z_1 = \sigma_F (A_1 z_1 + A_2 z_2)$$

A zárójeles kifejezés az A_1 és A_2 területrészek statikai nyomatéka a határvonalra. A törőnyomaték így az

$$M_T = \sigma_F \left(|S_1| + |S_2| \right) \tag{6.5}$$

alakban adható meg, ahol S_1 és S_2 a két területrész statikai nyomatéka.

A törőnyomaték meghatározása történhet a belső erők segítségével is (6.8/b ábra). A húzófeszültségek H eredője, vagy a nyomófeszültségek N eredője hatásvonalára felírt nyomatéki egyenlet szintén a törőnyomaték értékét adja:

$$M_T = Hz = Nz = \sigma_F \frac{A}{2} z \tag{6.6}$$

A belső erők segítségével természetesen a rugalmas viselkedés esetében is meghatározhatjuk a nyomatékot, ami ekkor a keresztmetszet rugalmas határnyomatéka.

Fentiek alapján nyilvánvaló, hogy tartóink nagyobb teherbírással rendelkeznek, ha képesek rugalmas-képlékeny viselkedésre. A megnövekedett teherbírást szokás az

$$\frac{M_T}{M_F}$$

hányadossal, a törőnyomaték és a rugalmas folyási határnyomaték hányadosával jellemezni. Szemléletesebb mutatót kapunk a

$$\left(\frac{M_T}{M_F}-1\right)100$$

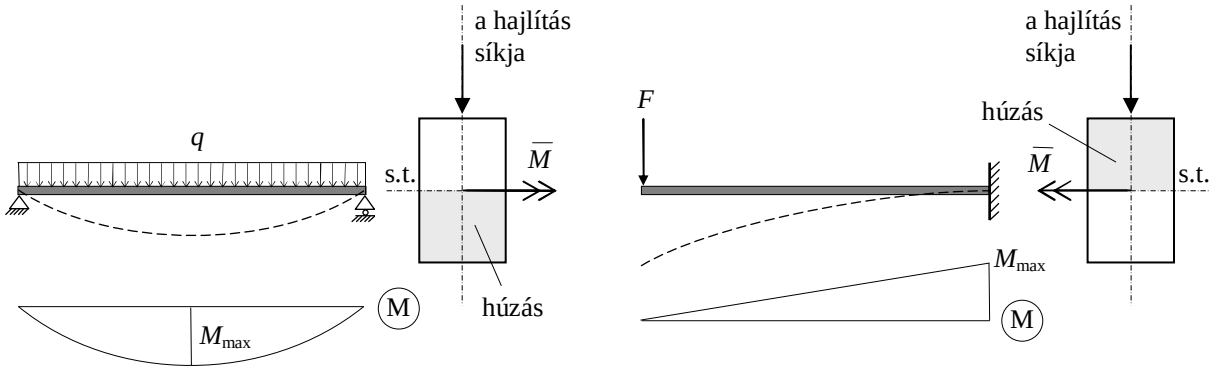
kifejezés segítségével, ami a teherbírás-növekedést százalékban adja meg.

6.4 Gyakorlati alkalmazás

Először útmutatást adunk a nyomatékvektor irányának megállapításával kapcsolatban, majd összefoglaljuk a méretezéssel kapcsolatos tudnivalókat, végül a gyakorlati számítások illusztrálása céljából hét számpéldát mutatunk be.

A nyomatékvektor irányát – hogy a hajlítás síkjára merőlegesen jobbra vagy balra mutat – szemléletből állapítjuk meg, úgy, hogy szembenézve a nyomatékvektor nyilával, az óramutató járásával egyező forgatással a keresztmetszet adott pontjában a nyomatékábrának megfelelő (húzó-, nyomó-) feszültség keletkezzen. Húzás esetén ez azt jelenti, hogy a forgatás hatására a keresztmetszet húzott szálai próbáljanak a rajz síkjából kiemelkedni. A 6.9 ábra a két lehetséges helyzetet mutatja be, amikor a nyomatékvektort a hajlítás síkjára merőlegesen jobbra, illetve balra kell berajzolni.

A 6.9/a ábrán vázolt kéttámaszú tartó esetében a keresztmetszet alsó, semleges tengely alatti része húzott. A jó irányban berajzolt nyomatékvektor esetében a keresztmetszet semleges tengely alatti pontjai próbálnak a nyomatékvektor körüli óramutató járásával egyező forgatás hatására kiemelkedni a rajz síkjából. Ez jobbra mutató vektor esetén valósul meg.



a) húzás alul: M-vektor jobbra mutat

b) húzás felül: M-vektor balra mutat

6.9 ábra. A nyomatékvektor iránya.

A 6.9/b ábrán vázolt konzoltartó esetében a keresztmetszet felső része húzott. A helyesen berajzolt, balra mutató nyomatékvektorral szembe nézve és az óramutató járásával egyezően forgatva a keresztmetszet felső részének pontjai próbálnak a rajz síkjából kiemelkedni.

6.4.1 Hajlított tartók méretezése

A hajlított tartók méretezése során általában rugalmas viselkedést tételezünk fel. Bizonyos feltételek teljesülése esetén lehetőség van a keresztmetszetek képlékeny méretezésére is. Ezeket a feltételeket a vonatkozó szabványok tartalmazzák. A szabványok előírásainak ismerete és figyelembevétele azért is fontos, mert bizonyos esetekben különböző (módosító) tényezők alkalmazását is megkövetelhetik, amelyekkel itt nem foglalkozunk.

A rugalmas anyagú tartók *ellenőrzése* a gyakorlatban kétféleképpen történhet. A feszültség-összehasonlításhoz közvetlenül alkalmazhatjuk a (6.2) összefüggést. Ha a

$$\sigma_H \geq \frac{M_M}{I_x} y_{\text{szélső}} = \sigma_M \tag{6.7}$$

feltétel teljesül, akkor a tartó megfelel. A képletben σ_H a tartó anyagára jellemző határfeszültség, M_M a tartó mértékadó (abszolút értelemben legnagyobb) nyomatéka és $y_{\text{szélső}}$ a két szélsőszál-távolság közül a nagyobb. A határfeszültség dimenziója N/mm^2, illetve MPa. A (6.7) feltétel átírható a

$$\sigma_H \geq \frac{M_M}{W_{\min}} = \sigma_M \tag{6.8}$$

alakba, ahol

$$W_{\min} = \frac{I_x}{y_{\max}} \tag{6.9}$$

a keresztmetszeti tényező [mm^3].

Az ellenőrzés másik lehetséges formája az igénybevétel-összehasonlítás. Az ehhez szükséges képletet a (6.8) képlet átrendezésével kapjuk. A tartó megfelel, ha az

$$M_H = W_{\min}\sigma_H \geq M_M \tag{6.10}$$

feltétel teljesül.

Ha a tartó nem felel meg, több lehetőséget is figyelembe vehetünk. Segíthet a keresztmetszet növelése, vagy jobb minőségű anyag (→ nagyobb határfeszültség) alkalmazása. Esetenként az igénybevételek csökkentése is megoldható.

Rugalmas anyagú tartók *tervezése* során a (6.7) és (6.10) összefüggések is alkalmazhatók. Tervezéskor az egyenlőtlenségben ismeretlen van, így a (6.10) képlet alkalmazásával egyszerűbben jutunk a megoldáshoz. Ha a keresztmetszet az ismeretlen, akkor a

$$W_{\min} \geq \frac{M_M}{\sigma_H} \tag{6.11}$$

ha az anyagminőség az ismeretlen, akkor a

$$\sigma_H \geq \frac{M_M}{W_{\min}} \tag{6.12}$$

egyenlőtlenséget használjuk. Nem túl gyakori eset, de előfordulhat az is, hogy a tervezési folyamat során a tartó által elviselhető legnagyobb nyomatékra vagyunk kíváncsiak, hogy azon keresztül „megtervezzük” a legnagyobb terhet vagy a tartó fesztávolságát. Ilyen esetekben a (6.10) összefüggés közvetlenül alkalmazható.

Némileg eltérő a helyzet képlékeny viselkedésű tartók méretezése során. Ekkor a feszültség-összehasonlítás módszere nem alkalmazható és csak a nyomaték-összehasonlítás módszere áll rendelkezésre. Mind az ellenőrzésnél, mind pedig a tervezésnél az

$$M_T \geq M_M \tag{6.13}$$

feltételnek kell teljesülni, ahol M_T a törőnyomaték, a (6.5) vagy (6.6) képlet szerint.

6.4.2 Gyakorló feladatok

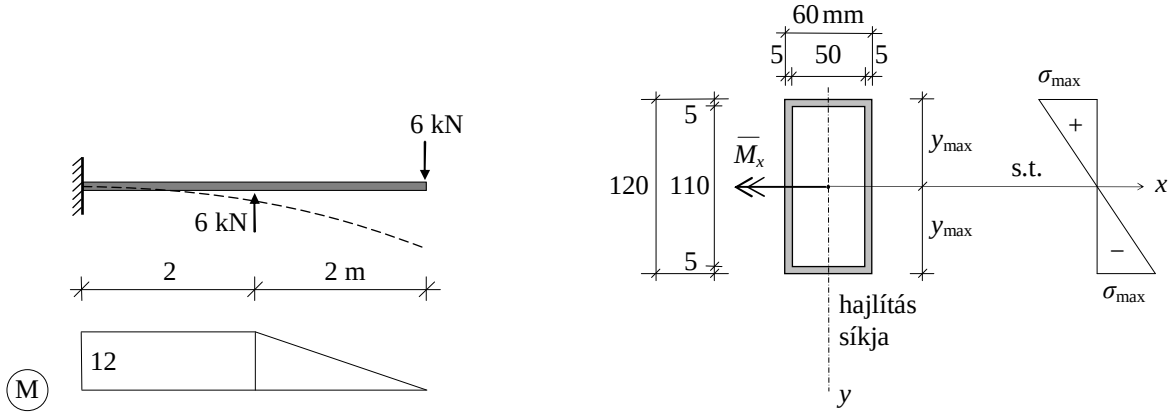
Az ebben a fejezetben tárgyaltak gyakorlati alkalmazását végül hét számpélda segítségével mutatjuk be.

1. Rugalmas viselkedésű konzoltartó

Határozzuk meg a 6.10 ábrán vázolt konzoltartó maximális normálfeszültségét rugalmas viselkedést feltételezve.

A nyomatékábra és a tartó alakváltozása (szaggatott vonallal ábrázolva a 6.10/a ábrán) azt mutatja, hogy a tartó tengelye mentén végig – a maximális nyomaték helyén is – a keresztmetszet felső része húzott. A nyomatékvektort így a hajlítás síkjára merőlegesen *balra* kell berajzolni. Ekkor a nyomatékvektorral szembe nézve és az óramutató járásával egyezően forgatva a keresztmetszet felső – semleges tengely felett lévő – szálai próbálnak a rajz síkjából kiemelkedni (6.10/b ábra).

A maximális normálfeszültség értékét a (6.2) képlet segítségével határozzuk meg.



a) tartó az M-ábrával b) keresztmetszet c) σ-ábra

6.10 ábra. Konzoltartó rugalmas hajlítása.

A nyomaték maximális értéke $M_{\max}$ = 12 kNm (6.10/a ábra), a tehetetlenségi nyomaték

$$I_x = \frac{60 \cdot 120^3}{12} - \frac{50 \cdot 110^3}{12} = 3.09 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

és a maximális szélsőszál-távolság $y_{\max}$ = 60 mm. A maximális feszültség értéke így

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_x}{I_x} y_{\text{szélső}} = \pm \frac{12 \cdot 10^6}{3.09 \cdot 10^6} 60 = \pm 233.0 \text{ N/mm}^2$$

2. Rugalmas viselkedésű kéttámaszú tartó

Határozzuk meg a 6.11 ábrán vázolt konzolos kéttámaszú tartó maximális normálfeszültségét rugalmas viselkedést feltételezve.

A nyomatékábra és a tartó alakváltozása (szaggatott vonallal ábrázolva a 6.11/a ábrán) azt mutatja, hogy a tartó tengelye mentén végig – a maximális nyomaték helyén is – a

keresztmetszet felső része húzott. A nyomatékvektort így a hajlítás síkjára merőlegesen *balra* kell berajzolni. Ekkor a nyomatékvektorral szembe nézve és az óramutató járásával egyezően forgatva a keresztmetszet felső – semleges tengely felett lévő – szálai próbálnak a rajz síkjából kiemelkedni (6.11/b ábra).

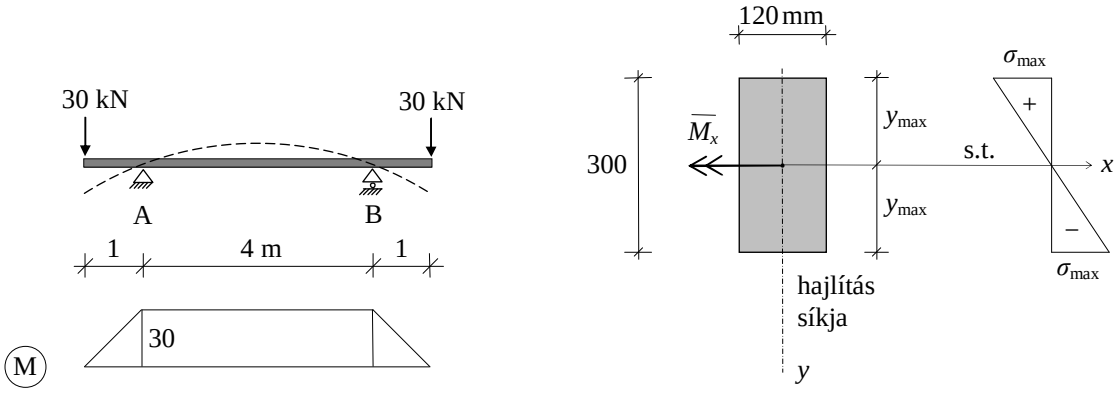
A maximális normálfeszültség értékét a (6.2) képlet segítségével határozzuk meg.

A nyomaték maximális értéke $M_{\max} = 30$ kNm (6.11/a ábra), a keresztmetszeti tényező:

$$W = \frac{120 \cdot 300^2}{6} = 1.8 \cdot 10^6 \,\text{mm}^3$$

A maximális feszültség értéke így

$$\sigma_{\max} = \frac{M_M}{W_{\min}} = \frac{30 \cdot 10^6}{1.8 \cdot 10^6} = \pm 16.7 \ \text{N/mm}^2$$

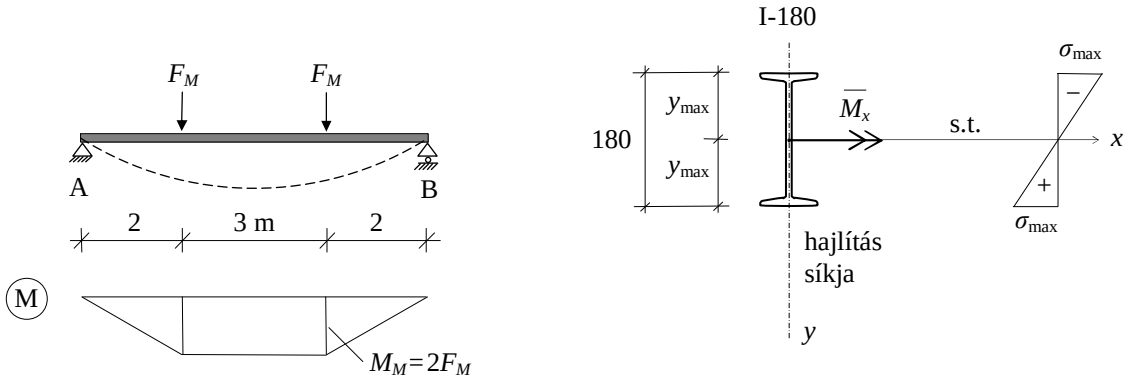


a) tartó az M-ábrával b) keresztmetszet c) σ-ábra

6.11 ábra. Kéttámaszú tartó rugalmas hajlítása.

3. Rugalmas viselkedésű I-tartó terhelhetősége

Mekkora F_M erőkkel terhelhető a 6.12 ábrán vázolt kéttámaszú tartó rugalmas viselkedést feltételezve? Az I-180-as gerenda határfeszültsége $\sigma_H = 235$ N/mm^2, a keresztmetszeti tényező $W_x = 161000$ mm^3.



a) tartó M-ábrával b) keresztmetszet c) σ-ábra

6.12 ábra. Kéttámaszú tartó rugalmas hajlítása.

A nyomatékábra és a tartó alakváltozása (szaggatott vonallal ábrázolva a 6.12/a ábrán) azt mutatja, hogy a tartó tengelye mentén végig – a maximális nyomaték helyén is – a keresztmetszet alsó része húzott. A nyomatékvektort így a hajlítás síkjára merőlegesen *jobbra* kell berajzolni. Ekkor a nyomatékvektorral szembe nézve és az óramutató járásával egyezően forgatva a keresztmetszet alsó – semleges tengely alatt lévő – szálai próbálnak a rajz síkjából kiemelkedni (6.12/b ábra).

A feladat megoldásához a (6.10) összefüggést használjuk. A mértékadó nyomaték (6.12/a ábra):

$$M_M = 2F_M$$

A tartó hosszméretei méterben vannak megadva a 6.12/a ábrán és ebben a lépésben rögzítsük, hogy a két (egyelőre ismeretlen) koncentrált erő dimenziója kN. Ebből az következik, hogy a fenti mértékadó nyomaték dimenziója kNm és ennek megfelelően a (6.10) összefüggés alkalmazásánál a határnyomaték értékét is kNm dimenzióban kell behelyettesíteni:

$$161000 \cdot 235 \frac{1}{10^6} \geq 2F_M$$

A végeredmény (F_M) dimenziója így kN lesz. Az összefüggést átrendezve:

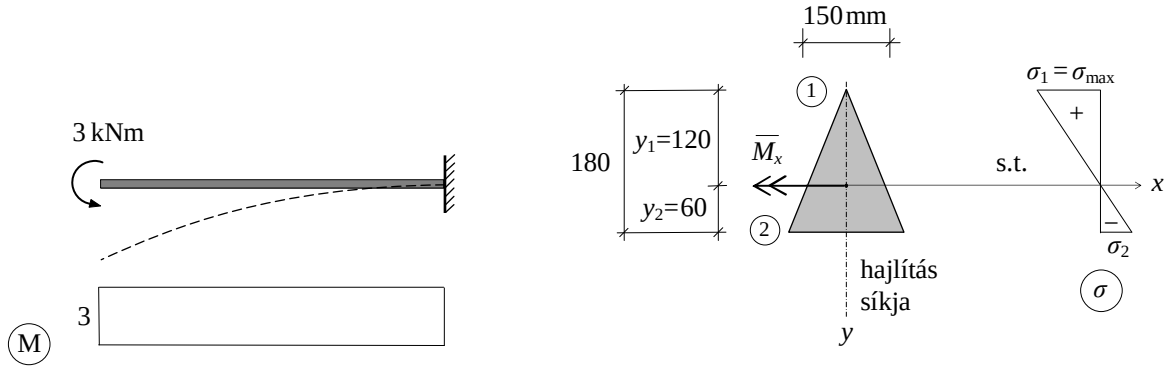
$$F_M \leq 18.9 \text{ kN}$$

vagyis a tartót terhelő két koncentrált erő értéke nem haladhatja meg a 18.9 kN értéket.

4. Rugalmas viselkedésű háromszög-keresztmetszetű tartó maximális feszültsége

Határozzuk meg a 6.13/a ábrán vázolt konzoltartó maximális normálfeszültségeit rugalmas viselkedést feltételezve.

A nyomatékábra és a tartó alakváltozása (szaggatott vonallal ábrázolva a 6.13/a ábrán) azt mutatja, hogy a tartó tengelye mentén végig – a maximális nyomaték helyén is – a keresztmetszet felső része húzott. A nyomatékvektort így a hajlítás síkjára merőlegesen *balra* kell berajzolni. Ekkor a nyomatékvektorral szembe nézve és az óramutató járásával egyezően forgatva, a keresztmetszet felső – semleges tengely felett lévő – szálai próbálnak a rajz síkjából kiemelkedni (6.13/b ábra).



a) tartó az M-ábrával b) keresztmetszet c) σ-ábra

6.13 ábra. Konzoltartó rugalmas hajlítása.

A keresztmetszeti tényezők kiszámításához szükség van a tehetetlenségi nyomaték értékére:

$$I_x = \frac{ab^3}{36} = \frac{150 \cdot 180^3}{36} = 24.3 \cdot 10^6 \,\mathrm{mm}^4$$

Az 1. és 2. szélsőszálhoz tartozó keresztmetszeti tényezők értéke így:

$$W_{x,1} = W_{\min} = \frac{I_x}{y_1} = \frac{24.3 \cdot 10^6}{120} = 202500 \,\mathrm{mm}^3 \quad \text{és} \quad W_{x,2} = \frac{I_x}{y_2} = \frac{24.3 \cdot 10^6}{60} = 405000 \,\mathrm{mm}^3$$

A szélsőszál-feszültségek értéke ezekkel már meghatározható:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{M_M}{W_{\min}} = \frac{3 \cdot 10^6}{2.025 \cdot 10^5} = 14.8 \,\mathrm{N/mm}^2 \quad \text{és} \quad \sigma_2 = \frac{M_M}{W_{x,2}} = \frac{3 \cdot 10^6}{4.05 \cdot 10^5} = -7.4 \,\mathrm{N/mm}^2$$

5. Téglalap keresztmetszet rugalmas folyási határnyomatéka és törőnyomatéka

Határozzuk meg a 6.14 ábrán vázolt keresztmetszet rugalmas folyási határnyomatékát és törőnyomatékát. Az ilyen egyszerű keresztmetszet esetében azonnal rendelkezésre áll a belső erők nagysága és a belső erők karja, így könnyen alkalmazható a belső erőkre épülő számítás.

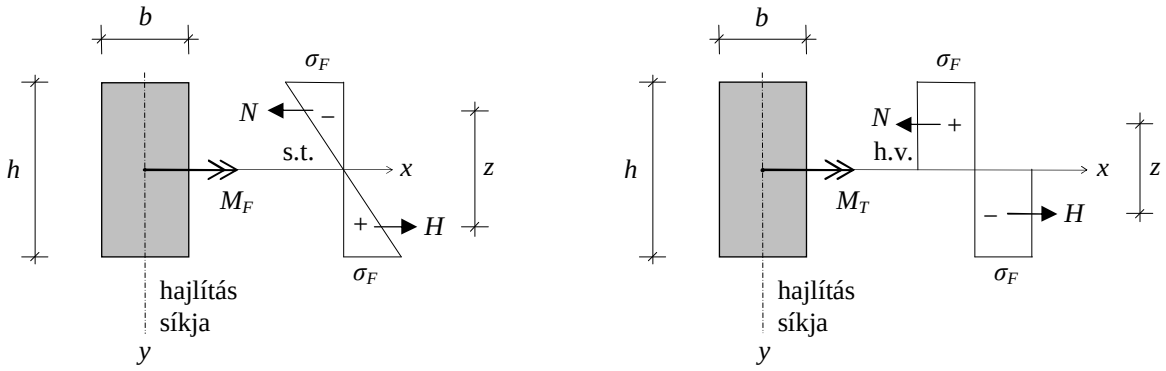
A rugalmas folyási határnyomaték számításakor abból indulunk ki, hogy a keresztmetszet szélső szálában a feszültség eléri a σ_F folyási határt. A 6.14/a ábra alapján a belső erők értéke

$$N = H = \sigma_F \frac{h}{2} b \frac{1}{2} = \sigma_F \frac{hb}{4}$$

és a belső erők karja $z = 2h/3$, így a rugalmas folyási határnyomaték

$$M_F = Nz = Hz = \sigma_F \frac{hb}{4} \frac{2h}{3} = \frac{bh^2}{6} \sigma_F$$

A fenti képletben szereplő $bh^2/6$ tényező azonos a W keresztmetszeti tényezővel.



a) rugalmas állapot b) képlékeny állapot

6.14 ábra. Téglalap keresztmetszet.

A törőnyomaték számításakor abból indulunk ki, hogy a feszültség a keresztmetszet minden szálában eléri a σ_F folyási határt. A 6.14/b ábra alapján a belső erők értéke

$$N = H = \sigma_F \frac{h}{2} b = \sigma_F \frac{hb}{2}$$

és a belső erők karja $z = h/2$, így a törőnyomaték

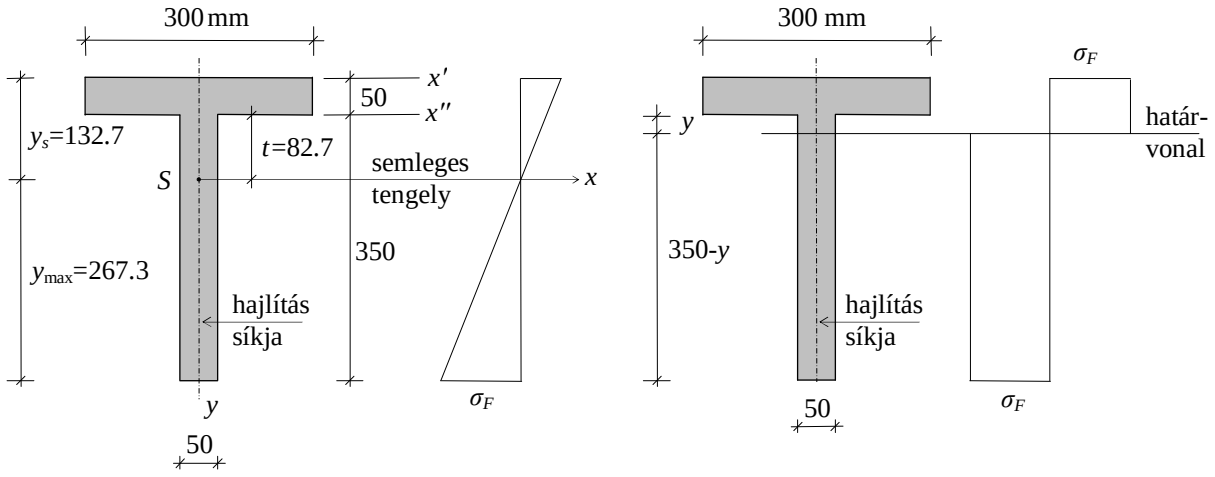
$$M_T = Nz = Hz = \sigma_F \frac{hb}{2} \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{4} \sigma_F$$

Összehasonlítási célból szokás kiszámítani a törőnyomaték és a rugalmas folyási határnyomaték hányadosát:

$$\frac{M_T}{M_F} = \frac{\frac{bh^2}{4}\sigma_F}{\frac{bh^2}{6}\sigma_F} = 1.5$$

6. T-keresztmetszet rugalmas folyási határnyomatéka és törőnyomatéka

Határozzuk meg a 6.15 ábrán vázolt T-keresztmetszet rugalmas folyási határnyomatékát és törőnyomatékát. A σ_F folyási határfeszültség értékét adottnak tekintjük.



a) rugalmas állapot b) képlékeny állapot

6.15 ábra. T-keresztmetszet.

A rugalmas viselkedés esetén a semleges tengely helyét kell először meghatározni. Mivel a semleges tengely azonos a súlyponti tengellyel, első lépésben a súlypont helyét határozzuk meg:

$$y_s = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{300 \cdot 50 \cdot 25 + 350 \cdot 50 \cdot 225}{300 \cdot 50 + 350 \cdot 50} = 132.7 \text{ mm}$$

A súlypont helyének ismeretében kiszámíthatjuk a tehetetlenségi nyomaték értékét:

$$I_x = I_{x''} - At^2 = \frac{300 \cdot 50^3}{3} + \frac{50 \cdot 350^3}{3} - 32500 \cdot 82.7^2 = 5048 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

A (kisebbik) keresztmetszeti tényező:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{5048 \cdot 10^5}{267.3} = 1.889 \cdot 10^6 \,\mathrm{mm}^3$$

A rugalmas folyási határnyomatékot a (6.4) képlet szolgáltatja:

$$M_F = W_x \sigma_F = 1.889 \cdot 10^6 \sigma_F$$

A törőnyomaték meghatározásához szükség van a határvonal helyére. A 6.3 pontban megállapítottuk, hogy a határvonal a keresztmetszetet két egyenlő nagyságú területre osztja. Ezt a feltételt használjuk most fel a határvonal helyének meghatározására. A határvonal helyzetét rögzítő *y* távolság (6.15/b ábra) bevezetésével:

$$\frac{A}{2} = 300 \cdot 50 + 50y$$

Innen:

$$y = \frac{\frac{300 \cdot 50 + 350 \cdot 50}{2} - 300 \cdot 50}{50} = 25 \,\mathrm{mm}$$

A törőnyomatékot a (6.5) összefüggés szolgáltatja:

$$M_T = \sigma_F \left(|S_1| + |S_2| \right) = \sigma_F \left(300 \cdot 50 \cdot 50 + \frac{50 \cdot 25^2}{2} + \frac{50 \cdot 325^2}{2}\right) = 3.406 \cdot 10^6 \sigma_F$$

A törőnyomaték és a rugalmas folyási határnyomaték hányadosa:

$$\frac{M_T}{M_F} = \frac{3.406 \sigma_F}{1.889 \sigma_F} = 1.8$$

vagyis a rugalmas folyási határnyomaték 80%-kal növelhető a teljes keresztmetszet képlékennyé válásáig, vagyis a képlékeny törés bekövetkeztéig.

Végül egy érdekes példán azt mutatjuk be, hogy a keresztmetszet növelése nem feltétlenül vezet nagyobb teherbíráshoz.

7. „Megerősített” tartó határnyomatéka

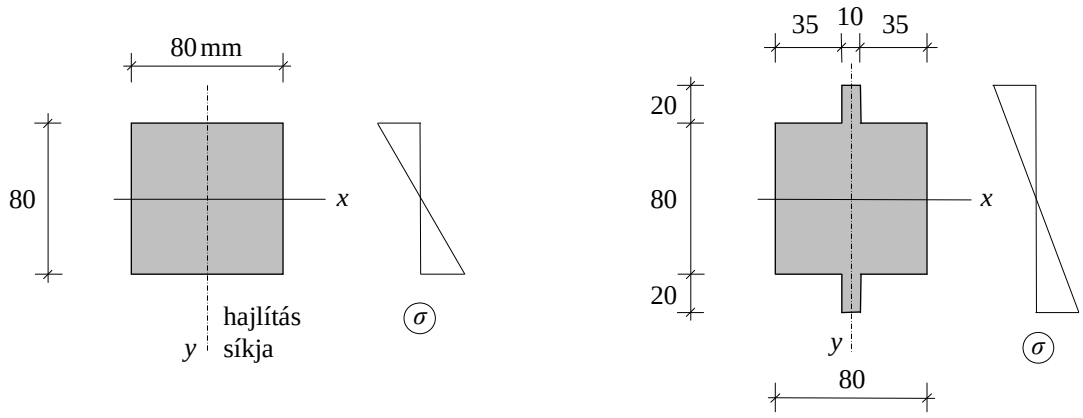
Nézzük meg, hogy hogyan változik egy adott keresztmetszetű tartó rugalmas nyomatéki teherbírása, ha a keresztmetszetet a 6.16 ábrán vázolt módon megnöveljük. A határfeszültség értéke σ_H = 20 N/mm^2.

Az eredeti tartó (6.16/a ábra) keresztmetszeti adatai:

$$A = 80 \cdot 80 = 6400 \,\mathrm{mm}^2, \qquad I_x = \frac{80 \cdot 80^3}{12} = 3413333 \,\mathrm{mm}^4, \qquad W_x = \frac{80 \cdot 80^2}{6} = 85333 \,\mathrm{mm}^3$$

A tartó határnyomatéka a (6.10) összefüggés szerint:

$$M_H = W_{\min} \sigma_H = 85333 \cdot 20 = 1706660 \,\mathrm{Nmm}$$



a) eredeti keresztmetszet b) megnövelt keresztmetszet

6.16 ábra. Rugalmas viselkedésű tartó.

Növeljük meg a keresztmetszetet a 6.16/b ábrán vázolt módon. A keresztmetszeti adatok a következők szerint változnak:

$$A = 80 \cdot 80 + 10 \cdot 20 \cdot 2 = 6800\,\text{mm}^2, \qquad I_x = \frac{70 \cdot 80^3}{12} + \frac{10 \cdot 120^3}{12} = 4426667\,\text{mm}^4$$

$$W_x = \frac{I_x}{y} = \frac{4426667}{60} = 73778\,\text{mm}^3$$

A „megerősített” keresztmetszet határnyomatéka:

$$M_H = W_{\min}\sigma_H = 73778 \cdot 20 = 1475560\,\text{Nmm}$$

Azt tapasztaljuk, hogy a 6.25%-os keresztmetszet-növelés 13.5%-os határnyomaték-csökkenéshez vezetett! Ennek az az oka, hogy bár a keresztmetszeti terület (és a tehetetlenségi nyomaték is) nőtt, a keresztmetszet szélsőszál-távolsága nagyobb arányban (50%-al) nőtt, ami kedvezőtlenül befolyásolta a névleges teherbírást.

A „megerősített” tartónk azért nem lett gyengébb, ugyanis ha az 1475560 Nmm nyomaték elérésekor tovább növeljük a terhet, akkor a két „fülszerű” megerősítés letörik és a terhelés tovább növelhető, egészen addig, amíg el nem érjük a 1706660 Nmm értéket...

7

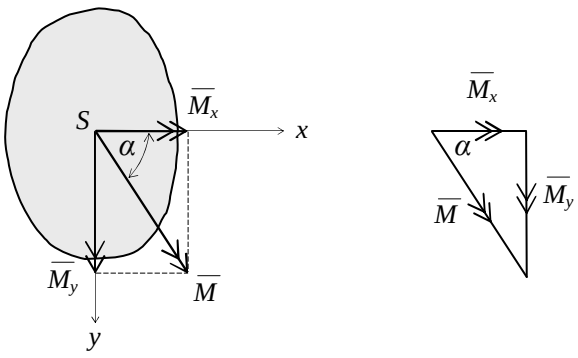
Ferde hajlítás

Továbbra is egyenestengelyű, prizmatikus rudakkal foglalkozunk, amelyek anyaga homogén és izotróp. Feltételezzük, hogy a ferde hajlítás során a rúd rugalmasan viselkedik, vagyis érvényes a Hooke-törvény. A vizsgált rudak keresztmetszete legalább egyszeresen szimmetrikus, amikor is a szimmetriatengely egyben főtengely is. A másik főtengely merőleges a szimmetriatengelyre.

Ferde hajlításról akkor beszélünk, ha a hajlítás síkja nem esik egybe a rúdtengely és az egyik tehetetlenségi főtengely által meghatározott síkkal. Az $\overline{M}$ nyomatékvektort ekkor felbontjuk a két főtengely irányába eső összetevőkre

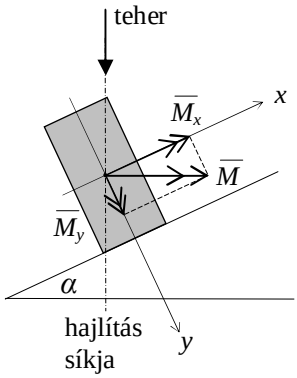
$$M_x = \left|\overline{M}\right| \cos\alpha \qquad \text{és} \qquad M_y = \left|\overline{M}\right| \sin\alpha \tag{7.1}$$

és a jelenséget szuperpozícióval két egyenes hajlításra vezetjük vissza (7.1 ábra). A nyomatékvektor nagyságát a nyomatékábráról állapítjuk meg ($M_{\max}$). A vektor mindig merőleges a hajlítás síkjára. Irányát szemléletből állapítjuk meg, úgy, hogy szembenézve a nyomatékvektor nyilával, az óramutató járásával egyező forgatással a keresztmetszet adott pontjában a nyomatékábrának megfelelő (húzó-, nyomó-) feszültség keletkezzen. (A nyomatékvektor irányának megállapítására részletes útmutatást a 6.4 pontban a 6.9 ábra segítségével adtunk.)



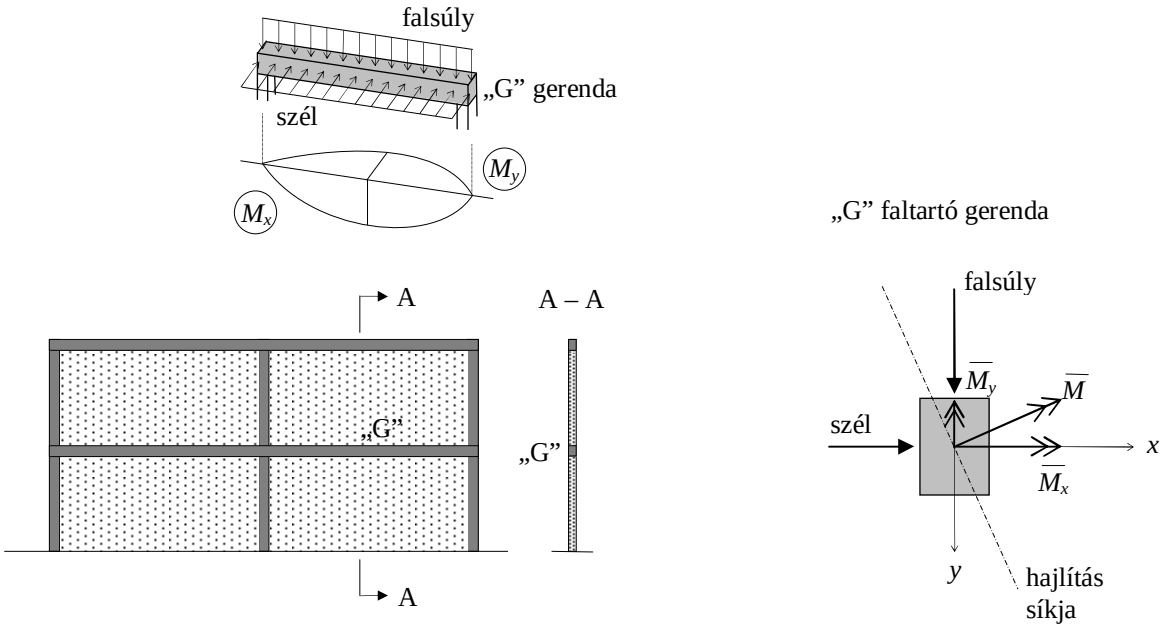
7.1 ábra. Ferde hajlítás.

A két talán leggyakrabban előforduló gyakorlati alkalmazás a szelemen és a faltartó. A szelemenek esetében úgy jelentkezik a ferde hajlítás, hogy a rúd általában ferde alátámasztáson támaszkodik, így a főtengelyek ferdék. A teher a függőleges síkban hat és a hajlítás síkja így nem esik egybe egyik tehetetlenségi főtengellyel sem (7.2 ábra). Az x és y főtengelyekhez képest „ferde” M nyomatékvektor felbontása eredményezi az M_x és M_y összetevőket.



7.2 ábra. A ferde hajlítás egyik gyakori esete: tetőszelemen.

A faltartók esetében a két főtengely általában vízszintes, illetve függőleges, de a hajlítás síkja ferde, mivel a vízszintes (szél)teherből származó M_y nyomaték és a függőleges (önsúly)teherből származó M_x nyomaték eredője ferde M nyomatékvektort eredményez (7.3 ábra).

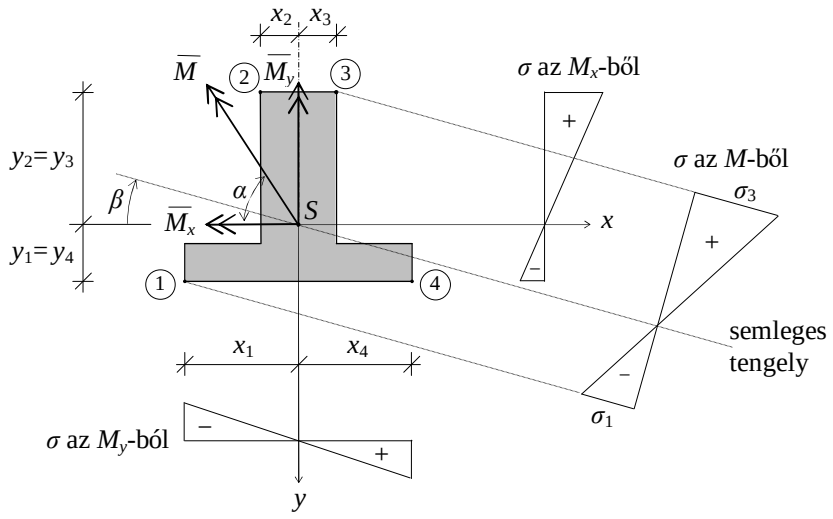


7.3 ábra. A ferde hajlítás másik gyakori esete: faltartó gerenda.

A ferde hajlítás során esetlegesen keletkező nyíróerők figyelembevételével ebben a fejezetben nem foglalkozunk. A nyíróerőkből származó feszültségek meghatározása a következő fejezet tárgya.

7.1 A feszültségek meghatározása

Tekintsük egy hajlított tartó a 7.4 ábrán vázolt egyszeresen szimmetrikus keresztmetszetét. A nyomatékvektor nem esik egybe egyik tehetetlenségi főtengellyel sem, így ferde hajlításról van szó. A nyomatékvektort a főtengelyek irányába eső két komponensre bontjuk és a feszültségek meghatározását az így keletkező két egyenes hajlítás szuperpozíciójával hajtjuk végre.



7.4 ábra. Normálfeszültségek ferde hajlításból.

Az egyenes hajlítás (6.1) képletét az M_x-re majd az M_y-ra alkalmazva megkapjuk a ferde hajlítás feszültségképletét:

$$\sigma_z = \pm\frac{M_x}{I_x}y \pm \frac{M_y}{I_y}x \tag{7.2}$$

A feszültségek értéke a négy sarokpontban:

$$\sigma_1 = -\frac{M_x}{I_x}y_1 - \frac{M_y}{I_y}x_1 = \sigma_{\max}^{(-)}$$

$$\sigma_2 = +\frac{M_x}{I_x}y_2 - \frac{M_y}{I_y}x_2$$

$$\sigma_3 = +\frac{M_x}{I_x}y_3 + \frac{M_y}{I_y}x_3 = \sigma_{\max}^{(+)}$$

$$\sigma_4 = -\frac{M_x}{I_x}y_4 + \frac{M_y}{I_y}x_4$$

Esetünkben a legnagyobb húzófeszültség a 3. pontban, a legnagyobb nyomófeszültség az 1. pontban keletkezik.

A σ-ábra megrajzolásához tudnunk kell, hogy hol helyezkedik el a semleges tengely. A semleges tengely helyét annak a feltételnek a segítségével határozzuk meg, hogy a semleges tengely mentén a feszültség értéke zérus. A semleges tengely egy pontja azonnal adott: a súlypontban ($x = 0$, $y = 0$) a feszültség zérus. A semleges tengely tehát áthalad a súlyponton, a meredekségét pedig a feszültségek zérusértékét kifejező egyenletből vezethetjük le. A (7.2) képlet csak úgy adhat zérust, hogy az egyik tag előjele pozitív, a másik negatív:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x}y - \frac{M_y}{I_y}x = 0$$

Innen:

$$\frac{M_x}{I_x} y = \frac{M_y}{I_y} x \qquad \rightarrow \qquad \frac{y}{x} = \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y}$$

ahol az y/x hányados egyértelműen meghatározza a semleges tengely β meredekségét. Felhasználva hogy $M_y/M_x = \tan\alpha$, a semleges tengely meredeksége, vagyis az x tengellyel bezárt β szögének tangense:

$$\tan\beta = \tan\alpha \frac{I_x}{I_y} \tag{7.3}$$

Mivel az I_x/I_y hányados mindig pozitív szám, ezzel bebizonyítottuk, hogy a semleges tengely mindig a nyomatékvektorral megegyező síknegyeden megy át (7.4 ábra). Ez a követelmény automatikusan teljesül, ha a β szöget az M_x vektortól az eredő M vektor felé mérjük fel.

7.2 Gyakorlati alkalmazás

Először összefoglaljuk a méretezéssel kapcsolatos tudnivalókat, majd a gyakorlati számítások illusztrálása céljából számpéldákat mutatunk be.

7.2.1 Méretezés ferde hajlítás esetén

A méretezés során csak a feszültség-összehasonlítás módszere alkalmazható. A (6.2) képlet általánosításával és a fent bemutatott módon meghatározzuk a legnagyobb normálfeszültséget ($\sigma_{\max} \rightarrow \sigma_M$) és a

$$\sigma_H \geq \pm\frac{M_x}{I_x} y_{\text{szélső}} \pm \frac{M_y}{I_y} x_{\text{szélső}} = \sigma_M \tag{7.4}$$

feltétel teljesülése esetén a tartó megfelel.

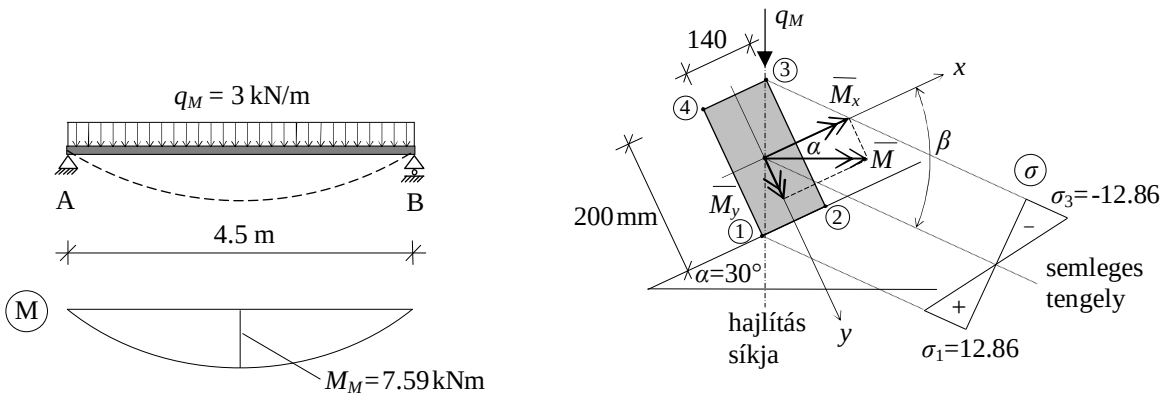
Ferde hajlítás esetén a tervezési feladatok meglehetősen bonyolult számításokhoz vezethetnek és így a gyakorlati esetek túlnyomó részében az ellenőrzés segítségével – a (7.4) összefüggés közvetlen alkalmazásával – oldjuk meg a feladatot.

7.2.2 Gyakorló feladatok

A következő feladatok segítségével négy gyakorlati esetet mutatunk be a (7.4) összefüggés alkalmazására.

<u>1. Kéttámaszú tetőszelemen: téglalap keresztmetszetű fa tartó</u>

Állítsuk elő a 7.5 ábrán vázolt kéttámaszú tetőszelemen σ-ábráját. A hajlítás síkja függőleges, így a ferde megtámasztáson nyugvó kéttámaszú gerenda ferde hajlítást szenved. Az $\overline{M}$ nyomatékvektort a hajlítás síkjára merőlegesen kell berajzolni. Irányát (hogy jobbra vagy balra mutat) szemléletből állapítjuk meg. A nyomatékábra tanúsága szerint a legnagyobb nyomaték a tartó közepén keletkezik, ahol a húzott szál a keresztmetszet alján van. A nyomatékvektort úgy kell berajzolni, hogy a nyilával szembe nézve és az óramutató járásával egyezően forgatva a keresztmetszet alján keletkezzen húzás (vagyis a forgatás hatására a keresztmetszet alsó része – pl. az 1. pont – próbáljon a rajz síkjából kiemelkedni). Ez akkor történik meg, ha a nyomatékvektor nyila jobbra mutat.



a) tartó és terhelése b) keresztmetszet σ-ábrával

7.5 ábra. Téglalap keresztmetszetű kéttámaszú tetőszelemen ferde hajlítása.

A nyomatékvektor berajzolása után a főtengelyek irányába eső két nyomaték-komponens értékének megállapítása következik a (7.1) összefüggések felhasználásával:

$$M_x = \overline{M}\cos\alpha = 7.59\cdot\cos 30° = 6.58\,\text{kNm} \qquad \text{és} \qquad M_y = \overline{M}\sin\alpha = 7.59\cdot\sin 30° = 3.795\,\text{kNm}$$

A főtengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok

$$I_x = \frac{140\cdot 200^3}{12} = 9.3\dot{3}\cdot 10^7\,\text{mm}^4 \qquad \text{és} \qquad I_y = \frac{200\cdot 140^3}{12} = 4.57\dot{3}\cdot 10^7\,\text{mm}^4$$

ismeretében a (7.3) képlettel meghatározható a semleges tengely x tengellyel bezárt hajlásszöge:

$$\tan\beta = \tan\alpha\frac{I_x}{I_y} = \tan 30°\frac{9.3\dot{3}}{4.57\dot{3}} = 1.178 \qquad \rightarrow \qquad \beta = 49.68°$$

A σ-ábra így alakhelyesen megrajzolható.
A feszültségek értékeit a sarokpontokban a (7.2) összefüggés segítségével határozzuk meg:

$$\sigma_1 = \frac{6.58\cdot 10^6}{93.\dot{3}\cdot 10^6}100 + \frac{3.795\cdot 10^6}{45.7\dot{3}\cdot 10^6}70 = 7.05 + 5.81 = 12.86\,\text{N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{6.58\cdot 10^6}{93.\dot{3}\cdot 10^6}100 - \frac{3.795\cdot 10^6}{45.7\dot{3}\cdot 10^6}70 = 7.05 - 5.81 = 1.24\,\text{N/mm}^2$$

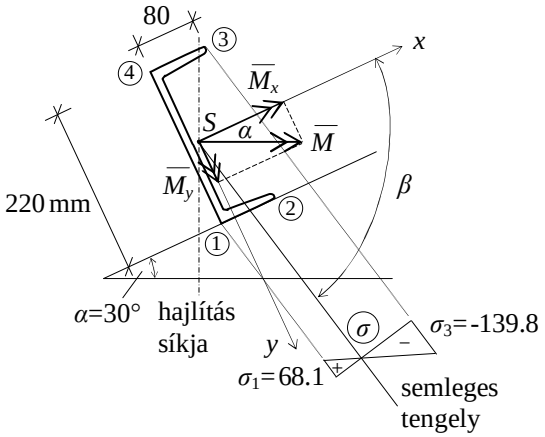
$$\sigma_3 = -\frac{6.58\cdot 10^6}{93.\dot{3}\cdot 10^6}100 - \frac{3.795\cdot 10^6}{45.7\dot{3}\cdot 10^6}70 = -7.05 - 5.81 = -12.86\,\text{N/mm}^2$$

$$\sigma_4 = -\frac{6.58\cdot 10^6}{93.\dot{3}\cdot 10^6}100 + \frac{3.795\cdot 10^6}{45.7\dot{3}\cdot 10^6}70 = -7.05 + 5.81 = -1.24\,\text{N/mm}^2$$

A σ-ábrát a 7.5/b ábrán ábrázoljuk.

2. Kéttámaszú tetőszelemen: U-220-as acél gerenda

Tekintsük ismét az előző feladatban szereplő kéttámaszú tetőszelement, de a rendelkezésre álló tartó most legyen egy U-220-as acél gerenda (7.6 ábra). A gerenda határfeszültsége σ_H = 235 N/mm^2. Ellenőrizzük, hogy megfelel-e a tartó a q_M = 3 kN/m egyenletesen megoszló teherre. A számításhoz szükség van a sarokpontok súlyponttól mért távolságára. Ezek az U-220-as szelvény adatai szerint (pl. a SEGÉDLETEK-ből): $y_1 = y_2 = y_3 = y_4$ = 110 mm és $x_1 = x_4$ = 21.4 mm, $x_2 = x_3$ = 58.6 mm. A tehetetlenségi nyomatékok: $I_x = 26.9 \cdot 10^6$ mm^4 és $I_y = 1.97 \cdot 10^6$ mm^4.



7.6 ábra. U-220-as kéttámaszú tetőszelemen ferde hajlítása.

A semleges tengely x tengellyel bezárt hajlásszögét a (7.3) képlet szolgáltatja:

$$\tan\beta = \tan\alpha \frac{I_x}{I_y} = \tan 30° \frac{26.9}{1.97} = 7.884 \qquad \rightarrow \qquad \beta = 82.77°$$

A feszültségek értékeit a sarokpontokban ismét a (7.2) összefüggés segítségével határozzuk meg:

$$\sigma_1 = \frac{6.58 \cdot 10^6}{26.9 \cdot 10^6} 110 + \frac{3.795 \cdot 10^6}{1.97 \cdot 10^6} 21.4 = 26.91 + 41.23 = 68.14 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{6.58 \cdot 10^6}{26.9 \cdot 10^6} 110 - \frac{3.795 \cdot 10^6}{1.97 \cdot 10^6} 58.6 = 26.91 - 112.89 = -85.98 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = -\frac{6.58 \cdot 10^6}{26.9 \cdot 10^6} 110 - \frac{3.795 \cdot 10^6}{1.97 \cdot 10^6} 58.6 = -26.91 - 112.89 = -139.8 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_4 = -\frac{6.58 \cdot 10^6}{26.9 \cdot 10^6} 110 + \frac{3.795 \cdot 10^6}{1.97 \cdot 10^6} 21.4 = -26.91 + 41.23 = 14.32 \text{ N/mm}^2$$

A legnagyobb feszültség a 3. pontban keletkezik, így $\sigma_M = \sigma_{\max} = \sigma_3 = \left|-139.8 \text{ N/mm}^2\right|$. Teljesül a (7.4) feltétel

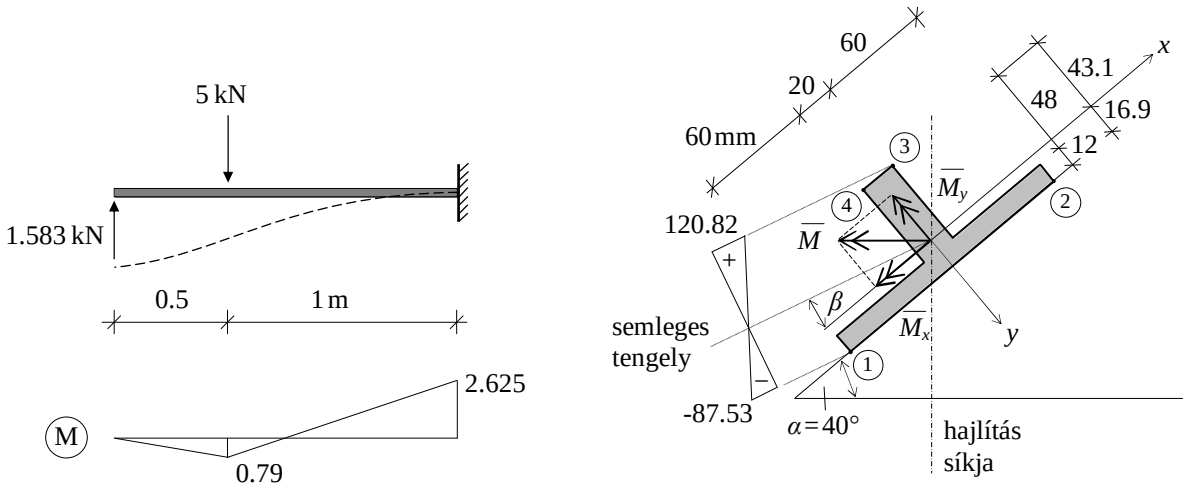
$$\sigma_H = 235 \geq 139.8 = \sigma_M$$

így a tartó hajlításra megfelel. A σ-ábrát a 7.6 ábrán ábrázoljuk.

3. Konzoltartó ferde hajlítása

Ellenőrizzük a 7.7 ábrán vázolt konzoltartót. A tartó anyagának határfeszültsége $\sigma_H = 130\ \text{N/mm}^2$. A keresztmetszet tehetetlenségi nyomatékai: $I_x = 0.755 \cdot 10^6\ \text{mm}^4$ és $I_y = 2.776 \cdot 10^6\ \text{mm}^4$. A legnagyobb nyomaték a befogásnál keletkezik, értéke $M = 2.625$ kNm és a keresztmetszet felső részén okoz húzást. Ennek megfelelően a nyomatékvektor a hajlítás síkjára merőlegesen balra mutat. A két komponense:

$$M_x = \overline{M}\cos\alpha = 2.625 \cdot \cos 40° = 2.01\,\text{kNm} \quad \text{és} \quad M_y = \overline{M}\sin\alpha = 2.625 \cdot \sin 40° = 1.687\,\text{kNm}$$



a) tartó és terhelése

b) keresztmetszet σ-ábrával

7.7 ábra. Konzoltartó ferde hajlítása.

A semleges tengely x tengellyel bezárt hajlásszögét a (7.3) képlet szolgáltatja:

$$\tan\beta = \tan\alpha\frac{I_x}{I_y} = \tan 40°\frac{0.755}{2.776} = 0.2282 \qquad \rightarrow \qquad \beta = 12.85°$$

A feszültségek értékeit a sarokpontokban a (7.2) összefüggés segítségével határozzuk meg:

$$\sigma_1 = -\frac{2.01 \cdot 10^6}{0.755 \cdot 10^6}16.9 - \frac{1.687 \cdot 10^6}{2.776 \cdot 10^6}70 = -44.99 - 42.54 = -87.53\,\text{N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = -44.99 + 42.54 = -2.45\,\text{N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{2.01 \cdot 10^6}{0.755 \cdot 10^6}43.1 + \frac{1.687 \cdot 10^6}{2.776 \cdot 10^6}10 = 114.74 + 6.08 = 120.82\,\text{N/mm}^2 < 130\,\text{N/mm}^2 = \sigma_H$$

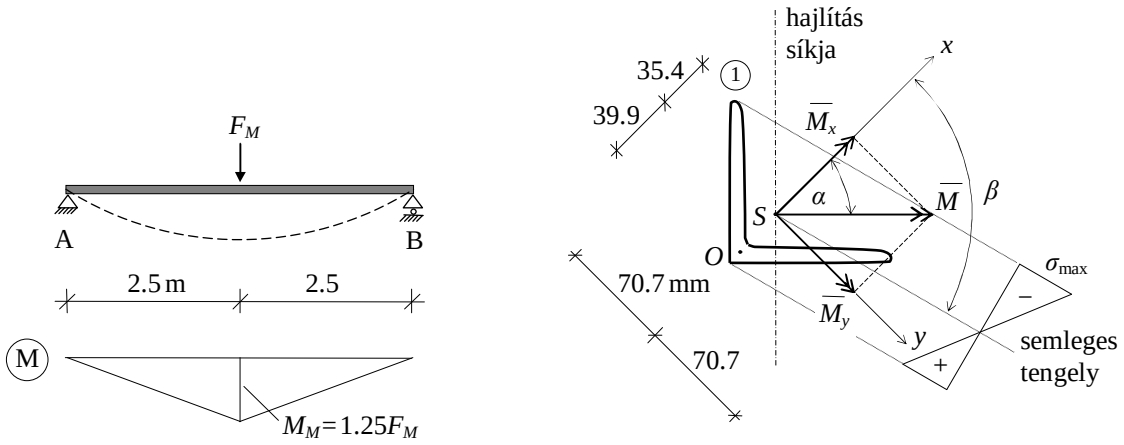
$$\sigma_4 = 114.74 - 6.08 = 108.66\,\text{N/mm}^2$$

A legnagyobb feszültség a 3. pontban keletkezik. Az érték kisebb mint a határfeszültség, így a tartó hajlításra megfelel. A σ-ábrát a 7.7/b ábrán találjuk.

4. Tervezés

Ritkábban előforduló, de annál tanulságosabb feladattal találkozunk, amikor egy már meglévő tartó terhelhetőségét kell megvizsgálni.

Állapítsuk meg, hogy mekkora F_M erővel terhelhető a 7.8 ábrán vázolt kéttámaszú tartó. A keresztmetszet L 100.100.10 szögacél, amelynek határfeszültsége σ_H = 235 N/mm^2. A tartó hosszmérete méterben van megadva a 7.8/a ábrán és rögzítsük, hogy az egyelőre ismeretlen koncentrált erő dimenziója kN. Ez azért fontos, mert a (7.4) összefüggés alkalmazásakor majd oda kell arra figyelni, hogy a behelyettesítéskor a megfelelő dimenziókat használjuk.



a) tartó és terhelése

b) keresztmetszet: L100.100.10 szögacél

7.8 ábra. Kéttámaszú tartó ferde hajlítása.

A (7.4) összefüggés alkalmazása során arra is oda kell figyelni, hogy az összefüggésben szereplő I_x, I_y, x és y mennyiségek a főtengelyekre vonatkoznak. A szögacél egyik főtengelye a szimmetriatengely – ezt a 7.8/b ábrán x-el jelöltük – a másik pedig erre merőleges (y). (A szögacél vízszintes és függőleges súlyponti tengelye nem főtengely.)

A keresztmetszet tehetetlenségi nyomatékai szelvénytáblázatból (pl. a SEGÉDLETEK-ből): $I_x = 2.8 \cdot 10^6$ mm^4 és $I_y = 0.733 \cdot 10^6$ mm^4.

A legnagyobb nyomaték a tartó közepén keletkezik, értéke $M = 1.25F_M$ [kNm] és a keresztmetszet alsó részén okoz húzást. Ennek megfelelően a nyomatékvektor a hajlítás síkjára merőlegesen jobbra mutat. A két összetevője:

$$M_x = \overline{M}\cos\alpha = 1.25F_M \cdot \cos 45° = 0.884F_M \quad \text{[kNm]}$$

és

$$M_y = \overline{M}\sin\alpha = 1.25F_M \cdot \sin 45° = 0.884F_M \quad \text{[kNm]}$$

Első lépésben a semleges tengely helyét határozzuk meg:

$$\tan\beta = \tan\alpha\frac{I_x}{I_y} = \tan 45°\frac{2.8}{0.733} = 3.82 \qquad \rightarrow \qquad \beta = 75.33°$$

Most már megrajzolhatjuk az alakhelyes σ-ábrát (7.8/b ábra), amely azt is megmutatja, hogy a legnagyobb feszültség a tartó tetején, az 1. pontban keletkezik. Az 1. pont x és y

koordinátáit a főtengelyek alkotta koordinátarendszerben (35.4 mm és 70.7 mm) a szögacél adattáblázatából (pl. a SEGÉDLETEK-ből) vehetjük ki. Az 1. pontban keletkező feszültséget – amely az abszolút feszültségi maximum – a (7.4) összefüggés felhasználásával határozhatjuk meg. Ennek a feszültségnek kisebbnek kell lenni a határfeszültségnél:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = F_M \left(\frac{-0.884 \cdot 10^6}{2.8 \cdot 10^6} 70.7 - \frac{0.884 \cdot 10^6}{0.733 \cdot 10^6} 35.4 \right) \leq 235 = \sigma_H$$

Innen megkapjuk a teher értékének felső határát:

$$F_M \leq 3.61\,\text{kN}$$

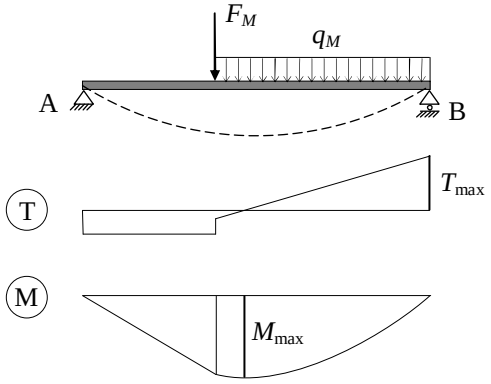
Bár a csavarás jelenségével a 13. fejezetben foglalkozunk majd, már itt megjegyezzük, hogy a most ferde hajlításra vizsgált tartó esetében a csavarás jelenségét is figyelembe kell venni. Az L-szelvény esetében ugyanis az *S* súlypont nem esik egybe az *O* csavarási középponttal (7.8/b ábra). Ennek az a következménye, hogy az adott hajlítási sík esetében a súlyponton átmenő függőleges síkban terhelt L-szelvény el is csavarodik (vö. 13.6/b ábra), amiből további feszültségek keletkeznek. – A helyzet hasonló a 2. feladat esetében tárgyalt (és a 7.6 ábrán vázolt) U-tartó esetéhez, ahol a súlyponton átmenő terhelés szintén a keresztmetszet elcsavarodását okozza a csavarási középpont körül.

8

Összetett hajlítás

Szerkezeteink általában nem egyszerű, hanem összetett hajlításnak vannak kitéve, amikor a hajlítónyomatékon kívül nyíróerő is működik (8.1 ábra), és a nyíróerő hatását is figyelembe kell venni.

Az összetett hajlítás (más néven: hajlítással egyidejű nyírás) során keletkező normálfeszültségek és nyírófeszültségek együttes vizsgálata meglehetősen bonyolult szilárdságtani feladat, de az építőmérnöki gyakorlati alkalmazások számára elegendően pontos megoldást kapunk a hajlítónyomaték és nyíróerő hatásának egymástól elkülönített vizsgálatával. Ezt a feladatot Zsuravszkij 1856-ban oldotta meg, és ez a fejezet az ő megoldását ismerteti.



8.1 ábra. Hajlítás és nyírás.

Feltételezzük tehát, hogy a hajlított tartóban keletkező normálfeszültségek csak a hajlítónyomatéktól függenek és – egyenes hajlítás esetén – a már megismert

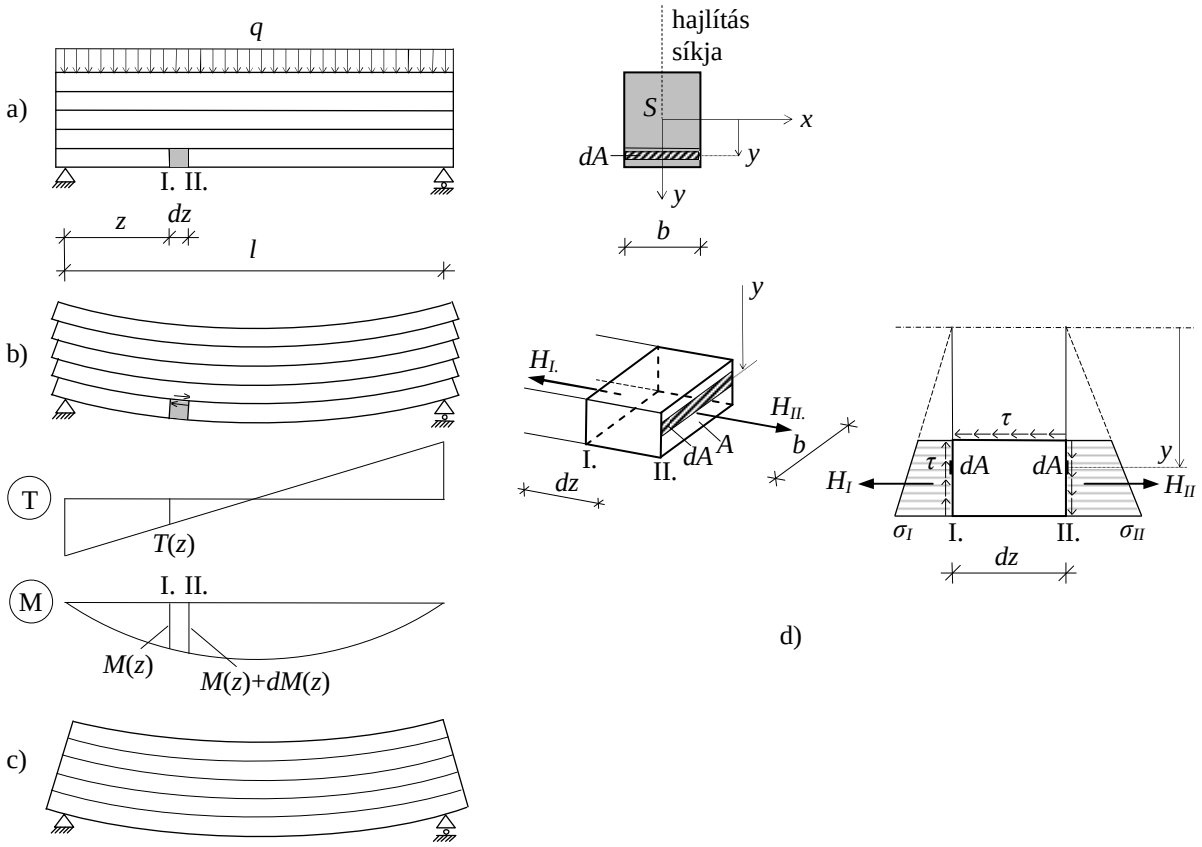
$$\sigma = \pm \frac{M_x}{I_x} y$$

képlettel határozhatók meg. A nyíróerők hatására keletkező nyírófeszültségek csak a keresztmetszeten fellépő nyíróerőtől és a keresztmetszettől függenek.

Továbbra is egyenestengelyű, prizmatikus rudakkal foglalkozunk, amelyek anyaga homogén és izotróp. A hajlítás során a rúd rugalmasan viselkedik, vagyis érvényes a Hooke-törvény. A vizsgált rudak keresztmetszete legalább egyszeresen szimmetrikus, amikor is a szimmetriatengely egyben főtengely is.

8.1 A nyírófeszültségek meghatározása

Tekintsük a 8.2/a ábrán vázolt, *q* intenzitású egyenletesen megoszló erőkkel terhelt kéttámaszú tartót. Azt a 4. fejezetben tárgyaltak alapján tudjuk, hogy a függőleges erőkkel terhelt tartó belsejében a függőleges metszetek mentén függőleges nyírófeszültségek keletkeznek. Most bebizonyítjuk azt, hogy a hajlított tartó hossztengelyével párhuzamos hosszmetszetein is keletkeznek feszültségek, mégpedig vízszintes nyírófeszültségek. Ezt egy gondolatkísérlettel tesszük meg.



8.2 ábra. Kéttámaszú tartó összetett hajlítása. a) tartó lehajlás előtt, b) léckötegek lehajlás után, c) tényleges viselkedés, d) legalsó lécből kivágott elemi hasáb.

Képzeljük el azt, hogy a tömör tartót tengelyével párhuzamos vízszintes síkok mentén fölszeleteljük és egymáson fekvő léckötegeket hozunk létre. Ha eltekintenénk a súrlódástól, akkor terhelés után ezek a léckötegek egymástól függetlenül hajolnának le és közben elcsúsznának egymáson (8.2/b ábra). Az eredeti tömör tartó viszont nem ezt teszi, hanem egységes egészként egyben hajlik le. Nem jön létre elcsúszás a tartó különböző magasságában sem (8.2/c ábra). Ez csak úgy lehetséges, hogy a vízszintes síkokban vízszintes nyírófeszültségek, ún. csúsztató feszültségek lépnek fel. Ugyanerre az eredményre jutunk a 4.2 alfejezetben ismertetett dualitási tétel alkalmazásával: ha egy (esetünkben függőleges) metszeten τ nyírófeszültség működik, akkor a rá merőleges (vízszintes) metszeten is τ nyírófeszültség működik (8.2/d ábra). A következőkben ennek a hajlításból keletkező nyírófeszültségnek a meghatározásával foglalkozunk.

Tekintsük a baloldali támasztól *z* távolságra lévő, a legalsó lécből kivágott *dz* szélességű, I. és II. jelű keresztmetszetekkel határolt *b* vastagságú elemi hasáb egyensúlyát. A hasábra ható vízszintes erők (8.2/d ábra) egyensúlyát a

$$H_I + \tau dzb - H_{II} = 0$$

vízszintes vetületi egyenlet fejezi ki. Ha ide behelyettesítjük a

$$H_I = \int_{(A)} \sigma_I dA = \frac{M}{I_x} \int_{(A)} y dA = \frac{M}{I_x} S_x$$

és

$$H_{II} = \int_{(A)} \sigma_{II} dA = \frac{M + dM}{I_x} \int_{(A)} y dA = \frac{M}{I_x} S_x + \frac{dM}{I_x} S_x$$

értékeket, akkor az

$$\frac{M}{I_x} S_x + \tau dzb - \frac{M}{I_x} S_x - \frac{dM}{I_x} S_x = 0$$

egyenlet átrendezésével a

$$\tau = \frac{dM}{dzbI_x} S_x$$

összefüggéshez jutunk, ahonnan a nyírófeszültség meghatározására szolgáló Zsuravszkij-féle képletet kapjuk:

$$\tau = \frac{TS_x}{bI_x} \tag{8.1}$$

A fenti képletben

- T a nyíróerő a vizsgált keresztmetszetben [N],
- S_x az elcsúszni akaró keresztmetszet-rész (vonalkázva a 8.3 ábrán) statikai nyomatéka a súlyponti tengelyre [mm^3],
- b a keresztmetszet szélessége a vizsgált helyen [mm],
- I_x a teljes keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka a súlyponti tengelyre [mm^4].

A (8.1) képlet a

$$\tau = \frac{T}{zb} \tag{8.2}$$

alakban is használható, ahol z a belső erők karja (rugalmas állapotban) a

$$z = \frac{I_x}{S_x}$$

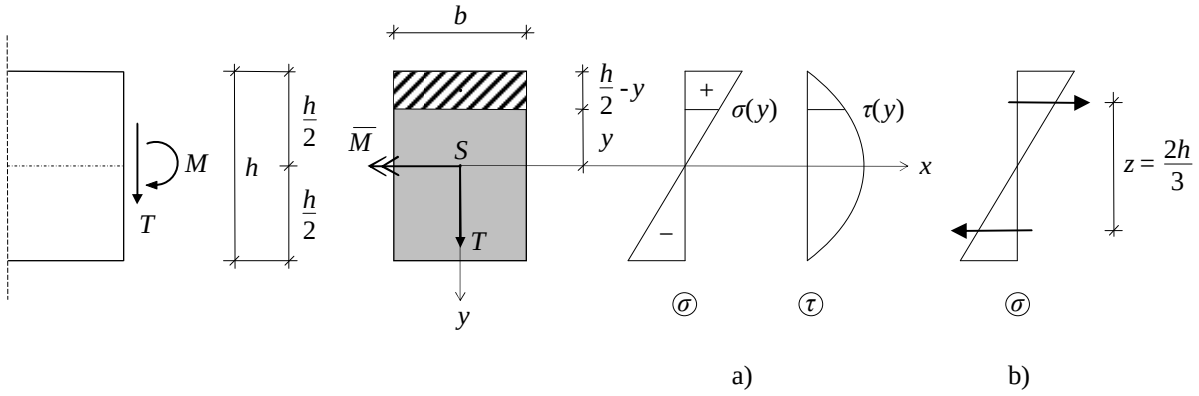
összefüggés szerint. A (8.2) képlet használata akkor előnyös, ha – például hengerelt szelvényeknél – a z értéke számítás nélkül (pl. táblázatból) rendelkezésre áll.

8.2 Nyírófeszültségek egyszerű keresztmetszeteknél

Ebben a részben bemutatjuk a nyírófeszültségek meghatározását néhány jellegzetes keresztmetszet esetében.

Téglalap (8.3 ábra)
A (8.1) képlet alkalmazásához szükség van az *x* tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték és az elcsúszni akaró keresztmetszet-rész (vonalkázott rész a 8.3 ábrán) statikai nyomatékának értékére:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad \text{és} \qquad S_x = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} - \frac{\frac{h}{2} - y}{2}\right) = \frac{b}{8}(h^2 - 4y^2)$$



8.3 ábra. Téglalap keresztmetszet. a) a normál- és nyírófeszültség ábrája, b) *z* a belső erők karja.

A nyírófeszültséget jellemző függvény így:

$$\tau(y) = \frac{T\frac{b}{8}(h^2 - 4y^2)}{\frac{bh^3}{12}b} = \frac{3T(h^2 - 4y^2)}{2bh^3}$$

Ez egy másodfokú parabola (8.3/a ábra). A két zérushelye $y = \pm h/2$-nél (vagyis a tartó tetején és alján) van. A szélsőérték helyét az első derivált

$$\tau'(y) = \frac{-3T8y}{2bh^3} = -\frac{12T}{bh^3}y$$

segítségével határozzuk meg. A $\tau'(y) = 0$ feltétel az $y = 0$-nál teljesül, így a nyírófeszültség maximumát az $y = 0$-nál (a keresztmetszet súlypontjának magasságában) találjuk. Értéke:

$$\tau_{\max} = \tau(0) = \frac{3Th^2}{2bh^3} = \frac{3T}{2bh} = 1.5\frac{T}{A}$$

A képlet kismértékű átalakításával megkapjuk a fent már ismertetett (8.2) összefüggést

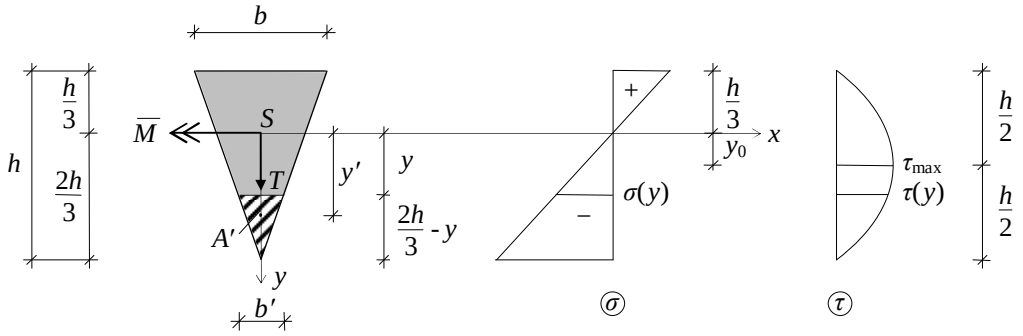
$$\tau_{\max} = \frac{3T}{2bh} = \frac{T}{\frac{2}{3}hb} = \frac{T}{zb}$$

ahol $z = \frac{2}{3}h$ a belső erők karja rugalmas állapotban (8.3/b ábra).

Háromszög (8.4 ábra)

A (8.1) képlet alkalmazásához szükség van az *x* tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték és az elcsúszni akaró keresztmetszet-rész [alsó vonalkázott háromszög a (8.4) ábrán] statikai nyomatékának értékére:

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad \text{és} \qquad S_x = A'y' = b'\left(\frac{2h}{3} - y\right)\frac{1}{2}\left[y + \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{3} - y\right)\right] = \frac{b'}{3}\left(\frac{2}{9}h^2 + \frac{1}{3}hy - y^2\right)$$



8.4 ábra. Háromszög keresztmetszet normál- és nyírófeszültség ábrája.

A nyírófeszültséget jellemző függvény értéke így:

$$\tau(y) = \frac{T\frac{b'}{3}\left(\frac{2}{9}h^2 + \frac{1}{3}hy - y^2\right)}{\frac{bh^3}{36}b'} = \frac{12T}{bh^3}\left(\frac{2}{9}h^2 + \frac{1}{3}hy - y^2\right)$$

Ez egy másodfokú parabola (8.4 ábra). A két zérushely az

$$y^2 - \frac{1}{3}hy - \frac{2}{9}h^2 = 0$$

egyenletből:

$$y_1 = -\frac{1}{3}h \qquad \text{és} \qquad y_2 = \frac{2}{3}h$$

A szélsőérték helyét az első derivált segítségével határozzuk meg:

$$\tau'(y)=\frac{12T}{bh^3}\left(\frac{1}{3}h-2y_0\right)=0 \qquad \rightarrow \qquad y_0=\frac{h}{6}$$

Mivel

$$\frac{h}{3}+\frac{h}{6}=\frac{h}{2}$$

ez azt jelenti, hogy a nyírófeszültség maximuma a magasság felénél van. Értéke:

$$\tau_{\max}=\tau(y_0)=\frac{12T}{bh^3}\left[\frac{2}{9}h^2+\frac{h}{3}\frac{h}{6}-\left(\frac{h}{6}\right)^2\right]=\frac{3T}{bh}=1.5\frac{T}{A}$$

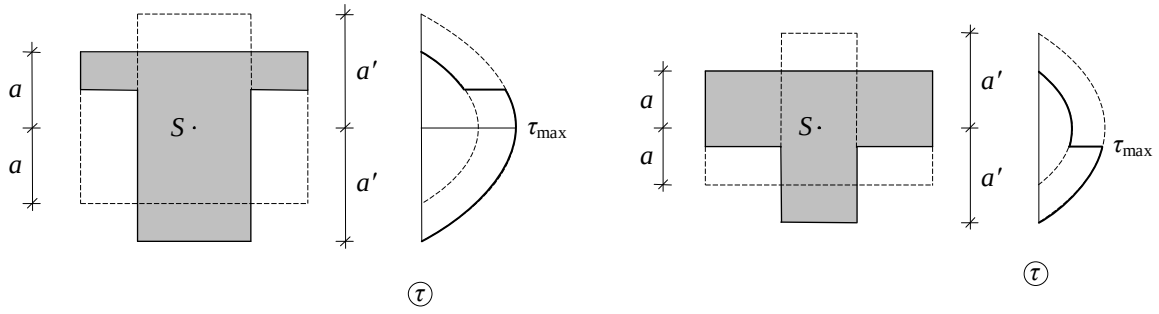
A nyírófeszültség értéke a súlypontban:

$$\tau_s=\tau(0)=\frac{12T}{bh^3}\left(\frac{2}{9}h^2\right)=\frac{8T}{3bh}$$

Megjegyezzük, hogy a keresztmetszet szélein a nyírófeszültség iránya megegyezik a határoló vonal irányával, a szimmetriatengely vonalában pedig függőleges. A keresztmetszet széle és a szimmetriatengely között a nyírófeszültség iránya a kettő között változik. A Zsuravszkij-féle képlet a nyírófeszültségek függőleges komponensét adja meg.

T alakú keresztmetszet

A téglalap alakú keresztmetszetnél nyert tapasztalatok alapján könnyen megszerkeszthetjük a nyírófeszültségek ábráját T alakú keresztmetszetek esetében is. Két esetet különböztetünk meg, annak megfelelően, hogy a keresztmetszet súlypontja a bordában (8.5/a ábra) vagy a lemezben (8.5/b ábra) helyezkedik el.



a) τ_{max} a súlypontban b) τ_{max} a vállnál

8.5 ábra. T alakú keresztmetszet. a) súlypont a bordában, b) súlypont a lemezben.

Mindkét esetben úgy járunk el, hogy a T alakú keresztmetszetet két részben kezeljük. Mind a bordát, mind pedig a lemezt olyan téglalappá egészítjük ki (szaggatott vonal a 8.5 ábrán), amelyek esetében a T-keresztmetszet súlypontja a kiegészített téglalap súlypontja is. Ezután szaggatott vonallal megrajzoljuk a kiegészített téglalap alakú keresztmetszetek nyírófeszültség ábráját. Így két görbét kapunk. A két görbéből úgy kapjuk meg a végleges nyírófeszültség ábrát, hogy a tényleges keresztmetszet-résznek megfelelő görberészeket vesszük figyelembe (vastag vonal a 8.5 ábrán).

Az első esetben a nyírófeszültség maximuma a súlypontban van (itt maximális az elcsúszni akaró keresztmetszet-rész statikai nyomatéka és minimális a bordaszélesség). A második esetben a súlypont magasságában a nyírófeszültség ábrának lokális maximuma van, de itt a *b* szélesség nagy, ezért az abszolút maximum a borda és a lemez találkozásához esik, ahol a *b* szélesség lényegesen kisebb.

8.3 Gyakorlati alkalmazás

Méretezéskor a szokásos módon járunk el, vagyis – a méretezés $Y_H \geq Y_M$ alapegyenletének alkalmazásával – megköveteljük a

$$\tau_M \leq \tau_H \tag{8.3}$$

feltétel teljesülését.

A következő két feladatban összetett hajlításnak kitett tartókat vizsgálunk. Meghatározzuk a normálfeszültségeket és a nyírófeszültségeket is.

1. Fa anyagú konzoltartó

Ellenőrizzük, hogy megfelel-e a 8.6 ábrán vázolt tartó hajlításra és nyírásra. Vizsgáljuk meg azt is, hogy megfelel-e az öv és gerinc ragasztott kapcsolata. Rajzoljuk meg a feszültség-ábrákat is. A tartó anyagának határfeszültségei: $\sigma_H = 14$ N/mm^2 és $\tau_H = 2.0$ N/mm^2. A ragasztó határfeszültsége: $\tau_{H,\text{rag}} = 1.6$ N/mm^2.

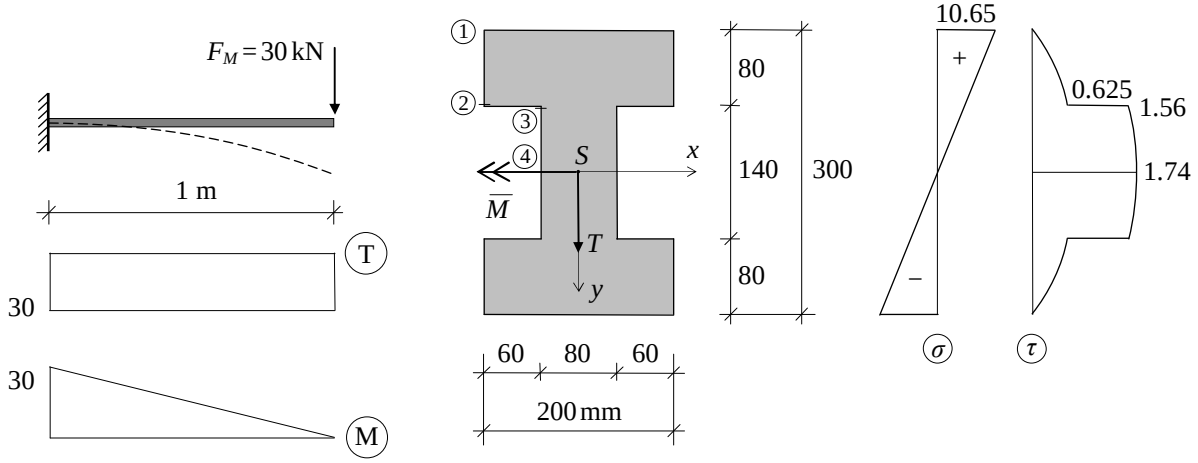
A keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka:

$$I_x = \frac{200 \cdot 300^3}{12} - 2\frac{60 \cdot 140^3}{12} = 422.6 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Ellenőrzés hajlításra [a (6.7) összefüggés segítségével]:

$$\sigma_M = \frac{M_M}{I_x} y_{\text{szélső}} = \frac{30 \cdot 10^6}{422.6 \cdot 10^6} 150 = 10.65 \text{ N/mm}^2 < 14 \text{ N/mm}^2 = \sigma_H$$

A tartó tehát megfelel hajlításra.



a) tartó és terhelése b) keresztmetszet σ és τ ábrával

8.6 ábra. Konzoltartó összetett hajlítása.

A nyírófeszültségek ábrájának meghatározásához a feszültségeket a 8.6/b ábrán bejelölt négy jellemző pontban határozzuk meg. A 2. pont a gerinc és az öv találkozásához végtelen közel a csatlakozás fölött, a 3. pont pedig a csatlakozás alatt, a 4. pont a súlypont magasságában van.

A nyírófeszültség értéke az 1. pontban zérus, mert a statikai nyomaték értéke [a (8.1) képletben] zérus. A nyírófeszültség értéke a 2. pontban:

$$\tau_2 = \frac{TS_x}{bI_x} = \frac{30\cdot 10^3[80\cdot 200\cdot 110]}{200\cdot 422.6\cdot 10^6} = 0.625\ \mathrm{N/mm^2}$$

A fenti képletben – és a következő képletekben is – az S_x a keresztmetszet elcsúszni akaró részének statikai nyomatéka a súlyponti tengelyre. A könnyebb megkülönböztethetőség érdekében az S_x értéke szögletes zárójelek között szerepel.

A nyírófeszültség értéke a 3. pontban:

$$\tau_3 = \frac{TS_x}{bI_x} = \frac{30\cdot 10^3[80\cdot 200\cdot 110]}{80\cdot 422.6\cdot 10^6} = 1.56\ \mathrm{N/mm^2}$$

A nyírófeszültség legnagyobb értékét a súlypontban – a 4. pont magasságában – várjuk:

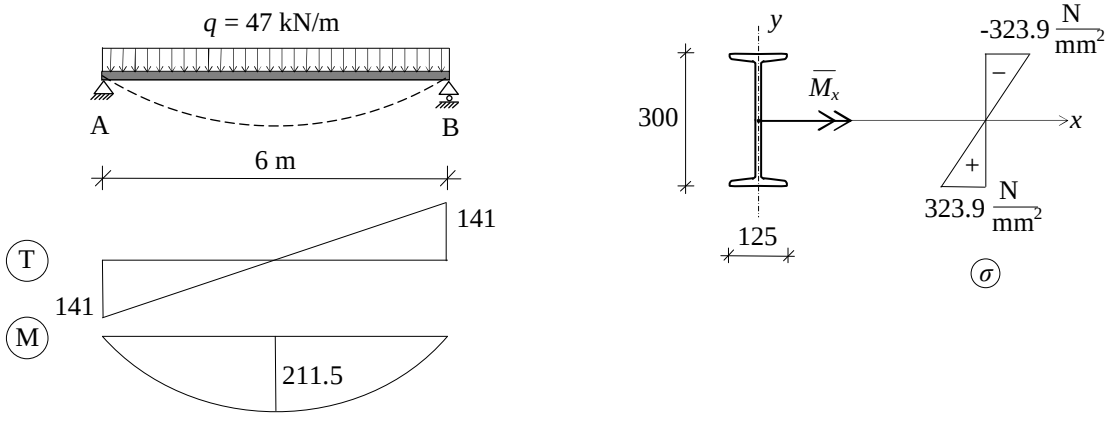
$$\tau_{\max} = \tau_4 = \frac{TS_x}{bI_x} = \frac{30\cdot 10^3[80\cdot 200\cdot 110 + 80\cdot 70\cdot 35]}{80\cdot 422.6\cdot 10^6} = 1.74\ \mathrm{N/mm^2}$$

Ez az érték kisebb, mint a határfeszültség (τ_H = 2.0 N/mm^2), így a tartó nyírásra is megfelel. A ragasztott kapcsolat is megfelel, mert

$$\tau_{rag} = \tau_3 = 1.56\ \mathrm{N/mm^2} \ < \ \tau_{H,\mathrm{rag}} = 1.6\ \mathrm{N/mm^2}$$

2. Acél anyagú kéttámaszú tartó

A feladat egy 6 méter fesztávolságú kéttámaszú tartó kialakítása 47 kN/m egyenletesen megoszló terhelésre (8.7/a ábra).



a) tartó és terhelése b) keresztmetszet σ-ábrával

8.7 ábra. Kéttámaszú I-tartó összetett hajlítása.

Rendelkezésre áll egy megfelelő hosszméretű I-300-as acél tartó. Ellenőrizzük, hogy megfelel-e ez a tartó. Az I-300-as acéltartó anyagának határfeszültségei: σ_H = 235 N/mm^2,

σ_{pH} = 360 N/mm^2 és τ_H = 135 N/mm^2. Az I-300-as tartó adattáblázata szerint a belső erők karja z = 257 mm, a gerincvastagság b = 10.8 mm, a keresztmetszeti tényező W_x = 653000 mm^3 és a tehetetlenségi nyomaték $I_x = 98 \cdot 10^6$ mm^4.

Bár a tartó nyírásra megfelel

$$\tau_M = \frac{T}{zb} = \frac{141000}{257 \cdot 10.8} = 50.8\,\text{N/mm}^2 < 135\ \text{N/mm}^2 = \tau_H$$

hajlításra nem:

$$\sigma_M = \frac{M_M}{W_{\min}} = \frac{211.5 \cdot 10^6}{0.653 \cdot 10^6} = 323.9\,\text{N/mm}^2 > 235\ \text{N/mm}^2 = \sigma_H$$

Erősítsük meg a tartót (8.8 ábra). Erre a célra rendelkezésre áll egy 10 mm vastagságú lemez, amelyet szegecsek segítségével az alsó és felső övhöz erősítünk. Legyen a rátett lemez szélessége 150 mm (8.8/b ábra). A rátett lemez hosszát úgy állapítjuk meg, hogy az M_M nyomatékábra mellett ábrázoljuk az M_H nyomatékábrát is (8.8/a ábra) és a tartót csak azon a szakaszon erősítjük meg, ahol szükséges. Az M_H nyomatékábra konstans, hiszen az I-tartó nyomatéki határteherbírása állandó és értéke

$$M_H = W\sigma_H = 653000 \cdot 235 = 153.5 \cdot 10^6\,\text{Nmm} = 153.5\ \text{kNm}$$

Az $M_M = M_H$ feltétel

$$Al_0 - \frac{ql_0^2}{2} = M_H$$

segítségével meghatározhatjuk annak a két pontnak a helyzetét (l_{01} és l_{02}), amelyek között szükség van a megerősítésre (8.8/a ábra). A fenti egyenletben A = 141 kN a baloldali reakcióerő és q = 47 kN/m a tartó terhe. A behelyettesítés

$$141l_0 - \frac{47l_0^2}{2} = 153.5$$

után innen az

$$l_0^2 - 6l_0 + 6.53 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek két megoldása:

$$l_{01} = 1.43\ \text{m} \qquad \text{és} \qquad l_{02} = 4.57\ \text{m}$$

A megerősítés szükséges hossza tehát

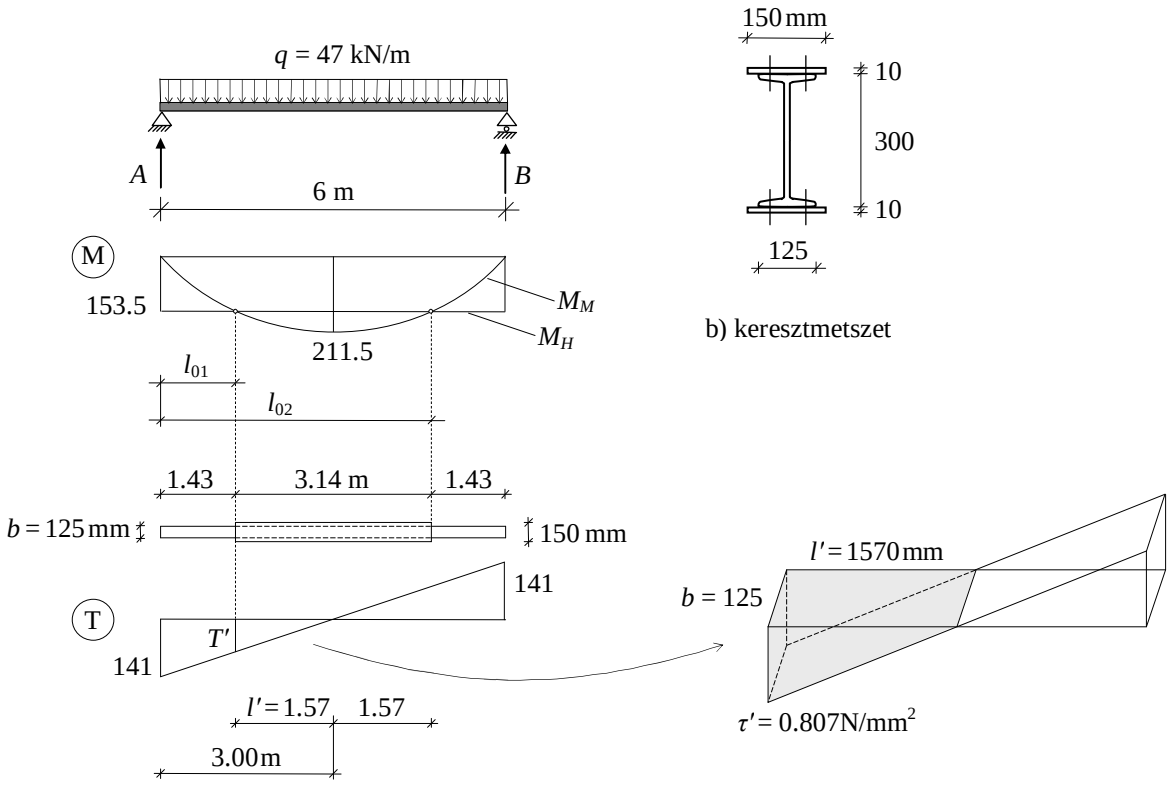
$$l_{02} - l_{01} = 4.57 - 1.43 = 3.14\ \text{m}$$

A megerősítés hosszát alternatív megoldásként úgy is megkaphatjuk, hogy léptékhelyes ábrát rajzolunk (mint a 8.8/a ábrán) és lemérjük az M_M és M_H nyomatékábrák két metszéspontja közötti távolságot.

A lemezeket Ø10 átmérőjű szegecsekkel erősítjük az alsó és felső övekhez (8.8/b ábra). A

szegecsek határfeszültségei: τ_H = 160 N/mm^2 és σ_{pH} = 430 N/mm^2.

Közelítő számítást fogunk végrehajtani, amely során nem vesszük figyelembe a gyengítések hatásait és bár a nyíróerő-ábra lineárisan változik, a szegecseket egyenletesen osztjuk ki.



8.8 ábra. Lemezzel megerősített I-tartó.

A megerősített keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka:

$$I_x = 98 \cdot 10^6 + 2\left(\frac{150 \cdot 10^3}{12} + 150 \cdot 10 \cdot 155^2\right) = 170.1 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

A mértékadó normálfeszültség értéke így:

$$\sigma_M = \frac{M_M}{I_x} y_{\text{szélső}} = \frac{211.5 \cdot 10^6}{170.1 \cdot 10^6} 160 = 198.9 \text{ N/mm}^2$$

Ez az érték már kisebb a σ_H = 235 N/mm^2 határfeszültségnél, így a tartó megfelel.

Most már csak azt kell biztosítanunk, hogy a szegecskötés megfelelő és valóban képes legyen arra, hogy az I-tartót és a rátett lemezt együttdolgoztassa. Az ehhez szükséges szegecsszám meghatározásával fejezzük be ezt a tervezési feladatot.

Az első lépésben meghatározzuk a nyíróerő értékét a megerősítés kezdőpontjában (8.8/a ábra):

$$\frac{T'}{1.57} = \frac{141}{3} \qquad \rightarrow \qquad T' = 73.8 \text{ kN}$$

Szükségünk lesz az elcsúszni akaró keresztmetszet-rész (vagyis a lemez-keresztmetszet) statikai nyomatékára a súlyponti tengelyre:

$$S_x = 10 \cdot 150 \cdot 155 = 2.325 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

A nyírófeszültség értéke az I-tartó tetején:

$$\tau'_M = \frac{T' S_x}{I_x b} = \frac{73.8 \cdot 10^3 \cdot 2.325 \cdot 10^5}{170.1 \cdot 10^6 \cdot 125} = 0.807 \text{ N/mm}^2$$

A teljes E csúsztatóerőt a τ-ábra térfogata adja (8.8/c ábra):

$$E = \tau'_M b l' \frac{1}{2} = 0.807 \cdot 125 \cdot 1570 \frac{1}{2} = 79187 \text{ N}$$

Ez az érték a fél tartóra vonatkozik. Ezt az erőt kell felvenni szegecsekkel. Egy szegecs teherbírását a nyírás és a palástnyomás vizsgálata során kapott erők kisebbike adja meg. A nyírási határerő:

$$T_{H,ny} = A \tau_H = \frac{11^2 \pi}{4} 160 = 15205 \text{ N}$$

A palástnyomási határerő:

$$T_{H,p} = A \sigma_{pH} = 11 \cdot 10 \cdot 360 = 39600 \text{ N}$$

Egy szegecs határereje tehát (a két erő közül a kisebbik) T_H = 15205 N.
A szükséges szegecsszám:

$$n = \frac{T_M}{T_H} = \frac{79187}{15205} = 5.2 \qquad \rightarrow \qquad 6 \text{ darab}$$

Az erősítő lemezek rögzítéséhez ezek szerint övenként 12 darab szegecset kell alkalmazni a 3.14 m hosszú megerősített tartószakaszon.
(Csavarok alkalmazása esetén a vizsgálatot a fenti számítás szerint kell végrehajtani.)
A megerősítés számítását a 4. fejezetben bemutatott szilárdságtani elvek alkalmazásával hajtottuk végre. A tényleges gyakorlati számítás ettől apróbb részleteiben eltérő lehet, amikor is az éppen érvényben lévő szabványelőírásoknak megfelelően szükségessé válhat módosító tényezők alkalmazása.

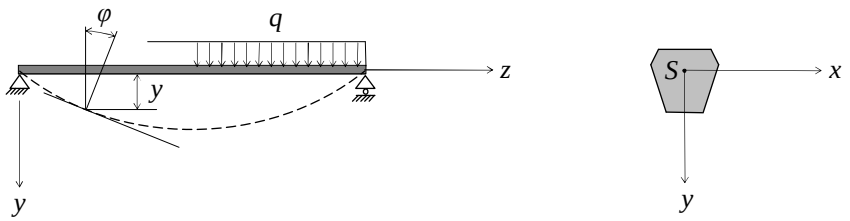
9

Hajlított tartók rugalmas alakváltozása

Az első fejezetben (a Bevezetésben) – többek között – feltételeztük, hogy a vizsgált szerkezeteink alakváltozása kicsiny és eddigi vizsgálatainkat ennek megfelelően végeztük el, vagyis az egyensúlyi egyenletek felírása során az alakváltozásoktól eltekintettünk. Fontos tehát hogy az alakváltozások nagyságáról információt szerezzünk és biztosítsuk, hogy azok valóban kicsinyek, ellenkező esetben a levezetett összefüggések és az ismertetett eljárások érvényessége megkérdőjelezhető. Az alakváltozások nagyságának ismerete – és korlátozása – más szempontból is fontos: a szerkezetek túlnyomó részben emberi környezetben találhatók és az emberek általában kényelmetlenül érzik magukat, ha a teherhordó szerkezetek „szemmel látható” alakváltozásokat végeznek.

Az alakváltozások ismeretére más területeken is szükség lehet. Eddig csak statikailag határozott tartókkal foglalkoztunk, de a későbbi tanulmányaink során határozatlan tartók vizsgálata is feladatunkat képezi. Ezek a vizsgálatok széleskörű ismereteket követelnek meg, amelyek között szerepel a tartók alakváltozásainak meghatározása is. Fontos szerepet játszanak az alakváltozások akkor is, amikor összetett szerkezetek vizsgálata során bevezetjük és használjuk a merevség fogalmát. A merevséget gyakran a vizsgált szerkezet alakváltozásának (pl. eltolódásának) reciprokaként definiáljuk.

Továbbra is egyenestengelyű prizmatikus rudakkal foglalkozunk, amelyeknek anyaga homogén és izotróp. Szerkezeteink rugalmasan viselkednek és a Hooke-törvény érvényes. Eddigi tanulmányaink alapján már tudjuk, hogy a szerkezetek a hajlítási alakváltozás mellett nyírási alakváltozást is végeznek/végezhetnek, de a nyírási alakváltozásokat most elhanyagoljuk. Ezek a hajlítási alakváltozásoknál általában nagyságrenddel kisebbek szoktak lenni.



9.1 ábra. Hajlított tartó alakváltozása.

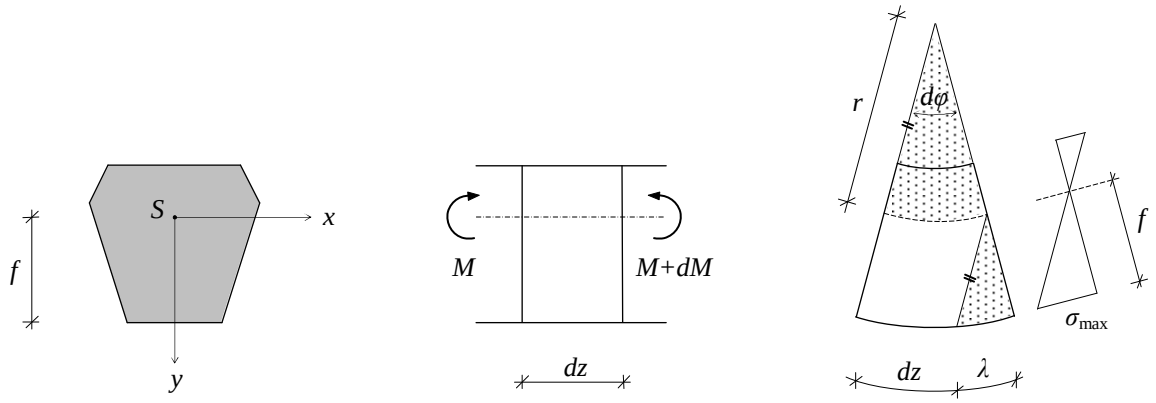
Az alakváltozásokat általában az elmozdulásokkal – az y eltolódással és a φ elfordulással – jellemezzük (9.1 ábra). Eltolódás a tartó tengelyvonalának egy pontja és ugyanannak a pontnak az alakváltozás utáni helyzete közötti távolság. Vízszintes helyzetű tartók esetében az eltolódásokat lehajlásnak is nevezzük. Elfordulás az a szög, amelyet az elfordult keresztmetszet síkja zár be az alakváltozás előtti síkjával. Az eltolódásokat milliméterben vagy centiméterben szokás megadni, míg az elfordulás mérésére a radiánt és a százalékot [%=100×radián] is használjuk. Az elfordulás megadása talán fokokban a legszemléletesebb [360° = 2π rad → fok = 57.3×radián].

Az alakváltozások meghatározására a következőkben három módszert ismertetünk. A vizsgálatot elvégezhetjük a rugalmas vonal differenciálegyenletének felírásával és megoldásával, a Mohr-módszer segítségével, illetve munkatételek alkalmazásával.

9.1 A tartó meggörbült tengelyvonalának differenciálegyenlete

Ez a legbonyolultabb módszer. Elméletileg igen fontos viszont a jelenség mélyebb megértése céljából. Gyakorlatilag igen hasznos, mert zárt képletek vezethetők le egyszerűbb kialakítású tartók esetében, amelyek a gyakorlati munka során lehetővé teszik a tartó igen egyszerű és azonnali vizsgálatát.

Tekintsük ismét a 9.1 ábrán vázolt hajlított tartót. Célunk a tartó meggörbült tengelyvonalának meghatározása. Legyen a tartó keresztmetszetének tehetetlenségi nyomatéka I_x és a húzott szélsőszál távolsága a súlyponttól f (9.2/a ábra). A meggörbült tengelyvonal meghatározása céljából összefüggést keresünk a tartón működő nyomaték (9.2/b ábra) és az általa létrehozott alakváltozás között (9.2/c ábra). A tartón működő nyomaték hatására kialakul a keresztmetszet húzott és nyomott öve: a 9.1 ábrán vázolt elrendezés esetében a semleges tengely felett nyomás, alatta húzás keletkezik. Ennek következtében a tartó meggörbül és y függőleges eltolódások keletkeznek.



a) a rúd keresztmetszete

b) *dz* elemi szakasz alakváltozás előtt

c) *dz* elemi szakasz alakváltozás után

9.2 ábra. Hajlított tartó alakváltozása.

Feltételezéseink szerint tartónk rugalmasan viselkedik és érvényes a Hooke-törvény:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Az egyenlet jobboldalán szereplő ε fajlagos nyúlás helyére behelyettesíthető a 9.2/c ábra alapján az

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{dz}$$

összefüggés. Ezt a fajlagos nyúlást a súlyponttól f távolságra lévő szélsőszálban a

$$\sigma = \frac{M}{\frac{I_x}{f}} = \frac{M}{I_x} f$$

normálfeszültség okozza, amit pedig az egyenlet baloldalára helyettesíthetünk be. A két helyettesítéssel az

$$\sigma = \frac{M}{I_x} f = E\varepsilon = E\frac{\lambda}{dz} \qquad \rightarrow \qquad \frac{M}{I_x} f = E\frac{\lambda}{dz}$$

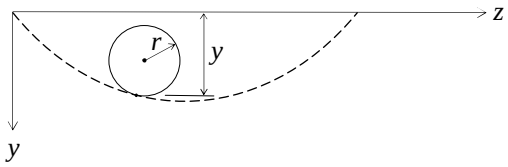
összefüggéshez jutunk. A rúd görbülete a mérnöki számítások területén megfelelő pontossággal r sugarú körrel közelíthető (9.2/c ábra). Ezt hívjuk simulókörnek (9.3 ábra). A 9.2/c ábra két hasonló körcikkét felhasználva azt találjuk, hogy

$$\frac{\lambda}{dz} = \frac{f}{r}$$

és így a fenti egyenlet az

$$\frac{M}{EI_x} = \frac{1}{r}$$

alakot ölti.



9.3 ábra. Simulókör az y eltolódásnál.

Matematikai tanulmányainkból ismeretes a simulókör sugarát definiáló

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$$

kifejezés, ahol y az eltolódás. Feltételezéseink szerint az alakváltozások kicsinyek és így az y mellett az y' is kicsiny és így érvényes, hogy $y'^2 << 1$. Ebből az következik, hogy élhetünk a

$$\sqrt{(1+y'^2)^3} \cong 1$$

közelítéssel. Figyelembe véve azt, hogy a 9.3 ábrán vázolt alulról domború görbület (amelyet a pozitív nyomaték okoz) definíció szerint negatív, a meggörbült tengelyvonal differenciál-egyenlete a következő végleges alakban írható:

$$y''(z) = -\frac{M(z)}{EI_x} \tag{9.1}$$

Az egyenletben $y(z)$ a meggörbült tengelyvonal függvénye, $M(z)$ a nyomaték függvénye, E a tartó anyagának rugalmassági tényezője és I_x a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka a hajlítás síkjára merőleges súlyponti tengelyre. A hiányos másodrendű differenciálegyenlet általános megoldása kétszeres integrálással viszonylag egyszerűen előállítható.

A következőkben ezt mutatjuk be a 9.4 ábrán vázolt konzoltartó esetében. A

koordinátarendszert úgy helyezzük el, hogy a vízszintes *z* tengely a rúd tengelyén megy keresztül, a függőleges *y* tengely pedig a konzol végén lévő *F* koncentrált erő hatásvonala. A koordinátarendszer kezdőpontja így az *F* erő támadáspontjával azonos.

A nyomaték értéke *z*-nél $M(z) = -Fz$, így az általános alakú (9.1) differenciálegyenlet esetünkben az

$$EI_x y''(z) - Fz = 0$$

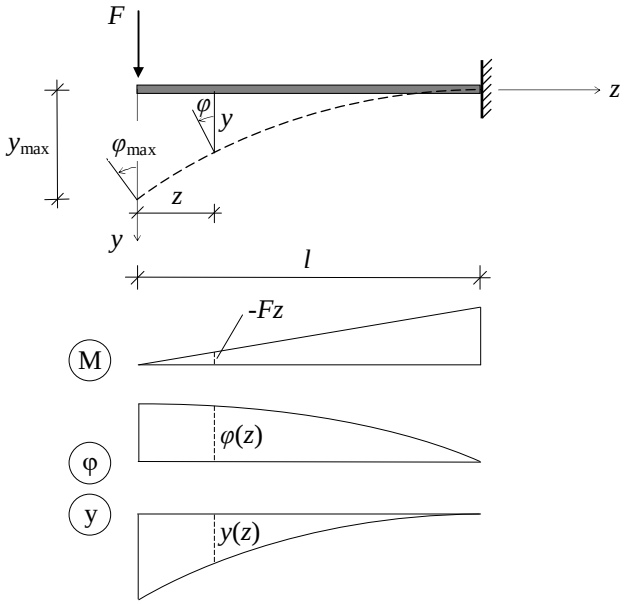
alakot ölti. A megoldáshoz két peremfeltételre van szükség. Ezek a következők:

1) A tartó eltolódása a befogás helyén ($z = l$-nél) zérus:

$$y(l) = 0$$

2) A meggörbült tengelyvonal érintője a befogásnál vízszintes:

$$y'(l) = 0$$



9.4 ábra. Koncentrált erővel terhelt konzoltartó elfordulásai és eltolódásai.

Integráljuk a differenciálegyenletet egyszer:

$$\int_0^l [EI_x y''(z) - Fz]dz = EI_x y'(z) - F\frac{z^2}{2} + c_1 = 0$$

A c_1 integrációs állandót a második peremfeltétel – $y'(l) = 0$ – segítségével állapíthatjuk meg:

$$-F\frac{l^2}{2} + c_1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad c_1 = F\frac{l^2}{2}$$

Ezt visszahelyettesítjük a differenciálegyenletbe

$$EI_x y'(z) - F\frac{z^2}{2} + F\frac{l^2}{2} = 0$$

ahonnan megkapjuk az elfordulások függvényét (9.4 ábra):

$$\varphi(z) = y'(z) = \frac{F}{EI_x}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{l^2}{2}\right)$$

Maximális elfordulás a tartó végén (z = 0-nál) jön létre:

$$\varphi_{\max} = \varphi(0) = -\frac{Fl^2}{2EI_x} \tag{9.2}$$

Még egyszer integráljuk a differenciálegyenletet:

$$\int_0^l \left(EI_x y'(z) - F\frac{z^2}{2} + F\frac{l^2}{2}\right) dz = EI_x y(z) - F\frac{z^3}{2\cdot 3} + F\frac{l^2 z}{2} + c_2 = 0$$

A c_2 integrációs állandót az első peremfeltétel – $y(l) = 0$ – segítségével állapítjuk meg:

$$F\left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{2\cdot 3}\right) + c_2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad c_2 = -F\frac{l^3}{3}$$

Ezt visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$EI_x y(z) - F\frac{z^3}{2\cdot 3} + F\frac{l^2 z}{2} - F\frac{l^3}{3} = 0$$

a függőleges eltolódások függvénye (a lehajlásfüggvény) már előállítható (9.4 ábra):

$$y(z) = \frac{F}{EI_x}\left(\frac{z^3}{6} - \frac{l^2 z}{2} + \frac{l^3}{3}\right) \tag{9.3}$$

Maximális eltolódás a tartó végén (z = 0-nál) jön létre:

$$y_{\max} = y(0) = \frac{Fl^3}{3EI_x} \tag{9.4}$$

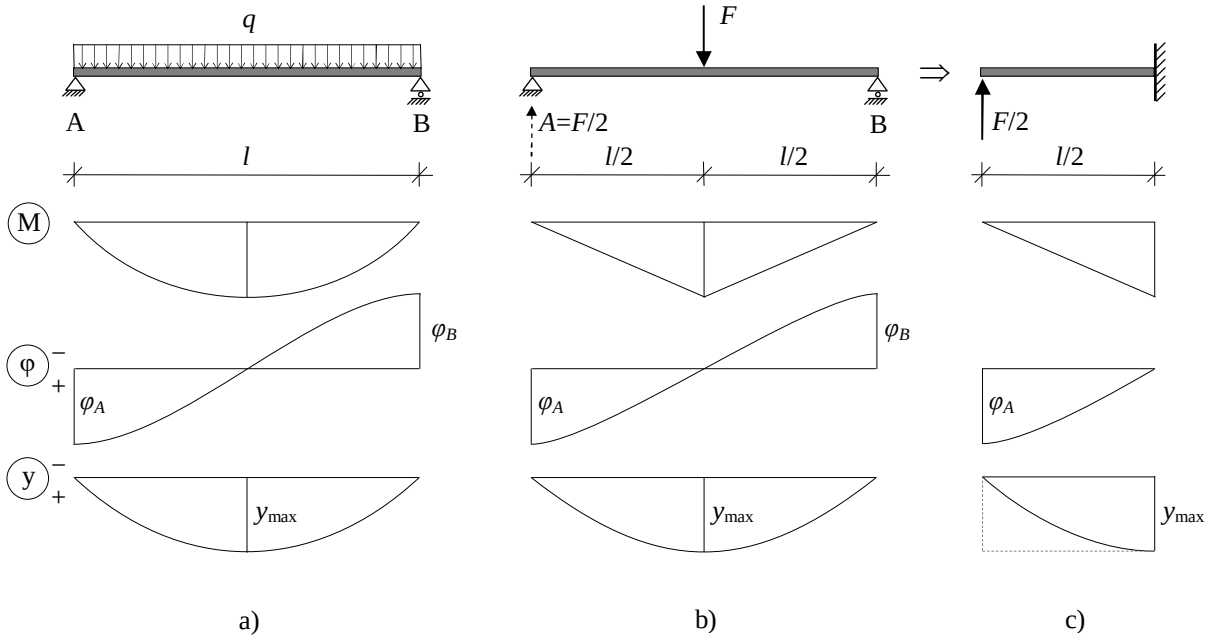
Hasonló módon vizsgálható a 9.5/a ábrán látható, egyenletesen megoszló erőkkel terhelt kéttámaszú tartó. A maximális (támaszponti) elfordulásra a

$$\varphi_{\max} = \varphi_A = -\varphi_B = \frac{ql^3}{24EI_x} \tag{9.5}$$

a maximális eltolódásra pedig (a támasz közepén) az

$$y_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI_x} \tag{9.6}$$

értéket kapjuk. A tartó maximális elmozdulásainak részletes meghatározása (munkatételekkel) a 9.5 pont 5. feladatánál található.



9.5 ábra. Kéttámaszú tartó alakváltozása. a) megoszló teher hatására, b) koncentrált erő hatására, c) tartómodell a koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartóhoz.

Némileg bonyolultabb a helyzet a 9.5/b ábrán vázolt, középen koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó esetében. A feladat látszólag ugyanolyan egyszerű mint a megoszló erőkkel terhelt tartó esetében, de az a tény hogy a nyomatékábra – a középen lévő töréspont miatt – nem jellemezhető egyetlen függvénnyel, hosszadalmasabbá teszi a differenciálegyenlet felírását és megoldását. Egyszerűbben jutunk a megoldáshoz, ha észrevesszük, hogy a kéttámaszú tartó „fele” egy konzoltartóval (9.5/c ábra) modellezhető az alakváltozás-számításhoz és ennek a konzoltartónak már megvan a megoldása a (9.2) és (9.4) képletek formájában. Nem kell mást tenni, csak $F/2$-t és $l/2$-t helyettesíteni az erő és a fesztáv helyére és ezzel elő is állítottuk a kéttámaszú, középen F koncentrált erővel terhelt tartó legnagyobb elfordulását és eltolódását:

$$\varphi_{\max} = \varphi_A = -\varphi_B = \frac{Fl^2}{2EI_x} \Rightarrow \frac{1}{2EI_x}\frac{F}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Fl^2}{16EI_x} \tag{9.7}$$

és

$$y_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI_x} \Rightarrow \frac{1}{3EI_x}\frac{F}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{Fl^3}{48EI_x} \tag{9.8}$$

A megoldás igen egyszerűen állítható elő Otto Mohr módszerével is, amit a következő pontban mutatunk be.

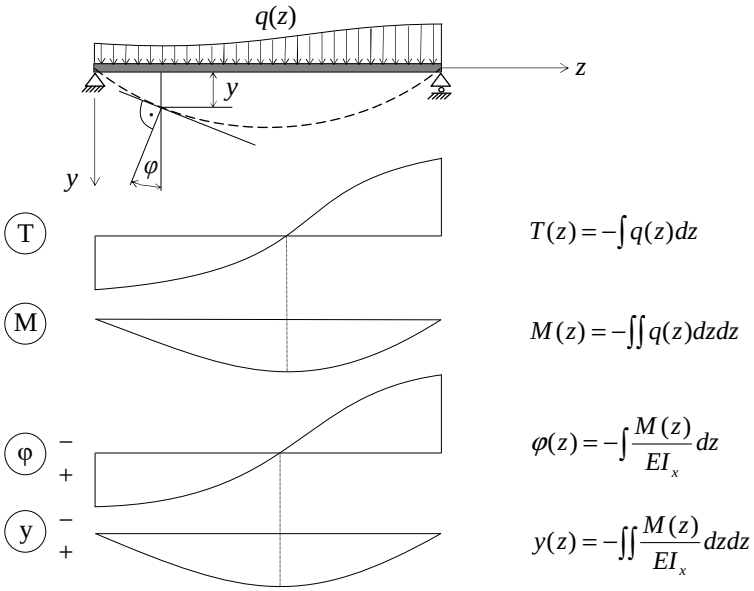
9.2 Az alakváltozások meghatározása Otto Mohr módszerével

Mohr I. tétel és Mohr II. tétel néven Otto Mohr 1868-ban ismertette két eljárását, amelyek segítségével meghatározhatjuk hajlított tartók elfordulását és eltolódását. Ebben a pontban ezek módosított változatát ismertetjük.

Korábbi tanulmányaink – a határozott tartók vizsgálata – során azt láttuk, hogy kapcsolat van a teher, a nyíróerő és a nyomaték között. Megállapítottuk, hogy a 9.6 ábrán vázolt, tetszőleges megoszlású teherrel terhelt tartó esetében érvényesek a

$$\frac{dT}{dz} = -q(z) \qquad \text{és} \qquad \frac{dM}{dz} = T(z)$$

összefüggések.



9.6 ábra. Összefüggés a teher, a nyíróerő, a nyomaték, az elfordulás és az eltolódás között.

Felírható tehát, hogy a nyíróerő és a nyomaték közvetlenül meghatározható a teher segítségével:

$$T(z) = -\int q(z)dz \qquad \text{és} \qquad M(z) = \int T(z)dz = -\iint q(z)dzdz$$

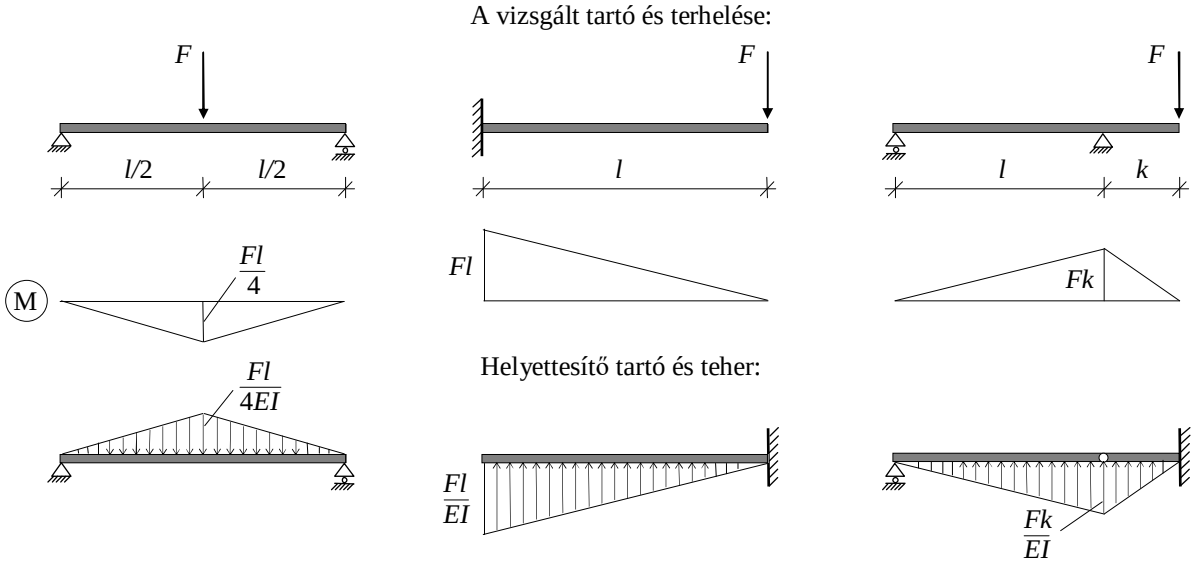
Integrálva a meggörbült tengelyvonal (9.1) differenciálegyenletét egyszer, majd még egyszer, felírható az elfordulásra, majd az eltolódásra vonatkozó

$$\varphi(z) = y'(z) = -\int \frac{M(z)}{EI_x}dz \qquad \text{és} \qquad y(z) = -\iint \frac{M(z)}{EI_x}dzdz \tag{9.9}$$

összefüggés. A megfelelő összefüggések ($T \rightarrow \varphi$ és $M \rightarrow y$) összehasonlítása azt mutatja, hogy ha az M/EI_x mennyiséget tehernek tekintjük, akkor az elfordulások és eltolódások a tartón ugyanúgy számíthatók ki, mint a nyíróerők és nyomatékok. (Az M/EI_x mennyiséget redukált nyomatéknak és helyettesítő tehernek is szokás nevezni.)

Az analógia akkor teljes, ha a peremfeltételek azonosak. Ez az eset áll fenn a kéttámaszú

tartó esetében, ahol a nyomatékok is és az eltolódások is a támaszoknál zérus értékűek. Így a számítást ekkor az eredeti tartón hajtjuk végre. Konzoltartók esetében a peremfeltételek „fordítottak”: a nyomaték értéke a tartó szabad végén, az eltolódás értéke a befogásnál zérus. A számítást ekkor egy „fordított tartón” – az ún. helyettesítő tartón – kell végrehajtani. A helyettesítő tartó szabad vége ott van ahol az eredeti tartó befogása, és a befogott vége az eredeti tartó szabad végénél van. Konzolos kéttámaszú tartó esetében a helyettesítő tartót úgy kapjuk, hogy „kombináljuk” a kéttámaszú és a konzoltartó helyettesítő tartóit: a konzolos végnél lesz a befogás és a konzol melletti támasznál Gerber-csuklót helyezünk el. A helyettesítő tartókat a 9.7 ábrán vázoljuk.



9.7 ábra. Helyettesítő tartó és teher a Mohr-módszer alkalmazásához.

Az eljárás tehát a következő:

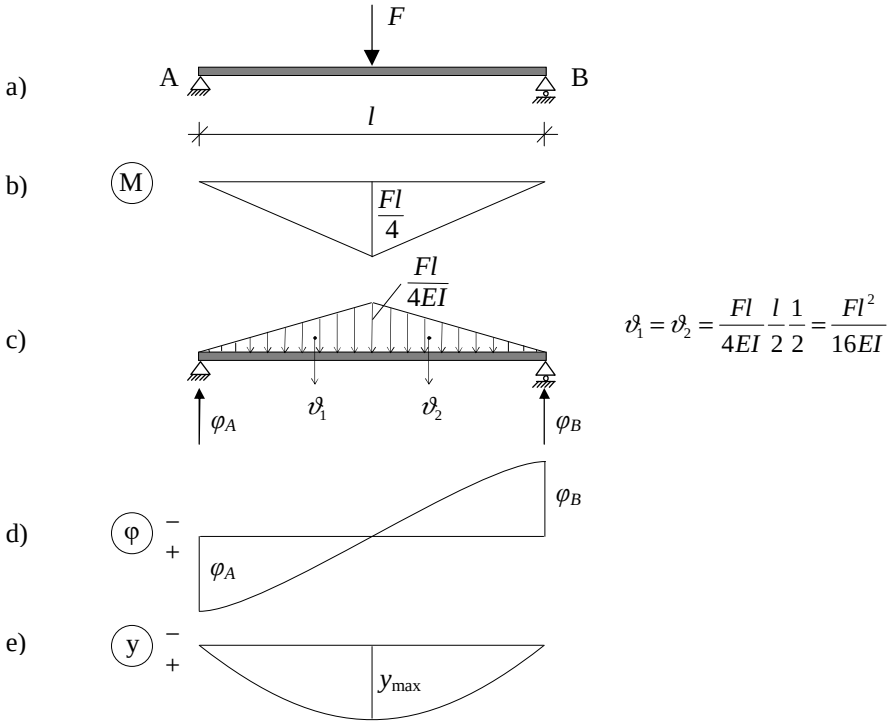
1) Helyettesítő tartót képezünk (9.7 ábra)
2) Az eredeti tartó *EI*-vel redukált nyomatékábráját képzelt (helyettesítő) terhelésként a helyettesítő tartóra helyezzük
3) Meghatározzuk a helyettesítő tartó nyíróerőit és nyomatékait, amelyek megegyeznek az eredeti tartó bármely pontjában az elfordulás és eltolódás értékeivel

Fentiek illusztrálása céljából határozzuk meg a középen koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó legnagyobb elfordulását és eltolódását (9.8/a ábra). Legyen a tartó anyagának rugalmassági tényezője E és a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka I. A tartó nyomatékábráját (9.8/b ábra) az *EI*-vel történt redukálás után teherként rátesszük a helyettesítő tartóra (9.8/c ábra), ami a kéttámaszú tartó esetében megegyezik az eredeti tartóval. A nyíróerő-ábra megegyezik a tartó elfordulásábrájával (9.8/d ábra), a nyomatékábra pedig az eltolódások ábráját adja (9.8/e ábra). Az ábrák megszerkesztéséhez szükségünk van a reakcióerőkre (amelyek azonosak a támaszponti elfordulásokkal). Ezek egyben a tartó maximális elfordulásai. A szimmetrikus elrendezés miatt a két reakció a külső teher fele:

$$\varphi_{\max} = \varphi_A = -\varphi_B = \frac{\frac{Fl}{4EI}\frac{l}{2}}{2} = \frac{Fl^2}{16EI}$$

Az eltolódási ábra előállítása a nyomatékszámítás lépéseit követi. Legnagyobb eltolódás a tartó közepén jön létre, ezért itt számítjuk ki a középponttól balra lévő „erők” „nyomatékát”:

$$y_{\max} = \varphi_A \frac{l}{2} - \vartheta_1 \frac{l}{2}\frac{1}{3} = \frac{Fl^2}{16EI}\frac{l}{2} - \frac{Fl^2}{16EI}\frac{l}{6} = \frac{Fl^3}{48EI}$$



9.8 ábra. Kéttámaszú tartó maximális elmozdulásai a Mohr-módszer alkalmazásával.

Végül bemutatjuk a munkatételek alkalmazására épülő módszert, amely tetszőleges megtámasztású tartók esetében is jól használható az alakváltozások értékének meghatározására a tartó egy adott pontjában.

9.3 Az alakváltozások meghatározása munkatételek segítségével

A gyakorlati számítások során meglehetősen nagy munkát jelentene a meggörbült tengelyvonal differenciálegyenletének felírása és megoldása és a gyakorlati esetek többségében nincs is szükség a teljes eltolódás-, illetve elfordulás-függvényre. Rendszerint elegendő a maximális értékeket meghatározni, amelyek helye általában ismert. Kéttámaszú tartók és konzoltartók esetében a Mohr-módszer segítségével könnyen meghatározhatjuk maximális alakváltozásokat, de összetettebb tartók esetében az eljárás nehézkessé válhat. Általános érvényű módszerhez jutunk, ha a szilárdságtan munkatételeit használjuk fel az elfordulások és eltolódások meghatározására. Az energia-megmaradás elvét felhasználó és a külső és belső munka egyenlőségére épülő módszer elméleti háttere szerteágazó ismereteket követel, amelyek tárgyalása meghaladja e jegyzet kereteit, így itt csak a végeredményeket ismertetjük, amelyek elegendően egyszerűek a biztonságos gyakorlati felhasználáshoz.

Egyenestengelyű, prizmatikus rudakat vizsgálunk, amelyeknél E a tartó anyagának rugalmassági tényezője és I a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka. A tartó elfordulását egy adott pontban a

$$\varphi = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P(z) M_{Q,\varphi}(z)\,dz \tag{9.10}$$

összefüggés segítségével határozhatjuk meg, ahol

$M_P(z)$ az adott külső teherből keletkező nyomatékfüggvény és
$M_{Q,\varphi}(z)$ a vizsgált helyre beiktatott egységnyi, virtuális (képzelt), dimenziótlan nyomatékból keletkező nyomatékfüggvény.

A tartó eltolódását egy adott pontban az

$$y = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P(z) M_{Q,y}(z)\,dz \tag{9.11}$$

összefüggés segítségével határozhatjuk meg, ahol

$M_P(z)$ az adott külső teherből keletkező nyomatékfüggvény (mint az elfordulásszámításnál) és
$M_{Q,y}(z)$ a vizsgált helyre beiktatott egységnyi, virtuális (képzelt), dimenziótlan erőből keletkező nyomatékfüggvény.

A (9.10) és (9.11) képletek jobboldalán szereplő szorzatintegrálok a gyakorlati esetek túlnyomó részében jelentősen egyszerűsödnek és terület- és súlypontszámítást kell csak végrehajtani. Az egyszerűsödések mértéke az $M_P(z)$ és $M_Q(z)$ függvények jellegétől függ, az alábbi három lehetőség, illetve szabály szerint:

1) Mindkét nyomatékábra lineáris

A nyomatékábrát akkor tekintjük lineárisnak, ha a nyomatékfüggvény iránytényezője a tartó teljes hossza mentén azonos.

Ekkor vesszük az *egyik* ábra területét – mindegy hogy melyiket – és megszorozzuk a *másik* ábrának azzal az ordinátájával, amelyik e terület súlyponti abszcisszájához tartozik.

2) Az egyik nyomatékábra lineáris, a másik ábra nemlineáris

Ekkor a *nemlineáris ábra területét kell venni* és megszorozni a *másik* (lineáris) ábrának azzal az ordinátájával, amelyik e terület súlyponti abszcisszájához tartozik.

3) Egyik nyomatékábra sem lineáris, de legalább az egyik lineáris szakaszokra osztható föl

Ekkor a tartót a teljes hossza mentén szakaszokra bontjuk fel, úgy, hogy legalább az egyik ábra lineáris szakaszokból álljon. Ezután szakaszonként a 2. pont – vagy az 1. pont – szerint járunk el és az értékeket a tartó teljes hossza mentén összegezzük.

A 3. pont szerint kell eljárni akkor is, amikor az egyik nyomatékfüggvény a tartó hossza mentén előjelet vált. A szakaszokra bontás célja ekkor az, hogy ne maradjon olyan szakasz amelyen belül a nyomatékfüggvény előjelet vált.

Amikor azt vizsgáljuk, hogy a nyomatékábra lineáris-e, akkor mindig a *teljes* nyomatékábrát kell figyelembe venni, vagyis a tartó teljes hossza mentén kell a nyomatéki értékeket tekinteni, beleértve az esetlegesen zérus értékeket tartalmazó szakaszokat is.

Összetett terhelésű tartók esetében célszerű lehet a terheket egyenként kezelni. A tartó elmozdulását az egyes alesetek elmozdulásainak összegzésével kapjuk meg.

Az elmozdulás előjele a legtöbb esetben nyilvánvaló és így célszerű előre eldönteni. A vizsgált helyre beiktatott virtuális erőt/nyomatékot célszerű az elmozdulás várható irányával egyezően beiktatni. Ha az előjelet nem tudjuk előre eldönteni – például azért, mert az M_P nyomatékábra előjelet vált – akkor szigorúan figyelemmel kell lenni a területek és ordináták előjelét illetően, és a következő előjelszabályt alkalmazzuk: ha az elmozdulást pozitív előjellel kapjuk meg, akkor az illető elmozdulás iránya megegyezik a vizsgált helyre

beiktatott virtuális erő/nyomaték irányával. Ha a számított elmozdulás előjele negatív, akkor a tényleges elmozdulás iránya a beiktatott virtuális erő/nyomaték irányával ellentétes. A számítás során a területeket és ordinátákat előjeles mennyiségként kell kezelni!

Rácsos tartók esetében a tartó eltolódását az

$$y = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_{P,i} S_{Q,i}}{EA_i} s_i \tag{9.12}$$

képlet felhasználásával számíthatjuk ki, ahol

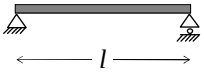
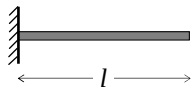
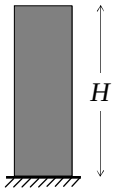
$S_{P,i}$ az adott külső teherből keletkező rúderő az i-edik rácsrúdban,
$S_{Q,i}$ a vizsgált helyen működtetett egységnyi, virtuális (képzelt), dimenziótlan erőből keletkező rúderő az i-edik rácsrúdban,
A_i az i-edik rácsrúd keresztmetszeti területe,
s_i az i-edik rácsrúd hossza,
E a tartó anyagának rugalmassági tényezője.

A vizsgált helyen működtetett egységnyi, virtuális (képzelt), dimenziótlan erőt/nyomatékot a megkülönböztetés céljából szaggatott vonallal szokás ábrázolni.

9.4 Merevségi követelmények

A fejezet első bekezdésében összefoglaltuk az alakváltozások meghatározásának és korlátozásának fontosságát. A korlátozásokat úgy szokás érvényesíteni, hogy a szabványokban – merevségi követelmények megnevezéssel – határértékeket adnak meg. Bár ezeket a határértékeket minden esetben az éppen aktuális szabványok alapján kell megkeresni és érvényesíteni, és ezek időről időre változhatnak, a mérnöki érzék fejlesztése érdekében az alábbi 9.1 táblázatban megadunk néhány jellegzetes esetre olyan határértékeket, amelyek – ökölszabályok formájában – hosszú idők alatt váltak ismertté és elfogadottá a tervezési gyakorlatban.

9.1 táblázat. Merevségi követelmények: elmozdulások javasolt határértékei.

Szerkezet/épület jellege		általában	mérsékeltebb igényszint esetén
Elfordulás (100×radián → %)		1.5%	2.25%
Lehajlás		l/200	l/150
		l/100	l/75
Tetőponti vízszintes eltolódás (épületnél)		H/500	

9.5 Gyakorlati alkalmazás

Az alakváltozás-számítás fontosságát aláhúzva, ebben az alfejezetben azt mutatjuk be nyolc feladat segítségével, hogy a munkatételek alkalmazásával hogyan határozhatjuk meg különböző geometriai elrendezésű, megtámasztású és terhelésű tartók adott pontban keletkező eltolódását és elfordulását. Az *EI* értéke minden feladatnál adott. A tartók feltételezett eltolódásábráját minden esetben megrajzoljuk (szaggatott vonallal).

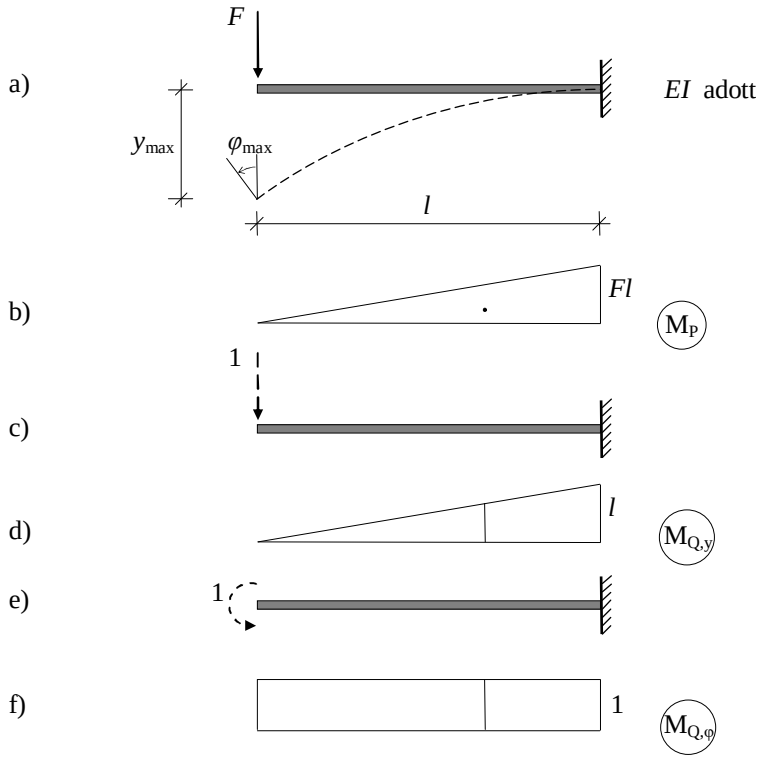
1) Konzoltartó maximális elmozdulásai

Határozzuk meg a 9.9/a ábrán vázolt konzoltartó legnagyobb eltolódását és elfordulását.

A maximális eltolódás (lefelé) és a maximális elfordulás (az óramutató járásával ellentétes irányban) egyaránt a konzoltartó végpontjánál keletkezik.

Az első lépés az adott külső teherből keletkező M_P nyomatékábra megrajzolása (9.9/b ábra). A tartóvég eltolódásának meghatározása céljából ezután működtessünk a tartó végén egy egységnyi virtuális erőt az eltolódás irányában (9.9/c ábra) és rajzoljuk meg az ehhez tartozó $M_{Q,y}$ nyomatékábrát (9.9/d ábra). A (9.11) képlet tanúsága szerint erre a két nyomatékábrára van szükségünk a tartóvég függőleges eltolódásának meghatározásához. Mivel mindkét ábra lineáris, az 1. szabálynak megfelelően járunk el, amely szerint akármelyik ábra területét vehetjük, amit a másik ábrán mért megfelelő ordinátával kell szorozni (és *EI*-vel elosztani). Az M_P nyomatékábra területét vesszük és megszorozzuk az ábra súlypontja alatti és az $M_{Q,y}$ nyomatékábrán mért ordinátával:

$$y = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,y}\,dz = \frac{1}{EI}\frac{Fl\cdot l}{2}\frac{2l}{3} = \frac{Fl^3}{3EI} \quad [\downarrow]$$



9.9 ábra. Konzoltartó maximális elmozdulásai.

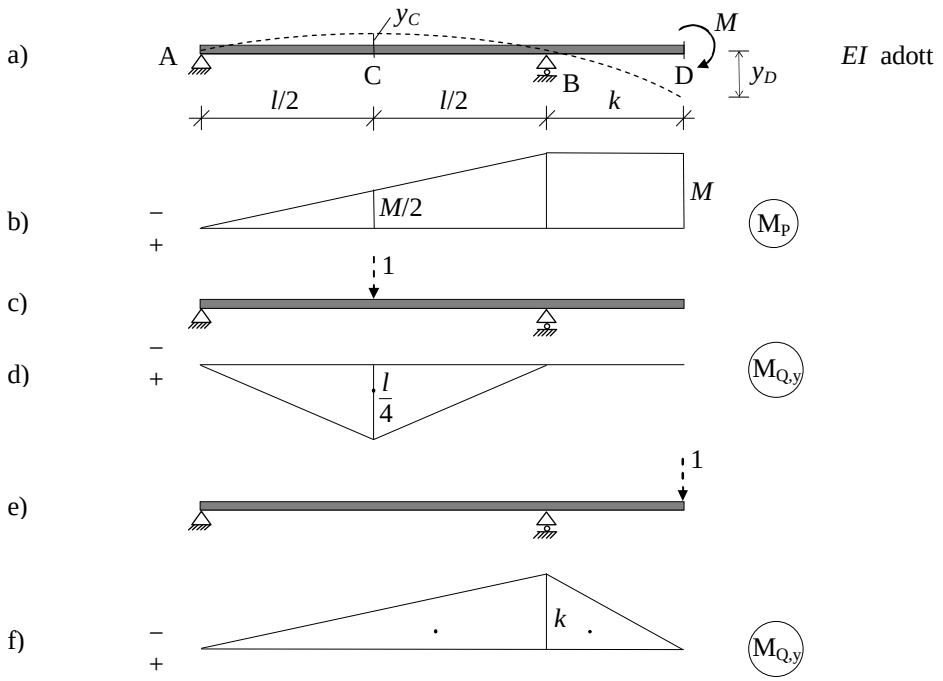
A tartóvég elfordulásának meghatározása céljából működtessünk a tartó végén egy

egységnyi virtuális nyomatékot a keletkező elfordulás forgatóértelmével egyezően (9.9/e ábra) és rajzoljuk meg az ehhez tartozó $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábrát (9.9/f ábra). A (9.10) képlet tanúsága szerint az M_P és $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábrákra van szükségünk a tartóvég elfordulásának meghatározásához. Mivel ismét mindkét ábra lineáris, ismét az 1. szabálynak megfelelően járunk el, amely szerint akármelyik ábra területét vehetjük, amit a másik ábrán mért megfelelő ordinátával kell szorozni (és *EI*-vel elosztani). Az M_P nyomatékábra területét vesszük és megszorozzuk az ábra súlypontja alatti és az $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábrán mért ordinátával:

$$\varphi = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,\varphi}\,dz = \frac{1}{EI}\frac{Fl\cdot l}{2}1 = \frac{Fl^2}{2EI} \quad [\circlearrowleft]$$

2) Konzolos kéttámaszú tartó eltolódásai

Határozzuk meg a 9.10/a ábrán vázolt, *M* koncentrált nyomatékkal terhelt kéttámaszú konzolos tartó függőleges eltolódását a „C” és „D” pontban.



9.10 ábra. Koncentrált nyomatékkal terhelt konzolos kéttámaszú tartó eltolódásai.

Szemléletből megállapítható, hogy az adott külső terhelés hatására a „C” pont felfelé, a „D” pont pedig lefelé tolódik el. Mindkét eltolódás meghatározásához szükségünk van az adott külső teher okozta M_P nyomatékábrára (9.10/b ábra).

A „C” pontban bekövetkező függőleges eltolódás meghatározásához a „C” pontban működtetni kell egy egységnyi függőleges virtuális erőt (9.10/c ábra). Az ennek hatására keletkező $M_{Q,y}$ nyomatékábrát a 9.10/d ábrán találjuk. A „C” pont eltolódásának meghatározásához az M_P és az $M_{Q,y}$ nyomatékábrákra van szükség. A tartó teljes hosszát tekintve mindkét nyomatékábra nemlineáris (mert a nyomatékfüggvény iránytényezője nem azonos a tartó teljes hossza mentén), tehát a 3. szabályt kell alkalmazni. A harmadik szabály szerint a nyomatékábrákat szakaszokra bontjuk, úgy, hogy legalább az egyik ábra lineáris szakaszokból álljon. Esetünkben a „B” támasz egyenesében állapítunk meg szakaszhatárt. Ekkor az M_P nyomatékábra két lineáris szakaszból áll, míg az $M_{Q,y}$ nyomatékábra baloldali

szakasza továbbra is nemlineáris, a jobb oldali része pedig zérus nyomatékértékeket tartalmaz. Ezek szerint a területeket az $M_{Q,y}$ nyomatékábra segítségével *kell* megállapítani, az ordinátákat pedig az M_P nyomatékábráról vesszük. A jobboldali zérus értékek miatt egyetlen terület és egyetlen ordináta kerül be a számításba:

$$y_C = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,y}\,dz = -\frac{1}{EI}\frac{l\cdot l}{4\cdot 2}\frac{M}{2} = -\frac{Ml^2}{16EI} \quad [\uparrow]$$

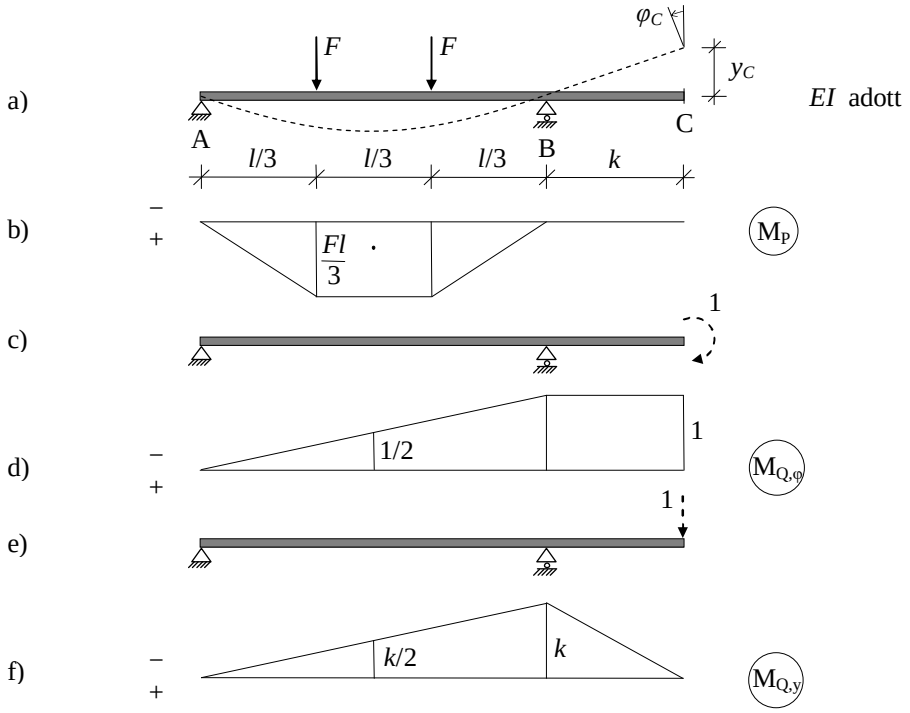
A negatív előjel arra figyelmeztet, hogy az eltolódás nem lefelé (a virtuális erővel azonos irányban) történik, hanem felfelé. (Ezt már a számítás elején megállapítottuk, de – gyakorlásképpen – nem felfelé mutató virtuális erőt iktattunk be a 9.10/c ábrán.)

A „D” pont függőleges eltolódásának meghatározásához a „D” pontban kell működtetni egy egységnyi függőleges virtuális erőt (9.10/e ábra). Az ennek hatására keletkező $M_{Q,y}$ nyomatékábrát a 9.10/f ábrán találjuk. A „D” pont eltolódásának meghatározásához az M_P és erre az $M_{Q,y}$ nyomatékábrákra van szükség. Mindkét nyomatékábra nemlineáris, tehát a 3. szabályt kell alkalmazni. A harmadik szabály szerint a nyomatékábrákat szakaszokra bontjuk, úgy, hogy legalább az egyik ábra lineáris szakaszokból álljon. Esetünkben a „B” támasz egyenesében állapítunk meg szakaszhatárt. Ekkor az M_P nyomatékábra is és az $M_{Q,y}$ nyomatékábra is két lineáris szakaszból áll. Ezek szerint bármelyik ábrát felhasználhatjuk a területek kiszámításához. Válasszuk az $M_{Q,y}$ nyomatékábrát (9.10/f ábra) a területszámításhoz, az ordinátákat pedig az M_P nyomatékábráról vesszük:

$$y_D = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,y}\,dz = \frac{1}{EI}\left(\frac{lk}{2}\frac{2M}{3} + \frac{k\cdot k}{2}M\right) = \frac{M}{EI}\left(\frac{lk}{3} + \frac{k^2}{2}\right) \quad [\downarrow]$$

3) Konzolos kéttámaszú tartó konzolvégi elmozdulásai

Határozzuk meg a 9.11/a ábrán vázolt kéttámaszú konzolos tartó konzolos „C” jelű végének függőleges eltolódását és elfordulását.



9.11 ábra. Koncentrált erőkkel terhelt konzolos kéttámaszú tartó végponti elmozdulásai.

Szemléletből megállapítható, hogy az adott külső terhelés hatására a „C” pont felfelé tolódik el, az elfordulása pedig az óramutató járásával ellentétes. Mindkét elmozdulás meghatározásához szükségünk van a külső teher okozta M_P nyomatékábrára (9.11/b ábra).

A „C” pontban bekövetkező elfordulás meghatározásához a „C” pontban működtetni kell egy egységnyi virtuális nyomatékot (9.11/c ábra). Az ennek hatására keletkező $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábrát a 9.11/d ábrán találjuk. A „C” pont elfordulásának meghatározásához az M_P és az $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábrákra van szükség. Mindkét nyomatékábra nemlineáris, tehát a 3. szabályt kell alkalmazni. A harmadik szabály szerint a nyomatékábrákat szakaszokra bontjuk, úgy, hogy legalább az egyik ábra lineáris szakaszokból álljon. Esetünkben a „B” támasz egyenesében állapítunk meg szakaszhatárt. Ekkor az $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábra két lineáris szakaszból áll, míg az M_P nyomatékábra baloldali szakasza nemlineáris, a jobb oldali része pedig zérus nyomatékértékeket tartalmaz. Ezek szerint a területeket – jelen esetben egy területet – az M_P nyomatékábra segítségével kell megállapítani, az ordinátákat – jelen esetben egy ordinátát – pedig az $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábráról vesszük. A jobboldali zérus értékek miatt így egyetlen terület és egyetlen ordináta kerül be a számításba:

$$\varphi = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,\varphi}\,dz = -\frac{1}{EI}\frac{Fl}{3}\frac{2l}{3}\frac{1}{2} = -\frac{Fl^2}{9EI} \quad [\circlearrowleft]$$

A negatív előjel arra figyelmeztet, hogy az elfordulás nem az óramutató járásával egyező irányban történik (ahogyan a virtuális nyomatékot működtettük), hanem az ellenkező irányban. (De ezt már a számítás elején eldöntöttük.)

A „C” pontban bekövetkező függőleges eltolódás meghatározásához a „C” pontban működtetni kell egy egységnyi függőleges virtuális erőt (9.11/e ábra). Az ennek hatására keletkező $M_{Q,y}$ nyomatékábrát a 9.11/f ábrán találjuk. A „C” pont eltolódásának meghatározásához az M_P és az $M_{Q,y}$ nyomatékábrákra van szükség. Mindkét nyomatékábra nemlineáris, tehát a 3. szabályt kell alkalmazni. A harmadik szabály szerint a nyomatékábrákat szakaszokra bontjuk, úgy, hogy legalább az egyik ábra lineáris szakaszokból álljon. A „B” támasz egyenesében állapítunk meg szakaszhatárt. Ekkor az M_P nyomatékábra baloldali szakasza nemlineáris, a jobboldali része pedig zérus nyomatékértékeket tartalmaz, míg az $M_{Q,y}$ nyomatékábra két lineáris szakaszból áll. Ezek szerint a területeket az M_P nyomatékábra segítségével kell megállapítani, az ordinátákat pedig az $M_{Q,y}$ nyomatékábráról vesszük. A jobboldali zérus értékek miatt egyetlen terület és egyetlen ordináta kerül be a számításba:

$$y_C = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,y}\,dz = -\frac{1}{EI}\frac{Fl}{3}\frac{2l}{3}\frac{k}{2} = -\frac{Fl^2 k}{9EI} \quad [\uparrow]$$

A negatív előjel arra figyelmeztet, hogy az eltolódás nem lefelé történik – ahogyan a virtuális erőt beiktattuk – hanem az ellenkező irányban, felfelé. (De ezt már a számítás elején eldöntöttük.)

4) Koncentrált erővel terhelt konzolos kéttámaszú tartó konzolvégi eltolódása

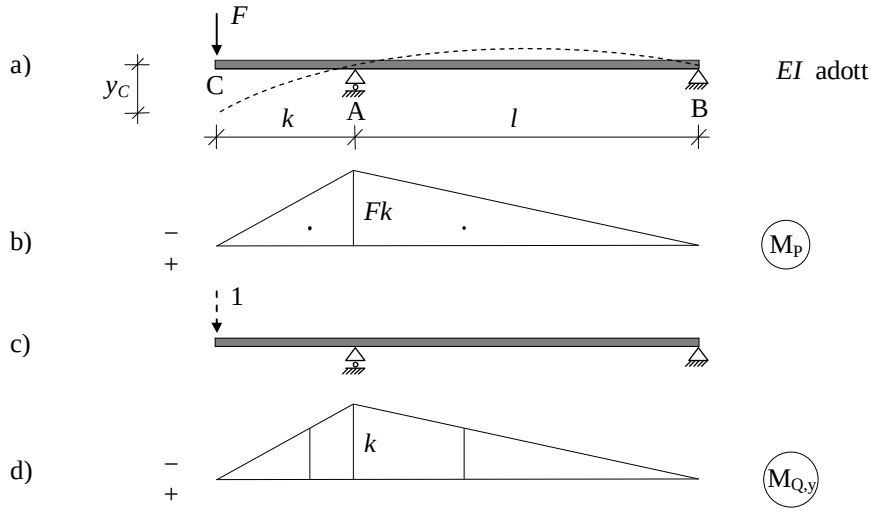
Határozzuk meg a 9.12/a ábrán vázolt tartó „C” konzolvégének függőleges eltolódását.

A terhelő erő hatására keletkező M_P nyomatékábra a 9.12/b ábrán látható. A „C” pont eltolódásának meghatározása céljából a „C” ponton működtetnünk kell egy virtuális egységerőt (9.12/c ábra). Az ehhez a terheléshez tartozó $M_{Q,y}$ nyomatékábrát a 9.12/d ábra tartalmazza.

A „C” pont eltolódásának meghatározásához az M_P és az $M_{Q,y}$ nyomatékábrákra van szükség. Mindkét nyomatékábra nemlineáris, tehát a 3. szabályt kell alkalmazni. A harmadik

szabály szerint a nyomatékábrákat szakaszokra bontjuk, úgy, hogy legalább az egyik ábra lineáris szakaszokból álljon. Esetünkben az „A” támasz egyenesében állapítunk meg szakaszhatárt. Ekkor az M_P nyomatékábra is és az $M_{Q,y}$ nyomatékábra is két lineáris szakaszból áll. Ezek szerint bármelyik ábrát felhasználhatjuk a területek kiszámításához. Válasszuk az M_P nyomatékábrát (9.12/b ábra) a területszámításhoz, az ordinátákat pedig az $M_{Q,y}$ nyomatékábráról vesszük:

$$y_C = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,y}\,dz = \frac{1}{EI}\left(\frac{Fk\cdot k}{2}\frac{2k}{3}+\frac{Fk\cdot l}{2}\frac{2k}{3}\right)=\frac{Fk^2}{3EI}(k+l)\quad [\downarrow]$$



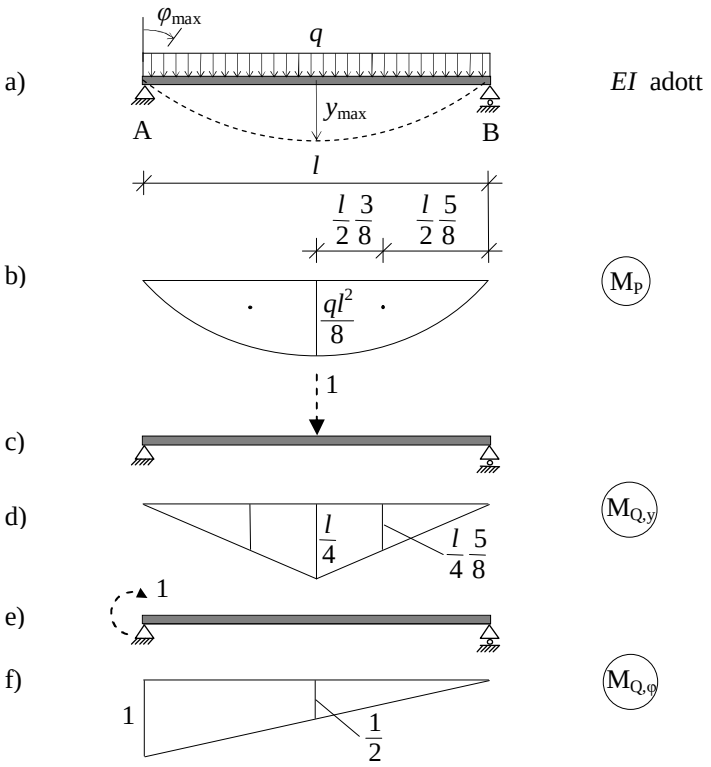
9.12 ábra. Koncentrált erővel terhelt konzolos kéttámaszú tartó konzolvégi eltolódása.

5) Egyenletesen megoszló teherrel terhelt kéttámaszú tartó maximális elmozdulásai

Határozzuk meg a 9.13/a ábrán vázolt q intenzitású egyenletesen megoszló teherrel terhelt kéttámaszú tartó legnagyobb lehajlását és elfordulását.

A külső terhelés hatására keletkező M_P nyomatékábra a 9.13/b ábrán látható. Erre a nyomatékábrára mindkét számítás során szükség lesz. A tartó legnagyobb függőleges eltolódása a támaszköz közepén jön létre, így ott egy függőleges virtuális egységerőt működtetünk (9.13/c ábra). Az ehhez a terheléshez tartozó $M_{Q,y}$ nyomatékábrát a 9.13/d ábra tartalmazza. A függőleges eltolódást az M_P és $M_{Q,y}$ nyomatékábrák segítségével határozzuk meg. Mindkét ábra nemlineáris, tehát a 3. szabályt kell alkalmazni. A harmadik szabály szerint a nyomatékábrákat szakaszokra bontjuk, úgy, hogy legalább az egyik ábra lineáris szakaszokból álljon. Most a tartó középpontjának egyenesében állapítunk meg szakaszhatárt. Ekkor az M_P nyomatékábra két része továbbra is nemlineáris, de az $M_{Q,y}$ nyomatékábra két lineáris szakaszból áll. Ezek szerint a területeket az M_P nyomatékábra segítségével kell megállapítani, az ordinátákat pedig az $M_{Q,y}$ nyomatékábráról vesszük. A maximális függőleges eltolódás így:

$$y_{\max} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,y}\,dz = \frac{1}{EI}\frac{ql^2}{8}\frac{l}{2}\frac{2}{3}\frac{l}{4}\frac{5}{8}2 = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}\quad [\downarrow]$$



9.13 ábra. Egyenletesen megoszló teherrel terhelt kéttámaszú tartó maximális elmozdulásai.

A tartó legnagyobb elfordulása a két támasznál (a szimmetria miatt azonos nagyságban) jön létre. Tekintsük az „A” támaszt és iktassunk be ide egy egységnyi virtuális nyomatékot (9.13/e ábra). Az ennek hatására keletkező $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábrát a 9.13/f ábrán találjuk. A legnagyobb elfordulást az M_P és $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábrák segítségével határozzuk meg. Az M_P függvény nemlineáris, az $M_{Q,\varphi}$ függvény pedig lineáris, tehát a 2. szabály szerint kell eljárni. Ezek szerint a területet az M_P, az ordinátát pedig az $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábra felhasználásával számítjuk ki. Az elfordulás így:

$$\varphi_{max} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,\varphi} dz = \frac{1}{EI}\frac{ql^2}{8}\frac{2l}{3}\frac{1}{2} = \frac{ql^3}{24EI} \quad [\circlearrowleft]$$

6) Koncentrált nyomatékokkal terhelt kéttámaszú tartó elmozdulásai

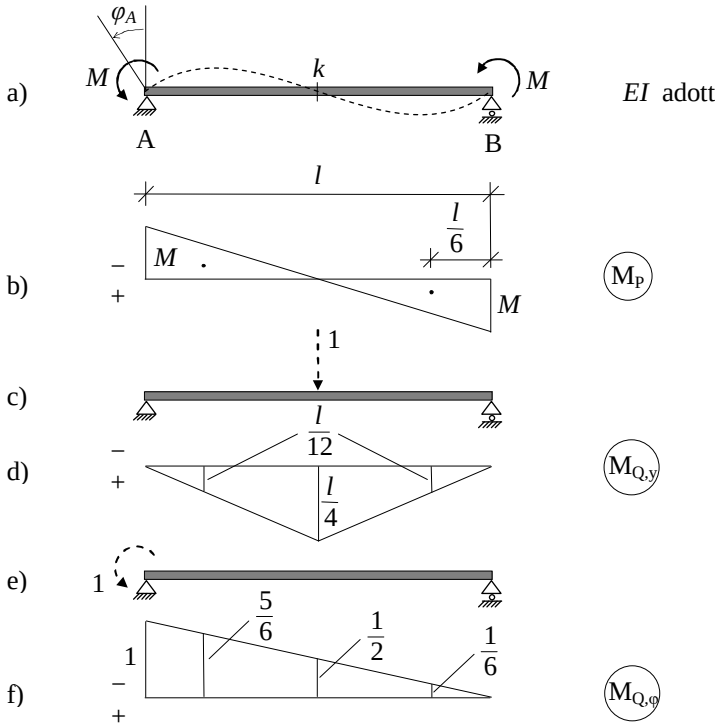
Határozzuk meg a 9.14/a ábrán vázolt M koncentrált végnyomatékokkal terhelt tartó k középpontjának függőleges eltolódását és az „A” támasz elfordulását.

A két koncentrált nyomaték hatására keletkező M_P nyomatékábra a 9.14/b ábrán látható. Erre a nyomatékábrára mindkét számítás során szükség lesz. A „k” pont függőleges eltolódásának meghatározása céljából a „k” pontban – a támaszköz közepén – egy függőleges virtuális egységerőt működtetünk (9.14/c ábra). Az ehhez a terheléshez tartozó $M_{Q,y}$ nyomatékábrát a 9.14/d ábra tartalmazza. A függőleges eltolódást az M_P és $M_{Q,y}$ nyomatékábrák segítségével határozzuk meg. Bár csak az egyik ábra ($M_{Q,y}$) nemlineáris, mégis a 3. szabályt kell alkalmazni, mert a másik függvény (M_P) előjelet vált. A harmadik szabály szerint a nyomatékábrákat szakaszokra bontjuk, úgy, hogy legalább az egyik ábra lineáris szakaszokból álljon és ne legyen olyan szakasz ahol az ábra előjelet vált. A tartó középpontjának egyenesében állapítunk meg szakaszhatárt. Ekkor mindkét ábra lineáris szakaszokból áll és egyik szakasznál sincs előjelváltás. Akármelyik ábrát választhatjuk a területszámításra. Válasszuk az M_P nyomatékábrát a területszámításra és vegyük az

ordinátákat az $M_{Q,y}$ nyomatékábráról. A területek és ordináták előjelét is figyelembe véve a függőleges eltolódás így:

$$y_k = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,y}\,dz = \frac{1}{EI}\left(-\frac{Ml}{2}\frac{1}{2}+\frac{Ml}{2}\frac{1}{2}\right)\frac{l}{12} = 0$$

Ezt az eredményt természetesen már az alakhelyes tartóalak megrajzolásakor is tudtuk.



9.14 ábra. Két koncentrált nyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó elmozdulásai.

Az „A” támasznál keletkező elfordulás meghatározása céljából az „A” támasznál kell egy egységnyi virtuális nyomatékot működtetni (9.14/e ábra). Az ennek hatására keletkező $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábrát a 9.14/f ábrán találjuk. A legnagyobb elfordulást az M_P és $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábrák segítségével határozzuk meg. Bár mindkét ábra lineáris, mégis a 3. szabályt kell alkalmazni, mert az M_P függvény előjelet vált. Ismét a tartó középpontjának egyenesében állapítjuk meg a szakaszhatárt. Ekkor mindkét ábra lineáris szakaszokból áll és egyik szakasznál sincs előjelváltás. Az M_P nyomatékábrát választjuk a területszámításra és az ordinátákat az $M_{Q,y}$ nyomatékábráról vesszük. A területek és ordináták előjelét is figyelembe véve az elfordulás így:

$$\varphi_A = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,\varphi}\,dz = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Ml}{2}\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{Ml}{2}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)\right] = \frac{Ml}{6EI}\quad [\circlearrowleft]$$

7) Gerber-tartó elmozdulásai

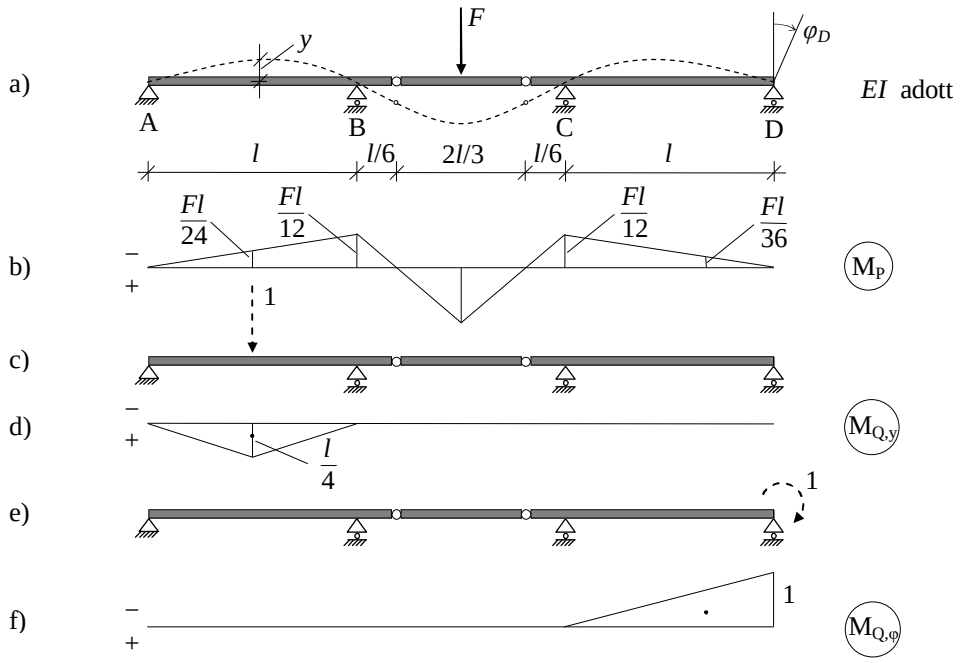
Határozzuk meg a 9.15/a ábrán vázolt, középen egyetlen koncentrált erővel terhelt Gerber-tartó legnagyobb felhajlását és a „D” támasz elfordulását.

A külső teher hatására keletkező M_P nyomatékábra a 9.15/b ábrán látható. Erre a nyomatékábrára mindkét számítás során szükség lesz.

Foglalkozzunk először a felhajlással. Az alakhelyes eltolódásábra (9.15/a ábra) tanúsága szerint a tartó függőleges eltolódásai az AB és CD szakaszokon felfelé, míg a BC szakaszon lefelé jönnek létre. A legnagyobb felemelkedés pontos helyét nem tudjuk, de jó közelítő értéket kapunk, ha a függőleges eltolódás értékét a két szomszédos megtámasztás között félúton számítjuk ki. E célból az AB támaszköz közepén egy függőleges virtuális egységerőt működtetünk (9.15/c ábra). Az ehhez a terheléshez tartozó $M_{Q,y}$ nyomatékábrát a 9.15/d ábra tartalmazza. A függőleges eltolódást az M_P és $M_{Q,y}$ nyomatékábrák segítségével határozzuk meg. Mindkét nyomatékábra nemlineáris. A 3. szabályt kell tehát alkalmazni. A harmadik szabály szerint a nyomatékábrákat szakaszokra bontjuk, úgy, hogy legalább az egyik ábra lineáris szakaszokból álljon. A „B" támasz függőlegesében állapítunk meg szakaszhatárt. Mivel az $M_{Q,y}$ nyomatékábra a „B" támasztól jobbra csak zérus értékeket tartalmaz, csak az AB szakasszal kell foglalkozni. Ekkor az $M_{Q,y}$ nyomatékábra az AB szakaszon továbbra is nemlineáris, de az M_P nyomatékábra ezen a szakaszon lineáris. Ezek szerint a területet az $M_{Q,y}$ nyomatékábra segítségével kell megállapítani, az ordinátát pedig az M_P nyomatékábráról vesszük. A függőleges eltolódás az AB szakasz közepén így:

$$y = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,y}\,dz = -\frac{1}{EI}\,\frac{l}{4}\,\frac{l}{2}\,\frac{Fl}{12}\,\frac{1}{2} = -\frac{Fl^3}{192EI} \quad [\uparrow]$$

A negatív előjel azt jelzi, hogy a függőleges eltolódás nem a virtuális erő irányában, lefelé jön létre, hanem az ellenkező irányban, vagyis felfelé. De ezt már a számítás megkezdésekor megállapítottuk az alakhelyes eltolódásábra segítségével.



9.15 ábra. Gerber-tartó elmozdulásai.

A Gerber-tartó „D" támaszánál bekövetkező elfordulás meghatározása céljából iktassunk be ide egy egységnyi virtuális nyomatékot (9.15/e ábra). Az ennek hatására keletkező $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábrát a 9.15/f ábrán találjuk. A legnagyobb elfordulást az M_P és $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábrák segítségével határozzuk meg. Mindkét nyomatékábra nemlineáris, így a 3. szabályt kell alkalmazni. A harmadik szabály szerint a nyomatékábrákat szakaszokra bontjuk, úgy, hogy legalább az egyik ábra lineáris szakaszokból álljon. Most a „C" támasz

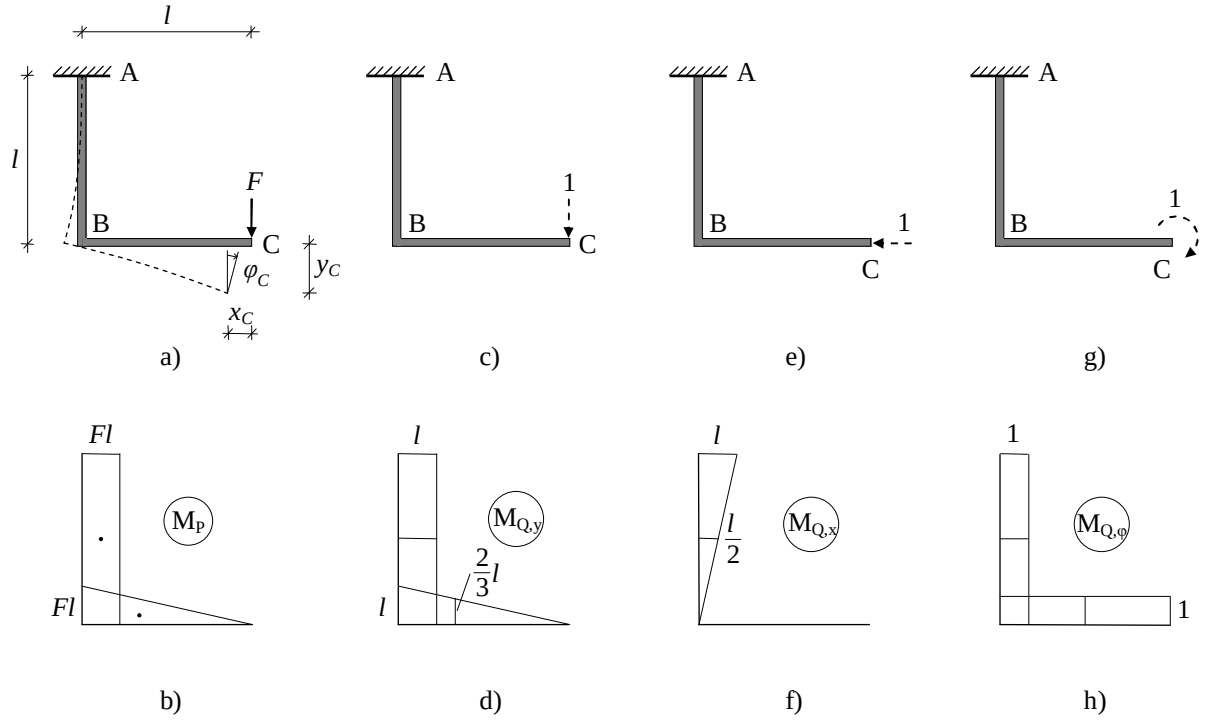
függőlegesében állapítunk meg szakaszhatárt. Mivel az $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábra a „C” támasztól balra csak zérus értékeket tartalmaz, csak a CD szakasszal kell foglalkozni. Ezen a szakaszon mindkét ábra lineáris, tehát a területet akármelyik ábráról vehetjük. Vegyük a területet az $M_{Q,\varphi}$ ábráról és a hozzá – a súlypontjához – tartozó ordinátát az M_P ábráról. Az elfordulás a „D” pontnál így:

$$\varphi_D = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,\varphi}\,dz = \frac{1}{EI}\,\frac{1\cdot l}{2}\,\frac{Fl}{36} = \frac{Fl^2}{72EI} \quad [\circlearrowleft]$$

8) Törttengelyű tartó elmozdulásai

Határozzuk meg a 9.16/a ábrán vázolt, egyetlen függőleges erővel terhelt, törttengelyű tartó „C” pontjának elmozdulásait. A tartó anyagának E rugalmassági tényezője és a keresztmetszet I tehetetlenségi nyomatéka adott. A 9.16/a ábrán szaggatott vonallal megrajzolt feltételezett alakhelyes alakváltozási ábra tanúsága szerint a „C” pont függőlegesen lefelé és balra eltolódik és el is fordul. Az elfordulás az óramutató járásával egyező. Az elmozdulások meghatározása céljából ilyen irányú egységnyi virtuális erőket (és nyomatékot) fogunk működtetni a „C” pontban és ha az elmozdulások irányát helyesen állapítottuk meg, akkor a számítások végén az elmozdulásokat pozitív előjellel fogjuk megkapni.

Az F koncentrált erő hatására keletkező M_P nyomatékábrát a 9.16/b ábrán találjuk. Erre a nyomatékábrára mindhárom számításhoz szükség lesz.



9.16 ábra. Törttengelyű tartó elmozdulásai.

A „C” pont függőleges eltolódásának meghatározása céljából a „C” pontban egy függőleges virtuális egységerőt működtetünk (9.16/c ábra). Az ehhez a terheléshez tartozó $M_{Q,y}$ nyomatékábrát a 9.16/d ábra tartalmazza. A függőleges eltolódást az M_P és $M_{Q,y}$ nyomatékábrák segítségével határozzuk meg. Mindkét ábra nemlineáris, tehát a 3. szabályt kell alkalmazni. (Törttengelyű tartók esetében célszerű képzeletben „kiteríteni” a tartót, jelen esetben úgy, hogy a „B” pontnál a vízszintes BC tartórészt „lehajlítjuk” függőlegesre és így egyetlen ABC függőleges tartót kell nézni. Ekkor talán feltűnőbb, hogy mindkét

nyomatékábra a „B” pontnál törésponttal rendelkezik, vagyis nemlineáris.) A harmadik szabály szerint a nyomatékábrákat szakaszokra bontjuk, úgy, hogy legalább az egyik ábra lineáris szakaszokból álljon. Célszerűen a „B” pontban állapítunk meg szakaszhatárt. Ekkor mindkét ábra egy-egy lineáris szakaszból áll. Ezek szerint bármelyik ábrát felhasználhatjuk a területek kiszámításához. Válasszuk az M_P nyomatékábrát (9.16/b ábra) a területszámításhoz, az ordinátákat pedig az $M_{Q,y}$ nyomatékábráról (9.16/d ábra) vesszük. A függőleges eltolódás így:

$$y_C = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,y}\,dz = \frac{1}{EI}\left(\frac{Fl\cdot l}{2}\frac{2l}{3} + Fl\cdot l\cdot l\right) = \frac{4Fl^3}{3EI} \quad [\downarrow]$$

A „C” pont vízszintes eltolódásának meghatározása céljából a „C” pontban egy vízszintes virtuális egységerőt működtetünk (9.16/e ábra). Az ehhez a terheléshez tartozó $M_{Q,x}$ nyomatékábrát a 9.16/f ábra tartalmazza. A vízszintes eltolódást az M_P és $M_{Q,x}$ nyomatékábrák segítségével határozzuk meg. Mindkét ábra nemlineáris, tehát a 3. szabályt kell alkalmazni. (Ha a törttengelyű tartót függőleges helyzetbe „terítjük ki”, akkor most is jobban látszik a nemlineáris jelleg a „B” pontnál mutatkozó töréspontal.) A harmadik szabály szerint a nyomatékábrákat szakaszokra bontjuk, úgy, hogy legalább az egyik ábra lineáris szakaszokból álljon. Ismét a „B” töréspontban állapítunk meg szakaszhatárt. Ekkor az $M_{Q,x}$ nyomatékábra BC szakaszán csak zérus értékek vannak, így ez az ábraszakasz kiesik, az AB szakasz pedig mindkét ábra esetében lineáris. Ezek szerint bármelyik ábrát felhasználhatjuk a terület kiszámításához. Válasszuk az M_P nyomatékábrát (9.16/b ábra) a területszámításhoz, az ordinátát pedig az $M_{Q,x}$ nyomatékábráról (9.16/f ábra) vesszük. A vízszintes eltolódás így:

$$x_C = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,y}\,dz = \frac{1}{EI}Fl\cdot l\frac{l}{2} = \frac{Fl^3}{2EI} \quad [\leftarrow]$$

A „C” pont elfordulásának meghatározása céljából a „C” pontban egy egységnyi virtuális nyomatékot működtetünk (9.16/g ábra). Az ehhez a terheléshez tartozó $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábrát a 9.16/h ábra tartalmazza. Az elfordulást az M_P és $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábrák segítségével határozzuk meg. Az M_P ábra nemlineáris, az $M_{Q,\varphi}$ ábra pedig lineáris, így az M_P ábra területével kell dolgozni. Kapásból nem tudjuk, hogy ennek az ábrának hol van a súlypontja, de a súlypont helyére nincs is szükség, mert az $M_{Q,\varphi}$ ábra minden ordinátája 1, így akárhol is van az M_P ábra súlypontja, 1-el kell szorozni. Az elfordulás így:

$$\varphi_C = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,\varphi}\,dz = \frac{1}{EI}\left(Fl\frac{l}{2} + Fl\cdot l\right)1 = \frac{3Fl^2}{2EI} \quad [\circlearrowleft]$$

Mindhárom elmozdulást pozitív előjellel kaptuk és ez azt jelenti, hogy az elmozdulások irányát a számítás elején (a 9.16/a ábrán) helyesen állapítottuk meg.

Azokban a ritka esetekben amikor nem tudjuk előre megbecsülni a keresett elmozdulás irányát, a számítások végén az eredmények előjele segítségével tudjuk az előjeleket megállapítani: a pozitív eredmény azt jelenti, hogy az eredményül kapott elmozdulás előjele megegyezik a beiktatott virtuális erő/nyomaték irányával, a negatív előjel pedig azt, hogy az elmozdulás iránya ellentétes a virtuális erő/nyomaték előjelével.

Ha egy ábra esetében nehézkes lenne megállapítani a súlypont helyét, akkor mindig egyszerűbb eredményhez juthatunk ha az ábrát kisebb szakaszokra bontjuk fel és a részszámítások eredményeit összegezzük.

10

Hajlított tartók méretezése

A 6., 7., 8. és 9. fejezetekben külön-külön foglalkoztunk a hajlított tartók normál- és nyírófeszültségeinek meghatározásával, valamint az alakváltozások vizsgálatával. A gyakorlati munka során ezeket a vizsgálatokat egy-egy hajlított tartó esetében mind el kell végezni, hogy egy szerkezeti elemről eldönthessük, hogy megfelel-e. Ezt mutatjuk be ebben a fejezetben, amelyet teljes egészében a gyakorlati alkalmazásnak szentelünk.

A gyakorlati szerkezettervezés során a méretezési feladat kétféleképpen jelentkezik: vagy egy már méreteivel, anyagával és környezetével adott szerkezeti elemet *ellenőrzünk*, vagy pedig valamelyik adat hiányában *tervezünk*.

Az ellenőrzés az egyszerűbb feladat, amelynek során a méretezés $Y_H \geq Y_M$ alapegyenletét alkalmazzuk, mégpedig háromszor. Ha teljesül a normálfeszültségekkel kapcsolatos

$$\sigma_M \leq \sigma_H \qquad \text{vagy} \qquad M_M \leq M_H \tag{10.1}$$

a nyírófeszültségekre vonatkozó

$$\tau_M \leq \tau_H \tag{10.2}$$

és az elmozdulásokra vonatkozó

$$y_M \leq y_H \qquad \text{vagy} \qquad \varphi_M \leq \varphi_H \tag{10.3}$$

három feltétel mindegyike, akkor a hajlított tartó megfelel.

Az ellenőrzés a gyakorlati munka során a gyakoribb feladat, mert a (rutinos) tervező tapasztalataira támaszkodva a terhelési adatok ismeretében általában kapásból fel tud venni olyan tartóméreteket és ki tud alakítani olyan szerkezeti elrendezést, amelyek az esetek többségében megfelelőek.

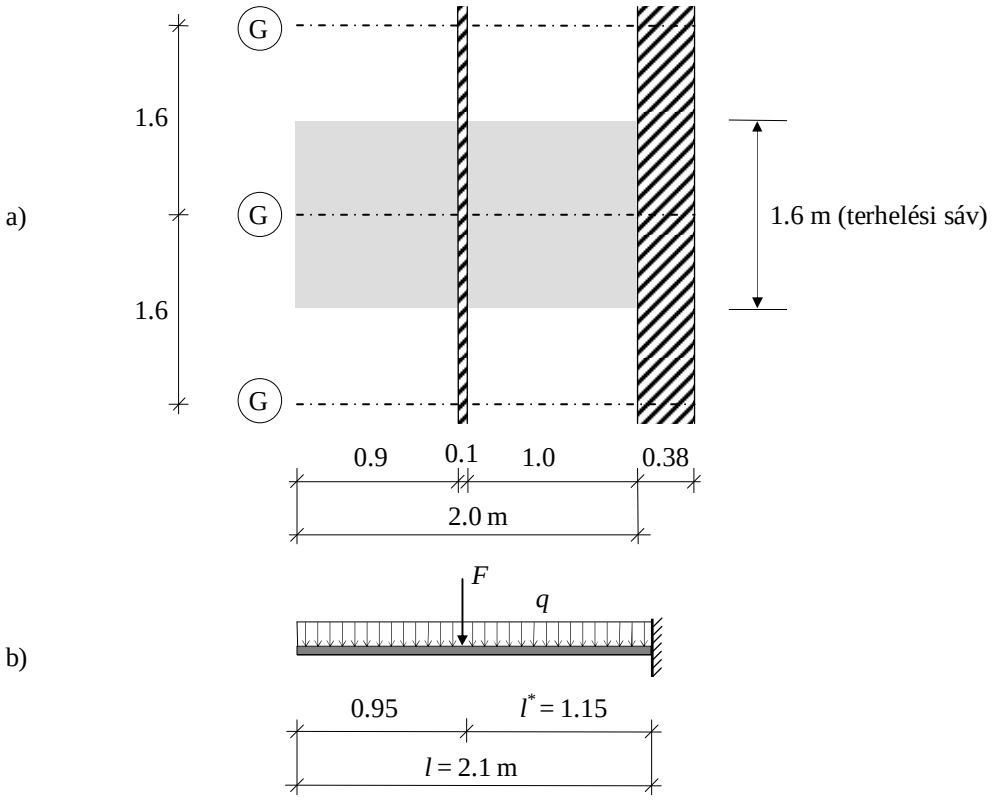
Ha tervezésre kerül sor, akkor a feladat többféleképpen jelentkezhet. Leggyakrabban talán azzal az esettel találkozunk, amikor az adott terhelés mellett az a kérdés, hogy milyen tartókeresztmetszetet alkalmazzunk. Gerendás födémek esetében gyakran adott a terhelés és a tartóméret és az a kérdés, hogy a hajlított gerendákat milyen távolságra helyezzük el egymástól. Kérdés lehet még az is, hogy mekkora terhet bír egy adott tartó, vagy hogy milyen maximális fesztávra építhető be az adott terhelésű és keresztmetszetű tartó. Bár tervezésről beszélünk, a feladat megoldása során „vegyes” eszközöket használunk. Az első lépés célszerűen a hajlítással kapcsolatos (10.1) feltétel alkalmazásával történik, amikor megállapítjuk az ismeretlen adatot (tartókeresztmetszetet vagy gerendatávolságot vagy a terhelhetőséget vagy a fesztávot). A második lépésben a (10.2) feltétel alkalmazásával ellenőrizzük, hogy az előző lépésben kialakított szerkezet megfelel-e nyírásra. Végül a (10.3) feltétel alkalmazásával azt ellenőrizzük, hogy a szerkezet kielégíti-e a merevségi

követelményeket. Azért ebben a sorrendben járunk el, mert a tervezői gyakorlat tapasztalatai szerint ez a sorrend általában egyben „veszélyességi” sorrend is, így ha az első lépésben biztosítjuk, hogy a hajlított tartó hajlításra megfelel, akkor nagy valószínűséggel nyírásra és alakváltozásra is meg fog felelni, és így elkerülünk egy hosszadalmasabb (újra)számítást.

Ebben a fejezetben a tervezésre mutatunk be két példát.

10.1 Hajlított tartó szükséges keresztmetszetének megállapítása

Tekintsük a 10.1/a ábrán vázolt födémrészt, amely egy lakóépület konzolos része. Feladatunk az 1.6 méterenként elhelyezett, az ábrán G-vel jelzett, acél I-tartók szükséges keresztmetszeti méretének megállapítása. Az acéltartók esetében a normálfeszültségek határértéke σ_H = 235 N/mm^2, a nyírófeszültségek határértéke pedig τ_H = 135 N/mm^2. A tartó anyagának rugalmassági tényezője $E = 2.1 \cdot 10^5$ N/mm^2. Az egyenletesen megoszló födémteher mértékadó értéke legyen $\overline{q}_M = 11.1$ kN/m^2, a födémteher alapértéke (a merevségi követelmények vizsgálatához) pedig $\overline{q}_a = 9.0$ kN/m^2. A födém egy válaszfalat is hord, amely $\overline{F}_M = 6.12$ kN/m mértékadó terhet jelent; a falteher alapértéke $\overline{F}_a = 5.1$ kN/m.



10.1 ábra. Hajlított gerenda tervezése. a) födémalaprajz, b) a gerenda statikai modellje.

Az első lépés a „G” jelű gerenda statikai modelljének előállítása (10.1/b ábra). Ebből a célból a tartó névleges hosszát 5%-al megnöveljük (l = 1.05·2.0 = 2.1 m) és a terhelés megállapítása során figyelembe vesszük a terhelési sávot, ami az egyenletes kiosztású gerendáink esetében 1.6 méter. A gerenda terhelése így

$$q_M = 1.6\overline{q}_M = 1.6 \cdot 11.1 = 17.76 \text{ kN/m} \qquad \text{és} \qquad F_M = 1.6\overline{F}_M = 1.6 \cdot 6.12 = 9.79 \text{ kN}$$

a normálfeszültségek és nyírófeszültségek ellenőrzéséhez és

$$q_a = 1.6\overline{q}_a = 1.6 \cdot 9.0 = 14.4\,\text{kN/m} \qquad \text{és} \qquad F_a = 1.6\overline{F}_a = 1.6 \cdot 5.1 = 8.16\,\text{kN}$$

a merevségi követelmények kielégülésének vizsgálatához.

Második lépésben a gerenda szükséges keresztmetszetét a hajlítási vizsgálat elvégzésével, a (6.8) összefüggés felhasználásával állapítjuk meg. A mértékadó nyomaték:

$$M_M = q_M \frac{l^2}{2} + F_M l^* = 17.76 \frac{2.1^2}{2} + 9.79 \cdot 1.15 = 50.42\,\text{kNm}$$

Az I-tartó keresztmetszeti tényezőjének minimális értéke:

$$W_{\min} \geq \frac{M_M}{\sigma_H} = \frac{50.42 \cdot 10^6}{235} = 214553\,\text{mm}^3$$

Szelvénytáblázatból (pl. a SEGÉDLETEK táblázatából) I-220-as tartót választunk, amelynek keresztmetszeti tényezője $W = 278000\ \text{mm}^3 > W_{\min}$.

A harmadik lépésben elvégezzük a nyírásvizsgálatot. Ez most – adott szelvény esetében – ellenőrzést jelent. A mértékadó nyíróerő értéke:

$$T_M = q_M l + F_M = 17.76 \cdot 2.1 + 9.79 = 47.09\,\text{kN}$$

Az I-220-as tartó esetében a szelvénytáblázatból kivehető a *b* és *z* értéke, így a nyírásvizsgálathoz az egyszerűbb (8.2) képletet használhatjuk:

$$\tau = \frac{T}{zb} = \frac{47090}{189 \cdot 8.1} = 30.8\,\text{N/mm}^2$$

A tartó nyírásra megfelel, mert teljesül a (8.3) feltétel:

$$\tau_M = 30.8\ \text{N/mm}^2 \leq 135\ \text{N/mm}^2 = \tau_H$$

Az utolsó lépésben végrehajtjuk a merevségi vizsgálatot. Bár elegendő vagy a lehajlást, vagy az elfordulást vizsgálni, most gyakorlásképpen mindkét számítást bemutatjuk. Az I-220-as keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka $I = 3.06 \cdot 10^7\ \text{mm}^4$. Az elmozdulások meghatározására a munkatételeket alkalmazzuk és a számítás során szükség lesz a terhelés okozta nyomatékábrával dolgozni. Ez a munka jelentősen megkönnyíthető, ha a két terhet (a megoszló terhet és a koncentrált erőt) külön tekintjük (10.2 ábra) és a hatásokat a szuperpozíció elve alapján összegezzük. A terheknek a számításhoz szükséges alapértékeit fent már meghatároztuk.

A legnagyobb nyomaték a befogásnál keletkezik; a megoszló teherből

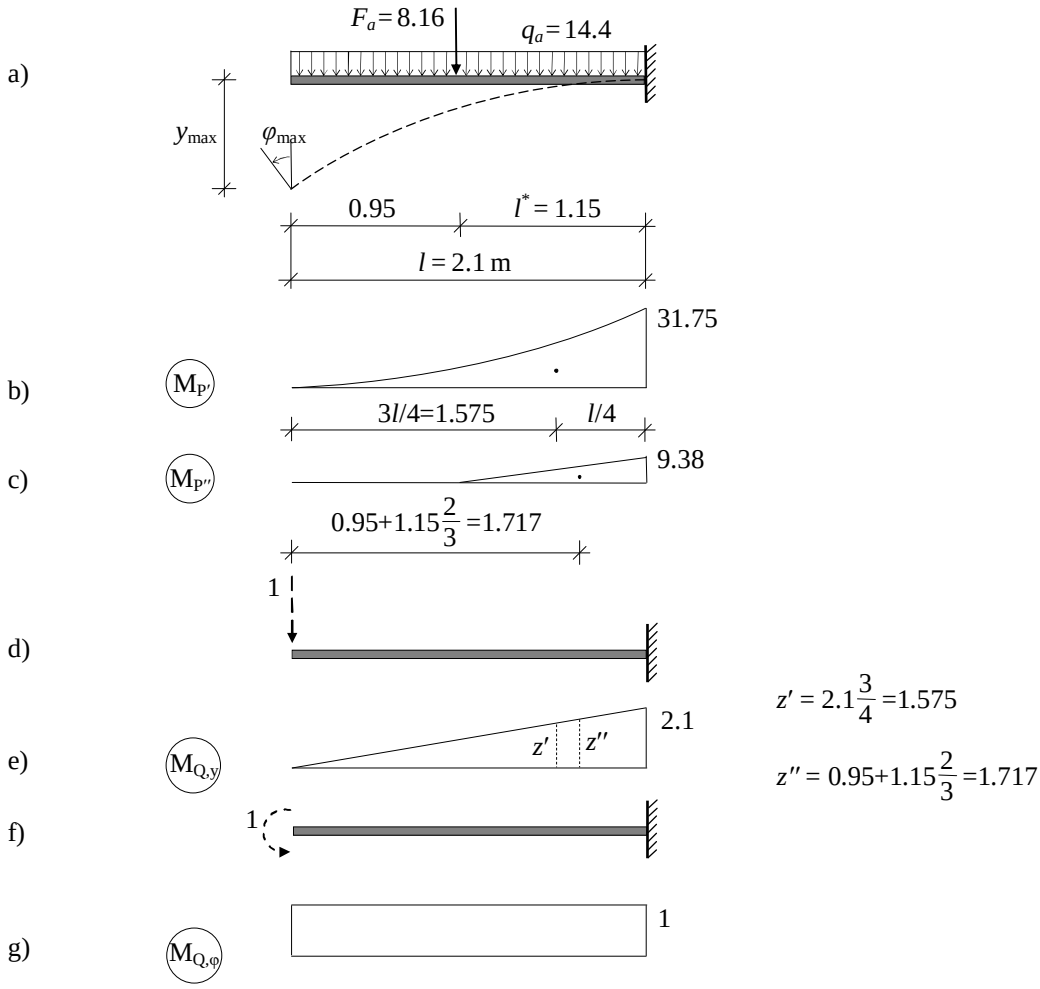
$$M_{P'} = 14.4 \frac{2.1^2}{2} = 31.75\,\text{kNm}$$

a koncentrált erőből pedig

$$M_{P''} = 8.16 \cdot 1.15 = 9.38\,\text{kNm}$$

A két nyomatékábrát a 10.2/b és 10.2/c ábra tartalmazza.

Mind a legnagyobb eltolódás, mind a legnagyobb elfordulás a tartó végén keletkezik. A legnagyobb eltolódás meghatározása céljából a tartó végén egy egységnyi virtuális erőt működtetünk (10.2/d ábra). Az ebből a (dimenziótlan) erőből keletkező $M_{Q,y}$ nyomatékábrát a 10.2/e ábrán tüntetjük fel.



10.2 ábra. Hajlított tartó alakváltozása.

Mindkét M_P nyomatékábra nemlineáris, míg az $M_{Q,y}$ nyomatékábra lineáris, így az M_P nyomatékábrákról vesszük a területeket és az $M_{Q,y}$ nyomatékábráról az ordinátákat (z' és z''). A tartó maximális függőleges eltolódása így:

$$y_{\max} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,y}\,dz = \frac{1}{2.1\cdot 10^5 \cdot 3.06\cdot 10^7}\times$$

$$\times\left(\frac{31.75\cdot 10^6 \cdot 2.1\cdot 10^3}{3}\frac{2.1\cdot 10^3 \cdot 3}{4} + \frac{9.38\cdot 10^6 \cdot 1.15\cdot 10^3}{2}(950 + \frac{1150\cdot 2}{3})\right) = 6.89\,\text{mm}\ [\downarrow]$$

Ez az érték kisebb, mint a 9.1 táblázat szerinti határérték

$$y_H = \frac{l}{100} = \frac{2100}{100} = 21\,\text{mm}$$

így a tartó lehajlása megfelel.

A legnagyobb elfordulás meghatározása céljából a tartó végén egy egységnyi virtuális nyomatékot működtetünk (10.2/f ábra). Az ebből a (dimenziótlan) nyomatékból keletkező nyomatékábrát a 10.2/g ábrán tüntetjük fel. Mivel az M_P nyomatékábrák nemlineáris ábrák és az $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábra lineáris, az M_P nyomatékábrákról vesszük a területeket és az $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábráról az ordinátákat (1 és 1). A tartóvég maximális elfordulása így:

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,\varphi} dz = \frac{1}{2.1\cdot 10^5 \cdot 3.06\cdot 10^7} \times$$

$$\times\left(\frac{31.75\cdot 10^6 \cdot 2.1\cdot 10^3}{3}1 + \frac{9.38\cdot 10^6 \cdot 1.15\cdot 10^3}{2}1\right) = 4.3\cdot 10^{-3}\,\text{rad} = 0.43\ \%\ [\circlearrowleft]$$

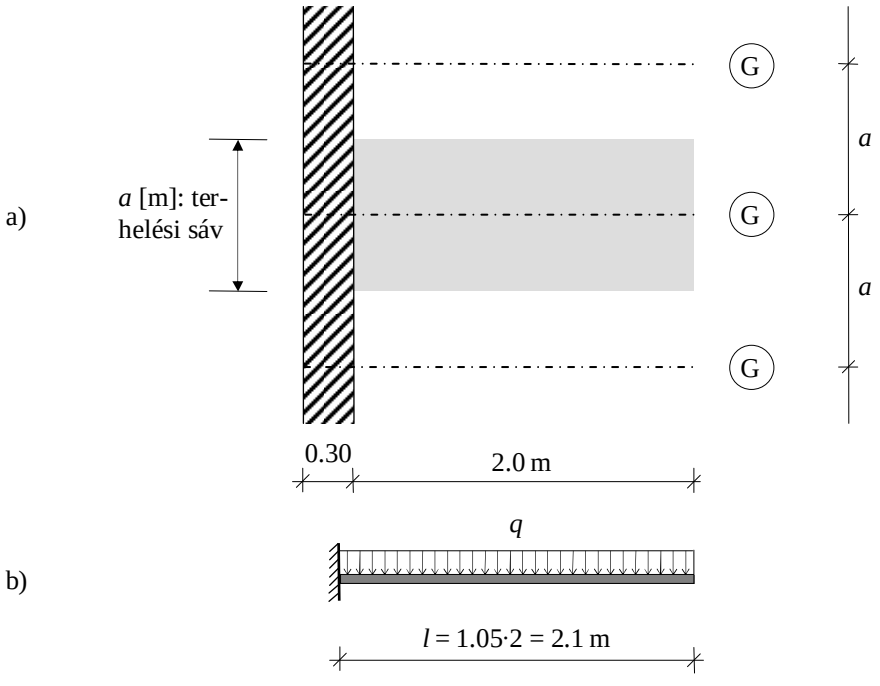
Ez az érték kisebb, mint a 9.1 táblázat szerinti határérték

$$\varphi_H = 1.5\%$$

így a tartó elfordulása is megfelel.

10.2 Hajlított tartó kiosztásának meghatározása

Tekintsük a 10.3/a ábrán vázolt födémrészt, amely egy lakóépület konzolos része. A födém fő tartóelemei az ábrán G-vel jelzett I-180-as acél tartók. Feladatunk a tartók távolságának meghatározása 40 centiméteres raszterméret feltételezésével.



10.3 ábra. Hajlított gerenda tervezése. a) födémalaprajz, b) a gerenda statikai modellje.

Az acéltartók esetében a normálfeszültségek határértéke $\sigma_H = 235$ N/mm^2, a nyírófeszültségek határértéke pedig $\tau_H = 135$ N/mm^2. A tartó anyagának rugalmassági tényezője $E = 2.1 \cdot 10^5$ N/mm^2. Az I-180-as tartó tehetetlenségi nyomatéka (pl. a SEGÉDLETEK szelvénytáblázatából) $I = 1.45 \cdot 10^7$ mm^4 és a keresztmetszeti tényező $W = 1.61 \cdot 10^5$ mm^3.

Az egyenletesen megoszló födémteher mértékadó értéke legyen $\overline{q}_M = 12.0$ kN/m^2, a födémteher alapértéke (a merevségi követelmények vizsgálatához) pedig $\overline{q}_a = 10.0$ kN/m^2.

A „G” jelű gerenda statikai modelljét a 10.3/b ábrán találjuk. A gerenda terhelési sávját *a*-val jelölve, és méter dimenziót feltételezve, a gerenda terhelése:

$$q_M = a\overline{q}_M = 12a \text{ [kN/m]}$$

a normálfeszültségek és nyírófeszültségek ellenőrzéséhez és

$$q_a = a\overline{q}_a = 10a \text{ [kN/m]}$$

a merevségi követelmények vizsgálatához.

A gerendák távolságát a hajlítási vizsgálat elvégzésével állapítjuk meg. A mértékadó nyomaték:

$$M_M = q_M \frac{l^2}{2} = 12a \frac{2.1^2}{2} = 26.46a \text{ [kNm]}$$

Az I-180-as tartó keresztmetszetének határnyomatéka:

$$M_H = W_{\min}\sigma_H = 1.61 \cdot 10^5 \cdot 235 = 3.7835 \cdot 10^7 \text{ Nmm} = 37.835 \text{ kNm}$$

A (6.10) összefüggés felhasználásával:

$$M_H = 37.835 \geq 26.46a = M_M$$

innen

$$a \leq 1.43 \text{m}$$

Mivel a megadott raszterméret 40 cm, a gerendákat

$$a = 1.20 \text{ m}$$

távolságra helyezzük el egymástól.

A következő lépésben elvégezzük a nyírásvizsgálatot. Ez most – mivel minden adott – ellenőrzést jelent. A mértékadó nyíróerő értéke:

$$T_M = q_M l = 12 \cdot 1.2 \cdot 2.1 = 30.24 \text{ kN}$$

Az I-180-as tartó esetében a szelvénytáblázatból kivehető a *b* és *z* értéke, így a nyírásvizsgálathoz az egyszerűbb (8.2) képletet használhatjuk:

$$\tau = \frac{T}{zb} = \frac{30240}{155 \cdot 6.9} = 28.3 \text{ N/mm}^2$$

A tartó nyírásra megfelel, mert teljesül a (8.3) feltétel:

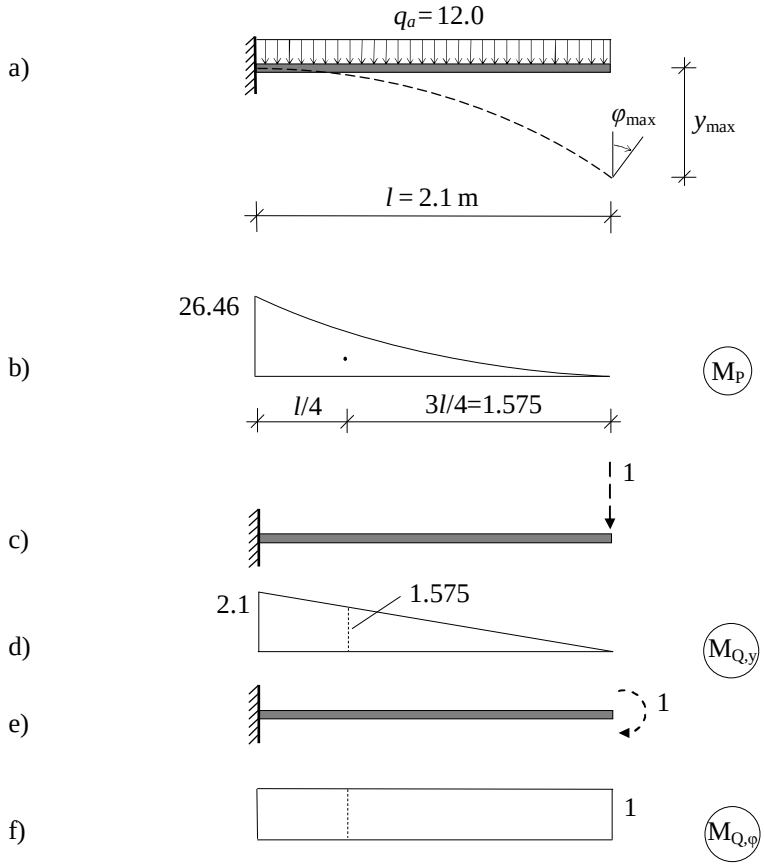
$$\tau_M = 28.3\ \mathrm{N/mm^2} \le 135\ \mathrm{N/mm^2} = \tau_H$$

Végül végrehajtjuk a merevségi vizsgálatot (10.4 ábra). A teher fent már megállapított alapértékével és az $a = 1.2$ méteres terhelési sávval dolgozva a befogásnál keletkező maximális nyomaték értéke:

$$M_{\max} = 10.0 \cdot 1.2 \frac{2.1^2}{2} = 26.46\,\mathrm{kNm}$$

Az M_P nyomatékábrát a 10.4/b ábra tartalmazza.

Mind a legnagyobb eltolódás, mind a legnagyobb elfordulás a tartó végén keletkezik. A legnagyobb eltolódás meghatározása céljából a tartó végén egy egységnyi virtuális erőt működtetünk (10.4/c ábra). Az ebből a (dimenziótlan) erőből keletkező $M_{Q,y}$ nyomatékábrát a 10.4/d ábrán tüntetjük fel.



10.4 ábra. Hajlított tartó alakváltozása.

Az M_P nyomatékábra nemlineáris, az $M_{Q,y}$ nyomatékábra pedig lineáris, tehát a 2. szabály szerint kell eljárni. Így az M_P nyomatékábráról kell a területet venni és az $M_{Q,y}$ nyomatékábráról az ordinátát. A tartó maximális függőleges eltolódása:

$$y_{\max} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,y}\,dz = \frac{1}{2.1\cdot 10^5 \cdot 1.45\cdot 10^7}\,\frac{26.46\cdot 10^6 \cdot 2.1\cdot 10^3}{3}\,\frac{2.1\cdot 10^3 \cdot 3}{4} = 9.58\,\text{mm}$$

Ez az érték kisebb, mint a 9.1 táblázat szerinti határérték

$$y_H = \frac{l}{100} = \frac{2100}{100} = 21\,\text{mm}$$

így a tartó lehajlása megfelel.

A tartó ezek szerint alakváltozásra megfelel, de gyakorlásképpen elvégezzük a maximális elfordulásra vonatkozó ellenőrzést is.

A legnagyobb elfordulás meghatározása céljából a tartó végén egy egységnyi virtuális nyomatékot működtetünk (10.4/e ábra). Az ebből a (dimenziótlan) nyomatékból keletkező nyomatékábrát a 10.4/f ábrán tüntetjük fel. Mivel az M_P nyomatékábra nemlineáris és az $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábra lineáris, az M_P nyomatékábráról vesszük a területet és az $M_{Q,\varphi}$ nyomatékábráról az ordinátát (1). A tartóvég maximális elfordulása így:

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_P M_{Q,\varphi}\,dz = \frac{1}{2.1\cdot 10^5 \cdot 1.45\cdot 10^7}\,\frac{26.46\cdot 10^6 \cdot 2.1\cdot 10^3}{3}1 = 0.0061\,\text{rad} = 0.61\%$$

Ez az érték kisebb, mint a 9.1 táblázat szerinti határérték

$$\varphi_H = 1.5\%$$

így a tartó elfordulása is megfelel.

11

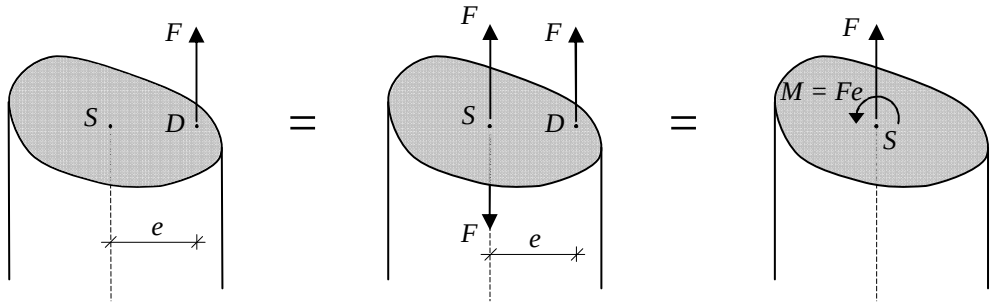
Külpontos húzás

A 2. és 3. fejezetben olyan rudakkal foglalkoztunk, amelyeket rúdtengely irányú erők terheltek. Ezeknek az erőknek a hatásvonala egybeesett a rúd tengelyével. Talán még gyakoribb az az eset, amikor a terhelő erő hatásvonala ugyan párhuzamos a rúdtengellyel, de azzal nem esik egybe. Ebbe a csoportba tartoznak a külpontosan húzott és külpontosan nyomott rudak. Mivel a húzott és nyomott karcsú rudak viselkedése alapvetően eltérő – ahogyan ezt már láttuk a központosan nyomott karcsú rudaknál – a húzott és nyomott rudakat most is külön tárgyaljuk.

Ebben a fejezetben külpontosan húzott rudakkal foglalkozunk, míg a külpontosan nyomott rudakat a következő fejezet tárgyalja.

Továbbra is egyenestengelyű, prizmatikus rudakkal foglalkozunk, amelyek anyaga homogén és izotróp. A rudak rugalmasan viselkednek, vagyis érvényes a Hooke-törvény. Feltételezzük továbbá, hogy a rudak húzó- és nyomófeszültségek felvételére egyaránt alkalmasak.

Külpontos húzóigénybevételről akkor beszélünk, ha a rúd keresztmetszetére ható húzóerő párhuzamos a rúdtengellyel, de hatásvonala nem esik a tengely vonalába, vagyis amikor az erő hatásvonalának a keresztmetszet síkjával alkotott *D* döféspontja nem esik egybe a keresztmetszet *S* súlypontjával (11.1/a ábra).



a) külpontos húzóerő a keresztmetszeten

b) egyensúlyban lévő *F*-*F* erőrendszer hozzáadása

c) két *F* erő *M* erőpárt alkot

11.1 ábra. Adott hatásvonalú erő helyettesítése másik hatásvonalon működő erővel és nyomatékkal.

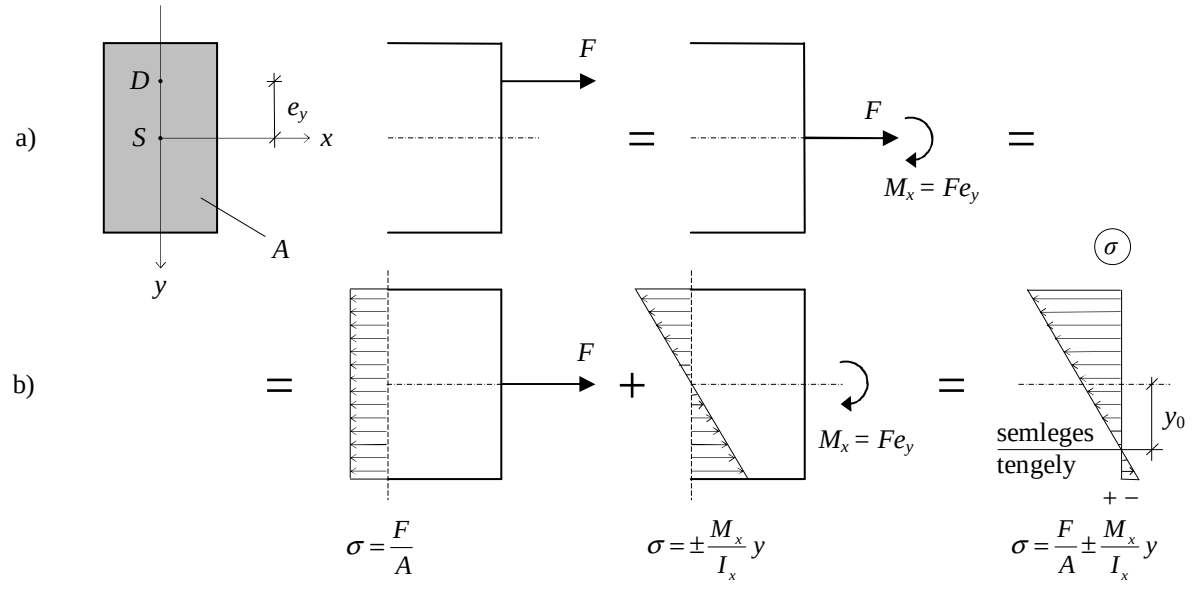
A külpontos húzást központos húzó igénybevételből és hajlításból állítjuk elő. Ezt a következő módon tesszük. Először a *D* ponton működő *F* húzóerőhöz (11.1/a ábra) hozzáadunk két olyan egyensúlyban lévő *F* erőt, amelyek közös hatásvonala az *S* súlyponton megy át (11.1/b ábra). Ezután megtartva az *S* súlypontban felfelé működő húzóerőt, a másik két erőt egy $M = Fe$ erőpárként kezeljük (11.1/c ábra).

A húzóerő döféspontja a keresztmetszeten általános helyzetű lehet, de először azzal az

esettel foglalkozunk, amikor a döféspont ráesik az egyik tehetetlenségi főtengelyre.

11.1 A húzóerő döféspontja az egyik főtengelyre esik

Tekintsük a 11.2/a ábrán vázolt téglalap alakú keresztmetszetet, amelyre az F külpontos húzóerő hat. Az erő D döféspontja a keresztmetszet egyik főtengelyére, az y tengelyre esik. A külpontos húzást két alapigénybevételre vezetjük vissza. A 11.1 ábrán vázolt eljárást követve a külpontos húzóerőt egy központos húzóerővel és egy hajlítónyomatékkal helyettesítjük (11.2/a ábra). Mivel az F központos húzóerő és az $M_x = Fe_y$ hajlítónyomaték is normálfeszültségeket okoz, ezeket szuperpozícióval összegezhetjük (11.2/b ábra).



11.2 ábra. Külpontosan húzott rúd. a) terhelés, b) feszültségek szuperpozíciója.

11.1.1 A feszültségképlet és a semleges tengely helyzete

Alkalmazva a központos húzásra (a 2. fejezetben) levezetett

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

és a tiszta hajlításra (a 6. fejezetben) levezetett

$$\sigma = \pm\frac{M_x}{I_x} y$$

képleteket, egyszerű összegzéssel (11.2/b ábra) megkapjuk a külpontos húzásból az x súlyponti tengelytől y távolságra keletkező normálfeszültségek kiszámítására alkalmas képletet:

$$\sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \qquad (11.1)$$

A fenti képletben A a keresztmetszet területe [mm^2], I_x a keresztmetszet x tengelyre

vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka [mm^4] és $M_x = Fe_y$ a húzóerő súlypontra vonatkoztatott nyomatéka [Nmm]. A feszültség dimenziója N/mm^2.

A semleges tengely helyzetét abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy a feszültség értéke a semleges tengely mentén zérus. Továbbra is y tengelyen elhelyezkedő erőt feltételezve, ez a feltétel a

$$\sigma = \frac{F}{A} - \frac{M_x}{I_x} y_0 = 0$$

alakot ölti, ahol y_0 a semleges tengely helyét rögzíti az x súlyponti tengelytől (11.2/b ábra). Innen a semleges tengely helye már meghatározható:

$$\frac{F}{A} - \frac{Fe_y}{I_x} y_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad y_0 = \frac{I_x}{A}\frac{1}{e_y}$$

Bevezetve az inerciasugár

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \tag{11.2}$$

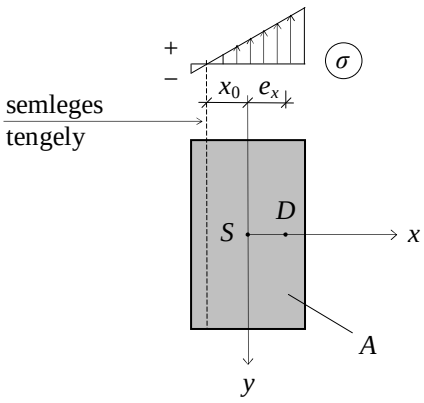
összefüggését, a semleges tengely helyét definiáló távolság:

$$y_0 = \frac{i_x^2}{e_y} \tag{11.3}$$

Hasonlóképpen eljárva, ha a külpontos húzóerő döféspontja az x tengelyre esik (11.3 ábra), a normálfeszültséget a súlyponttól x távolságra a

$$\sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} x \tag{11.4}$$

képletből határozhatjuk meg, ahol $M_y = Fe_x$ és I_y a keresztmetszet y tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka.



11.3 ábra. Külpontosan húzás: erő az x tengelyen.

A semleges tengely helyzetét ekkor az

$$x_0 = \frac{i_y^2}{e_x} \tag{11.5}$$

összefüggés adja meg, ahol e_x a húzóerő döféspontjának távolsága a súlyponttól és

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{11.6}$$

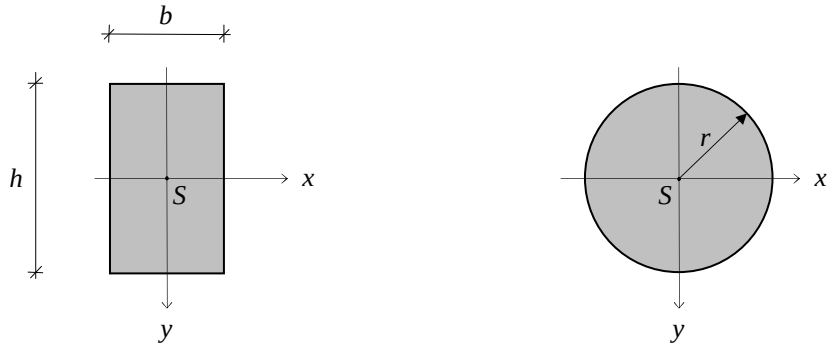
az inerciasugár.

Gyakorlásképpen meghatározzuk az inerciasugár értékét derékszögű négyszög és kör keresztmetszet esetében. A szokásos módon jelölve a derékszögű négyszög oldalhosszait (11.4/a ábra), a két inerciasugár értéke:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{h}{3.46} \qquad \text{és} \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12hb}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{b}{3.46} \tag{11.7}$$

Kör keresztmetszetnél (11.4/b ábra):

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{r^4\pi}{4r^2\pi}} = \frac{r}{2}$$



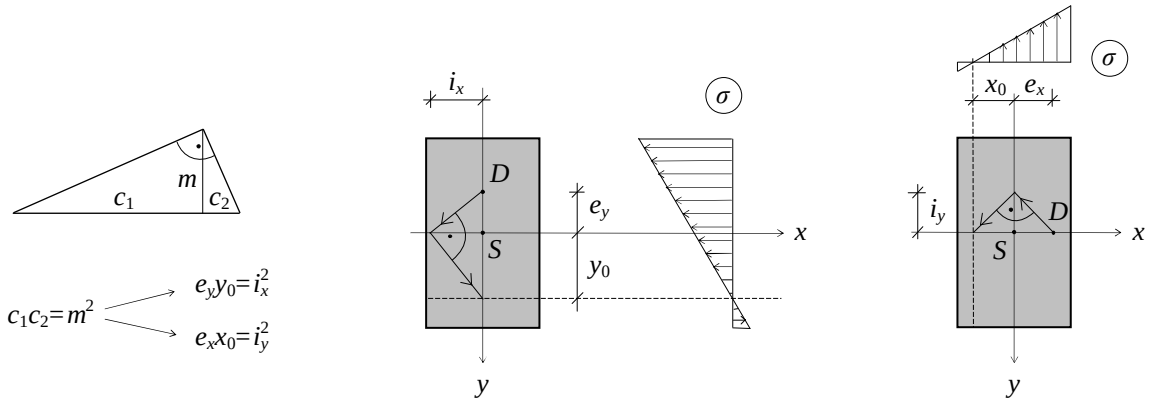
a) derékszögű négyszög b) kör

11.4 ábra. Derékszögű négyszög és kör keresztmetszet az inerciasugár számításához.

A (11.1) és (11.4) feszültségképletek alkalmazása során igen fontos az előjelek figyelembe vétele. Az abszolút értékre legnagyobb feszültség a keresztmetszet azon oldalán lévő szélső szálban keletkezik, amelyik oldalon a döféspont fekszik.

A semleges tengely helyét meghatározó (11.3) és (11.5) képletek azt is mutatják, hogy a semleges tengely helye szerkesztéssel is megállapítható. Ez abból következik, hogy az *i* inerciasugár mértani középarányos az *e* külpontosság és a semleges tengely helyét meghatározó x_0 (vagy y_0) távolság között. A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága és az átfogó két szelete között fennálló ismert $c_1c_2 = m^2$ összefüggés (11.5/a ábra) mintájára az *y* tengelyre eső döféspont esetében a szerkesztés két lépésben hajtható végre. A súlyponttól e_y távolságra lévő *D* döféspontot összekötjük az *x* tengelyre felmért i_x inerciasugarat jelölő ponttal, majd abból a pontból az összekötő egyenesre merőlegest állítunk. Ez a merőleges egyenes az *y* tengelyen kimetszi a súlyponttól y_0 távolságra lévő semleges tengely helyét (11.5/b ábra). Az *x* tengelyre eső döféspont esetében ugyanígy járunk

el (11.5/c ábra), csak az *x* és *y* indexeket kell felcserélni.



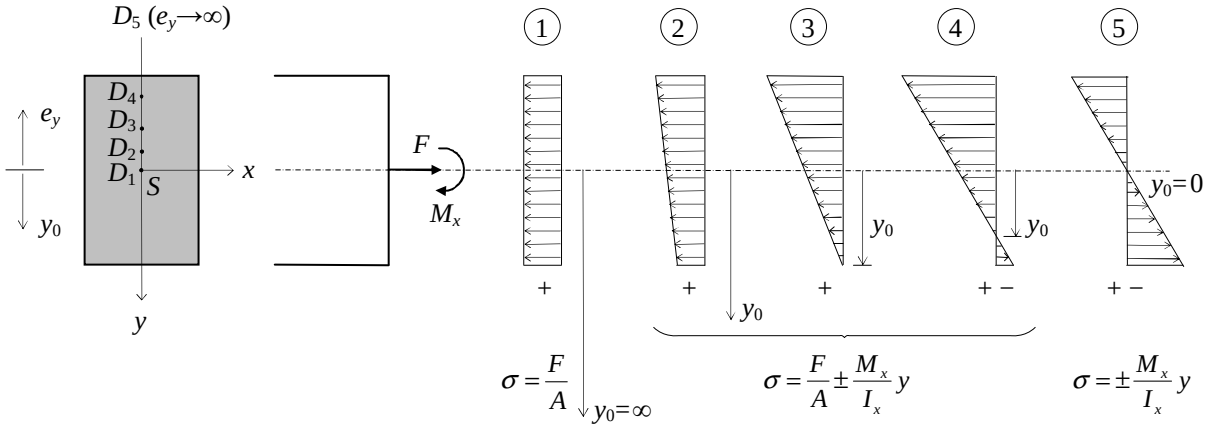
a) mértani középarányos b) döféspont az *y* tengelyen c) döféspont az *x* tengelyen

11.5 ábra. A semleges tengely helye szerkesztéssel.

A szerkesztés fordított sorrendben is elvégezhető: ha a semleges tengely helye ismert, akkor az inerciasugár ismeretében a szerkesztés megadja a hozzá tartozó döféspont-távolságot.

A (11.1) és (11.4) feszültségképletek vizsgálata azt mutatja, hogy a normálfeszültségek alakulását nagymértékben befolyásolja a húzóerő támadáspontjának távolsága a súlyponttól. A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy a támadáspont helyzetének változtatásával párhuzamosan hogyan változik a feszültségdiagram (11.6 ábra).

Legyen először a húzóerő támadáspontjának e_y távolsága a keresztmetszet súlypontjától zérus. Ezt a pontot D_1-el jelöljük (11.6/a ábra). Ez a 2. fejezetben már tárgyalt központos húzás esete. Az ehhez az esethez tartozó egyenletesen megoszló intenzitású feszültségábrát a 11.6/b ábrán találjuk. A húzófeszültség értékét ekkor a $\sigma = F/A$ képlet szolgáltatja.



a) rúdkeresztmetszet a húzóerővel b) központos húzás c) külpontos húzás d) hajlítás

11.6 ábra. A feszültségek alakulása a központos húzástól a külpontos húzáson keresztül a hajlításig.

Toljuk el a húzóerő döféspontját egy kis távolsággal az *y* tengely mentén. Ezt az új döféspontot D_2-vel jelöljük. Ezzel az igénybevétel külpontos húzás lett. A feszültség értékét a (11.1) képlettel számolhatjuk ki. Ha elegendően kicsiny e_y távolságot választottunk, akkor a feszültségábrát ferde egyenes jellemzi és a keresztmetszet minden pontjában húzás keletkezik.

A feszültség az előző esethez képest az erő oldalán lévő szélső szálban megnőtt, a másik oldalon lévő szélső szálban csökkent, de a (11.1) képlet minden pontban húzófeszültséget szolgáltat (2. jelű diagram a 11.6/c ábrán).

Növeljük tovább az e_y távolságot. Az igénybevétel továbbra is külpontos húzás. Biztosan van egy olyan helyzet, amely esetén a (11.1) képlet az erő másik oldalán lévő szélső szálban zérus feszültséget eredményez. A többi feszültség húzófeszültség. Jelöljük ekkor a döféspontot D_3-mal. A diagramot tehát most is ferde egyenes jellemzi (3. diagram a 11.6/c ábrán), de ez a ferde egyenes a döféspont másik oldalán lévő szélső szálban zérus értékű feszültséget ad.

Növeljük még tovább az e_y távolságot, de maradjunk még a keresztmetszeten belül. Ezt a döféspontot D_4-el jelöljük. Ez az igénybevétel is külpontos húzás. A (11.1) képlet most is ferde egyenest ad a feszültségábrára, de a súlypont másik oldalán, a keresztmetszet „alján" lévő szálban, nyomófeszültség keletkezik (4. diagram a 11.6/c ábrán).

Az összes eddigi esetben a feszültség értéke a súlypontban $\sigma_S = F/A$.

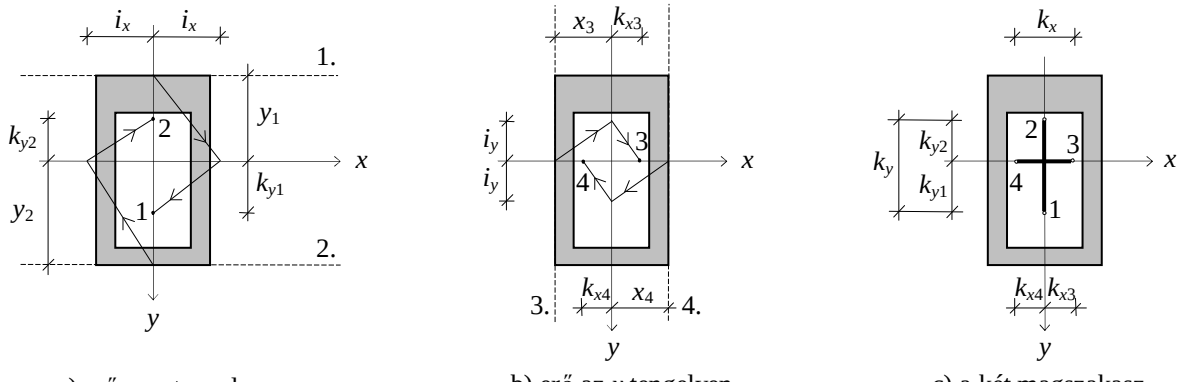
Végül növeljük meg az e_y távolságot oly módon, hogy a húzóerőt képzeletben a végtelenbe helyezzük: D_5 döféspont a végtelenben (11.6/a ábra). Ez a tiszta hajlítás esete. A keresztmetszet erő oldali részén húzó-, a másik oldalon nyomófeszültségek keletkeznek (11.6/d ábra), amelyek értékeit a tiszta hajlítás $\sigma = M_x y/I_x$ képlete szolgáltatja. A súlypontban a feszültség értéke zérus.

Érdekes megfigyelni a semleges tengely helyzetét az öt esetben. Az első esetben, amikor a húzóerő a súlypontban hat (a tiszta húzásnál), a σ-ábra konstans, vagyis a diagram sehol sem vált előjelet: ezt úgy is értelmezhetjük, hogy a semleges tengely a végtelenben van ($y_0 = \infty$ a 11.6/b ábrán). Ezután, ahogyan az erő döféspontja távolodik a súlyponttól (az egyik oldalon), úgy közeledik a semleges tengely (a másik oldalon) a végtelen felől (11.6/c ábra). Végül, a tiszta hajlításnál, amikor az erő döféspontja (képzeletben) a végtelenbe kerül, a semleges tengely a végtelenből „feljön" a súlypontba (11.6/d ábra).

A 3. eset – amikor a semleges tengely a döfésponttal szemben lévő oldalon a keresztmetszet szélső szálához kerül (11.6/c ábra) – megkülönböztetett fontosságú. Az erő D_3 döféspontját maghatárpontnak nevezzük és ezt az esetet a következő pontban részletesen tárgyaljuk.

11.1.2 Maghatárpont

Az előző pontban azt tapasztaltuk, hogy a súlyponttól egyre messzebb elhelyezkedő döféspont esetében van a döféspontnak egy olyan helyzete, amikor a hozzá tartozó semleges tengely éppen érinti a keresztmetszetet (3. eset a 11.6/c ábrán). Ezt a pontot maghatárpontnak nevezzük. Másképpen megfogalmazva: a maghatárpont az a pont, amelyen állva az erő „még éppen" egynemű feszültségeket – esetünkben húzófeszültségeket – okoz.



a) erő az y tengelyen b) erő az x tengelyen c) a két magszakasz

11.7 ábra. A maghatárpontok szerkesztése; magszakaszok.

Egy egyenesen mozgó döféspont esetében (pl. az *y* tengely a 11.7/a ábrán) tehát két maghatárpont van (1. és 2. pont) és a közöttük lévő szakaszt magszakasznak nevezzük. A magszakaszt általában *k*-val jelöljük és a súlyponttól mért két rész-szakasz (k_1 és k_2) segítségével határozzuk meg. A 11.7/a ábrán az *y*, a 11.7/b ábrán pedig az *x* tengelyen mozgó erőhöz tartozó két-két maghatárpont szerkesztését mutatjuk be. A szerkesztés a 11.5 ábrán bemutatott szerkesztés mintájára hajtható végre, azzal a kiindulással, hogy a semleges tengely érinti a keresztmetszetet. A két magszakaszt a 11.7/c ábra mutatja.

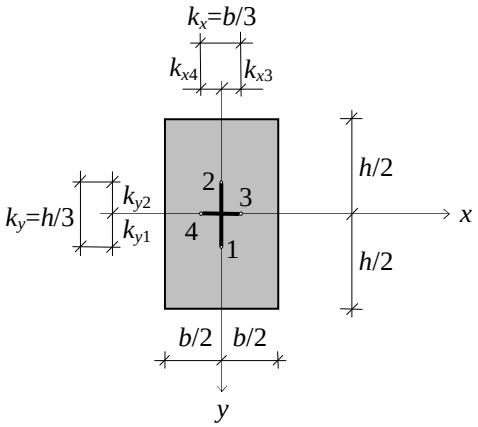
A maghatárpontok helyét számítással is meghatározhatjuk. Ekkor azt az előző pontban megfogalmazott törvényszerűséget (11.5/a ábra) használjuk fel, hogy az *i* inerciasugár mértani középarányos a semleges tengely helyét meghatározó távolság (y_1 illetve y_2, vagy x_3 illetve x_4 szélsőszál-távolságok) és a külpontosság (most *k* maghatárpont-távolság) között:

$$k_{y1} = \frac{i_x^2}{y_1} \qquad \text{és} \qquad k_{y2} = \frac{i_x^2}{y_2} \tag{11.8}$$

valamint

$$k_{x3} = \frac{i_y^2}{x_3} \qquad \text{és} \qquad k_{x4} = \frac{i_y^2}{x_4} \tag{11.9}$$

A számítás téglalap keresztmetszet esetén (11.8 ábra) igen egyszerű eredményekre vezet.



11.8 ábra. A maghatárpontok és magszakaszok téglalap keresztmetszet esetén.

Felhasználva a korábban levezetett (11.7) képleteket, és figyelembe véve hogy $y_1 = y_2 = h/2$, valamint $x_3 = x_4 = b/2$, a maghatárpontokra a

$$k_{y1} = k_{y2} = \frac{i_x^2}{y_1} = \frac{\frac{h^2}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{h}{6} \qquad \text{és} \qquad k_{x3} = k_{x4} = \frac{i_y^2}{x_3} = \frac{\frac{b^2}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{b}{6}$$

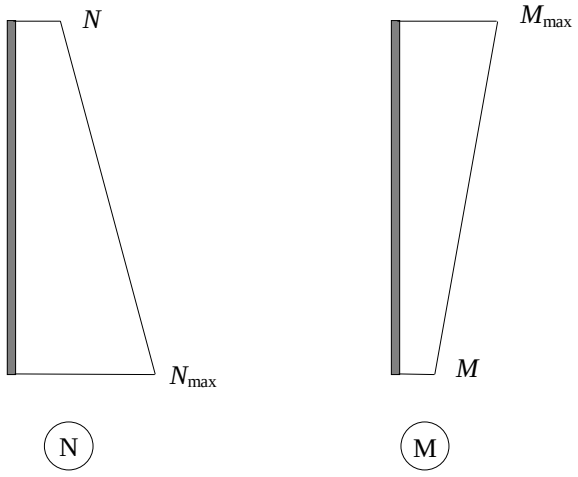
összefüggéseket, a magszakaszokra pedig a

$$k_y = k_{y1} + k_{y2} = \frac{h}{6} + \frac{h}{6} = \frac{h}{3} \qquad \text{és} \qquad k_x = k_{x3} + k_{x4} = \frac{b}{6} + \frac{b}{6} = \frac{b}{3}$$

képleteket kapjuk.

11.1.3 Gyakorlati alkalmazás

A gyakorlati munka során külpontos húzás kétféleképpen jelentkezik. Az első pillanatban nyilvánvaló eset az, amikor a terhelést egy külpontosan elhelyezkedő húzóerő jelenti. Ilyen eset azonban viszonylag ritkán fordul elő. Az esetek többségében úgy találkozunk a jelenséggel, hogy a kérdéses rúd – amely egy több rúdból álló szerkezet egy eleme is lehet – a terhelés hatására húzó *és* hajlító igénybevételt is szenved. A külpontos húzás ekkor úgy jelentkezik, hogy a rúd igénybevételét jellemző igénybevételi ábrák közül az N- és M-ábra is zérustól különböző értékeket tartalmaz. (Nyíróerő is felléphet: a nyíróerő hatásával a 8. fejezetben foglalkoztunk.) Ez több szempontból is fontos: meg kell rajzolni az igénybevételi ábrákat és utána meg kell vizsgálni a rúd egyes keresztmetszeteihez tartozó N és M értékeket. Mivel a normálerő és a nyomaték is normálfeszültséget okoz, vizsgálni kell azt is, hogy melyik keresztmetszetben lesz a normálfeszültség értéke maximum. Ez gyakran nem állapítható meg ránézésre és így egy rúd esetében szükségessé válhat, hogy a normálfeszültség értékét több (általában két) helyen is kiszámítsuk. Ilyen esetet vázolunk a 11.9 ábrán, ahol a normálerő a rúd egyik végén, a nyomaték pedig a másik végén maximális. Itt két számítást kell elvégezni: a normálfeszültséget ki kell számítani az N_{max}-M és az M_{max}-N értékpárokra is.



11.9 ábra. A vizsgált rúd normálerő-ábrája és nyomatékábrája különböző helyen rendelkezik maximális értékkel.

A külpontosan húzott szerkezetek esetében a méretezési feladat általában ellenőrzés formájában jelentkezik, amelynek során a méretezés $Y_H \geq Y_M$ alapegyenletét alkalmazzuk és a (11.1) vagy (11.4) képlet felhasználásával feszültség-összehasonlítást hajtunk végre. Ezt mutatja be a következő két példa.

1) Külpontosan húzott rúdszerkezet

Ellenőrizzük, hogy megfelel-e a 11.10/a ábrán vázolt rúdszerkezet. Szerkesszük meg a σ-ábrát is. A rúdszerkezetre ható két erő nagysága $F = 4$ kN. A téglalap keresztmetszet méretei $h = 200$ mm és $b = 100$ mm. A három rúdból álló szerkezet keresztmetszeteinek térbeli elhelyezkedését a 11.10/a ábra befogatott metszetei és a 11.10/b ábra mutatja. A határfeszültségek értéke $\sigma_H = 14$ N/mm^2 és $\tau_H = 2.2$ N/mm^2.

Mindhárom rúd esetében z a rúdtengelyt, x és y a keresztmetszet súlyponti tengelyeit jelöli. A 11.10/b ábrán megadott koordinátarendszer alkalmazásával megállapítható, hogy a hajlítás síkja az x-z sík. Ennek megfelelően a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka a hajlítás síkjára merőleges tengelyre:

$$I_y = \frac{200 \cdot 100^3}{12} = 1.66\dot{6} \cdot 10^7 \,\text{mm}^4$$

A semleges tengely helyének megállapításához szükség lesz az inerciasugár (11.6) értékére is:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{200 \cdot 100^3}{12 \cdot 200 \cdot 100}} = 28.87 \,\text{mm}$$

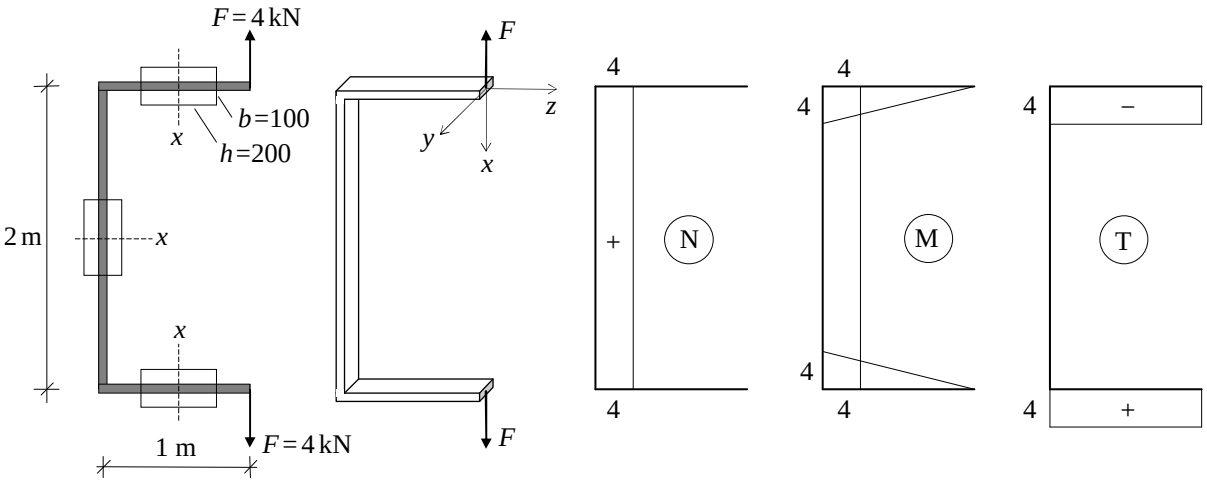
A következő lépésben az igénybevételi ábrákat állítjuk elő (11.10/c ábra). Az ábrák tanúsága szerint a két vízszintes rúd igénybevétele összetett hajlítás, a függőleges rúd igénybevétele pedig külpontos húzás. Mivel a normálerő és a nyomaték értéke is állandó a rúd hossza mentén, az $N_{\max}$ és az $M_{\max}$ ugyanabban a pontban található. A maximális normálfeszültség nagyságát így egyetlen számítással meghatározhatjuk. Értéke a (11.4) képlettel számolva:

$$\sigma_{\max} = \sigma^{(+)} = \frac{F}{A} + \frac{M_y}{I_y} x = \frac{4000}{200 \cdot 100} + \frac{4 \cdot 10^6}{16.6\dot{} \cdot 10^6} 50 = 0.2 + 12.0 = 12.2 \,\text{N/mm}^2$$

Ez az érték kisebb a σ_H = 14 N/mm^2 határfeszültségnél, így a szerkezet a normálfeszültségek szempontjából megfelel.

A feszültség értéke a másik szélsőszálban:

$$\sigma^{(-)} = \frac{F}{A} - \frac{M_y}{I_y} x = \frac{4000}{200 \cdot 100} - \frac{4 \cdot 10^6}{16.6\dot{} \cdot 10^6} 50 = 0.2 - 12.0 = -11.8 \,\text{N/mm}^2$$



a) statikai váz befor-gatott metszetekkel

b) 3-D vázlat

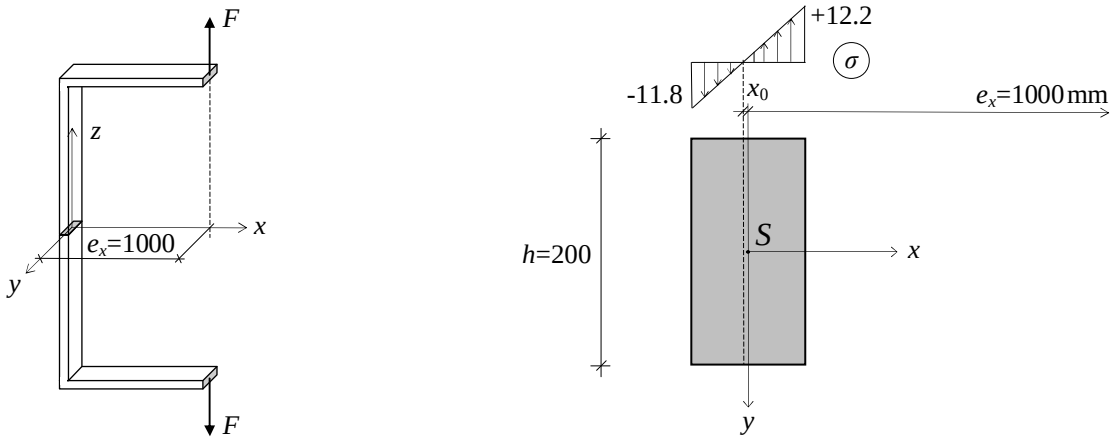
c) igénybevételi ábrák

11.10 ábra. Külpontosan húzott rúdszerkezet és az igénybevételi ábrái.

A semleges tengely helyét a (11.5) képlet adja:

$$x_0 = \frac{i_y^2}{e_x} = \frac{28.87^2}{1000} = 0.83 \,\text{mm}$$

Mivel az erő döféspontja az *x* tengelyen helyezkedik el (11.10/b és 11.11/a ábrák), a feszültségábra a 11.3 ábra mintájára rajzolható meg (11.11/b ábra).



a) a terhelés síkja az *x*-*z* sík b) *σ*-ábra

11.11 ábra. A függőleges rúd külpontosan húzása.

Bár ennek a fejezetnek nem témája a nyírásvizsgálat, egy tervezési feladat esetében a nyírásvizsgálatot is el kell végezni. A nyíróerő értéke a két vízszintes rúdon konstans: $T = 4$ kN. A 11.10/a ábra vázlata szerint az elcsúszni akaró keresztmetszet-rész nagysága $200\times50 = 10000$ mm^2 és a keresztmetszet szélessége 200 mm. A (8.1) képlettel számolva – de figyelembe véve hogy a keresztmetszet nyíróerőre merőleges *y* tengelyével kell dolgozni (11.10/b ábra) és hogy a nyírófeszültség kiszámítására szolgáló (8.1) képletben *b*-vel jelölt szélességi méretet mi *h*-val jelöltük (11.10/a ábra) – a legnagyobb nyírófeszültség értéke:

$$\tau_{\max} = \frac{TS_y}{bI_y} = \frac{4000[200\cdot 50\cdot 25]}{200\cdot 16.\dot{6}\cdot 10^6} = 0.3\,\mathrm{N/mm^2}$$

ahol a statikai nyomaték számítását – a könnyebb megkülönböztethetőség céljából – szögletes zárójelek közé tettük. Ez az érték kisebb mint a $\tau_H = 2.2$ N/mm^2 határfeszültség, tehát a tartó nyírásra is megfelel.

2) Kéttámaszú tartó külpontos húzása

Ellenőrizzük, hogy megfelel-e a 11.12/a ábrán vázolt három rúdból álló, törttengelyű, kéttámaszú tartó a normálfeszültségek szempontjából, ha a határfeszültség értéke $\sigma_H = 60$ N/mm^2. Határozzuk meg a maghatárpontok helyét is. A 11.12/a ábra beforgatott metszetei szerint a keresztmetszet két főtengelye közül *y* a keresztmetszet szimmetriatengelye. A hajlítás síkja az *y*-*z* sík (ahol *z* a rudak tengelye).

Az igénybevételi ábrák előállításához szükségünk van a reakcióerőkre:

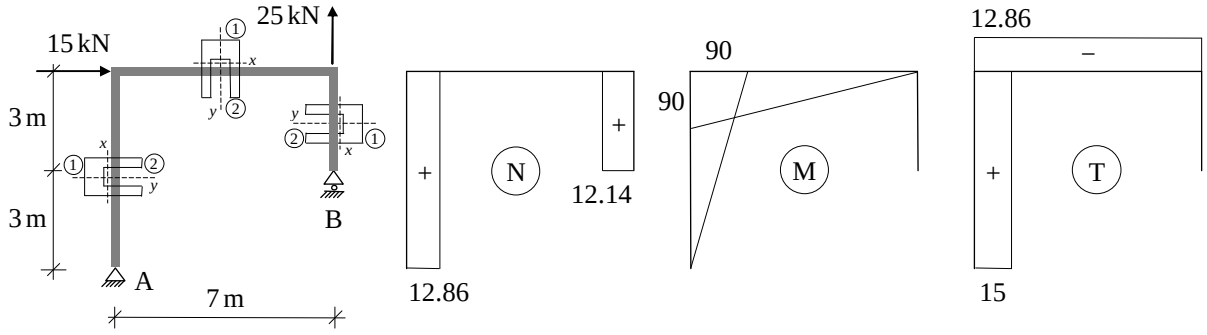
$$\sum M_A = -25\cdot 7 + 15\cdot 6 + 7B = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = 12.14\ \mathrm{kN}\ (\downarrow)$$

$$\sum F_{i,y} = -25 + 12.14 + A_y = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_y = 12.86\ \mathrm{kN}\ (\downarrow)$$

$$\sum F_{i,x} = 15 - A_x = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_x = 15\ \mathrm{kN}\ (\leftarrow)$$

Az igénybevételi ábrák most már meghatározhatók (11.12/b). Az ábrák tanúsága szerint a

vízszintes gerenda igénybevétele összetett hajlítás, a jobboldali oszlop igénybevétele központos húzás, a baloldali oszlopé pedig külpontos húzás.

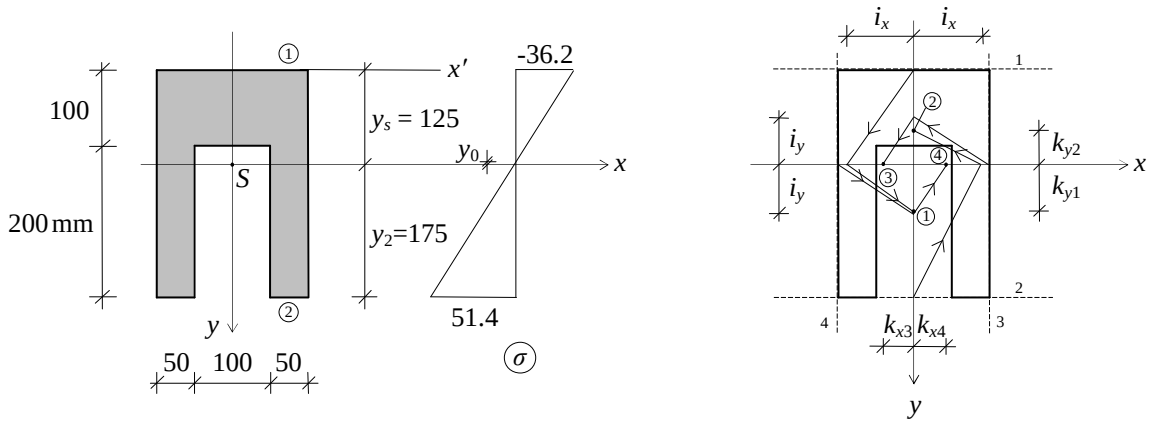


a) statikai váz befor-
gatott metszetekkel

b) igénybevételi ábrák

11.12 ábra. Kéttámaszú törttengelyű tartó és igénybevételi ábrái.

A legnagyobb normálfeszültség a baloldali oszlop mentén keletkezik. A normálerő az oszlop teljes hosszán konstans, a nyomaték maximális értéke pedig az oszlop tetejénél van; itt van tehát a normálfeszültség maximuma is. Az összetartozó értékpár: $M_{\max} = 90$ kNm és $N = 12.86$ kN.



a) b)

11.13 ábra. Rúdkeresztmetszet. a) σ-ábrával, b) maghatárpontokkal.

A σ-ábra és a maghatárpontok meghatározásához szükség van a keresztmetszet néhány jellemzőjére. Ezek a következők.

Súlypont (11.13/a ábra):

$$y_s = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{100 \cdot 300 \cdot 150 + 100 \cdot 100 \cdot 50}{100 \cdot 300 + 100 \cdot 100} = \frac{5000000}{40000} = 125\,\text{mm}$$

Tehetetlenségi nyomatékok:

$$I_x = I_{x'} - A y_s^2 = \frac{100 \cdot 300^3}{3} + \frac{100 \cdot 100^3}{3} - 40000 \cdot 125^2 = 3.083 \cdot 10^8\,\text{mm}^4$$

és

$$I_y = \frac{300 \cdot 200^3}{12} - \frac{200 \cdot 100^3}{12} = 1.833 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

Inerciasugarak:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{3.083 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^4}} = 87.8 \text{ mm} \qquad \text{és} \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{1.833 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^4}} = 67.7 \text{ mm}$$

A maximális feszültség a távolabbi – a 2. jelű – szélsőszálban (11.13/a ábra) ébred:

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = \frac{F}{A} + \frac{M_x}{I_x} y = \frac{12.86 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^4} + \frac{9 \cdot 10^7}{3.083 \cdot 10^8} 175 = 0.32 + 51.08 = 51.4 \text{ N/mm}^2$$

Ez az érték kisebb mint a határfeszültség ($\sigma_H = 60$ N/mm^2), tehát a tartó a normálfeszültségek szempontjából megfelel. A feszültség értéke a másik szélsőszálban:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} - \frac{M_x}{I_x} y = \frac{12.86 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^4} - \frac{9 \cdot 10^7}{3.083 \cdot 10^8} 125 = 0.32 - 36.49 = -36.2 \text{ N/mm}^2$$

A σ-ábrát a 11.13/a ábrán találjuk.

A normálerő külpontossága az $M = eF$ összefüggés alapján

$$e_y = \frac{M}{F} = \frac{9 \cdot 10^7}{12.86 \cdot 10^3} = 7000 \text{ mm}$$

amivel a semleges tengely helye – a (11.3) képlet felhasználásával – már meghatározható:

$$y_0 = \frac{i_x^2}{e_y} = \frac{87.8^2}{7000} = 1.1 \text{ mm}$$

A maghatárpontok helyét a (11.8) és (11.9) képletek adják:

$$k_{y1} = \frac{i_x^2}{y_1} = \frac{87.8^2}{125} = 61.67 \text{ mm} \qquad \text{és} \qquad k_{y2} = \frac{i_x^2}{y_2} = \frac{87.8^2}{175} = 44.05 \text{ mm}$$

és

$$k_{x3} = k_{x4} = \frac{i_y^2}{x_3} = \frac{67.7^2}{100} = 45.83 \text{ mm}$$

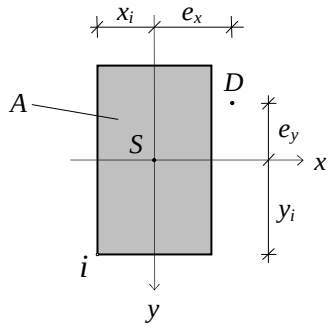
A maghatárpontok a 11.13/b ábrán láthatók, ahol a szerkesztés menetét is vázoltuk.

11.2 A húzóerő döféspontja általános helyzetű

Térbeli szerkezeteink esetében a húzóerő D döféspontja gyakran nem esik egyik főtengelyre sem és az erő kétszeresen külpontos (e_x és e_y a 11.14 ábrán).

A feladatot az előző pontban bemutatott módon oldjuk meg és ismét a szuperpozíciót alkalmazzuk. A különbség az, hogy most a központos húzásból származó

normálfeszültségekhez a ferde hajlításból keletkező normálfeszültségeket adjuk hozzá és a semleges tengely helyzetének meghatározása során figyelembe vesszük az erő kétirányú külpontosságát.



11.14 ábra. Külpontosan húzás általános helyzetű erővel.

11.2.1 A feszültségképlet és a semleges tengely helyzete

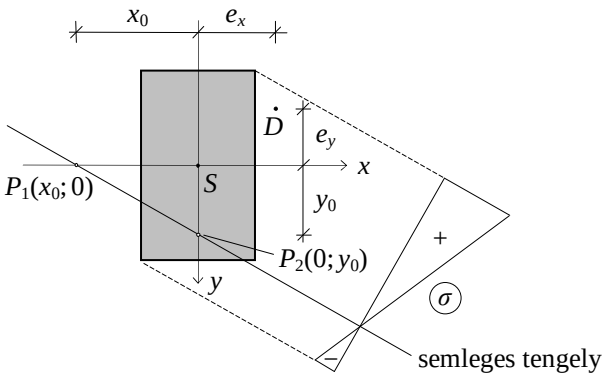
Mivel most a húzóerőnek mindkét főtengelyre van nyomatéka, a központosnak képzelt húzóerőből származó normálfeszültséget mindkét nyomatékból keletkező normálfeszültséggel ki kell egészíteni. A (11.1) képlet általánosításával így a keresztmetszet egy tetszőleges *i* pontjában a normálfeszültség értékét a

$$\sigma_i = \frac{F}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y_i \pm \frac{M_y}{I_y} x_i \tag{11.10}$$

képlet szolgáltatja.

A fenti képletben A a keresztmetszet területe [mm^2], I_x a keresztmetszet x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka [mm^4], I_y a keresztmetszet y tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka [mm^4], $M_x = Fe_y$ a húzóerő x tengelyre vonatkoztatott nyomatéka és $M_y = Fe_x$ a húzóerő y tengelyre vonatkoztatott nyomatéka. Az x_i és y_i a vizsgált pont helyzetkoordinátái (11.14 ábra). A feszültség dimenziója N/mm^2.

A semleges tengely helyzetét abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy a feszültség értéke a semleges tengely mentén zérus. A húzóerő *D* döféspontja helyének ismeretében ismerjük a semleges tengely *körülbelüli* helyét: a semleges tengely minden bizonnyal a súlypont *másik* oldalán helyezkedik el (11.15 ábra).



11.15 ábra. Külpontosan húzás általános helyzetű erővel. A semleges tengely és a feszültségábra.

Azt is tudjuk, hogy a semleges tengely általános helyzetű húzóerő esetében mindkét súlyponti tengelyt metszi. Ez azért fontos, mert így a semleges tengely két pontjának az összesen négy koordinátája közül egyet-egyet ismerünk: a 11.15 ábrán vázolt esetben ismerjük a P_1 pont y koordinátáját (zérus), valamint a P_2 pont x koordinátáját (szintén zérus). A semleges tengely *pontos* helyét az x_0 és y_0 koordináták kiszámításával két lépésben határozzuk meg. A feszültség zérusértékét kifejező

$$\sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{Fe_y}{I_x} y \pm \frac{Fe_x}{I_y} x = 0$$

egyenlet a P_1 pont esetében (ahol $y = 0$) az

$$\frac{F}{A} - \frac{Fe_x}{I_y} x_0 = 0$$

alakot ölti, ahonnan:

$$x_0 = \frac{I_y}{A} \frac{1}{e_x} = \frac{i_y^2}{e_x}$$

Hasonlóképpen, a feszültség zérusértékét kifejező fenti egyenlet a P_2 pont esetében (ahol $x = 0$) az

$$\frac{F}{A} - \frac{Fe_y}{I_x} y_0 = 0$$

alakot ölti, ahonnan:

$$y_0 = \frac{I_x}{A} \frac{1}{e_y} = \frac{i_x^2}{e_y}$$

Ezzel a semleges tengely helyét egyértelműen megadtuk és a feszültségábra megrajzolható (11.15 ábra).

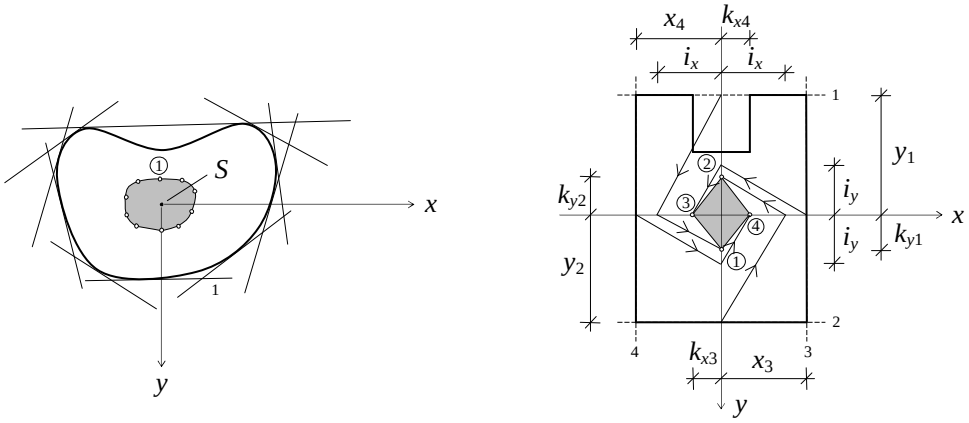
11.2.2 A keresztmetszet magidoma

A 11.1.2 pontban bevezettük a maghatárpont fogalmát. A maghatárpont egy korlátozott helyzetű húzóerőhöz tartozó jellegzetes pont volt, amikor a korlátozást az jelentette, hogy a húzóerőről azt tételeztük föl, hogy egy speciális helyzetű egyenes (az egyik súlyponti tengely) mentén helyezkedik el. A gyakorlatban azonban az erő különböző helyzetekben lehet. Általános helyzetű erő esetében a fogalom általánosítható és a magidom (vagy más néven belső mag) fogalmához jutunk.

A magidom az a súlypont körüli terület, amelyen belül lévő erő hatására a keresztmetszetben csak egynemű feszültségek ébrednek. A magidom a maghatárpontok segítségével szerkeszthető meg. Ahány a keresztmetszetbe nem metsző egyenessel határolható egy keresztmetszet, annyi maghatárpont van. Ezek összekötésével megkapjuk a magidomot. Általános alakú (pl. görbevonallal határolt) keresztmetszet esetén (11.16/a ábra) a magidom is görbevonallal határolt. Az elméletileg végtelen számú érintő helyett ekkor a pontossági igénynek megfelelő számú határoló egyenest választunk ki, amelyekhez egyenként megszerkesztjük (vagy kiszámítjuk) a maghatárpontot és ezek összekötésével megkapjuk a magidomot.

A gyakorlati esetek túlnyomó részében a keresztmetszet egyenesekkel határolt és így kisszámú maghatárpont meghatározása vezet a magidomhoz. A 11.16/b ábrán vázolt keresztmetszet nyolc egyenessel határolt, de csak négy olyan határoló egyenes rendelhető hozzá, amelyiknek egyike sem metsz bele a keresztmetszetbe, így a magidom négy maghatárpont meghatározásával állítható elő. A négy pont kiszámítására szolgáló képlet a (11.8) és (11.9) összefüggések alapján:

$$k_{y1} = \frac{i_x^2}{y_1}, \qquad k_{y2} = \frac{i_x^2}{y_2} \qquad \text{és} \qquad k_{x3} = k_{x4} = \frac{i_y^2}{x_3}$$

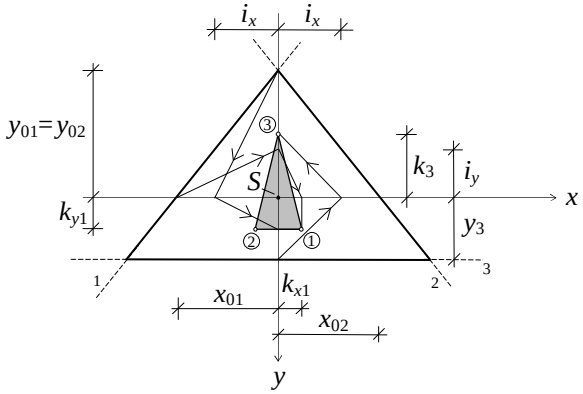


a) általános alakú keresztmetszet b) egyenesekkel határolt keresztmetszet

11.16 ábra. Magidom.

Fontos leszögezni, hogy a magidomot a keresztmetszeti jellemzők határozzák meg és így a magidom és a terhelés között semmiféle kapcsolat nincs.

Az eddig bemutatott esetekben amikor maghatárpontot szerkesztettünk, a megszerkesztendő maghatárponthoz tartozó határoló egyenes csak egy súlyponti tengelyt metszett. Azokban az esetekben, amikor a határoló egyenes két súlyponti tengelyt metsz, a szerkesztést két lépésben hajtjuk végre és így a maghatárpontot a két koordinátájával határozzuk meg. Ilyen esetet mutat a 11.17 ábra, amikor a háromszög keresztmetszetet határoló három egyenes közül kettő két súlyponti tengelyt metsz.



11.17 ábra. Maghatárpont mindkét súlyponti tengelyt metsző határoló egyenes esetén.

Tekintsük a baloldali 1. jelű határoló egyenest és határozzuk meg a hozzá tartozó 1. maghatárpontot. A maghatárpont x koordinátáját úgy kapjuk meg, hogy először a határoló egyenes és az x tengely metszéspontját összekötjük azzal a ponttal amely i_y távolságra van a

súlyponttól az *y* tengelyen, majd az összekötő egyenesre állított merőleges az *x* tengelyen kijelöli a k_{x1} pontot. Ez az 1. maghatárpont *x* koordinátája. Számítással:

$$k_{x1} = \frac{i_y^2}{x_{01}}$$

A maghatárpont *y* koordinátáját hasonló módon kapjuk meg. Először a határoló egyenes és az *y* tengely metszéspontját összekötjük azzal a ponttal amely i_x távolságra van a súlyponttól az *x* tengelyen, majd az összekötő egyenesre állított merőleges az *y* tengelyen kijelöli a k_{y1} pontot. Számítással:

$$k_{y1} = \frac{i_x^2}{y_{01}}$$

Teljesen ugyanígy kapjuk meg a 2. jelű határoló egyeneshez tartozó maghatárpont két koordinátáját:

$$k_{x2} = \frac{i_y^2}{x_{02}} \qquad \text{és} \qquad k_{y2} = \frac{i_x^2}{y_{02}}$$

A 3. jelű határoló egyeneshez tartozó maghatárpont számítása és szerkesztése a már ismert módon történik:

$$k_3 = \frac{i_x^2}{y_3}$$

11.2.3 Gyakorlati alkalmazás

A helyzet a 11.1.3 pontban tárgyalt esettel azonos: a méretezési feladat általában ellenőrzés formájában jelentkezik, amelynek során a méretezés $Y_H \geq Y_M$ alapegyenletét most a (11.10) képlet felhasználásával alkalmazzuk és feszültség-összehasonlítást hajtunk végre. A következő példa ezt mutatja be. Először a húzásvizsgálatot hajtjuk végre, majd megszerkesztjük a keresztmetszet magidomát.

1) Háromszög alakú keresztmetszet külpontos húzása

Ellenőrizzük, hogy megfelel-e a 11.18 ábrán vázolt, háromszög keresztmetszetű rúd külpontos húzásra. Rajzoljuk meg a σ-ábrát is. A rúd anyagának határfeszültsége $\sigma_H = 10\ \text{N/mm}^2$. Az $F = 100$ kN nagyságú húzóerő *D* döféspontjának külpontossága $e_x = 50$ mm és $e_y = 60$ mm.

A számításhoz szükséges alapadatok a következők:

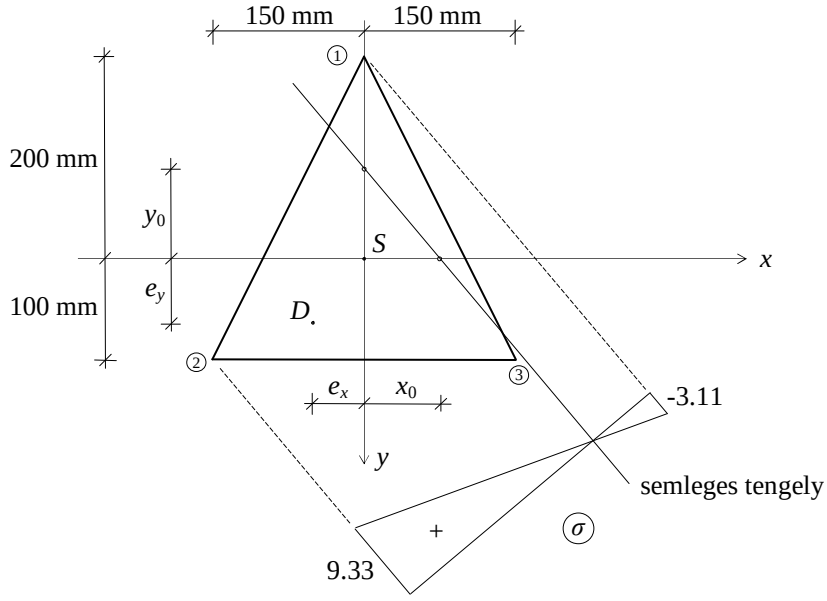
$$A = \frac{300 \cdot 300}{2} = 45000\ \text{mm}^2, \quad I_x = \frac{300^4}{36} = 2.25 \cdot 10^8\ \text{mm}^4, \quad I_y = \frac{300 \cdot 150^3}{12} 2 = 1.6875 \cdot 10^8\ \text{mm}^4$$

és

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{2.25 \cdot 10^8}{4.5 \cdot 10^4}} = \sqrt{5000} = 70.7\ \text{mm}, \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{1.6875 \cdot 10^8}{4.5 \cdot 10^4}} = \sqrt{3750} = 61.2\ \text{mm}$$

Az első lépésben a semleges tengely helyét határozzuk meg az *x* és *y* tengelyeket metsző két pontjával:

$$x_0 = \frac{i_y^2}{e_x} = \frac{3750}{50} = 75\,\text{mm}, \qquad y_0 = \frac{i_x^2}{e_y} = \frac{5000}{60} = 83.33\,\text{mm}$$



11.18 ábra. Háromszög keresztmetszetű rúd külpontos húzása.

A semleges tengely helyének ismeretében a σ-ábra már alakhelyesen megrajzolható (11.18 ábra) és az alakhelyes ábra jelzi, hogy a legnagyobb húzófeszültség a 2. pontban, a legnagyobb nyomófeszültség pedig az 1. pontban várható. Az értékeket a (11.10) képlet segítségével számítjuk ki:

$$\sigma_2 = \frac{F}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_2 + \frac{M_y}{I_y} x_2 = \frac{10^5}{4.5 \cdot 10^4} + \frac{10^5 \cdot 60}{2.25 \cdot 10^8} 100 + \frac{10^5 \cdot 50}{1.6875 \cdot 10^8} 150 =$$

$$= 2.22 + 2.67 + 4.44 = 9.33\,\text{N/mm}^2$$

$$\sigma_1 = \frac{10^5}{4.5 \cdot 10^4} - \frac{10^5 \cdot 60}{2.25 \cdot 10^8} 200 + \frac{10^5 \cdot 50}{1.6875 \cdot 10^8} 0 = 2.22 - 5.33 = -3.11\,\text{N/mm}^2$$

Gyakorlásképpen kiszámítjuk a 3. pontban ébredő feszültséget is:

$$\sigma_3 = \frac{10^5}{4.5 \cdot 10^4} + \frac{10^5 \cdot 60}{2.25 \cdot 10^8} 100 - \frac{10^5 \cdot 50}{1.6875 \cdot 10^8} 150 = 2.22 + 2.67 - 4.44 = 0.45\,\text{N/mm}^2$$

A legnagyobb feszültség a 2. pontban keletkezik és ez a feszültség kisebb mint a határfeszültség

$$\sigma_M = \sigma_2 = 9.33\,\text{N/mm}^2 < 10\,\text{N/mm}^2 = \sigma_H$$

tehát a külpontosan húzott rúd megfelel.

2) Háromszög alakú keresztmetszet magidoma

Határozzuk meg az előző feladatban szereplő háromszög alakú keresztmetszet magidomát.

Az alapadatokat fent már kiszámítottuk. A számítások során szükségünk lesz még az x_{01} távolságra (11.19 ábra), amelyet aránypár segítségével határozunk meg:

$$\frac{x_{01}}{150} = \frac{200}{300} \qquad \rightarrow \qquad x_{01} = 100\,\text{mm}$$

A három egyenessel határolt keresztmetszet magidomát három maghatárpont határozza meg. A szimmetria miatt ezek közül csak kettőnek kell a koordinátáit kiszámítani. Az 1. jelű (baloldali ferde) határoló egyenes mindkét súlyponti tengelyt metszi, ezért a maghatárpontot két koordinátájával tudjuk megadni:

$$k_{x1} = \frac{i_y^2}{x_{01}} = \frac{3750}{100} = 37.5\,\text{mm} \qquad \text{és} \qquad k_{y1} = \frac{i_x^2}{y_{01}} = \frac{5000}{200} = 25\,\text{mm}$$

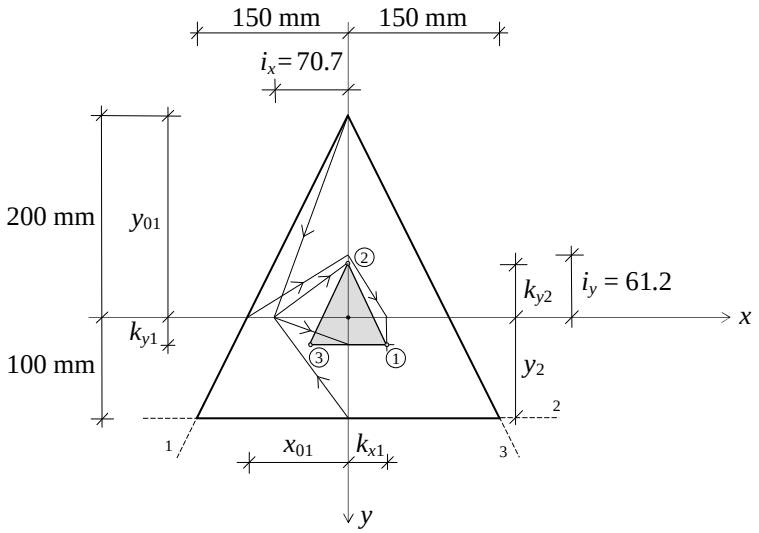
A szerkesztést a 11.19 ábrán látjuk.

A 3. jelű határoló egyenes az 1. jelű egyenes szimmetrikus párja, így a koordinátákat a fenti két érték segítségével kapjuk meg. A 3. maghatárpont az 1. maghatárpont *y* tengelyre szimmetrikus párja és az ábrán szerkesztés nélkül bejelöltük.

A 2. jelű (*x* tengellyel párhuzamos) határoló egyenes csak az *y* tengelyt metszi. A hozzá tartozó maghatárpont a súlypont másik oldalán, az *y* tengelyen található. Koordinátája:

$$k_{y2} = \frac{i_x^2}{y_2} = \frac{5000}{100} = 50\,\text{mm}$$

A szerkesztést az ábrán találjuk.

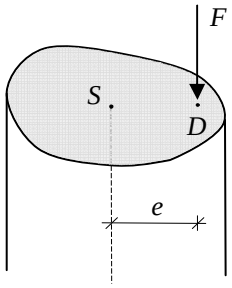


11.19 ábra. Háromszög keresztmetszet magidoma.

12

Külpontos nyomás

A külpontos nyomóigénybevételt az jellemzi, hogy a rúd keresztmetszetére ható nyomóerő párhuzamos a rúdtengellyel, de hatásvonala nem esik a tengely vonalába. Máshogyan megfogalmazva: a nyomóerő hatásvonalának a keresztmetszet síkjával alkotott *D* döféspontja nem esik egybe a keresztmetszet *S* súlypontjával és az erő *e* külpontossággal rendelkezik (12.1 ábra).



12.1 ábra. Külpontosan nyomott rúd.

Ha a külpontos nyomás definícióját összehasonlítjuk az előző fejezet elején közölt definícióval amelyet a külpontos húzás esetére fogalmaztunk meg, akkor azonnal nyilvánvaló lesz, hogy a két definíció csak abban különbözik egymástól, hogy az előző fejezetben az erő húzóerő volt, most pedig nyomóerő. Arra gondolhatnánk, hogy akkor az előző fejezetben levezetett képleteket automatikusan átvehetjük, azzal a módosítással, hogy a húzás szót lecserélnénk nyomásra és a képletekben szereplő előjeleket ennek megfelelően (az ellenkezőkre) cserélnénk. Ez azonban csak bizonyos esetekben lehetséges. Ennek okát már a 3. fejezetben láttuk, amikor rámutattunk arra, hogy a húzás és a nyomás jelensége alapvetően különböző lehet, annak megfelelően, hogy fellép-e a kihajlás jelensége. Az pedig hogy fellép-e a kihajlás jelensége, attól függ, hogy a vizsgált szerkezet karcsú vagy zömök.

Ennek megfelelően külön fogjuk vizsgálni a zömök rudakat, ahol a kihajlás jelenségével nem számolunk és a karcsú rudakat, amelyek esetében a kihajlás jelenségét is figyelembe kell venni.

Feltételezzük, hogy a vizsgált szerkezetek egyenestengelyű, prizmatikus rudak.

12.1 Külpontosan nyomott zömök rudak

Zömök rúdról akkor beszélünk, ha a keresztmetszet kisebbik mérete és a rúd hossza között nincs nagyságrendi különbség. Ilyen esetekben a kihajlás jelenségét nem vesszük figyelembe, mert a hatása elhanyagolhatóan kicsi. Ez viszonylag egyszerű tárgyalást tesz lehetővé.

Nyomott szerkezeteink különböző anyagokból készülhetnek, amelyek között vannak

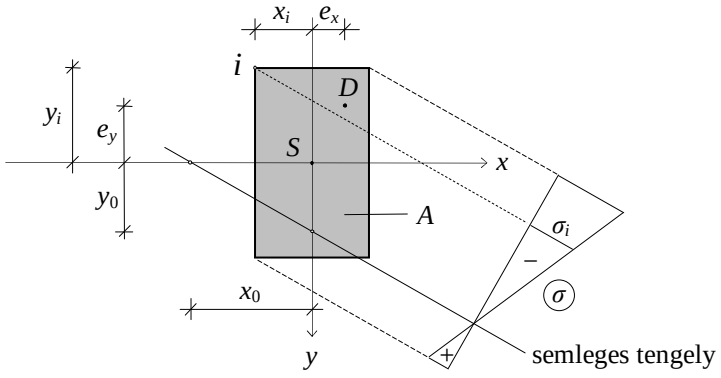
amelyek húzószilárdsággal rendelkeznek és vannak amelyek húzószilárdsággal nem rendelkeznek. Ezek viselkedése – és vizsgálata – eltérő és ezért külön csoportban tárgyaljuk őket.

12.1.1 Húzószilárdsággal rendelkező zömök rudak

Mivel a kihajlással nem kell foglalkozni és az esetleges húzófeszültségeket a húzószilárdsággal is rendelkező nyomott rúd képes felvenni, ebben az esetben a külpontosan húzott rudakra levezetett összefüggések értelemszerűen alkalmazhatók, ha a húzóerőt nyomóerőre cseréljük. A (11.10) képlet alapján így azonnal felírhatjuk a keresztmetszet egy tetszőleges *i* pontjában (12.2 ábra) keletkező normálfeszültség kiszámítására alkalmas képletet:

$$\sigma_i = -\frac{F}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y_i \pm \frac{M_y}{I_y} x_i \tag{12.1}$$

A fenti képletben F a D döféspontban működő nyomóerő [N], A a keresztmetszet területe [mm^2], I_x a keresztmetszet x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka [mm^4], I_y a keresztmetszet y tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka [mm^4], $M_x = Fe_y$ a nyomóerő x tengelyre vonatkoztatott nyomatéka és $M_y = Fe_x$ a nyomóerő y tengelyre vonatkoztatott nyomatéka. Az x_i és y_i a vizsgált pont helyzetkoordinátái (12.2 ábra). A feszültség dimenziója N/mm^2.



12.2 ábra. Külpontosan nyomott rúd általános helyzetű nyomóerővel.

A semleges tengely helyét meghatározó két koordináta képlete szintén átvehető a 11.2.1 pontból:

$$x_0 = \frac{i_y^2}{e_x} \qquad \text{és} \qquad y_0 = \frac{i_x^2}{e_y} \tag{12.2}$$

12.1.2 Húzószilárdsággal nem rendelkező zömök rudak

Nagyon sok olyan szerkezetet alkalmazunk amelyek anyaga nem, vagy csak igen korlátozott mértékben rendelkezik húzószilárdsággal. Ilyenek például az építőiparban előszeretettel használt beton és falazott szerkezetek, amelyek kis húzófeszültségét a gyakorlatban általában el szoktuk hanyagolni. Ezek viselkedése alapvetően attól függ, hogy a külpontos nyomóerő hol helyezkedik el. Feltételezzük, hogy a nyomóerő döféspontjának helye ismert.

Ha kizárjuk azt az esetet amikor a nyomóerő döféspontja a keresztmetszetet metszés nélkül

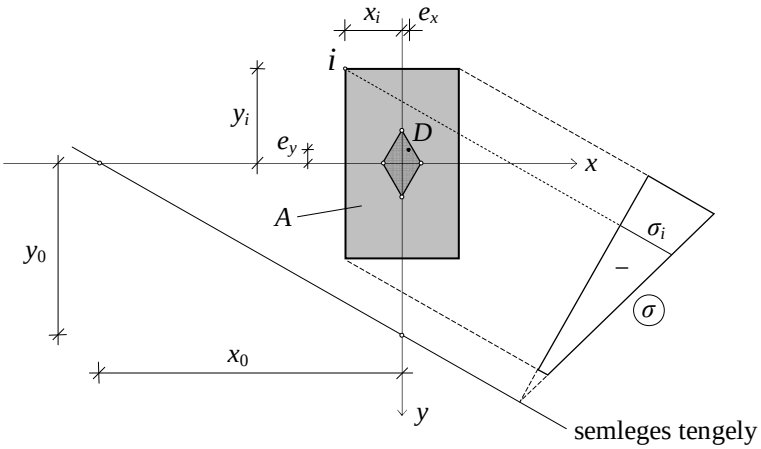
érintő egyenesek által határolt területen kívülre esik – mert ez esetben az egyensúly nem biztosítható és így ilyen szerkezetek a gyakorlatban nem használhatók – két esetet kell megkülönböztetnünk: amikor a nyomóerő döféspontja a magidomon belül van, és amikor a döféspont ugyan a magidomon kívül esik, de még a keresztmetszetet metszés nélkül érintő egyenesek által határolt területen belül van. Ebből az következik, hogy a húzószilárdsággal nem rendelkező zömök nyomott rudak esetében mindig meg kell határozni a keresztmetszet magidomát (vagy speciális esetben az egyik maghatárpontot).

12.1.2.1 Erő a magidomon belül

A magidomon belül támadó nyomóerő a keresztmetszeten egynemű feszültségeket ébreszt. Ezek nyomófeszültségek, így nincs jelentősége annak, hogy a rúd anyaga nem rendelkezik húzófeszültséggel. Mivel a vizsgált rúd zömök, a kihajlással nem kell foglalkozni, így ismét alkalmazhatók a külpontosan húzott rudakra levezetett összefüggések. Ezek közül most csak a feszültségek meghatározására szolgáló

$$\sigma_i = -\frac{F}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y_i \pm \frac{M_y}{I_y} x_i$$

összefüggésre van szükség. Ez a képlet azonos a (12.1) képlettel, de a magidomon belül lévő nyomóerő miatt most csak nyomófeszültségeket eredményez (12.3 ábra).



12.3 ábra. Külpontosan nyomott zömök rúd a magidomon belül lévő nyomóerővel.

A semleges tengely helyét nem feltétlenül szükséges meghatározni, mert a semleges tengely a keresztmetszeten kívül esik (és így nem választ el a húzó- és nyomófeszültségeket). Segíthet viszont a feszültségábra alakhelyes megrajzolásában, illetve a kiszámított feszültségértékek ellenőrzésében. Ez esetben a semleges tengely jellemző két koordinátáját a (12.2) képletek segítségével számíthatjuk ki. A képletek levezetése a 11.2.1 pontban található.

12.1.2.2 Erő a magidomon kívül, de a keresztmetszetet érintő egyeneseken belül

Ha az erő a magidomon kívül, de a keresztmetszetet metszés nélkül érintő egyenesek által határolt területen belül van, a külpontos nyomóerő húzó- és nyomófeszültségeket is ébresztene. Mivel a rúd anyaga húzófeszültségek felvételére nem alkalmas, az a keresztmetszetrész ahol húzófeszültségek keletkeznének bereped, így ez a rész feszültségmentes lesz és nem vesz részt az erőjátékban. A maradék keresztmetszetrész a nyomott felület, amelyet A_{ny}-el jelölünk. A nyomott és a (figyelmen kívül hagyott) berepedt és

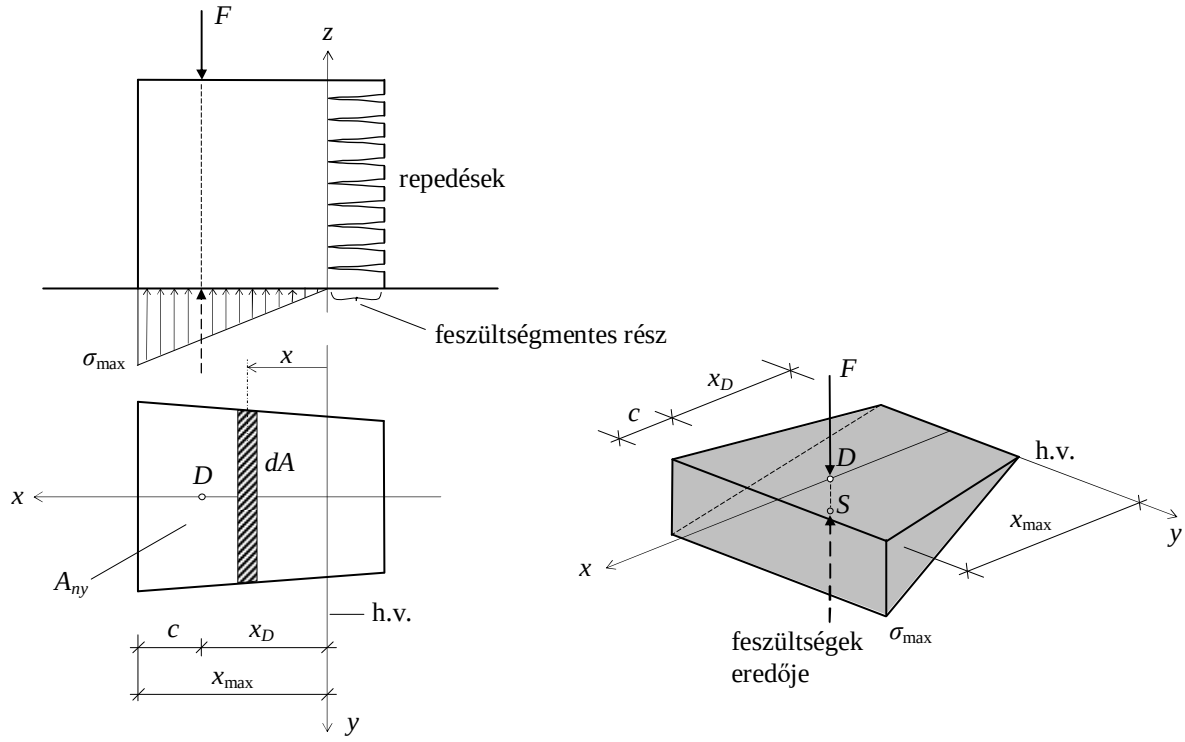
feszültségmentes felületrészt elválasztó egyenest *határvonalnak* nevezzük. (A határvonal felel meg az eddig használt semleges tengelynek, amely a nyomott és a húzott felületrészt választotta el.)

Ebben a pontban bemutatjuk, hogy húzófeszültségek híján hogyan biztosítható az egyensúly pusztán nyomófeszültségekkel. Erre két eljárást ismertetünk, attól függően hogy rugalmas vagy képlékeny viselkedést tételezünk fel.

A: Rugalmas megoldás

Feltételezzük, hogy a vizsgált szerkezet anyaga rugalmasan viselkedik, a keresztmetszet egyszeresen szimmetrikus és a nyomóerő a szimmetriatengely mentén támad. Az erő helyét a keresztmetszet szélétől *c*-vel jelöljük (12.4 ábra).

Mivel az erő döféspontja a magidomon kívül van, a keresztmetszetnek csak egy részén léphetnek fel feszültségek – mégpedig nyomófeszültségek – a keresztmetszet többi része feszültségmentes. Itt ugyanis az anyag húzószilárdság hiányában megreped. A keresztmetszetnek azt a részét, amelyen nyomófeszültségek lépnek fel, nyomott felületnek (A_{ny}) nevezzük. Rugalmas viselkedés esetén az eredetileg sík keresztmetszetek síkok maradnak, ezért a σ-ábra lineáris egyenessel jellemezhető. Így a nyomott felületet a keresztmetszet többi részétől egyenes vonal választja el. Mivel az elválasztó vonal egyik részén vannak csak feszültségek, ezt a vonalat határvonalnak (h.v.) nevezzük. A határvonal helyét az erő *D* döféspontjától az egyelőre ismeretlen x_D távolság jelöli ki (12.4 ábra).



a) rugalmas viselkedés b) feszültségi éktest

12.4 ábra. Húzószilárdsággal nem rendelkező zömök rúd.

Az *F* erő hatására tehát a rúdban a 12.4/a ábrán vázolt σ nyomófeszültségek keletkeznek. Az ábra tanúsága szerint egyensúly csak akkor biztosítható, ha az *F* erő és a feszültségek (az ábrán szaggatottal jelölt) eredője közös hatásvonalú, vagyis az *F* erő *D* döféspontja és a feszültségi éktest *S* súlypontja egy függőlegesre esik (12.4/b ábra).

Célunk a maximális feszültség megállapítása. Ennek érdekében először azt kell tudni, hogy

mekkora keresztmetszet vesz részt a teherviselésben. Ezt az $x_{\max}$ távolság adja meg, aminek meghatározásához az x_D távolságra van szükség.

A függőleges terhelő erő és a nyomófeszültségek eredőjének egyensúlyát a függőleges vetületi egyenlet fejezi ki:

$$\sum F_{i,z} = F - \int_{(A_{ny})} \sigma dA = 0$$

Az integráljel mögött x/x-el bővítve innen az

$$F = \int_{(A_{ny})} \frac{\sigma}{x} x dA = \frac{\sigma}{x} S_{ny}$$

összefüggést kapjuk. A lineáris viselkedés következtében a σ-ábrát ferde egyenes jellemzi, így a σ/x mennyiség konstans. A σ/x mennyiséget így az integráljel elé kiemelhettük és a megmaradt integrálkifejezésre bevezettük az S_{ny} jelölést, amely a nyomott felület statikai nyomatéka a határvonalra. A feszültség kiszámítására szolgáló képlet így az alábbi alakban állítható elő:

$$\sigma = \frac{F}{S_{ny}} x \tag{12.3}$$

Ez a képlet még nem használható, mert nem tudjuk hogy hol van a határvonal. A határvonal helye a határvonalra felírt nyomatéki egyensúlyi egyenlet segítségével határozható meg:

$$\sum M_{\text{h.v.}} = \int_{(A_{ny})} \sigma dA x - F x_D = 0$$

Innen az integráljel mögött ismét x/x-el bővítve az

$$F x_D = \int_{(A_{ny})} \sigma dA x = \int_{(A_{ny})} \frac{\sigma}{x} x^2 dA = \frac{\sigma}{x} \int_{(A_{ny})} x^2 dA = \frac{\sigma}{x} I_{ny}$$

összefüggéseket kapjuk, ahol a σ/x konstanst ismét kiemeltük az integráljel elé és a megmaradt integrálkifejezésre bevezettük az I_{ny} jelölést, amely a nyomott felület tehetetlenségi nyomatéka a határvonalra. Ha ide behelyettesítjük a σ (12.3) kifejezését, akkor a határvonal meghatározására alkalmas

$$x_D = \frac{I_{ny}}{S_{ny}} \tag{12.4}$$

formailag egyszerű kifejezéshez jutunk. Mivel a (12.4) egyenlet mindkét oldala tartalmazza az x_D távolságot, általános esetben harmadfokú egyenlet megoldása is szükségessé válhat.

A legnagyobb feszültség a keresztmetszet szélén ébred:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{S_{ny}} x_{\max} \tag{12.5}$$

ahol

$$x_{\max} = c + x_D$$

a nyomott felület teljes szélessége (12.4 ábra).

A (12.5) képlet segítségével a külpontosan nyomott rúd határereje is előállítható:

$$F_H = \frac{S_{ny}}{x_{\max}} \sigma_H \tag{12.6}$$

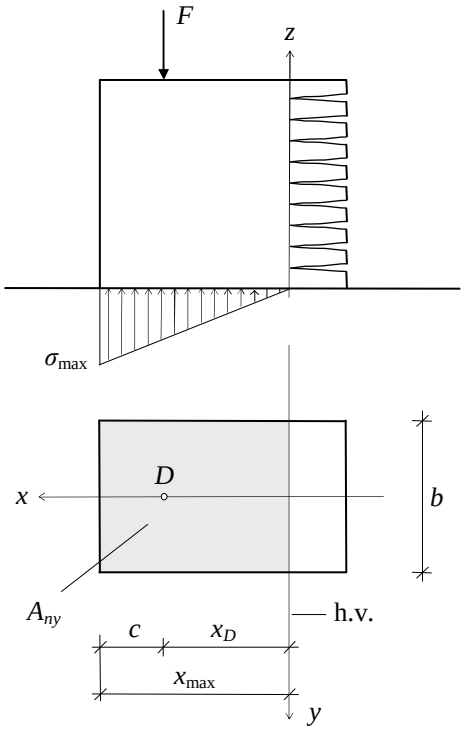
A fenti képletek elég egyszerű szerkezetűek és egyszerű keresztmetszetek esetében igen egyszerű végeredményekhez is vezetnek. A következőkben a téglalap és a háromszög keresztmetszetekre mutatjuk be a gyakorlati alkalmazásokra közvetlenül alkalmas képleteket.

Téglalap keresztmetszet

Tekintsük a 12.5 ábrán vázolt, F külpontos nyomóerővel terhelt, derékszögű négyszög keresztmetszetű zömök oszlopot. A nyomóerő D döféspontja c távolságra van a keresztmetszet bal szélétől. A döféspont és az (egyelőre ismeretlen helyzetű) határvonal távolságát x_D jelöli. Feladatunk a $\sigma_{\max}$ maximális nyomófeszültség és az F_H határerő meghatározása.

Az első lépésben a határvonal helyét kell meghatározni. A (12.4) összefüggés alkalmazásához szükségünk van a nyomott keresztmetszet határvonalra vonatkoztatott statikai és tehetetlenségi nyomatékaira:

$$S_{ny} = \frac{b(c + x_D)^2}{2} \qquad \text{és} \qquad I_{ny} = \frac{b(c + x_D)^3}{3}$$



12.5 ábra. Húzószilárdsággal nem rendelkező, külpontosan nyomott, négyszög keresztmetszetű zömök oszlop.

Így már behelyettesíthetünk a (12.4) képletbe:

$$x_D = \frac{I_{ny}}{S_{ny}} = \frac{b(c+x_D)^3 2}{3b(c+x_D)^2} = \frac{2}{3}(c+x_D)$$

ahonnan

$$x_D = 2c \tag{12.7}$$

A (12.5) képlet szolgáltatja a maximális nyomófeszültség értékét:

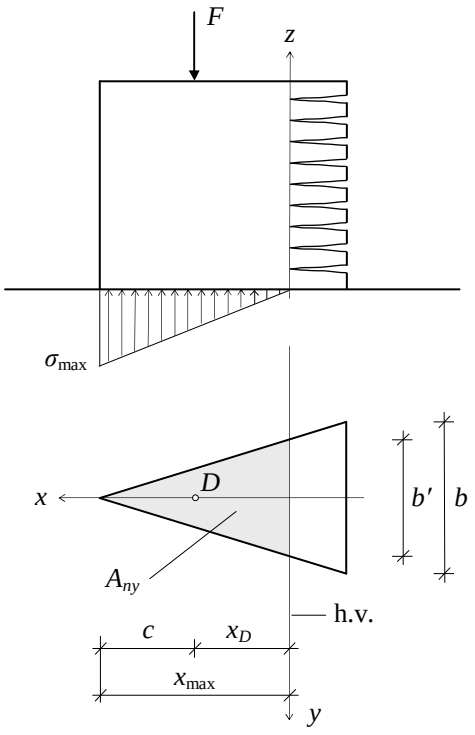
$$\sigma_{\max} = \frac{F}{S_{ny}} x_{\max} = \frac{2F}{b(c+x_D)^2}(c+x_D) = \frac{2F}{b(c+x_D)} = \frac{2F}{A_{ny}}$$

A (12.6) képlet alapján – vagy a fenti képlet átrendezésével – a határerő képlete is megadható:

$$F_H = \frac{A_{ny}}{2}\sigma_H \tag{12.8}$$

Háromszög keresztmetszet

Határozzuk meg a 12.6 ábrán vázolt, F külpontos nyomóerővel terhelt, egyenlőszárú háromszög keresztmetszetű zömök oszlopban keletkező $\sigma_{\max}$ maximális nyomófeszültséget és az F_H határerőt. A nyomóerő D döféspontja c távolságra van a háromszög csúcsától. A döféspont és az (egyelőre ismeretlen helyzetű) határvonal távolságát x_D jelöli.



12.6 ábra. Húzószilárdsággal nem rendelkező, külpontosan nyomott, egyenlőszárú háromszög keresztmetszetű zömök oszlop.

Az első lépésben a határvonal helyét határozzuk meg. A (12.4) összefüggés alkalmazásához szükségünk van a nyomott keresztmetszet határvonalra vonatkoztatott statikai és tehetetlenségi nyomatékaira:

$$S_{ny} = \frac{b'(c+x_D)^2}{2 \cdot 3} \qquad \text{és} \qquad I_{ny} = \frac{b'(c+x_D)^3}{12}$$

Így már behelyettesíthetünk a (12.4) képletbe:

$$x_D = \frac{I_{ny}}{S_{ny}} = \frac{b'(c+x_D)^3 6}{12 b'(c+x_D)^2} = \frac{c+x_D}{2}$$

ahonnan

$$x_D = c \tag{12.9}$$

A (12.5) képlet szolgáltatja a maximális nyomófeszültség értékét:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{S_{ny}} x_{\max} = \frac{6F}{b'(c+x_D)^2}(c+x_D) = \frac{6F}{b'(c+x_D)} = \frac{3F}{A_{ny}}$$

A (12.6) képlet alapján – vagy a fenti képlet átrendezésével – a határerő képlete is megadható:

$$F_H = \frac{A_{ny}}{3}\sigma_H \tag{12.10}$$

A fenti két esetben egyszerű módon egyszerű képleteket vezettünk le téglalap és háromszög keresztmetszetű zömök rudak maximális nyomófeszültségének és határerejének meghatározására. Nem mindig jutunk azonban ilyen egyszerű képletekhez. Ennek az az oka, hogy a (12.4) képletben az S_{ny} és az I_{ny} is x_D függvénye – $S_{ny} = f(x_D)$ és $I_{ny} = f(x_D)$ – így az x_D számítása során általános esetben harmadfokú egyenletet kell megoldani. (Erre a 12.1.3 pontban mutatunk be számpéldát.)

B: Képlékeny megoldás

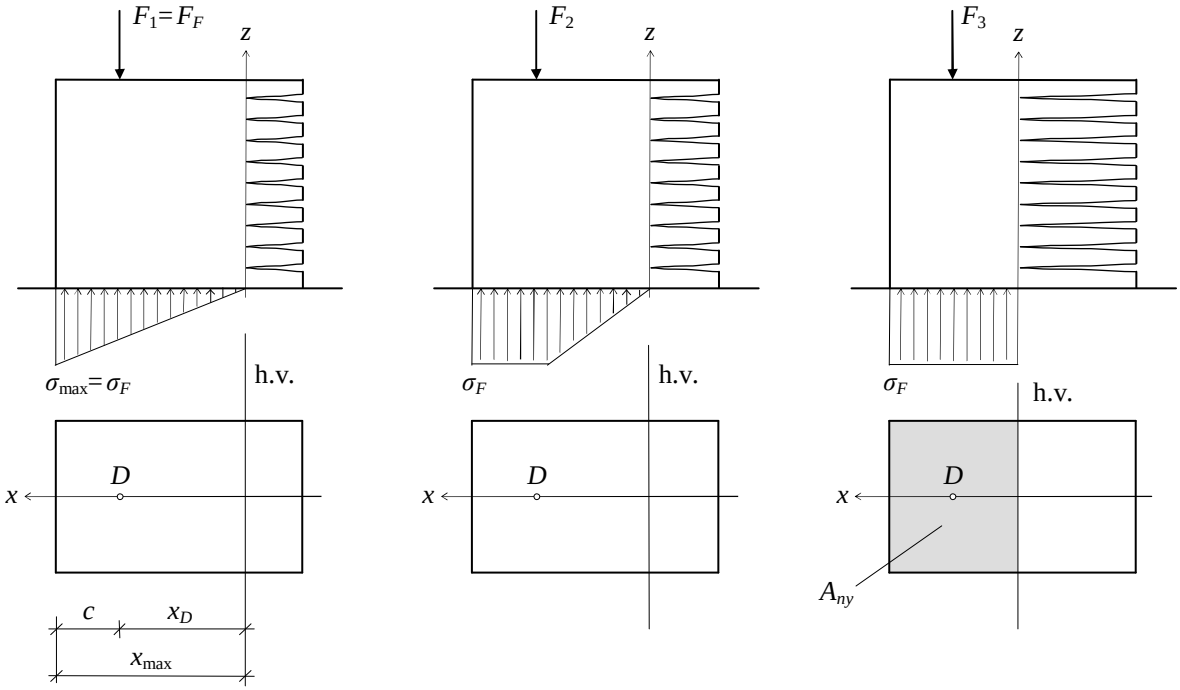
Ebben a pontban azt tételezzük fel, hogy a külpontosan nyomott zömök rúd anyaga rugalmas-képlékeny.

Tekintsük először a rugalmas viselkedés szakaszát (12.7/a ábra). Ebben az esetben a külpontos F erő egy bizonyos $F_1 = F_F$ határértékénél a szélső szálban éppen a σ_F folyási feszültséggel megegyező normálfeszültség keletkezik.

Ez a rugalmas folyási határerő, amit – a (12.6) képlet alapján – az

$$F_F = \frac{S_{ny}}{x_{\max}}\sigma_F$$

összefüggés ad meg, ahol S_{ny} a nyomott felület statikai nyomatéka a határvonalra.



a) rugalmas viselkedés b) rugalmas-képlékeny viselkedés c) képlékeny viselkedés

12.7 ábra. Húzószilárdsággal nem rendelkező, külpontosan nyomott, rugalmas-képlékeny anyagú zömök rúd.

A gyakorlati méretezés során a σ_F folyási feszültség biztonsági tényezővel osztott értékével, a σ_H határfeszültséggel dolgozunk. Ezzel számolva, a (12.6) képlettel már megadott

$$F_H = \frac{S_{ny}}{x_{\max}} \sigma_H$$

határerőt kapjuk.

A rugalmas-képlékeny viselkedés azonban azt jelenti, hogy amikor a maximális feszültség a szélső szálban eléri a σ_F folyási határt, a terhelés tovább növelhető. Ezzel átkerülünk a képlékeny viselkedés fázisába.

A keresztmetszet egyre nagyobb része kerül képlékeny állapotba és az erőhöz közelebbi szélső szál mellett egyre több szálban éri el a feszültség a folyási határt (12.7/b ábra). Ezzel egy időben a keresztmetszet másik oldalán a repedések hossza nő és a határvonal közelebb kerül a döféspontho z. Végül a törési határállapotban a feszültségmegoszlás végig egyenletes (12.7/c ábra). A törőerő értéke:

$$F_T = A_{ny} \sigma_F \tag{12.11}$$

ahol A_{ny} a nyomott felület.

A nyomott felület nagyságát csak akkor tudjuk kiszámítani, ha már tudjuk hogy hol van a határvonal. Az a tény, hogy a nyomófeszültségek megoszlása végig egyenletes, jelentősen megkönnyíti a határvonal meghatározásának feladatát. Az egyenletes feszültségmegoszlásnak ugyanis az a következménye, hogy a nyomott felület súlypontja egybeesik az erő döféspontjával. Ez pedig a határvonal helyének meghatározását egy súlypontszámítási feladatra vezeti vissza. Mivel az A_{ny} a döféspontra nézve központos nyomott terület,

felírhatjuk, hogy a nyomott felület statikai nyomatéka zérus a határvonallal párhuzamos és a döfésponton átmenő tengelyre. Így az

$$S_D = 0 \tag{12.12}$$

egyenletből a határvonal helye már meghatározható. Ez a számítás általában egyszerű, de esetenként kétismeretlenes egyenletrendszerhez is vezethet. Ilyenkor érdemes megfontolni, hogy a számítást közelítő módon hajtsuk végre.

A közelítő számítás során a döféspontra nézve központos területet egy olyan négyszög alakú terület kialakításával hozzuk létre, amelynek súlypontja a döfésponttal egybeesik. A közelítő módszer előnye – az egyszerűségen kívül – az is, hogy a pontos területhez viszonyítva mindig kisebb (vagy vele azonos méretű) területet kapunk és így a közelítéssel nem csökkentjük a szerkezet biztonságát. A négyszög alakú terület kialakítása azzal a hallgatólagos feltételezéssel jár, hogy a határvonal törtvonal alakú. A valóságban a határvonal természetesen nem lehet törtvonal alakú, de ez az anomália nem befolyásolja számottevően az amúgy is közelítő eljárásunk megbízhatóságát.

12.1.3 Gyakorlati alkalmazás

A külpontosan nyomott zömök szerkezetek esetében is a méretezés $Y_H \geq Y_M$ alapegyenletének alkalmazásával hajtjuk végre a méretezési feladatokat. Mind a rugalmas, mind pedig a képlékeny viselkedés esetén az igénybevétel-összehasonlítás módszerét alkalmazzuk. A következő kilenc számpélda a gyakorlati alkalmazás széles skáláját mutatja be.

1) Téglalap keresztmetszetű oszlop rugalmas vizsgálata

Ellenőrizzük, hogy megfelel-e a 12.8/a ábrán vázolt, $F_M = 350$ kN erővel terhelt, zömök oszlop rugalmas viselkedés feltételezésével. A külpontos nyomóerő döféspontja a téglalap keresztmetszet x szimmetriatengelyén van, a keresztmetszet szélétől $c = 150$ mm-re. Az oszlop anyagának határfeszültsége $\sigma_H = 4$ N/mm^2.

A határvonal távolságát a döfésponttól a (12.7) képlet adja:

$$x_D = 2c = 2 \cdot 150 = 300\,\text{mm}$$

Ezzel meghatározható a nyomott felület:

$$A_{ny} = b(c + x_D) = 400(150 + 300) = 180000\,\text{mm}^2$$

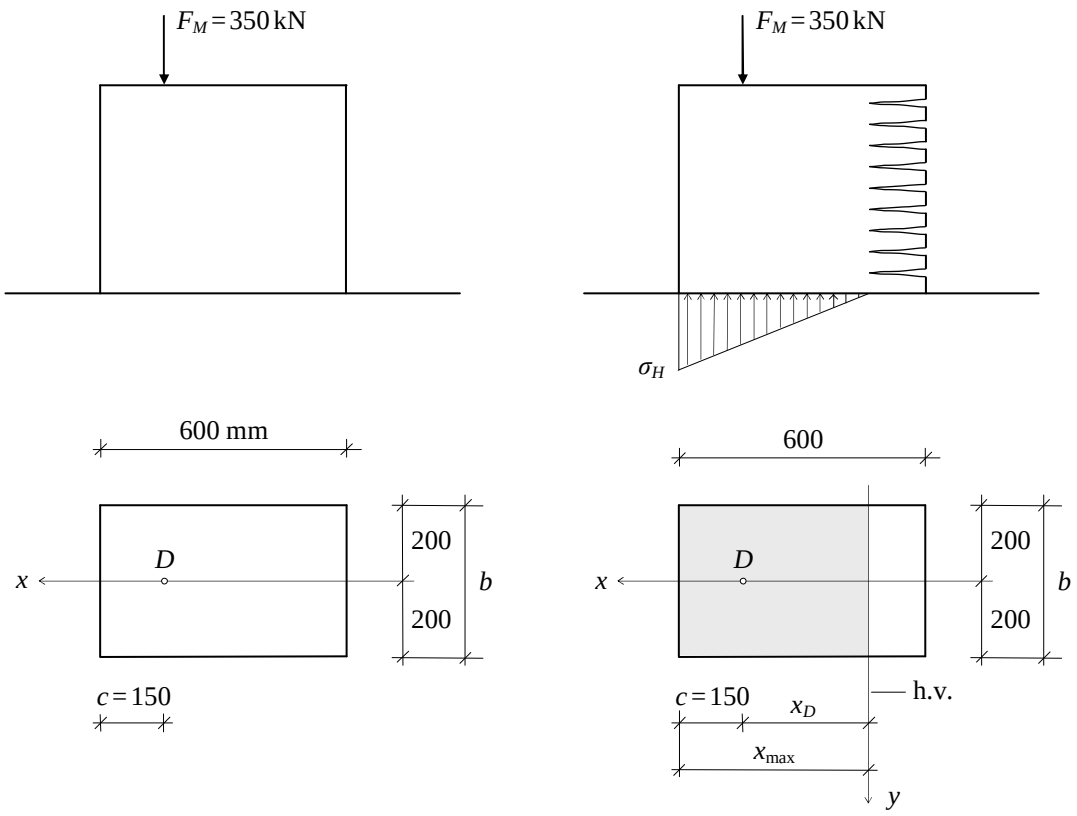
Az oszlop határerejét a (12.8) képlettel számíthatjuk ki:

$$F_H = \frac{A_{ny}}{2}\sigma_H = \frac{180000}{2}4 = 360000\ \text{N} = 360\ \text{kN}$$

Az oszlop tehát megfelel, mert az

$$F_H = 360\ \text{kN} > 350\ \text{kN} = F_M$$

egyenlőtlenség teljesül. A σ-ábrát a 12.8/b ábrán találjuk.

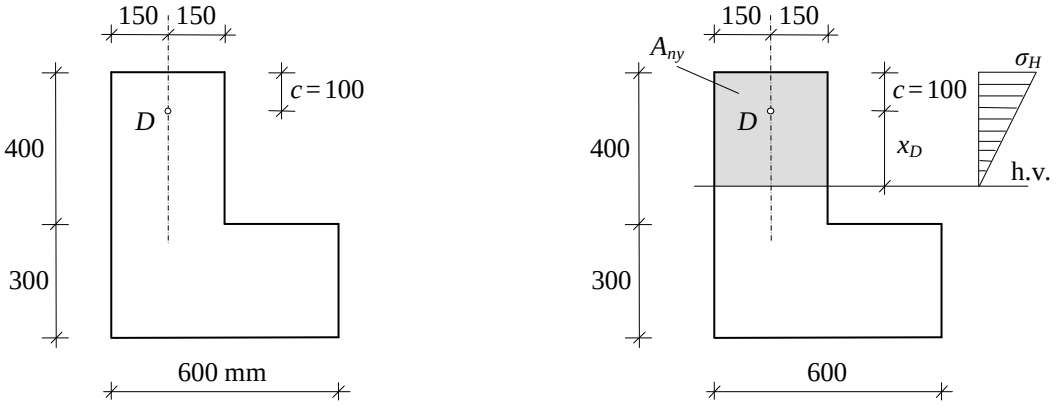


a) külpontosan nyomott zömök oszlop b) nyomott felület és σ-ábra

12.8 ábra. Téglalap keresztmetszetű zömök oszlop rugalmas vizsgálata.

2) L-alakú keresztmetszettel rendelkező oszlop rugalmas vizsgálata

Ellenőrizzük, hogy megfelel-e a 12.9/a ábrán alaprajzával megadott zömök oszlop rugalmas viselkedés feltételezésével. Az oszlopot egy $F_M = 160$ kN nagyságú nyomóerő terheli a D pontban. A nyomóerő D döféspontja az **L**-alakú keresztmetszet függőleges szárának szimmetriatengelyén van, a keresztmetszet szélétől $c = 100$ mm-re. Az oszlop anyagának határfeszültsége $\sigma_H = 4$ N/mm^2.



a) zömök oszlop **L**-alakú keresztmetszettel b) nyomott felület és σ-ábra

12.9 ábra. **L** keresztmetszetű zömök oszlop rugalmas vizsgálata.

Feltételezést kell tennünk a határvonal helyét illetően. Annyit azonnal tudunk, hogy a határvonal a keresztmetszet szélétől c = 100 mm-re lévő D döféspont *másik* oldalán van, de azt nem tudjuk, hogy milyen messze. A vizsgálati eljárásunk egészen máshogy alakul, ha határvonal nem metsz bele az L-alakú keresztmetszet alsó szárába, mint amikor belemetsz. Ha nem metsz bele, akkor a teljes keresztmetszetből csak egy téglalap alakú részt kell figyelembe vennünk, mert a keresztmetszet többi része megreped és ezért nem vesz részt az erőjátékban. Tételezzük fel, hogy nem metsz bele. Ekkor az oszlop úgy viselkedik, mintha téglalap keresztmetszettel rendelkezne. Ez esetben a határvonal távolságát a döféspontól a (12.7) képlet adja:

$$x_D = 2c = 2 \cdot 100 = 200 \text{ mm}$$

Felmérve az x_D = 200 mm-t a döféspont másik oldalára, azt látjuk, hogy a határvonal valóban nem metsz bele az L-alakú keresztmetszet alsó szárába (12.9/b ábra). Feltételezésünk tehát helyes volt, és alkalmazhatjuk a derékszögű négyszög keresztmetszetre levezetett összefüggéseket.

A nyomott felület nagysága így:

$$A_{ny} = b(c + x_D) = 300(100 + 200) = 90000 \text{ mm}^2$$

Az oszlop határerejét a (12.8) képlettel számíthatjuk ki:

$$F_H = \frac{A_{ny}}{2}\sigma_H = \frac{90000}{2}4 = 180000 \text{ N} = 180 \text{ kN}$$

Az oszlop tehát megfelel, mert az

$$F_H = 180 \text{ kN} > 160 \text{ kN} = F_M$$

egyenlőtlenség teljesül.

3) Háromszög alakú keresztmetszettel rendelkező oszlop rugalmas vizsgálata

Ellenőrizzük, hogy megfelel-e a 12.10/a ábrán vázolt, F_M = 150 kN erővel terhelt, zömök oszlop rugalmas viselkedés feltételezésével. A külpontos nyomóerő döféspontja az x szimmetriatengelyen van, a keresztmetszet baloldali szélétől c = 200 mm-re. Az oszlop anyagának határfeszültsége σ_H = 6.4 N/mm^2.

A határvonal távolságát a döféspontól a (12.9) képlet adja:

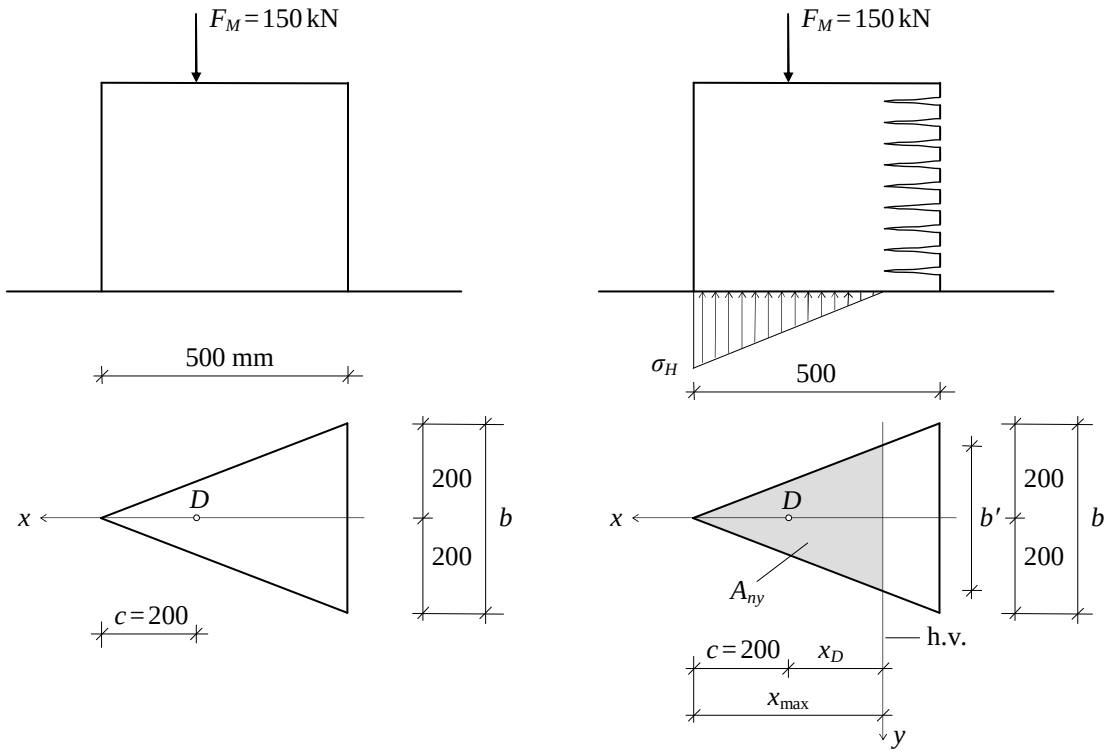
$$x_D = c = 200 \text{ mm}$$

A nyomott felület (12.10/b ábra) meghatározásához szükség van a b' távolságra:

$$b' = 400\frac{400}{500} = 320 \text{ mm}$$

Ezzel meghatározható a nyomott felület:

$$A_{ny} = \frac{b'(c + x_D)}{2} = \frac{320(200 + 200)}{2} = 64000 \text{ mm}^2$$



a) háromszög keresztmetszetű zömök oszlop b) nyomott felület és σ-ábra

12.10 ábra. Háromszög keresztmetszetű zömök oszlop rugalmas vizsgálata.

Az oszlop határerejét a (12.10) képlettel számíthatjuk ki:

$$F_H = \frac{A_{ny}}{3}\sigma_H = \frac{64000}{3}6.4 = 136533 \text{ N} = 136.5 \text{ kN}$$

Az oszlop nem felel meg, mert a határerő kisebb a mértékadó erőnél:

$$F_H = 136.5 \text{ kN} < 150 \text{ kN} = F_M$$

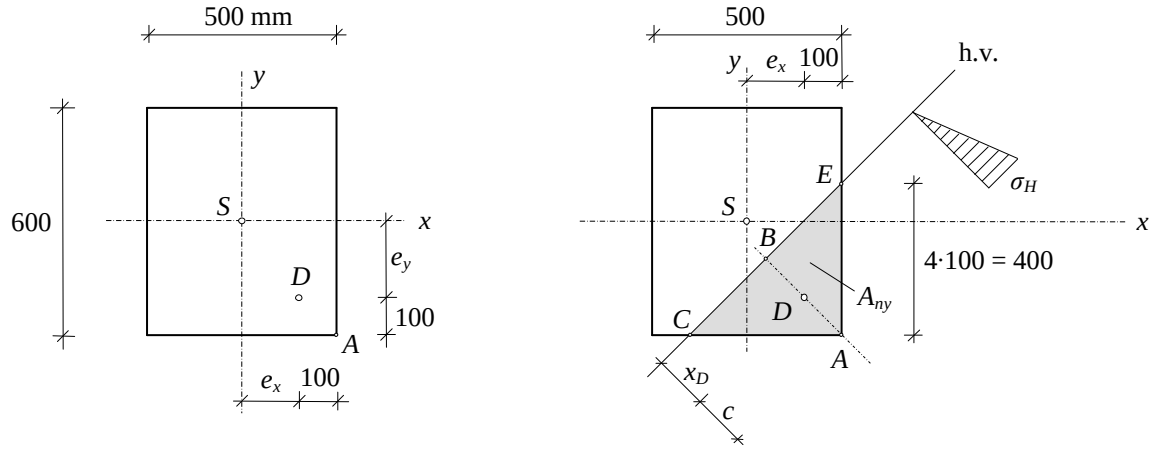
4) Általános helyzetű nyomóerővel terhelt oszlop rugalmas vizsgálata

A 12.11/a ábrán keresztmetszetével megadott 3 méter magas zömök oszlopot egy $F_M = 250$ kN nagyságú nyomóerő terheli. Az oszlop anyagának határfeszültsége $\sigma_H = 6.4$ N/mm^2. A terhelő erő döféspontja nem esik egyik súlyponti tengelyre sem. A döféspont helyzetét a két külpontosságával, az $e_x = 150$ mm és $e_y = 200$ mm távolságokkal adjuk meg. Ellenőrizzük, hogy megfelel-e az oszlop rugalmas viselkedés feltételezésével.

A külpontosságok figyelembevétele után az erőt a keresztmetszetre elhelyezve azt látjuk, hogy a döféspont az „A” sarokponttól 100 mm-re van, mind az x mind az y irányban. A külpontos nyomás vizsgálata (12.4 ábra) azt mutatta, hogy a keresztmetszetnek egy a döféspont körüli része vesz részt az erőjátékban (nyomófeszültségek kialakulása mellett), míg a keresztmetszet erőtől távolabbi részében repedések keletkeznek és ez a rész kiesik az erőjátékból. A maximális nyomófeszültség a keresztmetszetnek az erőhöz közelebbi szélén – esetünkben az „A” pontban – ébred. A határvonal valahol a döféspont másik oldalán helyezkedik el. Kössük össze az „A” pontot a döfésponttal és a meghosszabbított egyenesre állítsunk merőlegest valahol a „D” pont másik oldalán (12.11/b ábra). Ez az egyelőre ismeretlen távolságban lévő határvonal. A döféspont körül így egy háromszög körvonalazódik, mint nyomott felület. Tételezzük fel, hogy tényleg ez a nyomott felület.

Háromszög alakú nyomott felület esetében az x_D távolság (amely meghatározza a határvonal helyét) azonos a c távolsággal (ami a döféspont helye a keresztmetszet szélétől). A 12.11 ábra adataival ez

$$x_D = c = \sqrt{100^2 + 100^2} = 141.4\,\text{mm}$$



a) általános helyzetű nyomóerővel terhelt oszlop b) nyomott felület és σ-ábra

12.11 ábra. Általános helyzetű nyomóerővel terhelt oszlop rugalmas vizsgálata.

Ezt a távolságot a döféspont másik oldalán felmérve a „B” pontot kapjuk. Ezen a ponton megy át az AD egyenesre merőleges határvonal. Itt véglegesítve a határvonalat, azt tapasztaljuk, hogy a határvonal valóban egy háromszöget határol le a téglalap keresztmetszetből. Az egyenlőszárú háromszög két oldalának hossza az ábra adatai szerint:

AE távolság = AC távolság = 4·100 = 400 mm

A nyomott felület:

$$A_{ny} = \frac{400 \cdot 400}{2} = 80000\,\text{mm}^2$$

A határerő így a háromszög alakú nyomott felületre vonatkozó (12.10) képlet segítségével határozható meg:

$$F_H = \frac{A_{ny}}{3}\sigma_H = \frac{80000}{3}6.4 = 170667\text{ N} = 170.7\text{ kN}$$

Ez az erő kisebb mint az oszlopot támadó erő

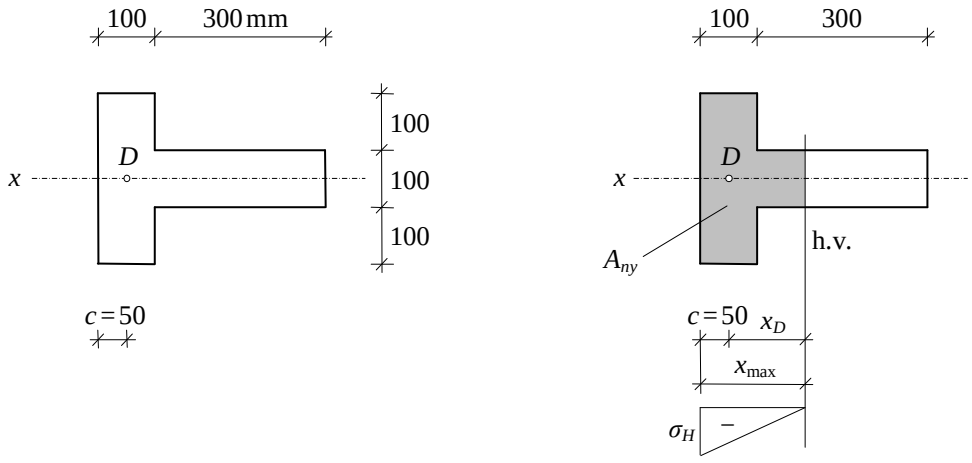
$$F_H = 170.7\text{ kN} < 250\text{ kN} = F_M$$

így az oszlop nem felel meg.

5) T-keresztmetszetű oszlop rugalmas vizsgálata

A 12.12/a ábrán keresztmetszetével megadott 2 méter magas zömök oszlopot az x szimmetriatengelyen lévő D pontban egy F_M = 150 kN nagyságú nyomóerő terheli. Az oszlop anyagának határfeszültsége σ_H = 5.28 N/mm^2. A terhelő erő döféspontja c = 50 mm-re van a keresztmetszet bal oldali szélétől. Ellenőrizzük, hogy megfelel-e az oszlop rugalmas

viselkedés feltételezésével.



a) T-keresztmetszetű nyomott oszlop b) nyomott felület és σ-ábra

12.12 ábra. T-keresztmetszetű nyomott oszlop rugalmas vizsgálata.

Azt tudjuk, hogy a nyomott felületet a döféspont környékén alakíthatjuk ki, és elsőnek téglalap keresztmetszetre gondolhatunk. Egy pillanat alatt beláthatjuk azonban, hogy a téglalap keresztmetszetre levezetett összefüggések a 12.12/a ábrán vázolt keresztmetszet esetében nem alkalmazhatók. Téglalap keresztmetszet esetén ugyanis a határvonal $x_D = 2c = 100$ mm távolságra lenne a döfésponttól, de az ábrán látszik, hogy $x_D > 50$ mm esetén a határvonaltól balra lévő felület már nem lenne téglalap. Ebből az következik, hogy a határvonal megállapítására az általános alakú keresztmetszetre vonatkozó (12.4) összefüggést kell alkalmaznunk. Az ebben a képletben szereplő statikai nyomaték és tehetetlenségi nyomaték (a 12.12 ábra adataival):

$$S_{ny} = 100 \cdot 300 x_D + 100(x_D - 50)\frac{x_D - 50}{2} = 50x_D^2 + 25000x_D + 125000$$

és

$$I_{ny} = \frac{300 \cdot 100^3}{12} + 100 \cdot 300 x_D^2 + \frac{100(x_D - 50)^3}{3} = 33.33x_D^3 + 25000x_D^2 + 250000x_D + 20833333$$

Behelyettesítve a (12.4) képletbe, az

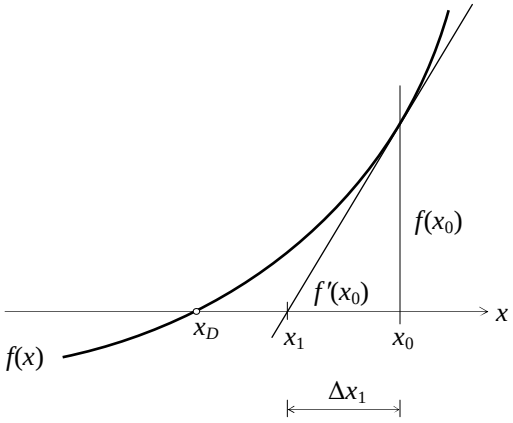
$$x_D = \frac{I_{ny}}{S_{ny}} = \frac{33.33x_D^3 + 25000x_D^2 + 250000x_D + 20833333}{50x_D^2 + 25000x_D + 125000}$$

összefüggést kapjuk, ahonnan az

$$f(x) = 16.67x_D^3 - 125000x_D - 20833333 = 0$$

harmadfokú egyenlethez jutunk. A harmadfokú egyenlet legkisebb gyöke a keresett x_D távolságot adja. A megoldást előállíthatjuk például a Newton-Raphson-féle érintő módszer segítségével, vagy számítógépes programot, például a MathCad-et használjuk, amikor is az

együtthatók beírása után kiadjuk a „gyök” utasítást. A következőkben a matematikai tanulmányainkból már ismert Newton-Raphson módszer (12.13 ábra) alkalmazását mutatjuk be.



$$\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{\Delta x_1}$$

$$\Delta x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \Delta x_1$$

$$x_2 = x_1 - \Delta x_2$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} - \Delta x_n$$

12.13 ábra. A Newton-Raphson-féle érintő módszer függvény zérushelyének közelítő meghatározására.

A megoldáshoz szükség van az első deriváltra:

$$f'(x) = 50.0x_D^2 - 125000$$

Tekintsük a megoldás nulladik közelítésének az $x_0 = 250$ kezdőértéket. Ezt az értéket a

$$\Delta x_1 = \frac{f(250)}{f'(250)} = \frac{208.385 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} = 69.46$$

értékkel kell módosítani, hogy megkapjuk az első közelítést:

$$x_1 = x_0 - \Delta x_1 = 250 - 69.46 = 180.54$$

Az első közelítés

$$\Delta x_2 = \frac{f(180.54)}{f'(180.54)} = 36.34$$

módosításával a második közelítéshez jutunk:

$$x_2 = x_1 - \Delta x_2 = 180.54 - 36.34 = 142.2$$

A második közelítés

$$\Delta x_3 = \frac{f(142.2)}{f'(142.2)} = 12.15$$

módosításával a harmadik közelítéshez jutunk:

$$x_3 = x_2 - \Delta x_3 = 142.2 - 12.15 = 132.05$$

A harmadik közelítés

$$\Delta x_4 = \frac{f(132.05)}{f'(132.05)} = 1.39$$

módosításával végül a negyedik közelítéshez jutunk:

$$x_4 = x_3 - \Delta x_4 = 132.05 - 1.39 = 130.66$$

Ez már olyan kismértékben tér el az előző közelítéstől, hogy végleges értéknek fogadjuk el:

$$x_D = 130.66\,\text{mm}$$

(A MathCad program alkalmazásával az x_D = 130.63 mm értéket kapjuk.)

Az x_D értékének ismeretében a nyomott felület (12.12/b ábra) statikai nyomatéka a határvonalra:

$$S_{ny} = 50 \cdot 130.66^2 + 25000 \cdot 130.66 + 125000 = 4245000\,\text{mm}^3$$

A határerő most már a (12.6) képletből kiszámítható:

$$F_H = \frac{S_{ny}}{x_{\max}} \sigma_H = \frac{4245000}{50 + 130.66} 5.28 = 124065\,\text{N} = 124.1\,\text{kN}$$

Ez az érték kisebb, mint az F_M = 150 kN, tehát az oszlop nem felel meg.

6) Szimmetrikusan terhelt téglalap keresztmetszetű oszlop képlékeny vizsgálata

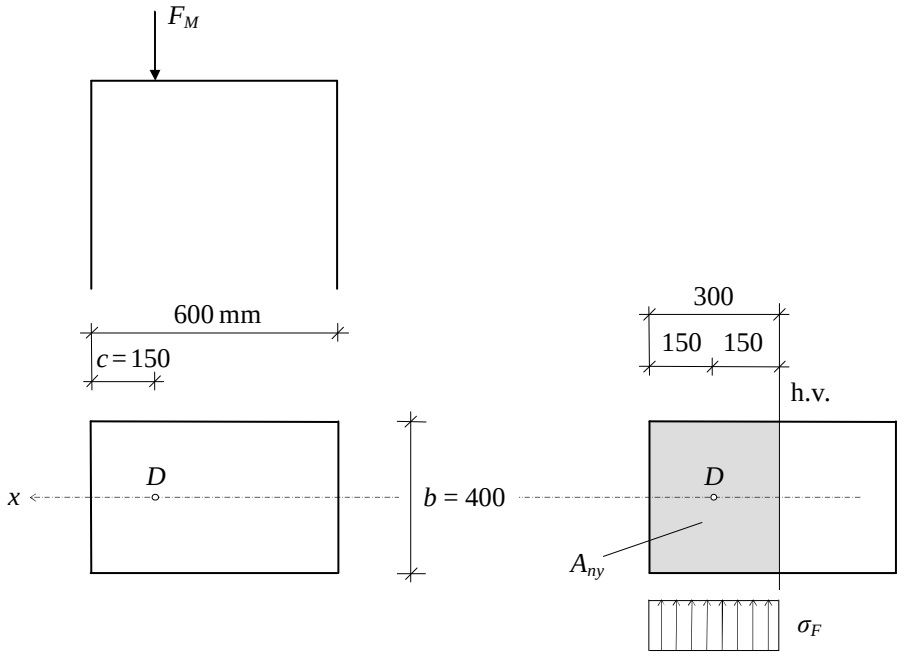
Határozzuk meg a 12.14/a ábrán keresztmetszetével megadott, 2 méter magas zömök oszlop törőerejét képlékeny viselkedés feltételezésével. A külpontosan elhelyezkedő nyomóerő döféspontja a téglalap keresztmetszet x szimmetriatengelyén van, a keresztmetszet szélétől c = 150 mm-re. Az oszlop anyagának törőfeszültsége σ_F = 2.2 N/mm^2.

A törőerő (12.11) képletének alkalmazásához szükségünk van a nyomott felületre. A nyomott felület a döféspont körül kialakított olyan felület, amelynek súlypontja egybeesik az erő döféspontjával. Esetünkben ez azt jelenti, hogy a határvonalat a döfésponttól 150 mm-re jobbra, az x tengelyre merőlegesen kell behúzni (12.14/b ábra). A nyomott felület ekkor

$$A_{ny} = 400(150 + 150) = 120000\,\text{mm}^2$$

nagyságú, amivel a törőerő értéke

$$F_T = A_{ny}\sigma_F = 120000 \cdot 2.2 = 264000\,\text{N} = 264\,\text{kN}$$



a) téglalap keresztmetszet b) nyomott felület és σ-ábra

12.14 ábra. Téglalap keresztmetszetű zömök oszlop képlékeny vizsgálata.

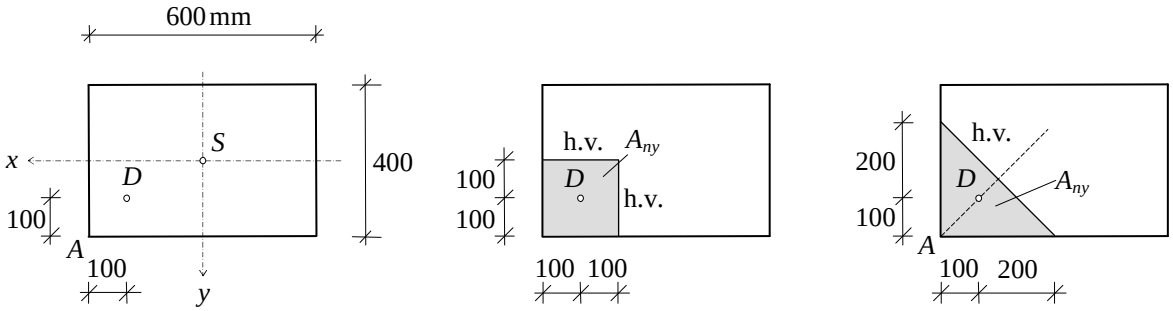
7) Általános helyzetű erővel terhelt téglalap keresztmetszetű oszlop képlékeny vizsgálata

Határozzuk meg a 12.15/a ábrán keresztmetszetével megadott 2 méter magas zömök oszlop törőerejét képlékeny viselkedés feltételezésével. Az oszlop anyagának törőfeszültsége $\sigma_F = 2.2$ N/mm^2.

A külpontosan elhelyezkedő nyomóerő döféspontja az „A” sarokponttól 100 mm-re jobbra és 100 mm-re felfelé van. Ez a döféspont nem esik rá egyik súlyponti tengelyre sem.

Állítsuk először elő a közelítő megoldást. E célból a döféspont körül egy olyan négyszög alakú területet határolunk le, amelynek a döféspont a súlypontja (12.15/b ábra). Ennek területével számolva, a törőerőt a (12.11) képlet adja:

$$F_T = A_{ny}\sigma_F = 200 \cdot 200 \cdot 2.2 = 88000\,\text{N} = 88\,\text{kN}$$



a) b) c)

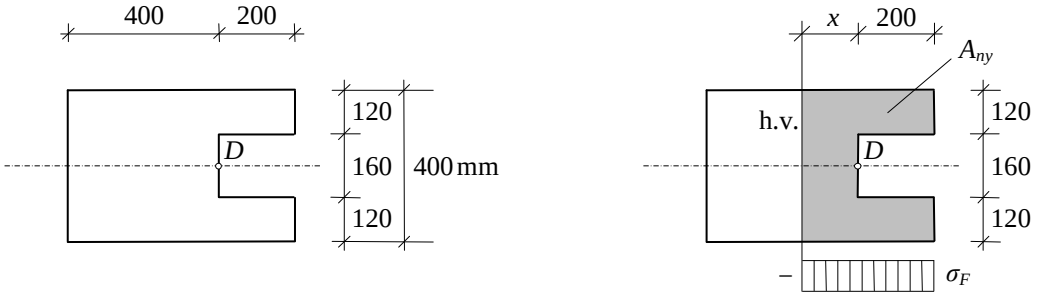
12.15 ábra. Képlékeny vizsgálat. a) nyomott oszlop általános helyzetű döféspontttal, b) nyomott felület a közelítő megoldáshoz, c) nyomott felület a pontos megoldáshoz.

A pontos megoldáshoz az *AD* egyenesre merőleges egyenes (a határvonal) segítségével olyan háromszöget alakítunk ki, amelynek a *D* döféspont a súlypontja (12.15/c ábra). Ennek területével számolva, a törőerő:

$$F_T = A_{ny}\sigma_F = \frac{300 \cdot 300}{2} 2.2 = 99000\,\text{N} = 99\,\text{kN}$$

8) Általános keresztmetszetű oszlop képlékeny vizsgálata

Ellenőrizzük, hogy megfelel-e a 12.16/a ábrán keresztmetszetével megadott zömök oszlop képlékeny viselkedés feltételezésével. Az F_M = 200 kN nagyságú nyomóerő *D* döféspontja a szimmetriatengelyen van. Az oszlop anyagának törőfeszültsége σ_F = 2.0 N/mm^2.



a) nyomott oszlop keresztmetszete b) nyomott felület és σ-ábra

12.16 ábra. Általános keresztmetszetű zömök oszlop képlékeny vizsgálata.

Az első lépés a határvonal helyének meghatározása. A határvonalat a döfésponttól balra *x* távolságra húzzuk be (12.16/b ábra) és az *x* távolságot abból a feltételből határozzuk meg, hogy a nyomott felület statikai nyomatéka a döfésponton átmenő és a határvonallal párhuzamos tengelyre zérus:

$$S_D = 120 \cdot 200 \cdot 100 \cdot 2 - 400x\frac{x}{2} = 0$$

Innen:

$$x = \sqrt{24000} = 154.9\,\text{mm}$$

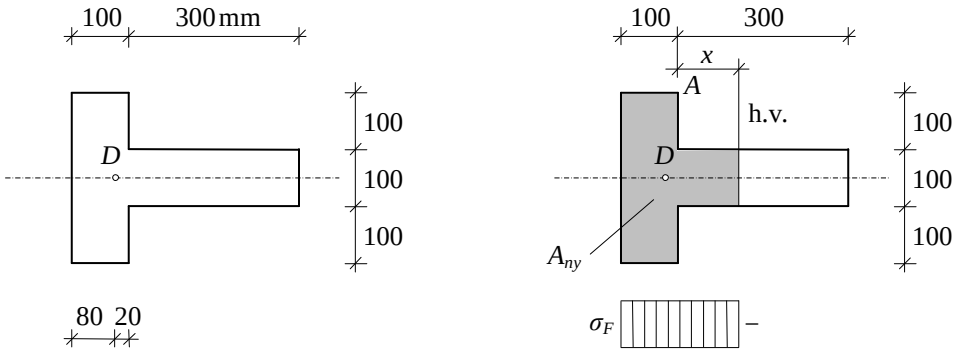
A törőerő értéke így

$$F_T = A_{ny}\sigma_F = (200 \cdot 120 \cdot 2 + 400 \cdot 154.9)2 = 219920\,\text{N} = 219.9\,\text{kN}$$

Ez az erő nagyobb az oszlopra ható F_M = 200 kN nagyságú nyomóerőnél, így az oszlop megfelel.

9) T-keresztmetszetű oszlop képlékeny vizsgálata

Ellenőrizzük, hogy megfelel-e a 12.17/a ábrán keresztmetszetével megadott zömök oszlop képlékeny viselkedés feltételezésével. Az F_M = 200 kN nagyságú nyomóerő *D* döféspontja a szimmetriatengelyen van. Az oszlop anyagának törőfeszültsége σ_F = 5.0 N/mm^2.



a) T-keresztmetszetű nyomott oszlop b) nyomott felület és σ-ábra

12.17 ábra. T-keresztmetszetű zömök oszlop képlékeny vizsgálata.

Az első lépés a határvonal helyének meghatározása. A határvonal a döféspont jobb oldalán kell hogy legyen. Helyét az *A* sarokponttól *x* távolságra tételezzük fel (12.17/b ábra) és az *x* távolságot abból a feltételből határozzuk meg, hogy a nyomott felület statikai nyomatéka a döfésponton átmenő és a határvonallal párhuzamos tengelyre zérus:

$$S_D = 80 \cdot 300 \cdot 40 - 20 \cdot 300 \cdot 10 - 100x\left(20 + \frac{x}{2}\right) = 0$$

Innen az

$$x^2 + 40x - 18000 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, melynek pozitív gyöke

$$x = 115.6 \text{ mm}$$

A nyomott felület így

$$A_{ny} = 300 \cdot 100 + 115.6 \cdot 100 = 41560 \text{ mm}^2$$

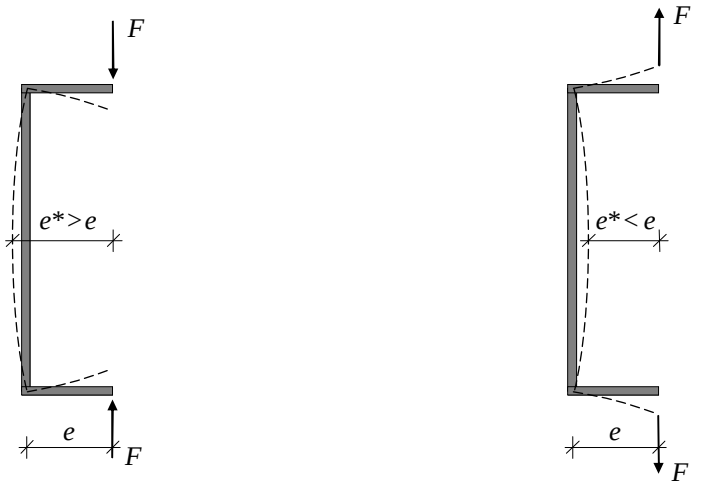
a törőerő pedig

$$F_T = A_{ny}\sigma_F = 41560 \cdot 5 = 207800 \text{ N} = 207.8 \text{ kN}$$

Ez nagyobb mint az oszlopot terhelő F_M = 200 kN nagyságú erő, így az oszlop megfelel.

12.2 Külpontosan nyomott karcsú rudak

A külpontosan nyomott karcsú rudak és a külpontosan húzott rudak viselkedése alapvetően eltér egymástól. Az eltérés oka a *kihajlás* jelensége, ami csak nyomott rudaknál jelentkezik. A kihajlás során a nyomott karcsú rúd meggörbül és az erő eredeti külpontossága (*e*) megváltozik, mégpedig megnő (12.18/a ábra): $e^* > e$. A külpontosan húzott rúd is meggörbül, de a külpontosan húzott rúd eredeti külpontossága nem nő (12.18/b ábra): $e^* < e$.



a) a külpontosság megnő b) a külpontosság nem nő

12.18 ábra. A külpontosan nyomott, illetve húzott rúd meggörbülése.

A külpontosság csökkenése nem befolyásolja hátrányosan a szerkezet viselkedését és így a külpontosan húzott szerkezeteknél az eredeti külpontossággal számoltunk. A külpontosan nyomott karcsú rudaknál jelentkező külpontosság-növekedés viszont kedvezőtlen jelenség és ezért figyelembe kell venni.

12.2.1 Húzószilárdsággal rendelkező karcsú rudak

Az ide tartozó tartószerkezeteink közül talán a fa- és acélszerkezetek a legfontosabbak. Ezek erőjátéka – és ennek megfelelően tárgyalása – meglehetősen bonyolult és a szerkezettervező munkáját szerteágazó szabványelőírások is szabályozzák. A téma fontosságának megfelelően így a fa- és acélszerkezetek vizsgálatával külön féléves tantárgy foglalkozik.

12.2.2 Húzószilárdsággal nem rendelkező karcsú rudak

Az építőipari gyakorlatban sűrűn alkalmazott beton- és falazott szerkezetek esetében elhanyagoljuk a kis – és egyébként is bizonytalan – húzószilárdságot és képlékeny viselkedést – vagyis egyenletes nyomófeszültség-eloszlást – tételezünk fel. A vizsgálat alapját így a külpontosan nyomott zömök rudak esetében a 12.1.2.2 pontban bemutatott eljárás képezi, azzal az igen fontos kiegészítéssel, hogy figyelembe vesszük azt a tényt, hogy az erő (eredeti) külpontossága a kihajlás következtében megnő. Előírjuk továbbá, hogy az l_0/h-val definiált karcsúság maximális értéke 25.

12.2.2.1 Betonszerkezetek

A határerőt az

$$F_H = 0.8 A_e \sigma_H \tag{12.13}$$

képlet segítségével határozzuk meg, ahol A_e a keresztmetszetnek a mértékadó külpontosságú erőhöz rendelhető legnagyobb központos része és σ_H a beton nyomási határfeszültsége (a 3.3 táblázat szerint). A mértékadó külpontosság értékét az

$$e_M = e + \Delta e \tag{12.14}$$

összefüggéssel adhatjuk meg, ahol e az „eredeti” (vagy ún. „számított”) külpontosság és Δe a külpontosság növekménye. Az e eredeti külpontosság értéke vagy „látható/lemérhető” (az erő döféspontja és a súlypont közötti távolság) vagy pedig a statikai számításból az

$$e = \frac{M_M}{N} \tag{12.15}$$

képletből határozható meg, ahol M_M a mértékadó nyomaték és N a hozzá tartozó (M_M-el egyidejű) normálerő. A külpontosság kedvezőtlen hatású növekménye több ok miatt jöhet létre:

$$\Delta e = 0.05h + \frac{l_0}{400} + 0.05h\left(\frac{l_0}{10h}\right)^2 \tag{12.16}$$

A fenti összefüggésben az első tag a keresztmetszet inhomogenitásából származó kezdeti hibával, a második tag a rúd esetleges görbeségével, a harmadik tag pedig a terhelés hatására keletkező kedvezőtlen elmozdulással kapcsolatos. A képletben h a keresztmetszet teljes mérete a vizsgálat síkjában és l_0 a rúd kihajlási hossza a vizsgált síkban (a 3. fejezetben a központos nyomásnál tárgyaltak szerint).

A gyakorlati munka megkönnyítése céljából a $\Delta e/h$ fajlagos külpontosság növekmény értékeit a 12.1 táblázatban adjuk meg.

12.1 táblázat. A $\Delta e/h$ fajlagos külpontosság növekmény betonszerkezetekhez az l_0/h karcsúság függvényében.

$\frac{l_0}{h}$	0	5	10	15	20	25
$\frac{\Delta e}{h}$	0.05	0.075	0.125	0.20	0.30	0.42

A $\Delta e/h$ fajlagos külpontosság növekmény ismeretében a mértékadó külpontosság az

$$e_M = e + \frac{\Delta e}{h} h \tag{12.17}$$

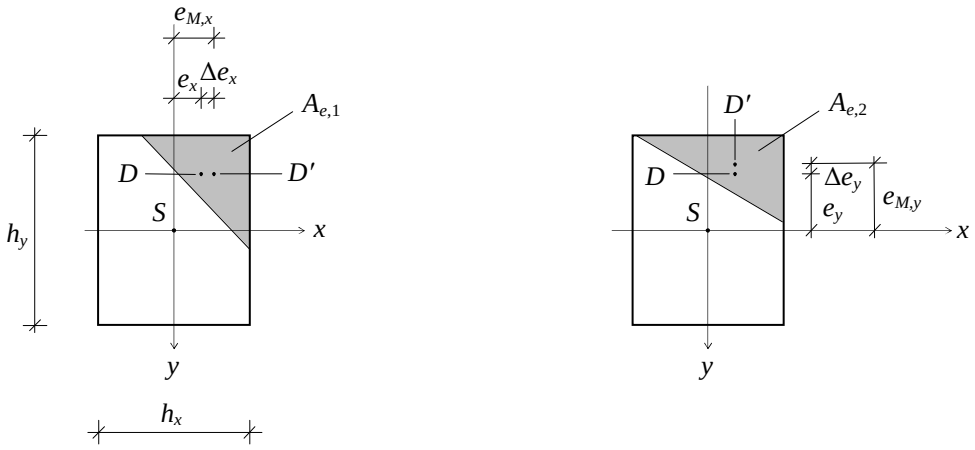
összefüggéssel már meghatározható.

Általános esetben ezután két vizsgálatot kell elvégezni: egyet a legnagyobb karcsúság irányában (12.19/a ábra) és egyet a legnagyobb karcsúság irányára merőlegesen (12.19/b ábra). Mindkét esetben az e eredeti külpontosságú D döféspontot Δe-vel (az S súlyponthoz viszonyítva) távolabb tesszük a vizsgált irányban (D'), majd kialakítjuk a D' körüli legnagyobb A_e központos területet. Ezzel a központos területtel számolva, a (12.13) képlet megadja a vizsgált irányhoz tartozó határerőt:

$$F_{H,1} = 0.8A_{e,1}\sigma_H \qquad \text{és} \qquad F_{H,2} = 0.8A_{e,2}\sigma_H \tag{12.18}$$

A rúd határereje a két határerő közül a kisebbik:

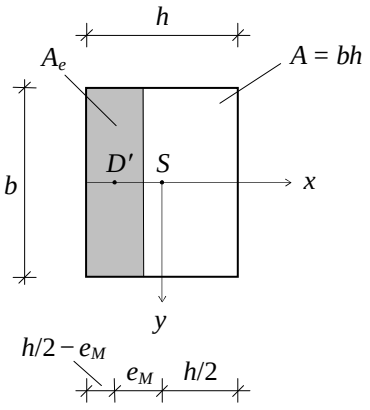
$$F_H = \min(F_{H,1}, F_{H,2}) \tag{12.19}$$



a) vizsgálat a legnagyobb karcsúság irányában b) vizsgálat a merőleges irányban

12.19 ábra. Külpontosan nyomott karcsú oszlop vizsgálata.

A központos terület kialakítása során – a zömök rudaknál elmondottak szerint – eljárhatunk pontosan vagy közelítő módon. Ha a D' körül könnyűszerrel kialakítható háromszög alakú terület (derékszögű négyszög keresztmetszet esetén), akkor a pontos megoldást választjuk, ha pedig nem, akkor megfontolandó a közelítő megoldás alkalmazása, amikor is a D' körül téglalap alakú területtel adjuk meg a nyomott felületet.



$$A_e = \left(\frac{h}{2} - e_M\right)2b = \frac{\left(\frac{h}{2} - e_M\right)2bh}{h} = \left(1 - \frac{2e_M}{h}\right)A$$

12.20 ábra. A szimmetriatengelyen elhelyezkedő döféspontú külpontosan nyomott karcsú oszlop.

Derékszögű négyszög alakú keresztmetszet esetében a számítás némileg egyszerűbb formában hajtható végre, ha a döféspont szimmetriatengelyen helyezkedik el. A szimmetriasíkban végrehajtott vizsgálat esetében ugyanis az A_e központos terület képlete közvetlenül felírható (12.20 ábra) és beépíthető a (12.13) képletbe és az

$$F_H = 0.8A\left(1 - 2\frac{e_M}{h}\right)\sigma_H \tag{12.20}$$

egyszerűbb képlethez jutunk, ahol A a külpontosan nyomott rúd *teljes* keresztmetszeti területe. A (12.20) képlet alkalmazásával így elkerüljük a központos terület kialakításával

kapcsolatos munkát.

Ha a nyomóerő döféspontja a legnagyobb karcsúság irányába esik, akkor a merőleges irányban nem kell a vizsgálatot elvégezni.

12.2.2.2 Falazott szerkezetek

Falazott szerkezetek esetében a betonszerkezeteknél elmondottakhoz nagyon hasonlóan járunk el. A különbséget a számításban szereplő néhány állandó némileg eltérő értéke jelenti.

A határerőt az

$$F_H = A_e \sigma_{fH} \tag{12.21}$$

képlet segítségével határozzuk meg, ahol A_e a keresztmetszetnek a mértékadó külpontosságú erőhöz rendelhető legnagyobb központos része és σ_{fH} a falazat nyomási határfeszültsége (a 3.5 táblázat szerint). A mértékadó külpontosság értékét az

$$e_M = e + \Delta e \tag{12.22}$$

összefüggéssel adhatjuk meg, ahol e az „eredeti” (vagy ún. „számított”) külpontosság és Δe a külpontosság növekménye. Az e eredeti külpontosság értéke vagy „látható/lemérhető” (az erő döféspontja és a súlypont közötti távolság) vagy pedig a statikai számításból az

$$e = \frac{M_M}{N} \tag{12.23}$$

képletből határozható meg, ahol M_M a mértékadó nyomaték és N a hozzá tartozó (M_M-el egyidejű) normálerő. A külpontosság kedvezőtlen hatású növekménye több ok miatt jöhet létre:

$$\Delta e = 0.05h + \frac{l_0}{450} + 0.025h\left(\frac{l_0}{10h}\right)^2 \tag{12.24}$$

A fenti összefüggésben az első tag a keresztmetszet inhomogenitásából származó kezdeti hibával, a második tag a rúd esetleges görbeségével, a harmadik tag pedig a terhelés hatására keletkező kedvezőtlen elmozdulással kapcsolatos. A képletben h a keresztmetszet teljes mérete a vizsgálat síkjában és l_0 a rúd kihajlási hossza a vizsgált síkban (a 3. fejezetben a központos nyomásnál tárgyaltak szerint).

A gyakorlati munka megkönnyítése céljából a $\Delta e/h$ fajlagos külpontosság növekmény értékeit a 12.2 táblázatban adjuk meg.

12.2 táblázat. A $\Delta e/h$ fajlagos külpontosság növekmény falazott szerkezetekhez az l_0/h karcsúság függvényében.

$\frac{l_0}{h}$	0	5	10	15	20	25
$\frac{\Delta e}{h}$	0.05	0.067	0.097	0.14	0.194	0.262

A $\Delta e/h$ fajlagos külpontosság növekmény ismeretében a mértékadó külpontosság az

$$e_M = e + \frac{\Delta e}{h} h \tag{12.25}$$

összefüggéssel már meghatározható.

Általános esetben ezután két vizsgálatot kell elvégezni: egyet a legnagyobb karcsúság irányában (12.19/a ábra) és egyet a legnagyobb karcsúság irányára merőlegesen (12.19/b ábra). Mindkét esetben az e eredeti külpontosságú D döféspontot Δe-vel (az S súlyponthoz viszonyítva) távolabb tesszük a vizsgált irányban (D'), majd kialakítjuk a D' körüli legnagyobb A_e központos területet. Ezzel a központos területtel számolva a (12.21) képlet megadja a vizsgált irányhoz tartozó határerőt:

$$F_{H,1} = A_{e,1}\sigma_{fH} \qquad \text{és} \qquad F_{H,2} = A_{e,2}\sigma_{fH} \tag{12.26}$$

A rúd határereje a két határerő közül a kisebbik:

$$F_H = \min(F_{H,1}, F_{H,2}) \tag{12.27}$$

A központos terület kialakítása során – a zömök rudaknál elmondottak szerint – eljárhatunk pontosan vagy közelítő módon. Ha a D' körül könnyűszerrel kialakítható háromszög alakú terület (derékszögű négyszög keresztmetszet esetén), akkor a pontos megoldást választjuk, ha pedig nem, akkor megfontolandó a közelítő megoldás alkalmazása, amikor is a D' körül téglalap alakú területtel adjuk meg a nyomott felületet.

A betonszerkezeteknél elmondottakhoz hasonló a helyzet derékszögű négyszög alakú falazott keresztmetszet esetében, ha a döféspont szimmetriatengelyen helyezkedik el (12.20 ábra). A szimmetriasíkban végrehajtott vizsgálat esetében a központos terület képlete közvetlenül felírható és beépíthető a (12.21) képletbe és az

$$F_H = A\left(1 - 2\frac{e_M}{h}\right)\sigma_{fH} \tag{12.28}$$

egyszerűbb képlethez jutunk, ahol A a külpontosan nyomott rúd *teljes* keresztmetszeti területe. A (12.28) képlet alkalmazásával elkerüljük a központos terület kialakításával kapcsolatos munkát.

Ha a nyomóerő döféspontja a legnagyobb karcsúság irányába esik, akkor a merőleges irányban nem kell a vizsgálatot elvégezni.

12.2.3 Gyakorlati alkalmazás

A külpontosan nyomott karcsú rúd megfelel, ha teljesül az

$$F_H \geq F_M$$

feltétel. A gyakorlatban az ellenőrzéssel találkozunk gyakrabban és a következőkben erre mutatunk be egy példát.

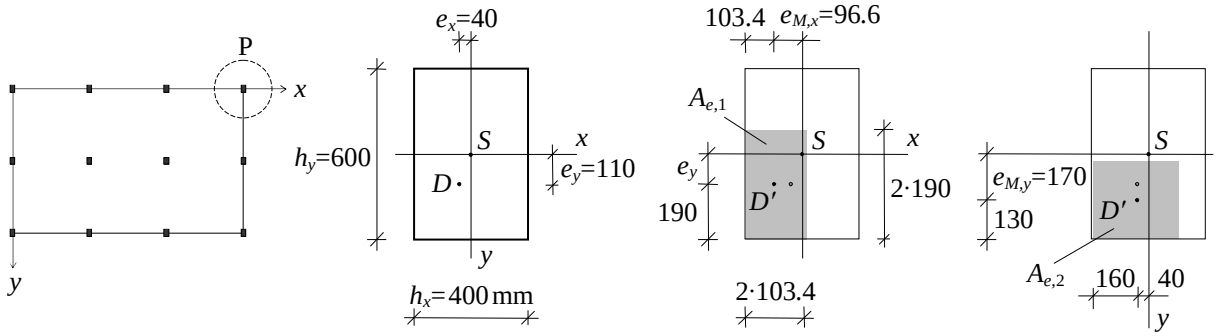
Tekintsük a 12.21/a ábrán alaprajzával megadott épületet. Az emeletmagasság $m_0 = 3.6$ m. Ellenőrizzük, hogy megfelel-e az alaprajzon P-vel jelölt jobboldali sarokpillér külpontos nyomásra. A pillér méretei $h_x = 400$ mm és $h_y = 600$ mm. A pillérre $F_M = 350$ kN nagyságú nyomóerő hat, amelynek döféspontját az $e_x = 40$ mm és $e_y = 110$ mm külpontosságok adják meg (12.21/b ábra). A pillér anyaga beton, amelynek nyomási határfeszültsége $\sigma_H = 5$ N/mm^2.

Az alaprajzi elrendezés azt a fontos információt is szolgáltatja, hogy az épület

merevítetlen, mégpedig mindkét irányban merevítetlen, többnyílású épület. A 3.1 táblázat szerint a kihajlási hossz meghatározásához szükséges tényező értéke mindkét irányban $\nu = 1.25$. A kihajlási hossz így

$$l_{0,x} = l_{0,y} = \nu m_0 = 1.25 \cdot 3.6 = 4.5\,\mathrm{m}$$

mindkét irányban.



a) alaprajz b) P jelű pillér c) vizsgálat *x* irányban d) vizsgálat *y* irányban

12.21 ábra. a) alaprajz, b) P pillér; vizsgálat c) a legnagyobb karcsúság irányában, d) a merőleges irányban.

Az általános helyzetű döféspontttal rendelkező nyomóerő esetében két vizsgálatot kell végrehajtani: egyet a legnagyobb karcsúság irányában és egyet rá merőlegesen.

Vizsgálat a legnagyobb karcsúság irányában

A mindkét irányban azonos (merevítetlen) megtámasztási mód miatt a legnagyobb karcsúság irányát a keresztmetszet szélességi adatai határozzák meg. Ezek szerint a legnagyobb karcsúság iránya az *x* irány. A karcsúság értéke:

$$\frac{l_{0,x}}{h_x} = \frac{4.5}{0.4} = 11.25 \quad (< 25)$$

Az ehhez tartozó külpontosság növekmény a (12.16) képlet szerint:

$$\Delta e_x = 0.05 h_x + \frac{l_{0,x}}{400} + 0.05 h_x \left(\frac{l_{0,x}}{10 h_x} \right)^2 = 0.05 \cdot 400 + \frac{4500}{400} + 0.05 \cdot 400 \left(\frac{4500}{10 \cdot 400} \right)^2 = 56.6\,\mathrm{mm}$$

A *D* döféspontot tehát 56.6 mm-rel kell *x* irányban (balra) elmozdítani a keresztmetszet bal széle felé (12.21/c ábra), vagyis $e_{M,x} = 40+56.6=96.6$ mm. Az így kapott *D′* mértékadó döféspont köré kell kialakítani a nyomott felületet. Válasszuk most a közelítő megoldást, amikor az $A_{e,1}$ nyomott felületet téglalapként hozzuk létre, úgy, hogy a téglalap súlypontja a *D′* pont legyen:

$$A_{e,1} = 2 \cdot 103.4 \cdot 2 \cdot 190 = 78584\,\mathrm{mm}^2$$

Az $A_{e,1}$ nyomott felülethez tartozó határerő:

$$F_{H,1} = A_{e,1} \sigma_H = 78584 \cdot 5 = 392920\,\mathrm{N} = 392.9\,\mathrm{kN}$$

Vizsgálat a legnagyobb karcsúság irányára merőlegesen

A karcsúság értéke most:

$$\frac{l_{0,y}}{h_y} = \frac{4500}{600} = 7.5 \quad (< 25)$$

Az ehhez tartozó fajlagos külpontosság növekmény a 12.1 táblázat szerint számítható:

$$\frac{\Delta e_y}{h_y} = \frac{0.075 + 0.125}{2} = 0.1$$

Innen a külpontosság növekmény:

$$\Delta e_y = 0.1 h_y = 0.1 \cdot 600 = 60 \text{ mm}$$

A *D* döféspontot tehát most 60.0 mm-rel kell *y* irányban (lefelé) elmozdítani a keresztmetszet alsó széle felé (12.21/d ábra), vagyis $e_{M,y}$ = 110+60 = 170 mm. Az így kapott *D′* mértékadó döféspont köré kell kialakítani a nyomott felületet. Válasszuk most is a közelítő megoldást, amikor az $A_{e,2}$ nyomott felületet téglalapként hozzuk létre, úgy, hogy a téglalap súlypontja a *D′* pont legyen:

$$A_{e,2} = 2 \cdot 130 \cdot 2 \cdot 160 = 83200 \text{ mm}^2$$

Az $A_{e,2}$ nyomott felülethez tartozó határerő:

$$F_{H,2} = A_{e,2} \sigma_H = 83200 \cdot 5 = 416000 \text{ N} = 416.0 \text{ kN}$$

A pillér határereje; ellenőrzés

A *P* pillér határereje az $F_{H,1}$ és az $F_{H,2}$ közül a kisebb, vagyis

$$F_H = \min(F_{H,1},\ F_{H,2}) = 392.9 \text{ kN}$$

Ez az erő nagyobb mint a pillér mértékadó terhe

$$F_H = 392.9 \text{ kN} \geq F_M = 350 \text{ kN}$$

a pillér tehát megfelel.

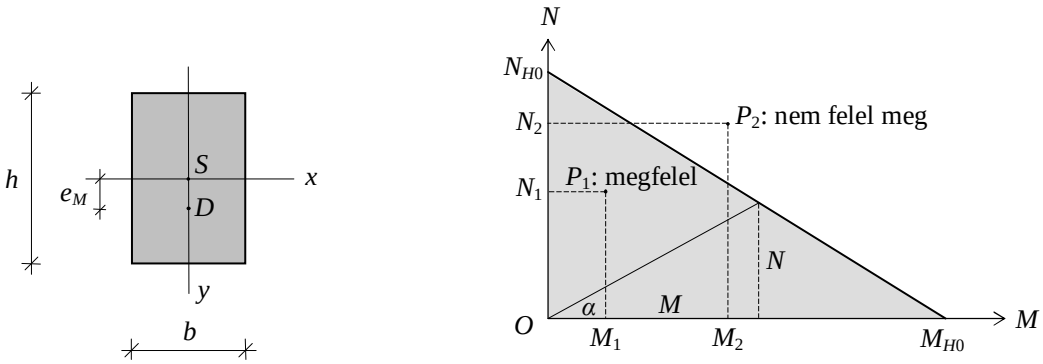
12.3 A keresztmetszet teherbírási vonala

Külpontosan nyomott szerkezeti elemek méretezése során sokszor előfordul, hogy ugyanazon keresztmetszetet különböző nagyságú és külpontosságú erő terheli. Ilyen esetekben a keresztmetszet többszöri gyors ellenőrzését nagymértékben elősegíti, ha azt a teherbírási vonal segítségével végezzük el.

A teherbírási vonal a külpontos *N* normálerő és az általa létrehozott *M* = *Ne* hajlítónyomaték között fennálló összefüggést szemlélteti abban a szélső esetben, amikor a keresztmetszeten keletkező legnagyobb feszültség éppen a határfeszültséggel egyenlő.

Ebben a pontban a teherbírási vonal előállítását és alkalmazását mutatjuk be abban az

esetben, amikor a vizsgált szerkezeti elem anyaga húzószilárdsággal rendelkezik. Feltételezzük továbbá, hogy a rúd négyszög keresztmetszetű és az N_M külpontos nyomóerő döféspontja az egyik szimmetriatengelyre esik.



a) négyszögkeresztmetszet b) a keresztmetszet teherbírási vonala

12.22 ábra. Teherbírási vonal.

Legyen ez a szimmetriatengely az *y* tengely (12.22/a ábra). A keresztmetszeti tényező ebben az esetben $W = bh^2/6$. A külpontos nyomás (12.1) alapegyenlete

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W}$$

ekkor az

$$\frac{N}{bh} + \frac{M}{\frac{bh^2}{6}} = \sigma_H$$

alakba írható át, ahonnan az *N* normálerőt könnyen kifejezhetjük:

$$N = \sigma_H bh - \frac{6}{h} M$$

Ez az egyenlet egy ($y = -ax + b$ alakú) egyenes egyenlete. Az egyenes a teherbírási vonal, amelynek jellemző értéke $M = 0$-nál:

$$N_{H0} = bh\sigma_H$$

és $N = 0$-nál:

$$M_{H0} = \frac{bh^2}{6}\sigma_H$$

Az N_{H0} az $e = 0$ külpontossághoz, vagyis az elméleti (kihajlás nélküli) központos nyomáshoz tartozó határerő és az M_{H0} az $e = \infty$ külpontossághoz, vagyis a hajlításhoz tartozó határnyomaték. Egy *M-N* koordinátarendszerben a teherbírási vonal az N_{H0} és M_{H0} pontokkal egyértelműen megadható (12.22/b ábra).

Fontos szerepet játszik a koordinátarendszer *O* kezdőpontjából induló, α meredekségű

ferde egyenes. A

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{M}{N} = e$$

összefüggés segítségével adott külpontossághoz tartozó N és M értékpárokat tudunk meghatározni.

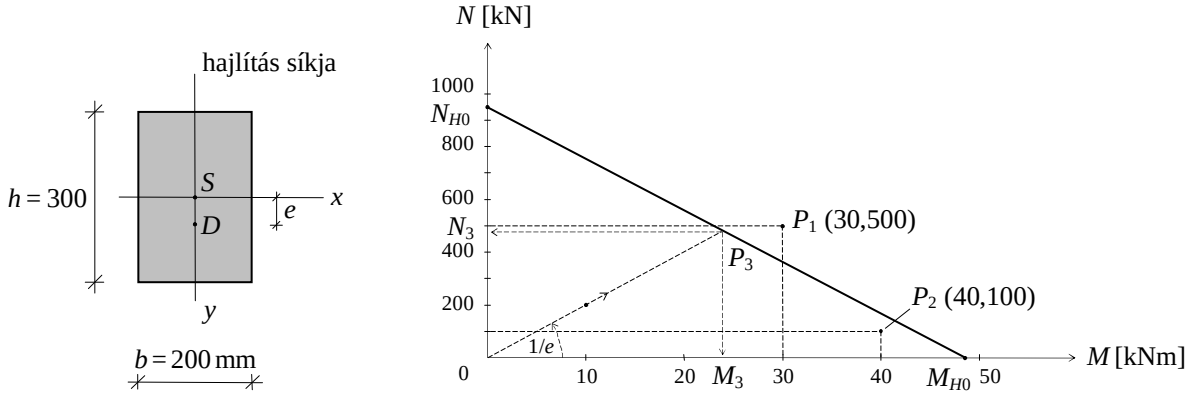
A teherbírási vonal ismeretében egy külpontosan nyomott szerkezeti elem ellenőrzése igen egyszerűen hajtható végre (12.22/b ábra): ábrázoljuk a keresztmetszetre ható N és M által meghatározott pontot. Amennyiben a pont a teherbírási vonal és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög területén belül van, a vizsgált elem megfelel (például a P_1 pont), ha pedig a pont a területen kívül esik, a vizsgált elem nem felel meg (például a P_2 pont).

A teherbírási vonal alkalmazásának bemutatásához tekintsük a 12.23/a ábrán vázolt keresztmetszetet. A keresztmetszet két mérete h = 300 mm és b = 200 mm. A külpontosan nyomott rúd anyagának határfeszültsége σ_H = 16 N/mm^2. Három kérdésre szeretnénk választ kapni:

1) Megfelel-e a rúd, ha a terhelése N_1 = 500 kN és M_1 = 30 kNm?

2) Megfelel-e a rúd, ha a terhelése N_2 = 100 kN és M_2 = 40 kNm?

3) Mekkora N_3 erő és M_3 nyomaték terhelheti a rudat, ha az erő külpontossága e = 50 mm?



a) négyszögkeresztmetszet b) a keresztmetszet teherbírási vonala

12.23 ábra. Teherbírási vonal.

Állítsuk elő először a keresztmetszet teherbírási vonalát (12.23/b ábra). A két jellemző érték a teherbírási vonal metszéspontja az N tengellyel

$$N_{H0} = bh\sigma_H = 200 \cdot 300 \cdot 16 = 960000\ \text{N} = 960\ \text{kN}$$

és a teherbírási vonal metszéspontja az M tengellyel:

$$M_{H0} = \frac{bh^2}{6}\sigma_H = \frac{200 \cdot 300^2}{6} 16 = 48000000\ \text{Nmm} = 48\ \text{kNm}$$

A teherbírási vonal birtokában a három kérdésre egyszerűen válaszolhatunk.

1) A P_1(30,500) pont a teherbírási vonal és a koordinátatengelyek által határolt háromszög területén kívül esik, a rúd tehát erre a terhelésre nem felel meg.

2) A $P_2(40,100)$ pont a teherbírási vonal és a koordinátatengelyek által határolt háromszög területére esik, a rúd tehát erre a terhelésre megfelel.

3) Az $e = 50$ mm külpontossághoz tartozó N_3 erőt és M_3 nyomatékot a külpontosságot jellemző ferde egyenes és a teherbírási vonal metszéspontja adja. A külpontosságot jellemző egyenes egyenlete az $e = 50 = M/N$-ből:

$$M_3 = 50N_3$$

A teherbírási vonal egyenlete a vizsgált rúd adataival ($h = 300$, $b = 200$ és $\sigma_H = 16$):

$$N_3 = \sigma_H bh - \frac{6}{h}M_3 = 16 \cdot 200 \cdot 300 - \frac{6}{300}M_3 = 960000 - 0.02M_3$$

Ide behelyettesítve az M_3 fenti összefüggését:

$$N_3 = 960000 - 0.02 \cdot 50N_3$$

ahonnan

$$N_3 = \frac{960000}{2} = 480000\,\text{N} = 480\,\text{kN}$$

és

$$M_3 = 50N_3 = 50 \cdot 480000 = 24000000\,\text{Nmm} = 24\,\text{kNm}$$

Az $e = 50$ mm külpontossághoz tehát az $N_3 = 480$ kN erő és az $M_3 = 24$ kNm nyomaték tartozik.

Ezt az eredményt szerkesztéssel is megkaphatjuk. A koordinátarendszer kezdőpontjából

$$\text{tg}\alpha = \frac{1}{e} = \frac{1}{0.05} = 20 \qquad \left(= \frac{200}{10}\right)$$

meredekségű egyenest indítunk. Az egyenes metszéspontja a teherbírási vonallal megadja a N_3 és M_3 értékeit (12.23/b ábra).

13

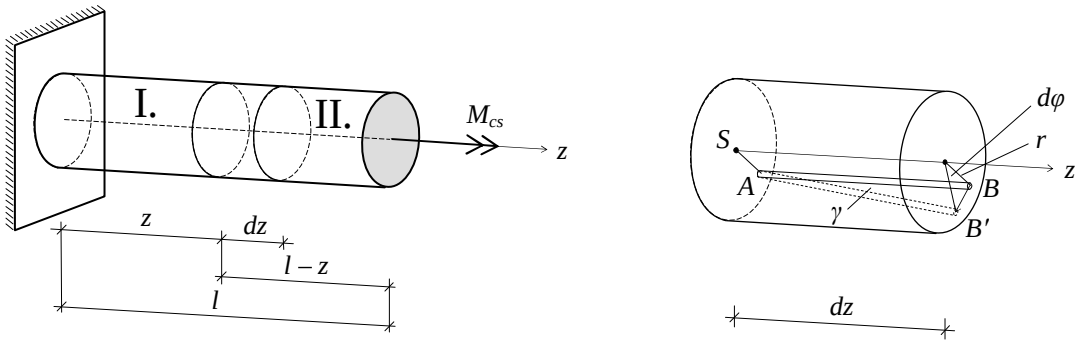
Csavarás

Ebben a fejezetben egyenestengelyű prizmatikus rudak csavarásának legegyszerűbb eseteivel foglalkozunk. A rudak anyagáról feltételezzük, hogy homogén, izotróp, lineárisan rugalmas és a Hooke-törvényt követi.

13.1 Kör keresztmetszetű tömör rudak csavarása

Tekintsük a 13.1/a ábrán vázolt l hosszúságú, kör keresztmetszetű tömör rudat. Az egyenes tengelyű rúd bal oldali végét merev befogással rögzítjük. A rúdra a jobboldali végkeresztmetszetének síkjában működő nyomaték hat. Ezt a nyomatékot a keresztmetszet síkjára merőleges M_{cs} jelű vektorral ábrázoljuk. Az alakváltozások bekövetkezése után a rúd nyugalomban marad. Ez csak úgy lehetséges, ha a befogás kényszerét az M_{cs} ellentettjével helyettesíthetjük.

A végkeresztmetszet síkjában működő M_{cs} nyomaték a rudat csavarásra veszi igénybe és így az M_{cs} nyomatékot csavarónyomatéknak hívjuk. Feladatunk a keresztmetszetek síkjában keletkező feszültségek és a rúd alakváltozásának meghatározása.



a) befogott rúd M_{cs} csavarónyomatékkal b) dz elemi henger torzulása

13.1 ábra. Körkeresztmetszetű rúd csavarása.

A rúdtengelyre merőleges sík keresztmetszetek az alakváltozás után is síkok maradnak és ennélfogva a keresztmetszet bármely két pontja közötti távolság az alakváltozás során nem változik. A rúd egyenes tengelye az alakváltozás után is egyenes marad és a keresztmetszetek merőlegesek maradnak a rúd tengelyére. Mivel nincs rúdtengely irányú hosszváltozás, normálfeszültségek sem keletkeznek. Az egyensúlyt így csak τ nyírófeszültségek biztosíthatják.

A keresztmetszetek a z tengely körül elfordulnak. A 13.1/b ábra a befogástól z távolságra lévő dz hosszúságú elemi henger alakváltozását mutatja. (Az ábra a jobb láthatóság érdekében

az elemi hengert z irányban is felnagyítva ábrázolja.) A henger baloldali (a befogástól z távolságra lévő) keresztmetszete a z tengely körül φ elfordulást szenved. Ez az elfordulás dz távolsággal jobbra, a henger jobb oldali keresztmetszeténél $d\varphi$-vel nő. Az elemi hengernek az alakváltozás előtt a rúdtengellyel párhuzamos AB hosszanti szála az alakváltozás során γ torzulást szenved és a jobboldali keresztmetszeten lévő B pont a B' helyre kerül. Ha a B pont helyzetét a jobboldali keresztmetszeten vizsgáljuk, akkor azt mondhatjuk, hogy a B pont a keresztmetszet $d\varphi$-vel történő elfordulása következtében kerül a B' helyre. A BB' távolságot ezek szerint kétféleképpen is felírhatjuk:

$$BB' = \gamma dz = d\varphi r$$

Innen a szögtorzulás:

$$\gamma = r\frac{d\varphi}{dz}$$

A rugalmas viselkedés következtében a szögtorzulás és a nyírófeszültségek között fennáll a

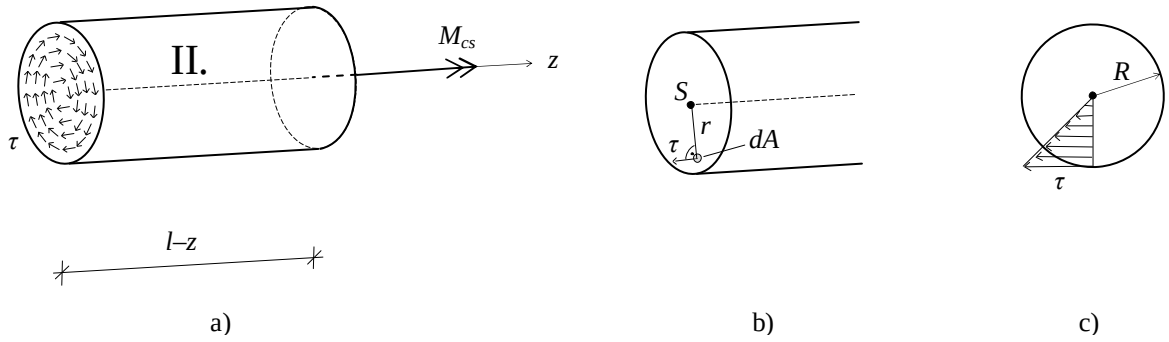
$$\tau = G\gamma$$

kapcsolat. Így a nyírófeszültségre felírható a

$$\tau = Gr\frac{d\varphi}{dz}$$

összefüggés.

Vizsgáljuk most meg a befogástól z távolságban kettévágott (13.1/a ábrán vázolt rúd) jobboldali $l–z$ hosszúságú részének egyensúlyát (13.2/a ábra).



13.2 ábra. Kör keresztmetszetű rúd csavarása. a) az $l–z$ hosszúságú rúdrész egyensúlya, b) τdA erő nyomatéka a súlypontra, c) a nyírófeszültségek megoszlása a sugár mentén.

A jobboldalon M_{cs} csavarónyomatékkal terhelt rész z tengely körüli nyomatéki egyensúlya az elvágott keresztmetszeten ébredő τ nyírófeszültségek segítségével biztosítható. A τdA erők r karjukkal fejtenek ki nyomatékot a súlyponti tengely körül (13.2/b ábra). A nyomatéki egyensúlyt így az

$$M_{cs} - \int_{(A)} r\tau dA = 0$$

egyenlet fejezi ki. Ide behelyettesítjük a τ fenti értékét:

$$M_{cs} - \int_{(A)} Gr^2 \frac{d\varphi}{dz} dA = 0$$

Az integráljel mögül a konstans nyírási rugalmassági moduluson kívül a $d\varphi/dz$ hányados is kiemelhető, hiszen értéke konstans a keresztmetszeti területre vonatkozó integrál szempontjából. A kiemelések után megmaradó integrálkifejezés a keresztmetszet poláris tehetetlenségi nyomatéka:

$$I_o = \int_{(A)} r^2 dA$$

Az elfordulás első deriváltjára így a

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{cs}}{GI_o}$$

összefüggést kapjuk, ahol

$$I_o = \frac{\pi R^4}{2}$$

Az elfordulás első deriváltjának fenti kifejezése csak ismert állandó mennyiséget tartalmaz a jobboldalon, így az elsőrendű közönséges differenciálegyenlet közvetlenül megoldható. Egyszeri integrálás után – figyelembe véve, hogy az elfordulás értéke zérus a befogásnál, vagyis $\varphi(z = 0) = 0$ – a differenciálegyenlet megoldása:

$$\varphi(z) = \frac{M_{cs}}{GI_o} z \tag{13.1}$$

A keresztmetszet maximális elfordulása – a rúd szempontjából nézve maximális elcsavarodás – a rúd végén jön létre:

$$\varphi_{\max} = \frac{M_{cs} l}{GI_o} \tag{13.2}$$

Az elfordulás első deriváltjának ismeretében a nyírófeszültség is előállítható:

$$\tau(r) = Gr \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{cs}}{I_o} r \tag{13.3}$$

A képletből látható, hogy a nyírófeszültség értéke zérus az $r = 0$-nál, vagyis a kör középpontjában és a maximális értéket a keresztmetszet kerületi pontjaiban veszi fel:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{I_o} R \tag{13.4}$$

A kör sugara mentén a nyírófeszültség lineárisan változik (13.2/c ábra).

A fenti levezetés körgyűrű esetében is érvényes és a képletek körgyűrű keresztmetszetű rudakra is használhatók. Ekkor az I_o a körgyűrű poláris tehetetlenségi nyomatékát jelenti. A körgyűrű keresztmetszetű rudak általában a vékonyfalú szerkezetek kategóriájába tartoznak, amelyekkel részletesebben a 13.3 pontban foglalkozunk.

Végül felhívjuk a figyelmet a hajlítási és csavarási probléma hasonlóságára, amit a (6.1) és (13.3) összefüggések összehasonlítása szemléltet.

13.2 Négyszög keresztmetszetű rudak csavarása

A négyszög keresztmetszetű rudak csavarási problémájának pontos vizsgálata meghaladja az elemi szilárdságtan – és ezen jegyzet – kereteit és a megoldás is meglehetősen bonyolult. Ebben a pontban így csak a vizsgálat legfontosabb megállapításait ismertetjük és egy a gyakorlatban jól használható, egyszerű közelítő összefüggést ismertetünk a nyírófeszültségek meghatározására.

Az elméleti és kísérleti vizsgálatok megállapításai az alábbiak szerint foglalhatók össze:

1) a négyszög keresztmetszetű rudak csavarása során csak elhanyagolhatóan kicsiny normálfeszültségek keletkeznek,

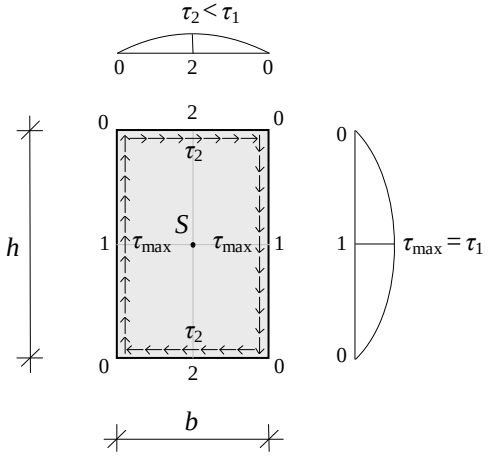
2) a rúd sík keresztmetszetei az alakváltozás után nem maradnak síkok és torzulás (ún. öblösödés) jön létre,

3) a négyszög keresztmetszet sarokpontjaiban nem keletkezik nyírófeszültség (13.3 ábra),

4) a legnagyobb torzulás és a legnagyobb nyírófeszültség az oldalegyenesek közepén jön létre,

5) a hosszabb oldal közepén nagyobb a torzulás és a nyírófeszültség értéke mint a rövidebb oldal közepén. Az itt fellépő $\tau_{\max}$-nál a keresztmetszet belsejében sem keletkezik nagyobb feszültség,

6) az oldalegyenesek mentén a nyírófeszültség intenzitását másodfokú parabola jellemzi.



13.3 ábra. A nyírófeszültségek alakulása az oldalegyenesek mentén M_{cs} csavarónyomaték hatására.

A $h > b$ oldalarányú keresztmetszetek (13.3 ábra) esetében a nyírófeszültség maximumát a

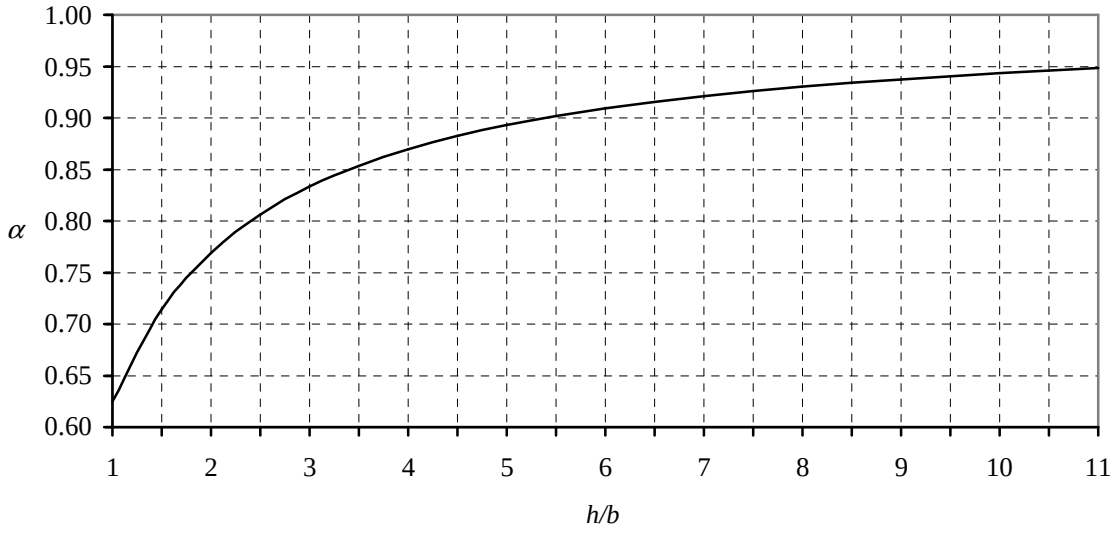
$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_{cs}}{hb^2}\left(3+1.8\frac{b}{h}\right) \tag{13.5}$$

összefüggés jó közelítéssel szolgáltatja.

A (13.5) összefüggés a

$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_{cs}}{\alpha \dfrac{hb^2}{3}} \tag{13.6}$$

alakban is írható, ahol az α értékeit a 13.4 ábra diagramja tartalmazza a négyszög oldalhosszainak arányában.



13.4 ábra. α értékei a négyszög keresztmetszet oldalhosszainak h/b arányában.

Ha $h >> b$, akkor a négyszög keresztmetszet ún. vékonyfalú elemnek minősül. Ekkor $\alpha \approx 1.0$ és a nyírófeszültség képlete egyszerűsíthető:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{\dfrac{hv^2}{3}} = \frac{M_{cs}}{\dfrac{hv^3}{3}} v = \frac{M_{cs}}{J} v \tag{13.7}$$

ahol bevezettük a

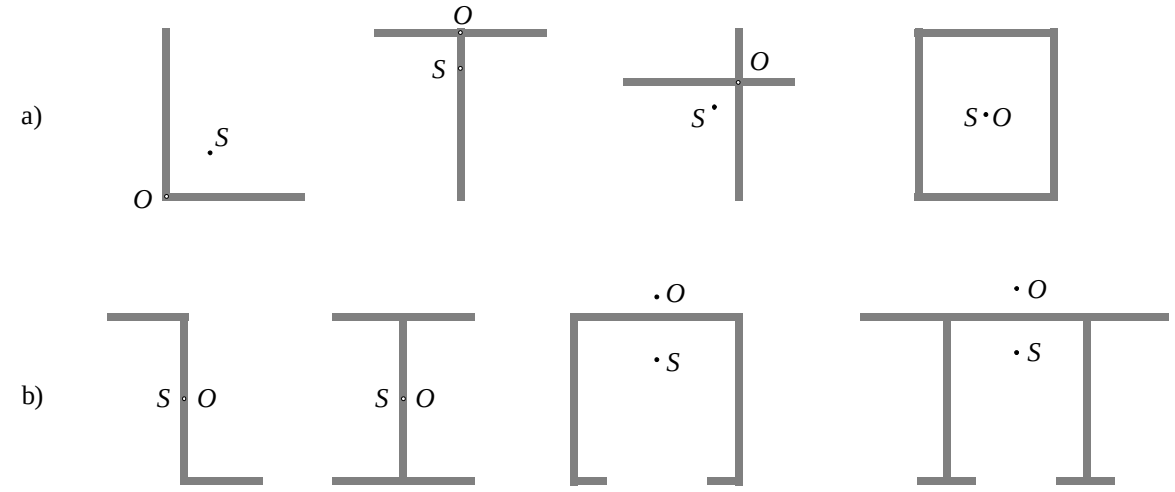
$$J = \frac{hv^3}{3} \quad [\text{mm}^4] \tag{13.8}$$

Saint-Venant-féle csavarási tehetetlenségi nyomatékot. – A fenti képletekben a b helyett bevezettük a vékonyfalú szelvényeknél szokásos v jelölést a keresztmetszet vastagságának jelölésére. (A vékonyfalú elemekből összeépített keresztmetszetet vékonyfalú szelvénynek nevezzük.) A vékonyfalú szelvények csavarási viselkedése eltér a tömör rudak viselkedésétől és ezekkel a következő pontban foglalkozunk.

Megjegyezzük még, hogy a Saint-Venant csavarási tehetetlenségi nyomaték tiszta csavarási tehetetlenségi nyomaték néven is ismert és jelölésére használatos az I_t, illetve az I_{cs} is.

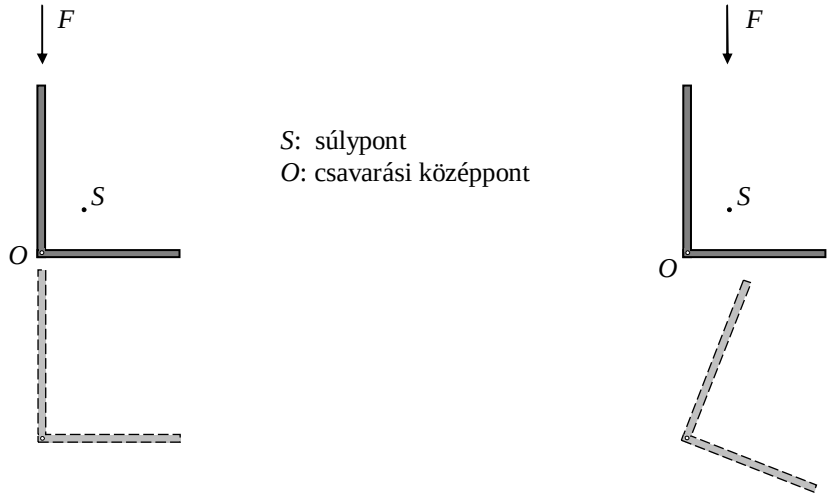
13.3 Vékonyfalú szelvények csavarása

A tömör téglalap keresztmetszetű rudak tárgyalásánál láttuk, hogy ahogy az oldalhosszak aránya nő ($h >> b$), változik a csavarási viselkedés, illetve az α értékén keresztül (13.4 ábra) a rúd fontos csavarási jellemzőjének (a tulajdonképpeni csavarási tehetetlenségi nyomatéknak) az értéke. A $h/b > 10$ aránynál már nem négyszögkeresztmetszetről beszélünk, hanem vékonyfalú elemről és a vastagság jelölésére a v (vagy t) betűt használjuk. A csavarási viselkedés tovább változik, és összetettebbé válik, amikor ilyen vékonyfalú elemeket összeépítünk és vékonyfalú szelvényeket hozunk létre (13.5 ábra).



13.5 ábra. Vékonyfalú szelvények. a) csak *J*-vel rendelkeznek, b) *J*-vel és I_ω -val *is* rendelkeznek.

A vékonyfalú szelvények csavarási viselkedése során fontos szerepet játszik a *csavarási középpont* (v. nyírásközéppont, v. merevségi középpont). A csavarási középpont az a pont, amelyen átmenő erő hatására a keresztmetszet eltolódik, de nem csavarodik el (13.6 ábra). A csavarási középpont jele *O*. A 13.5 ábrán a vékonyfalú elemekből álló keresztmetszetek *O* csavarási középpontját és *S* súlypontját is bejelöltük.



a) a keresztmetszet csak eltolódik

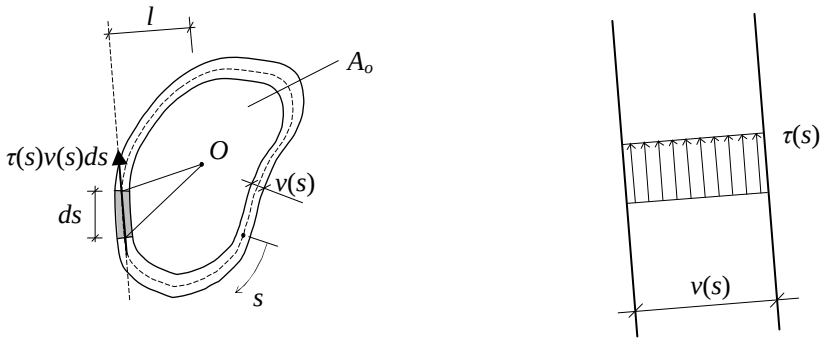
b) a keresztmetszet eltolódik és elfordul (*O* körül)

13.6 ábra. A keresztmetszet viselkedése a) a csavarási középponton átmenő erő hatására, b) ha az erő nem megy át a csavarási középponton.

A vékonyfalú szelvényeket osztályozhatjuk a keresztmetszet geometriai kialakítása szerint: a zárt szelvények csavarási viselkedése viszonylag egyszerű, míg a nyitott szelvények összetett módon állnak ellen a csavaró igénybevételnek.

A zárt szelvények legegyszerűbb esetével tulajdonképpen már találkoztunk: a tömör kör keresztmetszetű rudakra levezetett (13.1), (13.2), (13.3) és (13.4) képletek körgyűrű keresztmetszet esetében is érvényesek, ha az I_o poláris tehetetlenségi nyomaték helyére a körgyűrű poláris tehetetlenségi nyomatékát helyettesítjük.

Tekintsük most a 13.7/a ábrán vázolt, általános alakú zárt keresztmetszetével adott rudat. A rúdra M_{cs} külső csavarónyomaték hat. A keresztmetszet $v(s)$ falvastagsága a kerület mentén változó. A $\tau(s)$ nyírófeszültség megoszlása a falvastagság mentén egyenletes (13.7/b ábra) és nagysága a falvastagsággal fordítottan arányos, tehát a $\tau(s)v(s)$ szorzat állandó. A csavarási középpontot O jelöli.



a) általános alakú keresztmetszet b) egyenletes megoszlású τ feszültségek

13.7 ábra. Vékonyfalú zárt szelvény.

A $v(s)ds$ elemi felületelemen a $\tau(s)v(s)ds$ belső erő működik. Ennek a csavarási középpontra vonatkoztatott nyomatéka $dM = l\tau(s)v(s)ds$. Az M_{cs} külső csavarónyomaték és a teljes belső csavarónyomaték egyensúlyát az

$$M_{cs} = \oint \tau(s)v(s)lds$$

egyenlet fejezi ki, ahol a $\tau(s)v(s)$ szorzat állandóként kiemelhető az integrál elé. A maradék integrálkifejezés a zárt keresztmetszet középvonala által határolt terület kétszerese

$$\oint lds = 2A_o$$

így a nyírófeszültségre a

$$\tau(s) = \frac{M_{cs}}{2A_o v(s)} \tag{13.9}$$

összefüggést kapjuk. Ez a Bredt I. képlet, amelynek segítségével általános alakú zárt szelvény nyírófeszültségeit tudjuk meghatározni.

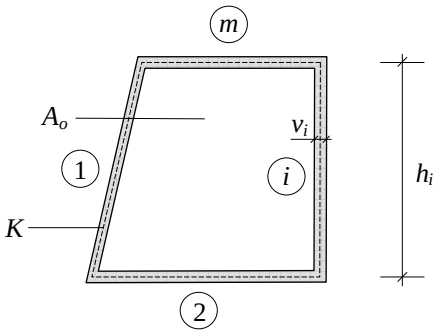
Bizonyos esetekben (például amikor az alakváltozások nagyságát is meg kell határozni) szükség lehet vékonyfalú falelemekből összeépített zárt szelvények tiszta csavarási tehetetlenségi nyomatékára. Általános alakú, falelemekből összeépített zárt keresztmetszet esetén a tiszta csavarási tehetetlenségi nyomaték a

$$J = \frac{4A_o^2}{\sum_{i=1}^{m} \frac{h_i}{v_i}} \quad [\text{mm}^4] \tag{13.10}$$

összefüggésből határozható meg, ahol m a szelvényt alkotó falelemek száma és h_i és v_i az i-edik falelem hossza és vastagsága (13.8 ábra). A (13.10) összefüggés a Bredt II. képletként is ismert. Állandó v falvastagság esetén a képlet egyszerűsödik:

$$J = \frac{4A_o^2 v}{K} \quad [\text{mm}^4] \tag{13.11}$$

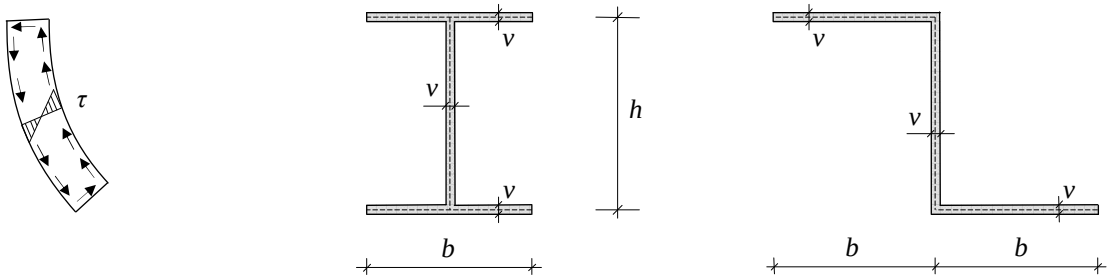
Itt K a zárt keresztmetszet falainak középvonala által határolt A_o terület kerülete.



13.8 ábra. Vékonyfalú zárt szelvény a tiszta csavarási tehetetlenségi nyomaték számításához.

A nyitott szelvények csavarási viselkedése és vizsgálata jóval bonyolultabb a zárt keresztmetszetekénél és itt csak a legfontosabb alapfogalmakat foglaljuk össze és ismertetünk egy egyszerű speciális esetet.

A nyitott szelvényű rúd kétféle módon állhat ellen a csavarásnak. Az egyik mód a tiszta csavarás. A tiszta csavarás során a keresztmetszeten antimetrikus, ún. körbemenő nyírófeszültségek keletkeznek (13.9/a ábra), amelyek a külső csavarónyomatékot – vagy annak egy részét – ellensúlyozzák.



a) τ nyírófeszültség b) **I**-keresztmetszet c) Z-keresztmetszet

13.9 ábra. Vékonyfalú nyitott szelvény.

A nyitott szelvény tulajdonképpen „keskeny”, tömör négyszögkeresztmetszetek – a falelemek – összeépített rendszere (13.9/b és 13.9/c ábra). „Keskeny”, tömör keresztmetszettel már foglalkoztunk a 13.2 pont végén és most egyszerűen átvesszük az ottani eredményeket (a 13.7 és 13.8 képleteket), azzal a kiegészítéssel, hogy a keresztmetszetet most több vékonyfalú elem alkotja. A nyírófeszültséget az i-edik falelemben ezek szerint a

$$\tau_i = \frac{M_{cs}}{J} v_i \tag{13.12}$$

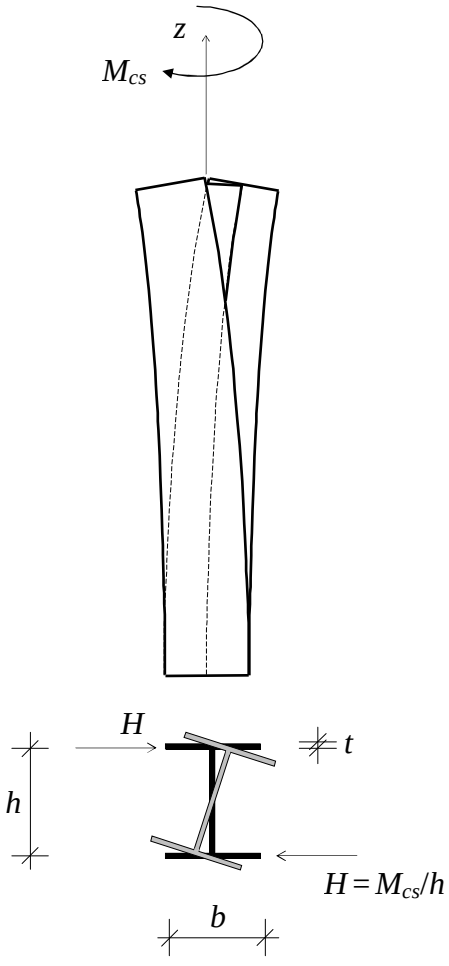
összefüggésből számíthatjuk ki, ahol J a Saint-Venant-féle csavarási tehetetlenségi nyomaték:

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{m} h_i v_i^3 \quad [\text{mm}^4] \tag{13.13}$$

A fenti képletben m a nyitott szelvényt alkotó falelemek száma. A Saint-Venant-féle csavarási tehetetlenségi nyomatékot tiszta csavarási tehetetlenségi nyomatéknak is nevezik.

A 13.9/b és 13.9/c ábrán vázolt **I** és Z keresztmetszet esetében a Saint-Venant-féle csavarási tehetetlenségi nyomaték értéke:

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{m} h_i v_i^3 = \frac{1}{3} v^3 (h + 2b)$$



13.10 ábra. **I**-tartó öblösödési csavarása.

A nyitott keresztmetszetek – térbeli viselkedésüknek köszönhetően – az egyes falelemeik hajlítása révén is ellenállhatnak a csavarásnak, miközben a keresztmetszet *öblösödik*. A jelenség egy alul mereven befogott, felül M_{cs} csavarónyomatékkal terhelt **I**-szelvény esetén szemléletesen is bemutatható (13.10 ábra).

A csavarás során az **I**-szelvény övei a $H = M_{cs}/h$ erő hatására hajlítást szenvednek és hajlítási merevségüket ($tb^3/12$) a csavarás tengelyétől mért karjukkal ($h/2$) – Steiner-tag-szerűen – „aktivizálják”. Az így meghatározott csavarási ellenállást az **I**-szelvény öblösödési tehetetlenségi nyomatékának nevezik:

$$I_\omega = \frac{tb^3}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2 2 = \frac{tb^3h^2}{24} \quad [\text{mm}^6] \tag{13.14}$$

Az **I**-tartó gerincének szerepe ekkor az, hogy a két övet „együttdolgoztatja”.

Mivel az öblösödés az övek hajlításával kapcsolatos, **I**- és Z-tartó esetében az I_ω-t a keresztmetszet övhajlítási csavarási tehetetlenségi nyomatékának is nevezik. A jelenség maga az öblösödési csavarás.

Az öblösödési csavarás vizsgálata és az öblösödési csavarási tehetetlenségi nyomaték meghatározása általános esetben komplex feladat, melynek tárgyalása túlmutat e jegyzet keretein. A nyitott szelvények (13.5/b ábra) öblösödési tehetetlenségi nyomatéka általában nagy érték, a zárt szelvényeké – és néhány speciális geometriával rendelkező nyitott szelvényé (13.5/a ábra) – viszont nagyon kicsi és így elhanyagolható.

Az öblösödési tehetetlenségi nyomaték ismeretében az öblösödési csavarás hatására keletkező nyírófeszültségek a

$$\tau = \frac{M_{cs}}{I_\omega} S_\omega$$

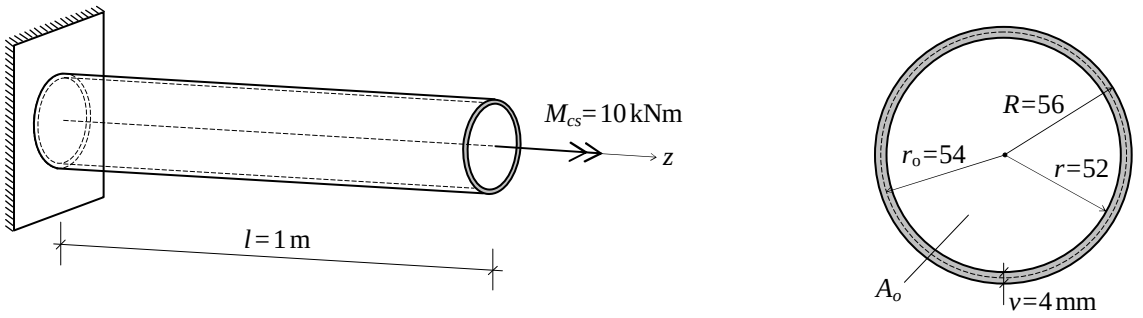
összefüggés segítségével számíthatók ki. A képletben szereplő S_ω [mm^3] szektoriális statikai nyomaték meghatározása csak egy meglehetősen bonyolult és hosszadalmas eljárás segítségével lehetséges, ami messze túlmutat a jegyzet keretein.

Az öblösödési csavarás hatására normálfeszültségek is keletkeznek – a 13.10 ábrán jól látható az övek hosszirányú alakváltozása – de ezek meghatározásával a feladat bonyolult volta miatt ebben a jegyzetben nem foglalkozunk.

Egy U-tartó csavarás hatására bekövetkező öblösödését a 13.12 ábrán láthatjuk.

13.4 Gyakorlati alkalmazás

Tekintsük a 13.11 ábrán vázolt cső keresztmetszetű rudat, amely a baloldali végén befogott és amelyet a jobboldali végén egy M_{cs} = 10 kNm nagyságú csavarónyomaték terhel. A rúd hossza l = 1 m. A külső átmérő R = 56 mm és a falvastagság v = 4 mm.



a) cső keresztmetszetű konzoltartó b) keresztmetszet

13.11 ábra. Csőtartó csavarása.

Feladatunk annak megállapítása, hogy megfelel-e a rúd, ha anyagának határfeszültsége τ_H = 135 N/mm^2. Határozzuk meg a tartó végkeresztmetszetének elcsavarodási szögét is. A tartó anyagának rugalmassági tényezője E = 210000 N/mm^2.

Alkalmazzuk a 13.1 pontban levezetett, körkeresztmetszetű rudakra vonatkozó összefüggéseket. A (13.3) képlet segítségével meghatározhatjuk a keletkező nyírófeszültség értékét, ha a képletben szereplő I_o poláris tehetetlenségi nyomaték helyére a körgyűrű poláris tehetetlenségi nyomaték értékét helyettesítjük:

$$I_o = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2}(56^4 - 52^4) = 3.963 \cdot 10^6 \,\text{mm}^4$$

A nyírófeszültség értéke így a falvastagság közepén:

$$\tau = \frac{M_{cs}}{I_o} r_o = \frac{10 \cdot 10^6}{3.963 \cdot 10^6} 54 = 136.3 \,\text{N/mm}^2$$

A kérdésünkre a választ most is a méretezés $Y_H \geq Y_M$ alapegyenletének alkalmazásával kapjuk meg, úgy, hogy az alapegyenletet most a nyírófeszültségre vonatkoztatjuk:

$$\tau_H = 135 \,\text{N/mm}^2 < \tau_M = 136.3 \,\text{N/mm}^2$$

A rúd tehát nem felel meg.

Az elcsavarodás szögének meghatározásához szükség van a nyírási rugalmassági tényező értékére, amelynek értéke a (4.4) képlet szerint (és ν = 0.3 Poisson tényezővel számolva):

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{210000}{2(1+0.3)} = 80769 \,\text{N/mm}^2$$

Az elcsavarodás szögét a (13.2) képlet szolgáltatja:

$$\varphi_{\max} = \frac{M_{cs} l}{G I_o} = \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 1000}{80769 \cdot 3.963 \cdot 10^6} = 0.031 \,\text{rad} = 1.8°$$

Mivel a rudunk vékonyfalú keresztmetszettel rendelkezik, a nyírófeszültség meghatározására alternatív megoldásként alkalmazhatjuk a vékonyfalú rudakra levezetett (13.9) képletet is. Ezt a megoldást is bemutatjuk.

A számításhoz szükség van a keresztmetszet középvonala által határolt A_o területre (13.11/b ábra):

$$A_o = r_o^2 \pi = 54^4 \pi = 9161 \,\text{mm}^2$$

A nyírófeszültség értéke így:

$$\tau = \frac{M_{cs}}{2 A_o \nu} = \frac{10 \cdot 10^6}{2 \cdot 9161 \cdot 4} = 136.4 \,\text{N/mm}^2$$

A két eredmény között elhanyagolhatóan kis mértékű eltérés van. Az eltérés oka az, hogy a (13.3) képlet levezetésekor változó (13.2/c ábra), a (13.9) képlet levezetésekor pedig egyenletesen megoszló (13.7/b ábra) nyírófeszültség-eloszlást tételeztünk fel. Vékonyfalú

keresztmetszetek esetében ez az eltérés mindig elhanyagolhatóan kicsi, így mindkét bemutatott képlet alkalmazható.

Végül megemlítjük a gyakorlati alkalmazás egy érdekes – és fontos – területét.

A csavarás az igénybevételek egy jellegzetes esete. A jellegzetessége abban is megnyilvánul, hogy az építőipari gyakorlatban a teher – a csavarónyomaték – általában nem közvetlenül, hanem valamely közvetítő szerkezeti elem (vagy szerkezeti elemek) segítségével adódik át a vizsgált elemre. Ennek következtében a csavarás az építőipari gyakorlatban általában összetett igénybevétel formájában szokott jelentkezni.

A csavarási igénybevétel egy fontos megnyilvánulási formájával találkozunk például akkor, amikor épületek globális viselkedését vizsgáljuk. Ilyenkor szükségessé válik egy-egy függőleges szerkezeti elem (ún. merevítőmag) vizsgálata csavarási igénybevételre (is). A külső teher (például vízszintes szélteher) ilyenkor a homlokzat, majd a födémek közvetítésével adódik át az épület szükséges merevségét biztosító merevítőmagokra és ilyen módon csavarási igénybevételt is okoz. Ennek megnyilvánulását láthatjuk a 13.12 ábrán, ahol egy tízszintes épület kisléptékű modelljének egy földszinti részét látjuk. A vízszintes teherrel terhelt szerkezet elcsavarodik és ennek következtében azokban a merevítőmagokban amelyek képesek csavarónyomatékot felvenni, csavarási igénybevétel (is) keletkezik. Ilyen merevítőmag az ábrán látható U-tartó, amely a földszinti befogás közelében a csavarás hatására öblösödik.



13.12 ábra. U-tartó öblösödése csavarónyomaték hatására.

Ilyen irányú vizsgálatokkal részletesen későbbi tanulmányaink során foglalkozhatunk, például az „Épületek komplex statikai vizsgálata” c. tárgy keretein belül. Az „Épületek komplex statikai vizsgálata” c. jegyzet a leggyakrabban előforduló keresztmetszetek öblösödési tehetetlenségi nyomatékait is tartalmazza (más keresztmetszeti jellemzőkkel együtt).

Irodalom

Bárczi István – Falu Gyula – Zalka Károly: Mechanika II. Szilárdságtan. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989

Cholnoky Tibor: Mechanika II. Szilárdságtan. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966

Dr. Dulácska Endre: Kisokos statikusoknak. Segédlet tartószerkezetek tervezéséhez. 2. javított kiadás. Készült az MSz EN (Eurocode) szabványok figyelembevételével. Artifex Kiadó, Budapest, 2013

Freund Péter: SEGÉDLETEK a Mechanika és Tartószerkezetek c. tárgyhoz. Terc Kiadó, Budapest, 2015

Palotás László (szerk.): Mérnöki Kézikönyv. II. kötet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984

Dr. Szmodits Kázmér: Vékonyfalú nyílt keresztmetszetű rudak méretezése csavarásra. 67-164. 4. fejezet az „Útmutató panelépületek statikai tervezéséhez” c. kiadványban. Építéstudományi Intézet, Budapest, 1975

Timoshenko, Stephen P – Gere, James M: Theory of elastic stability. 2nd edition, New York, McGraw-Hill, 1961

Timoshenko, S – Young, D H: Elements of strength of materials. 5th edition, D Van Nostrand Company, New York, 1968

Zalka Károly: Mechanika II. Szilárdságtan. Előadásvázlatok. Kézirat, Budapest, 1983-2006

Zalka Károly: Épületek komplex statikai vizsgálata. v6.15, e-kiadás, 2025