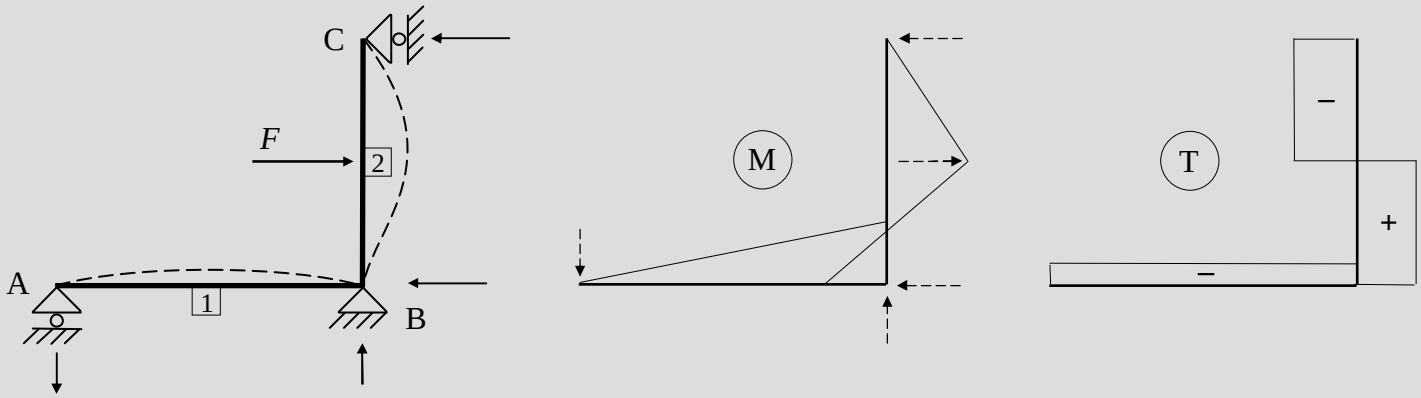
Mechanika III

Határozatlan tartók

Zalka Károly



Budapest, e-kiadás

© Zalka Károly, 1983; 2010 – 2024, e-kiadás

Szabad ezt a kiadványt sokszorosítani, terjeszteni és elektronikus
vagy bármely formában tárolni.
Tilos viszont a kiadványt bármely formában megváltoztatni és bármely formában értékesíteni.

Lektorok:

Horváth Lászlóné Fazakas Margit
okl. építőmérnök

Lőrincz György PhD
okl. építőmérnök

v5.15, 2024 november 23

Tartalomjegyzék

Előszó **1**

1. Statikailag határozatlan tartók **2**

2. Erőmódszer 5
2.1 A módszer elve és a megoldás menete 5
2.2 Egyszeresen határozatlan szerkezetek 6
2.3 Többszörösen határozatlan szerkezetek 10
2.4 A törzstartó megválasztásának szerepe 15
2.5 Néhány alkalmazás 22
2.5.1 Zárt keret 22
2.5.2 Cső 26
2.5.3 Tömör merevítőgerendás tartó 33
2.5.4 Kétcsuklós keret 35
2.6 Megoldás táblázatok segítségével 38

3. Gyakorló feladatok az erőmódszer alkalmazására **42**
3.1 Csuklós-befogott gerendatartó 42
3.2 Két végén befogott tartó 46
3.3 Kétcsuklós keret 50
3.4 Feszítőmű 52
3.5 Törttengelyű tartó 55
3.6 Két végén befogott tartó megoszló teherrel 56
3.7 A törzstartó megválasztásának szerepe 56

4. Mozgásmódszer **57**
4.1 Alapfogalmak 57
4.1.1 Csomóponti nyomaték – rúdvégi nyomaték 57
4.1.2 Átviteli tényező 57
4.1.3 Elfordulási merevség 59
4.1.4 Eltolódási merevség 61
4.2 A mozgásmódszer alapelve és a számítás végrehajtásának menete 64
4.3 Alkalmazási példa 66
4.4 Egy speciális megoldási lehetőség: a nyomatékosztás módszere 71

5. Gyakorló feladatok a mozgásmódszer alkalmazására **74**
5.1 Törttengelyű tartó 74
5.2 Kilendülő rúdcsillag 78
5.3 Belső csomóponton terhelt rúdcsillag 85
5.4 Általános terhelésű rúdcsillag 89

6. A nyomatékosztás módszere **91**
6.1 Fix csomópontú szerkezetek 91
6.1.1 Alapfogalmak 91
6.1.2 A rúdcsillag 92
6.1.3 Fix csomópontú keretek 97
6.1.4 Fix alátámasztású többtámaszú tartók 101
6.2 Eltolható csomópontú szerkezetek 108
6.2.1 Alapfogalmak 108
6.2.2 Süllyedő alátámasztású többtámaszú tartó 108
6.2.3 Eltolható csomópontú keretek 111

6.3 Szimmetrikus tartószerkezetek 122
6.3.1 A szimmetriából adódó egyszerűsítések 122
6.3.2 Általános terhelésű szimmetrikus szerkezetek 132
7. Gyakorló feladatok a nyomatékosztási módszer alkalmazására 136
7.1 Alapfogalmak 136
7.2 Rúdcsillagok 143
7.2.1 Rúdcsillag támasztól kinyúló konzollal 143
7.2.2 Rúdcsillag belső csomópontból elágazó konzollal 147
7.2.3 Rúdcsillag két konzollal 150
7.2.4 Rúdcsillag 154
7.2.5 Szimmetrikus rúdcsillag 155
7.2.6 Rúdcsillag 156
7.3 Többtámaszú tartók 157
7.3.1 Háromtámaszú tartó 157
7.3.2 Négytámaszú tartó 159
7.3.3 Négytámaszú, belsőkonzolos tartó 161
7.3.4 Állandó és esetleges teherrel terhelt négytámaszú tartó 164
7.3.5 Szimmetrikus tartó szimmetrikus és antimetrikus teherrel 167
7.3.6 Öttámaszú szimmetrikus tartó megoszló teherrel 170
7.3.7 Négytámaszú tartó 173
7.3.8 Négytámaszú konzolos tartó 174
7.4 Fix csomópontú keretek 175
7.4.1 Csuklós megtámasztású keret 175
7.4.2 Törttengelyű keret konzollal 178
7.4.3 Törttengelyű keret két belső csomóponttal 181
7.4.4 Keret két konzollal 184
7.4.5 Konzolos keret két belső csomóponttal 185
7.5 Süllyedő alátámasztású tartók 186
7.5.1 Négytámaszú süllyedő alátámasztású tartó 186
7.5.2 Négytámaszú süllyedő alátámasztású tartó II. 188
7.5.3 Süllyedő alátámasztású négytámaszú konzolos tartó 191
7.5.4 Süllyedő alátámasztású négytámaszú tartó 192
7.6 Elmozduló csomópontú keretek 193
7.6.1 Keret süllyedő támasszal 193
7.6.2 Kilendülő keret 200
7.6.3 Süllyedő alátámasztású rúdcsillag 206
7.6.4 Kilendülő keret 208
7.6.5 Kilendülő keret 213
7.6.6 Kilendülő keret 214
8. Alakhelyes igénybevételi ábrák szerkesztése 215
8.1 Rúdcsillag koncentrált nyomatékkal 219
8.2 Kilendülő törttengelyű tartó 223
8.3 Kilendülő keret 225
8.4 Kilendülő rúdcsillag 227
9. Többtámaszú tartók igénybevételeinek szélső értékei 229
9.1 Bevezetés 229
9.2 Terhelési sémák támaszközönként szakaszosan történő terhelés esetén 229
9.3 Számpélda 235
10. Irodalom 240

Előszó

Korábbi tanulmányaink során megismerkedhettünk a statika alapfogalmaival. A Mechanika I (Statika) és Mechanika II (Szilárdságtan) után a Mechanika III (Határozatlan tartók) statikailag határozatlan rúdszerkezetek viselkedésével és fontosabb megoldási módszereivel foglalkozik.

A statikailag határozatlan tartók bevezetése után a második fejezet tárgya az erőmódszer, amely talán a legfontosabb módszer határozatlan tartók megoldására. Az elméleti összefoglalás után a harmadik fejezet gyakorló feladatokat ismertet az anyag mélyebb elsajátítása érdekében.

Amíg az erőmódszer egy elméletileg igen fontos módszer és főleg statikailag kevéssé határozatlan szerkezetek esetén alkalmas kézi számításra, a mozgásmódszer többszörösen határozatlan szerkezetek gyakorlati számítására is alkalmas lehet. A módszert a negyedik fejezet ismerteti, majd az ötödik fejezet ad gyakorló feladatokat.

A mozgásmódszer speciális esete a Cross-módszer, amellyel a hatodik fejezet foglalkozik. Itt ismerkedünk meg részletesen a gyakorlatban igen fontos, elmozduló csomópontú szerkezetek viselkedésével és számításával is. Ez a fejezet ismerteti a süllyedő alátámasztású többtámaszú tartókat is. A Cross-módszer gyakorlásához a hetedik fejezetben találunk kidolgozott feladatokat.

Sokak szerint a számítógépek elterjedésével és az egyre jobb statikai programok elérhetőségével párhuzamosan csökkent a kézi számítási módszerek fontossága. Elegendő az adatokat betáplálni a gépbe, megnyomni a „Számítás” gombot és a gép mindent kiszámol. Mi nem osztjuk ezt a véleményt. A számítógépek ugyan átveszik a számítási munka manuális részének nagy részét, de az eredményeket nekünk kell értelmezni, és ami még ennél is fontosabb, az eredmények helyességéről nekünk kell meggyőződni, majd azokért felelősséget vállalni. Ez csak akkor lehetséges, ha tudjuk hogy mit csinál a gép, értjük hogy hogyan működik a szerkezet, „érezzük” a viselkedését és tudjuk hogy körülbelül milyen eredményt várhatunk.

A szerkezet várható viselkedését jellemző alakhelyes igénybevételi ábrák ismerete a számítógépes statikai vizsgálat elengedhetetlen kiegészítője, aminek fontossága nem hangsúlyozható eléggé. Vagy talán mégis: egy külön fejezet, a nyolcadik fejezet foglalja össze azokat a tudnivalókat, módszereket és elveket, amelyek segítenek alakhelyes igénybevételi ábrák szerkesztésében. A jegyzet utolsó fejezete többtámaszú tartók szélső igénybevételeinek meghatározásával foglalkozik. A tananyag megértését 58 számpélda segíti.

Köszönettel tartozom volt és jelenlegi kollégáimnak: dr. Bárczi Istvánnak, a korábbi Mechanika III jegyzet társszerzőjének, hogy felhasználhattam az 1990-es kiadás kéziratát; Szűcs Sándornak és dr. Szabó Lászlónénak, hogy rendelkezésemre bocsátották a korábbi Példatár részére készített kidolgozott feladatokat a Cross-módszer gyakorlására.

Budapest, 2010 június

Az eredeti kéziratot Farkas Dániel és Rákóczy Katalin nézte át, majd a jegyzetet Horváth Lászlóné Fazakas Margit és Lőrincz György lektorálta. Hasznos észrevételeikkel és javaslataikkal jelentősen emelték a jegyzet értékét. Gondos munkájukat ezúton is szeretném megköszönni.

A v5.11 (2020 dec.) majd a jelen v5.15 e-kiadás néhány kisebb módosítást tartalmaz.

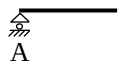
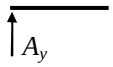
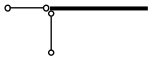
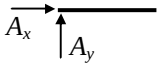
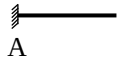
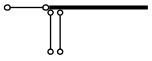
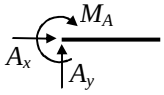
Budapest, 2024 november Zalka Károly

1

Statikailag határozatlan tartók

Szétszórt síkbeli erőrendszerrel terhelt, statikailag határozott tartók esetében a rendelkezésre álló független egyenletek segítségével egyértelműen meghatározhatók a tartók rögzítésére alkalmazott támaszok által képviselt ismeretlenek. Máshogyan megfogalmazva, az egyenletek száma (e) megegyezik a kényszereknél fellépő kényszererők számával (f), vagyis az $e = f$ összefüggés teljesül. – Az 1.l táblázatban emlékeztetőül felsoroljuk a legfontosabb kényszereket.

1.1 táblázat. Kényszerek és kényszererők.

Támasztó szerkezet	Jelölés	Képzelt rudakkal helyettesített kényszerek	Kényszererők
Görgős megtámasztás			
Csuklós megtámasztás			
Befogás			

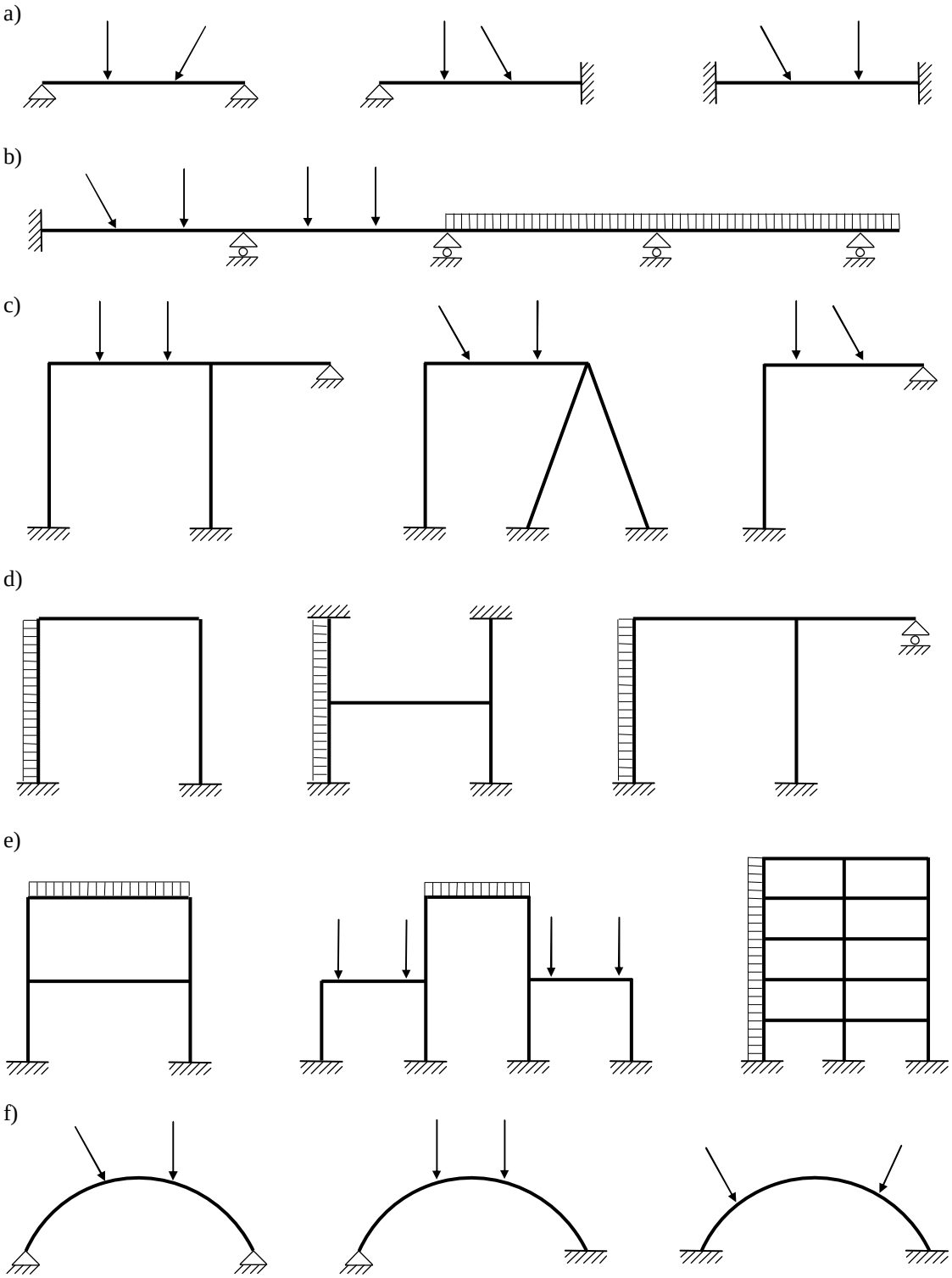
Ha a vizsgált szerkezet esetében több az ismeretlen mint ahány független egyenlet van, vagyis $f > e$, akkor a kényszererőket nem tudjuk egyértelműen meghatározni. Az ilyen szerkezeteket statikailag határozatlannak nevezzük, és a statikai határozatlanság fokával (n) jellemezhetjük. A statikai határozatlanság foka ezek szerint az ismeretlenek és az egyenletek számának a különbsége:

$$n = f - e \tag{1.1}$$

Ha az adott szerkezet k számú merev tárcsából áll és a tárcsák f számú képzelt kapcsolórúddal (kényszerrel) kapcsolódnak egymáshoz, akkor a rendelkezésre álló egyenletek száma $e = 3(k–1)$, vagyis a statikai határozatlanság fokát jellemző (1.1) egyenlet az

$$n = f - 3(k-1) \tag{1.2}$$

alakot ölti. A merev tárcsák számbavételénél a megtámasztó alakzatot – a földet – is figyelembe kell venni.



1.1 ábra. Statikailag határozatlan szerkezetek.

Az 1.1/a és 1.1/b ábrán statikailag határozatlan, egyenes tengelyű, két- és többtámaszú tartókat láthatunk. Az 1.1/c, 1.1/d és 1.1/e ábrán keretszerkezeteket

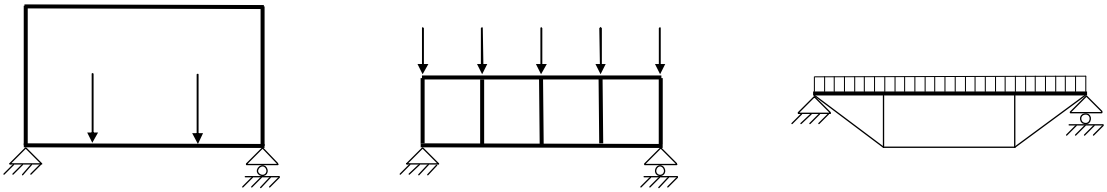
tüntettünk fel. Keretszerkezeten általában olyan egyenes vagy görbetengelyű rudakból álló tartószerkezetet értünk, amelynél az egyes rudak találkozásánál kialakuló csomópontok sarokmerevek. A csomópontok sarokmerevsége azt jelenti, hogy az ugyanabban a csomópontban találkozó rúdvégek valamely külső hatás következtében előálló elfordulása és eltolódása ugyanakkora, tehát a csomópontokban a rúdtengelyek által bezárt szögek a szerkezet alakváltozása után is változatlanok maradnak.

A keretszerkezetek – vagy röviden keretek – két nagy csoportját különböztetjük meg. Ezek a fix csomópontú és az eltolható csomópontú keretek. A fix csomópontú kereteket az jellemzi, hogy csomópontjaik a terhelés hatására csak elfordulást végezhetnek és nem tolódhatnak el (1.1/c ábra). Az eltolható csomópontú keretek csomópontjai az elforduláson kívül el is tolódhatnak (1.1/d, 1.1/e ábra).

Aszerint, hogy az eltolható keret csomópontjainak eltolódását egy vagy több képzelt megtámasztással tudjuk megakadályozni, egyszeresen (1.1/d ábra) és többszörösen (1.1/e ábra) eltolható csomópontú kereteket különböztetünk meg.

Az 1.1/f ábrán statikailag határozatlan, görbetengelyű tartókat – úgynevezett ívtartókat – láthatunk.

Vannak olyan síkbeli rúdszerkezetek is, melyek támaszerőit egyensúlyi egyenletekkel meg tudjuk ugyan határozni, statikai szempontból mégis határozatlanok. Ezek lényegében a rácsos tartók köréből származtathatók, azzal az eltéréssel, hogy a háromszögképzés szabálya szerint szükséges rúdjaik közül egy vagy több hiányzik. Ezért csomópontjaik általában csak sarokmerevek lehetnek (1.2/a és 1.2/b ábra), mert csuklós csomópontok kialakítása esetén labilis szerkezetek lennének. Az ilyen szerkezeteket, melyek közül példaként néhányat az 1.2 ábrán tüntettünk fel, statikai szempontból belsőleg határozatlan tartóknak nevezzük. Az 1.2/a ábrán látható zárt kerettel és az 1.2/c ábrán látható feszítőmű vizsgálatával részletesen is foglalkozunk majd a 2., 3., 6. és 7. fejezetekben.



a) zárt keret b) Vierendel-tartó c) feszítőmű

1.2 ábra. Belsőleg határozatlan szerkezetek.

Bár a későbbiekben bemutatásra kerülő módszerek általában a statikai szempontból belsőleg határozatlan tartók vizsgálatára is alkalmasak, a továbbiakban elsősorban azokkal a szerkezetekkel foglalkozunk, melyek támaszai háromnál több ismeretlent képviselnek és nincs belső csukló. Ezeket a szerkezeteket statikai szempontból külsőleg határozatlan tartóknak nevezzük.

A fentieket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a statikailag határozatlan tartók vizsgálata csupán az egyensúlyi egyenletek segítségével nem végezhető el, mert az ismeretlenek száma meghaladja a rendelkezésre álló egyensúlyi egyenletek számát. A mérnöki gyakorlatban kialakult számítási módszerek ennek megfelelően az egyensúlyi egyenletek kiegészítésére további egyenleteket használnak. Az erőmódszer az egyensúlyi egyenletek mellett alakváltozási egyenleteket használ fel, a mozgásmódszer pedig a rendelkezésre álló egyensúlyi egyenleteket további – csomóponti – egyensúlyi egyenletekkel egészíti ki. A következő pontokban ezt a két alapvető módszert tárgyaljuk.

2

Erőmódszer

A statikailag határozatlan tartók erőjátékának vizsgálatánál a nehézséget általában az okozza, hogy az ismeretlen kényszererők száma meghaladja a rendelkezésre álló egyensúlyi egyenletek számát. Újabb egyenletek felírására van tehát szükség. Az erőmódszer alkalmazása során az egyensúlyi egyenletek mellé alakváltozási egyenleteket írunk fel. A módszer valószínűleg onnan nyerte nevét, hogy az alakváltozási egyenletekben szereplő ismeretlenek erők (illetve nyomatékok).

Az alakváltozási egyenletekben szereplő ismeretlenek száma megegyezik a statikai határozatlanság fokával, így a módszer kézi számításra csak akkor alkalmas, ha a statikai határozatlanság foka alacsony. A módszer elvét és a megoldás menetét a következőkben részletezzük.

2.1 A módszer elve és a megoldás menete

A statikailag határozatlan tartó kényszerei közül a statikai határozatlanság fokával egyenlő számú kényszert eltávolítunk. Az így átalakított szerkezetet a vizsgált szerkezet statikailag határozott törzstartójának nevezzük. Az eltávolított kényszerek (ún. fölös kényszerek) helyén a kényszereknek megfelelő erőket/nyomatékokat (ún. fölös kényszererőket) kell működtetni, mert csak így biztosítható, hogy az eredetileg határozatlan tartó és a határozott törzstartó elmozdulásai azonosak legyenek. A vizsgálatot ezek után a törzstartón hajtjuk végre, annak előírásával, hogy a törzstartó elmozdulásai az eltávolított kényszerek helyén megegyeznek az eredeti határozatlan tartó ottani elmozdulásaival. Az elmozdulásokra vonatkozó egyenleteket elmozdulási (alakváltozási) feltételi egyenleteknek nevezzük.

Az elmozdulások előjelének megállapítása során a korábbi tanulmányainkban (Mechanika I és Mechanika II) rögzített előjelszabályt alkalmazzuk. Ennek megfelelően az óramutató járásával megegyező forgatásértelmű elfordulás, illetve a lefelé irányuló eltolódás előjele pozitív.

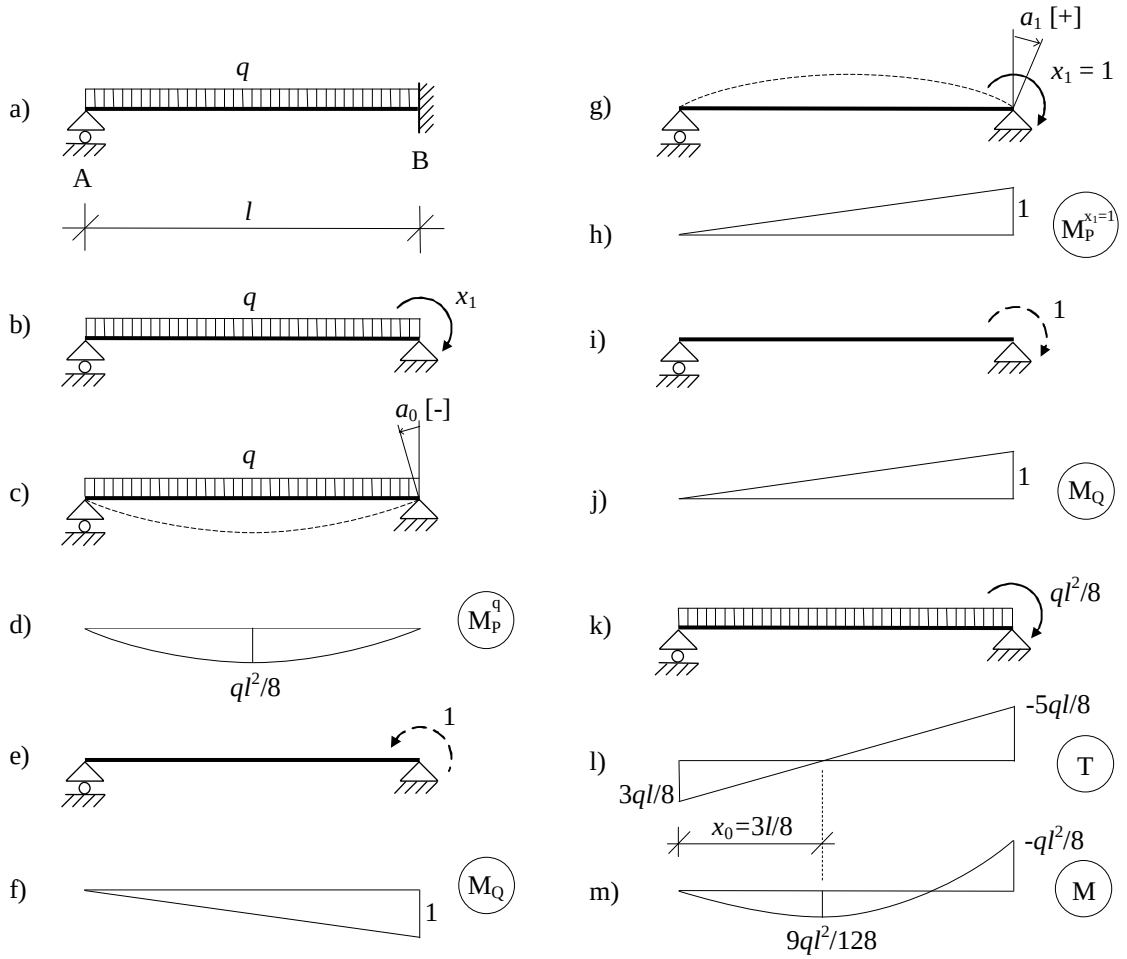
A következő lépés a feltételi egyenletek megoldása. A statikai határozatlanság fokával egyenlő számú feltételi egyenlet a statikai határozatlanság fokával egyenlő számú ismeretlent tartalmaz, így a megoldás egyértelmű. A megoldás az ún. fölös kényszererőket szolgáltatja. A fölös kényszererők ismeretében most már felhasználhatjuk a szétszórt síkbeli erők esetén a három egyensúlyi egyenletet, és meghatározhatjuk a még ismeretlen kényszererőket. Az utolsó lépés az igénybevételi ábrák előállítása.

A törzstartó kiválasztásánál a következőket kell szem előtt tartani. Rendszerint több megoldás van. Azt a törzstartót célszerű kiválasztani, amelyik egyszerű, illetve amelyiknek az ismeretlen alakváltozását/alakváltozásait egyszerűen tudjuk meghatározni.

A módszer bemutatása céljából először két egyszeresen határozatlan tartó igénybevételi ábráit határozzuk meg.

2.2 Egyszeresen határozatlan szerkezetek

A 2.1/a ábrán látható tartó egyszeresen határozatlan és így a statikailag határozott törzstartót egy kényszer eltávolításával állíthatjuk elő. A "fölöslegesnek" ítélt kényszer legyen a *B* támasznál lévő és a rúd végének elfordulását megakadályozó "befogó" kényszer. Ennek eltávolításával egy statikailag határozott kéttámaszú tartót kapunk (2.1/b ábra).



2.1 ábra. Egyszeresen határozatlan gerendatartó.

Az eltávolított fölös kényszer helyén a kényszer jellegének megfelelő kényszererőt – esetünkben nyomatékot (x_1 a 2.1/b ábrán) – kell működtetni. A törzstartó egy feltételi egyenlettel együtt helyettesítheti az eredeti tartót. A feltételi egyenlet most azt fejezi ki, hogy a törzstartó elfordulása a *B* támasznál zérus nagyságú:

$$\varphi_B = a_0 + a_1 x_1 = 0 \qquad (2.1)$$

Az a_0 terhelési tényező a q külső teher által a B támasznál okozott elfordulás, az a_1 egységtényező pedig az ismeretlen kényszererő egységéből a B támasznál keletkezett elfordulás. A terhelési és egységtényező értékét célszerűen a munkatételek felhasználásával számíthatjuk ki. Az óramutató járásával egyező elfordulás pozitív.

A q teherből a B támasznál keletkező elfordulás (a_0 a 2.1/c ábrán) értékének meghatározásához szükség van a q teherből keletkező nyomatékok ábrájára (2.1/d ábra) és a B támasznál beiktatott képzelt, egységnyi nyomaték (2.1/e ábra) hatására keletkező nyomatékábrára (2.1/f ábra). A két nyomatékábra segítségével a keresett elfordulás értéke:

$$a_0 = -\frac{1}{EI}\frac{ql^2}{8}\frac{2l}{3}\frac{1}{2} = -\frac{ql^3}{24EI}$$

Az $x_1 = 1$ kNm nyomaték hatására a B támasznál keletkező elfordulás az a_1 egységtényező (2.1/g ábra). Értékét az $x_1 = 1$ mint külső teher és a B támasznál beiktatott, képzelt egységnyomaték (2.1/i ábra) hatására keletkező nyomatékábrák (2.1/h és 2.1/j ábrák) felhasználásával számíthatjuk ki:

$$a_1 = \frac{1}{EI}\frac{l}{2}\frac{2}{3} = \frac{l}{3EI}$$

Az egység- és terhelési tényező értékének ismeretében most már behelyettesíthetünk a B támasz elfordulásának zérus értékét kifejező (2.1) feltételi egyenletbe:

$$-\frac{ql^3}{24EI} + \frac{l}{3EI}x_1 = 0$$

A feltételi egyenletből a fölös kényszernek az az értéke adódik, amely az adott külső teher működése mellett biztosítja hogy a B támasz nem fordul el:

$$x_1 = \frac{ql^2}{8}$$

A statikailag határozott törzstartó terhelése most már ismert: az eredetileg működő q egyenletesen megoszló teher és a most kiszámított $x_1 = ql^2/8$ nyomaték (2.1/k ábra). Az igénybevételi ábrák a statikailag határozott tartók elméletében megismert módszerekkel könnyűszerrel meghatározhatók (2.1/l és 2.1/m ábrák).

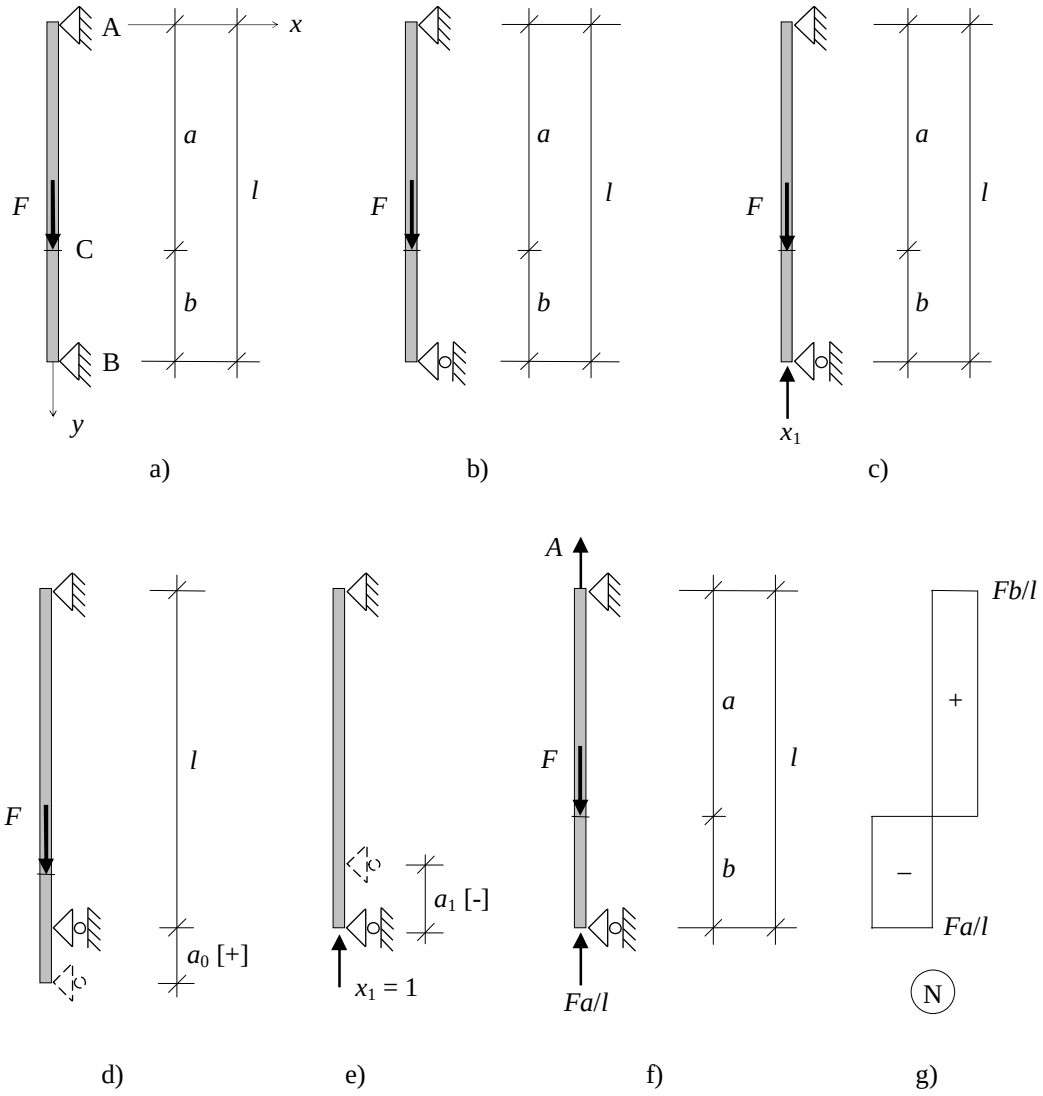
Érdekes feladatot mutat a 2.2/a ábra. A vizsgálandó szerkezet egy olyan egyenestengelyű tartó, amelynek mindkét végpontját egy csukló kapcsolja a szilárd környezethez. A rudat egyetlen, rúdtengely irányú koncentrált erő terheli a C pontban. Határozzuk meg az igénybevételi ábrákat.

A tartó egyszeresen határozatlan. A B támasz rúdtengely irányú eltolódást meggátló hatását megszüntetjük, így a 2.2/b ábrán látható törzstartóhoz jutunk. A megszüntetett kényszer helyén egy – egyelőre ismeretlen nagyságú – kényszererőt kell működtetni; ez az x_1 erő (2.2/c ábra). A kényszererő nagyságát abból a feltételből határozzuk meg, hogy a tartó tengelyirányú eltolódása a B támasznál az F külső teher és az x_1 kényszererő hatására zérus:

$$a_0 + a_1 x_1 = 0$$

Az a_0 terhelési tényező most a törzstartó B támaszának tengelyirányú eltolódását fejezi ki az F erő hatására (2.2/d ábra). Ez az eltolódás megegyezik az a hosszúságú AC rúdszakasz F erő okozta megnyúlásával:

$$a_0 = \frac{aF}{EA}$$



2.2 ábra. Normálerővel terhelt tartó.

Az a_1 egységtényező jelentése szintén eltolódás: a B támasz tengelyirányú eltolódása az $x_1 = 1$ erő hatására (2.2/e ábra). Ez az eltolódás azért jön létre, mert az $x_1 = 1$ erő az l

hosszúságú rudat összenyomja. Az eltolódás értékét – feltételezve, hogy a rúd nem hajlik ki – az

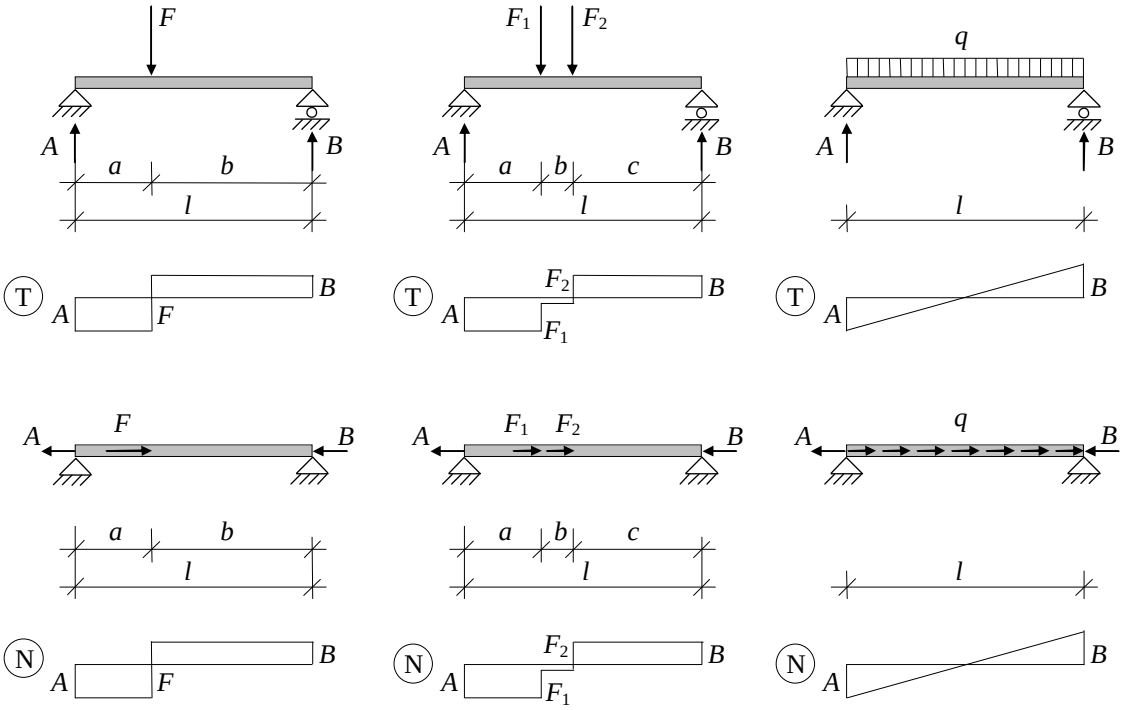
$$a_1 = -\frac{l}{EA}$$

összefüggés adja meg. Az F és x_1 hatására keletkező két eltolódás összege zérust kell hogy adjon, hiszen az eredeti tartó B támasza nem végez rúdirányú eltolódást. Ezt a tényt fejezi ki az

$$\frac{aF}{EA} - \frac{l}{EA} x_1 = 0$$

feltételi egyenlet, amelyből az ismeretlen kényszererő értéke meghatározható:

$$x_1 = F \frac{a}{l}$$



a) teher: F b) teher: F_1 és F_2 c) teher: q

2.3 ábra. Analógia: nyíró- illetve normálerővel terhelt tartók T és N ábrái.

Ez az erő nem más, mint az eredeti tartó B támaszereje. A

$$-F \frac{a}{l} + F - A = 0$$

y irányú vetületi egyensúlyi egyenlet az egyetlen ismeretlen – az *A* támaszerő – értékét szolgáltatja:

$$A = F - F\frac{a}{l} = F\frac{l-a}{l} = F\frac{b}{l}$$

A tartó normálerő ábráját a 2.2/g ábrán adjuk meg. Nyíróerők és nyomatékok a tartót nem támadják.

A támaszerőkre nyert összefüggések, valamint a tartó normálerő-ábrája alapján érdekes analógiát figyelhetünk meg a tengelyvonalára merőleges erőkkel terhelt, kéttámaszú gerendatartó támaszerői és nyíróerő-ábrája, valamint a két állócsuklós tengelyirányban terhelt tartó támaszerői és normálerő-ábrája között (2.3 ábra).

2.3 Többszörösen határozatlan szerkezetek

A 2.4/a ábrán vázolt két végén befogott tartó jó példa annak bemutatására, hogy a többszörösen határozatlan szerkezetek esetében a megoldás elve nem változik, csak a feltételi egyenletek száma, és ezzel együtt az elvégzendő munka mennyisége. A tartó háromszorosan határozatlan, így három fölös kényszer megszüntetésével kapjuk meg a törzstartót. A törzstartó felvételére több megoldás van. A lehetséges esetek közül válasszuk most a 2.4/b ábrán látható kéttámaszú törzstartót, amelyet úgy kapunk, hogy megszüntetjük az *A* és *B* támaszok befogó (elfordulást gátló) hatását és az *A* támasz rúdtengely irányú megtámasztó hatását. Az eltávolított kényszerek helyén működtetni kell a megfelelő kényszererőket: x_1, x_2 és x_3 (2.4/b ábra).

A feltételi egyenletrendszer az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{10} &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{20} &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{30} &= 0 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

egyenletekből áll. Az első egyenlet azt fejezi ki, hogy a tartó elfordulása az *A* támasznál zérus: $\varphi_A = 0$. A második egyenlet a *B* támasznál fellépő elfordulás zérusértékűségét rögzíti: $\varphi_B = 0$. A harmadik egyenlet jelentése $x_A = 0$, vagyis a tartó baloldali végpontja *x* irányban nem tolódik el.

A terhelési tényezők (a_{i0}) és az egységtényezők (a_{ij}) indexeinek jelentése:

- i – a tartó mely pontjában, milyen jellegű alakváltozás („hol?”),
- j – milyen hatás okozza az alakváltozást („mi?”),
- 0 – az ok az eredeti külső teher.

A feltételi egyenletrendszer az

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a_0} = 0 \qquad (2.3)$$

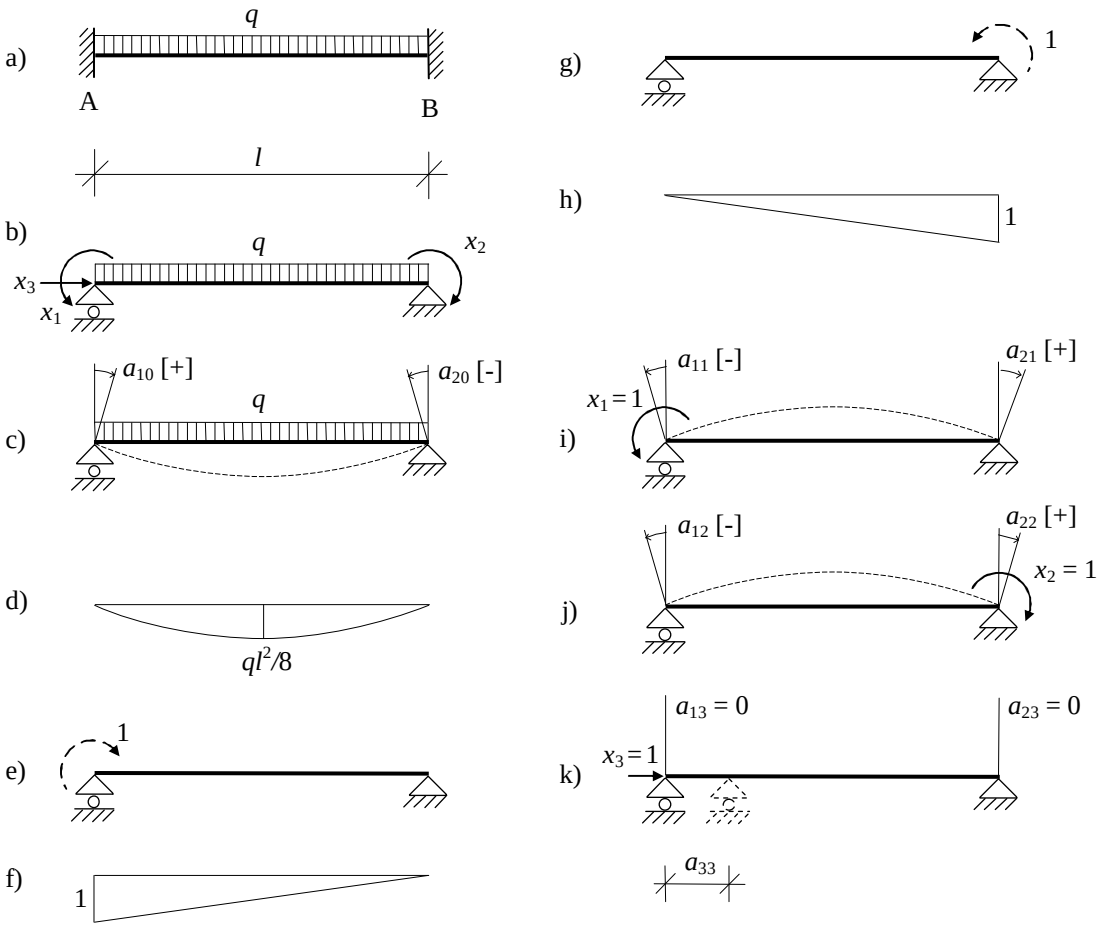
alakban írható fel, ahol az **A** együtthatómátrix az egységtényezőket, az $\mathbf{a_0}$ vektor pedig a terhelési tényezőket tartalmazza. Az ismeretlen kényszererőket a fenti egyenletből az

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a_0}$$

illetve részletesen kiírva az

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

összefüggés szolgáltatja. A feltételi egyenletrendszer fenti formában történő felírása és megoldása kiválóan alkalmassá teszi a módszert számítógépes feldolgozásra.



2.4 ábra. Két végén befogott tartó.

Határozzuk meg először a terhelési tényezőket.

Az a_{10} terhelési tényező a tartó elfordulása az A támasznál a q intenzitású egyenletesen megoszló külső teherből (2.4/c ábra). Az elfordulás a 2.4/d és 2.4/f nyomatékábrák segítségével egyszerűen meghatározható:

$$a_{10} = \frac{1}{EI}\frac{ql^2}{8}\frac{2l}{3}\frac{1}{2} = \frac{ql^3}{24EI}$$

Az a_{20} terhelési tényező a tartó elfordulása a B támasznál a q intenzitású egyenletesen megoszló teher hatására (2.4/c ábra). Értékét a 2.4/d és 2.4/h nyomatékábrák "összeintegrálása" szolgáltatja:

$$a_{20} = -\frac{1}{EI}\frac{ql^2}{8}\frac{2l}{3}\frac{1}{2} = -\frac{ql^3}{24EI}$$

Az a_{30} terhelési tényező az A támasz vízszintes eltolódását jelenti a q külső teher hatására. A q teher vízszintes eltolódást nem okoz:

$$a_{30} = 0$$

A következő lépésben határozzuk meg az egységtényezőket.

Az a_{11} egységtényező az A támasz elfordulása az $x_1 = 1$ nagyságú nyomatékból (2.4/i ábra). Az elfordulás kiszámításához a 2.4/f ábrát használhatjuk fel, figyelembe véve, hogy az elfordulás az óramutató járásával ellentétes, tehát negatív:

$$a_{11} = -\frac{1}{EI}\frac{l}{2}\frac{2}{3} = -\frac{l}{3EI}$$

Az a_{21} egységtényező a B támasz elfordulása az $x_1 = 1$ nagyságú nyomatékból (2.4/i ábra). Ezt az elfordulást a 2.4/f és 2.4/h nyomatékábrák felhasználásával számíthatjuk ki, figyelembe véve, hogy az elfordulás az óramutató járásával megegyező, tehát pozitív:

$$a_{21} = \frac{1}{EI}\frac{l}{2}\frac{1}{3} = \frac{l}{6EI}$$

Az a_{31} egységtényező az A támasz vízszintes eltolódása az $x_1 = 1$ nyomatékból. Az A támasz e nyomaték hatására nem tolódik el, így

$$a_{31} = 0$$

Az a_{12} egységtényező az A támasz elfordulása az $x_2 = 1$ nagyságú nyomatékból (2.4/j ábra). Az elfordulás meghatározása a 2.4/f és 2.4/h ábrák felhasználásával történhet, figyelembe véve, hogy az elfordulás előjele negatív:

$$a_{12} = -\frac{1}{EI}\frac{l}{2}\frac{1}{3} = -\frac{l}{6EI}$$

Az a_{22} egységtényező a B támasz elfordulása az $x_2 = 1$ nagyságú nyomatékból (2.4/j ábra). Ezt az elfordulást a 2.4/h nyomatékábra segítségével határozhatjuk meg, figyelembe véve, hogy az elfordulás előjele pozitív:

$$a_{22} = \frac{1}{EI}\frac{l}{2}\frac{2}{3} = \frac{l}{3EI}$$

Az a_{32} egységtényező az A támasz vízszintes eltolódása az $x_2 = 1$ nyomatékból. Mivel a támasz a nyomaték hatására nem tolódik el,

$$a_{32} = 0$$

Az a_{13} egységtényező az A támasz elfordulása az $x_3 = 1$ nagyságú erőből (2.4/k ábra). Az A támasz az x_3 erő hatására nem fordul el. Így

$$a_{13} = 0$$

Az a_{23} egységtényező a B támasz elfordulása az $x_3 = 1$ nagyságú erőből (2.4/k ábra). A B támasz az $x_3 = 1$ erő hatására nem fordul el, így

$$a_{23} = 0$$

Az a_{33} egységtényező az A támasz vízszintes eltolódása az $x_3 = 1$ nagyságú erőből (2.4/k ábra). Ez az eltolódás az l hosszúságú tartó összenyomódásából keletkezik:

$$a_{33} = \frac{l}{EA}$$

A terhelési és egységtényezők értékeinek felhasználásával a feltételi egyenletrendszer a következő alakban írható fel:

$$\begin{array}{cccccc} -\frac{l}{3EI}x_1 & -\frac{l}{6EI}x_2 & +0 & +\frac{ql^3}{24EI} & = & 0 \\ \frac{l}{6EI}x_1 & +\frac{l}{3EI}x_2 & +0 & -\frac{ql^3}{24EI} & = & 0 \\ 0 & +0 & +\frac{l}{EA}x_3 & +0 & = & 0 \end{array}$$

A harmadik egyenletből közvetlenül adódik az x_3 értéke:

$$x_3 = 0$$

Az első és második egyenlet rendezés után a következő alakot ölti:

$$\begin{array}{ccccc} -2x_1 & -x_2 & +\frac{ql^2}{4} & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & -\frac{ql^2}{4} & = & 0 \end{array}$$

A kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása szolgáltatja a hiányzó kényszererők – esetünkben nyomatékok – értékét:

$$x_1 = \frac{ql^2}{12}$$

$$x_2 = \frac{ql^2}{12}$$

Az x_1 és x_2 pozitív előjele azt mutatja, hogy a fölös kényszererők előjelét (2.4/b ábra) jól tételeztük fel.

A kényszererők ismeretében a tartó támaszerői az egyensúlyi egyenletek segítségével már meghatározhatók:

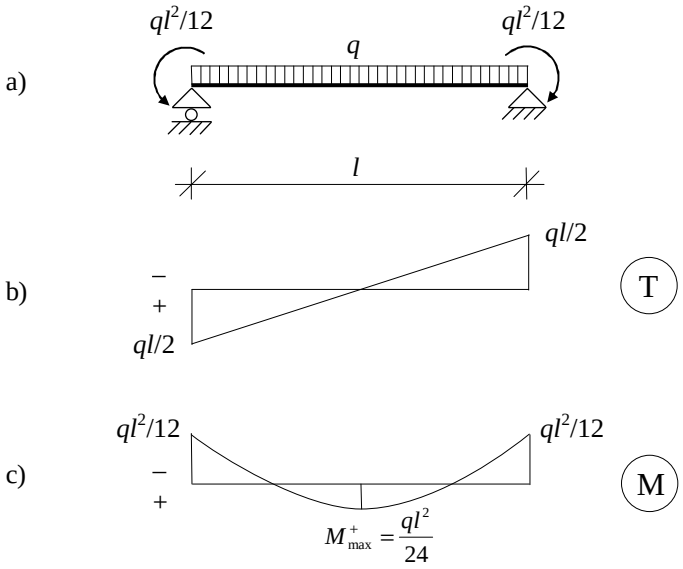
$$A = B = \frac{ql}{2}$$

A 2.5/a ábrán ismét feltüntettük a törzstartót az eredeti külső teherrel és a már meghatározott kényszererőkkel. Az igénybevételi ábrákat a 2.5/b és 2.5/c ábrák tartalmazzák.

Az egység- és terhelési tényezők bizonyos antimetriát mutatnak:

$$a_{10} = -a_{20}, \quad a_{11} = -a_{22}, \quad a_{12} = -a_{21}$$

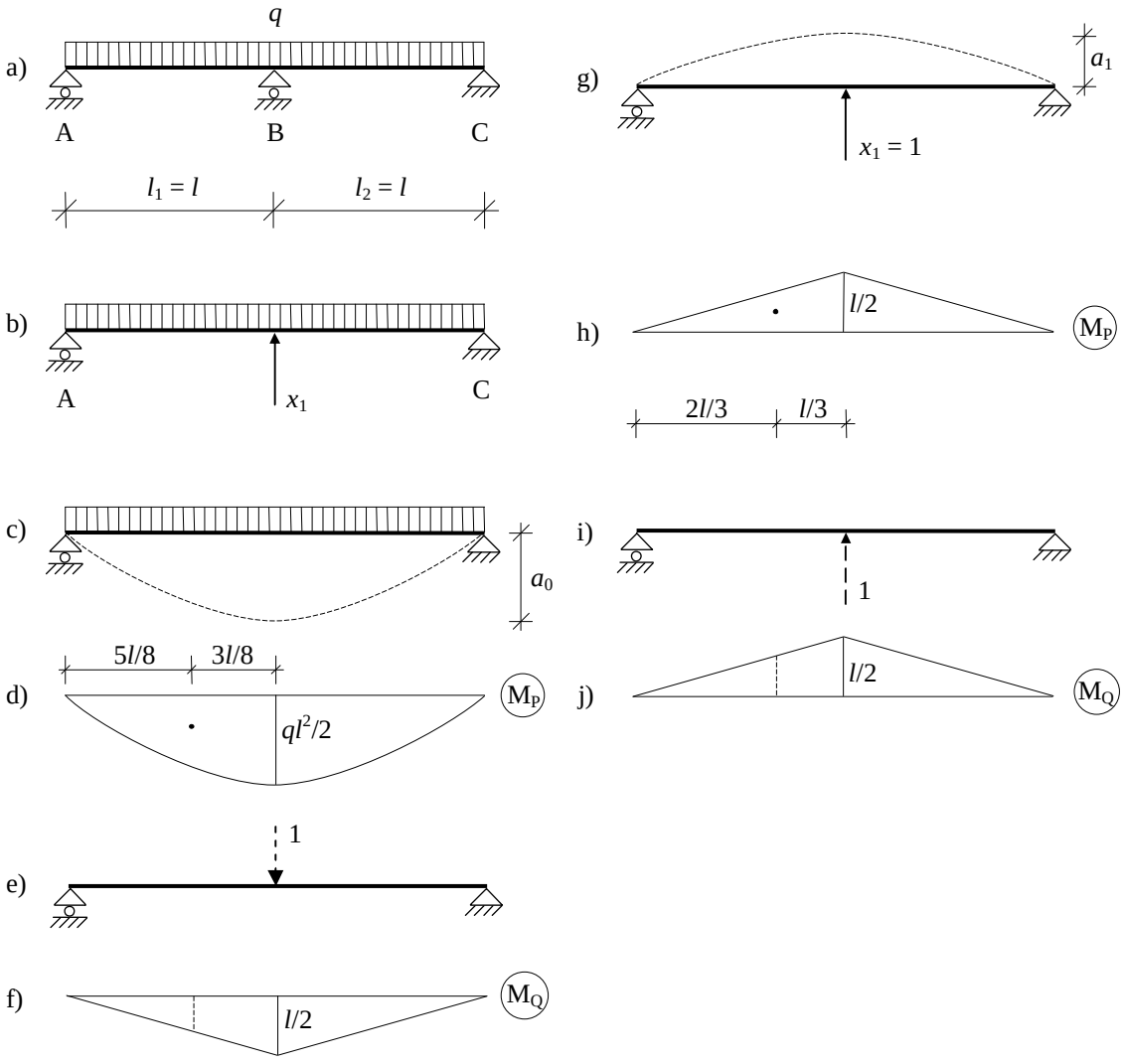
Ez az antimetria annak tulajdonítható, hogy a szimmetrikus tartónak mind a megtámasztási viszonyai, mind a terhelése szimmetrikus. Az ilyen szimmetria figyelembevétele jelentősen egyszerűsíti a számítási munkát: esetünkben egy feltételi egyenlet felírásával is megoldhattuk volna a feladatot. Szándékosan nem így jártunk el, hogy bemutathassuk, hogyan kell a többszörösen határozatlan tartók esetében a számítást elvégezni. A szimmetriából adódó egyszerűsítési lehetőségek kihasználására a 6.3 pontban mutatunk be példát.



2.5 ábra. Két végén befogott tartó igénybevételi ábrái.

2.4 A törzstartó megválasztásának szerepe

Mivel az erőmódszer alkalmazása során rendszerint több lehetőség van a törzstartó megválasztására, felmerülhet az a kérdés, hogy milyen törzstartót válasszunk. Elméletileg mindegy, hogy a rendelkezésre álló törzstartók közül melyiket választjuk, a végeredmény ugyanaz lesz. Gyakorlati szempontból viszont nem mindegy hogy a végeredményhez egyszerű vagy bonyolult számítás után jutunk el. A törzstartó megválasztása jelentősen befolyásolhatja a számítási munka nehézségi fokát, ezért a számítás megkezdése előtt célszerű végiggondolni, hogy a szóba jöhető törzstartók melyike vezet egyszerűbb alakváltozási részfeladatokhoz.



2.6 ábra. Háromtámaszú tartó. I. megoldás.

Fentiek illusztrálására tekintsük a 2.6/a ábrán vázolt egyszeresen határozatlan háromtámaszú tartót. Az *EI* értéket állandónak tételezzük fel. Feladatunk az igénybevételi ábrák előállítása. Oldjuk meg először a feladatot úgy, hogy a két mező egyforma méretű, vagyis legyen $l_1 = l_2 = l$.

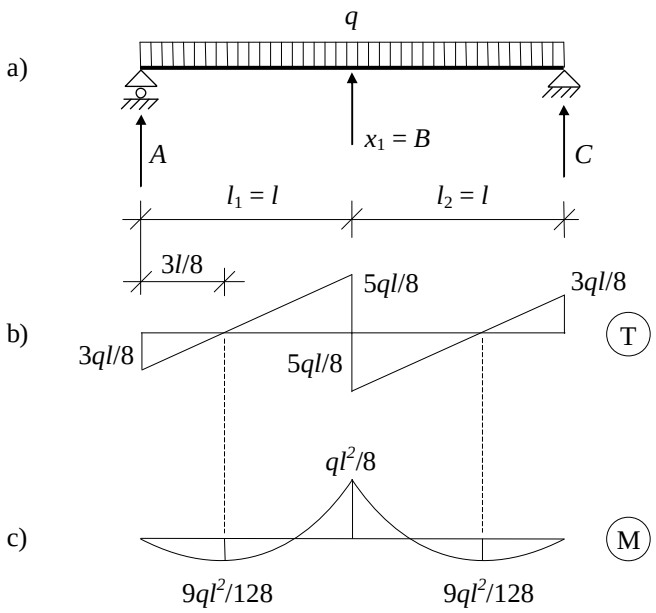
A *B* támasz eltávolításával a 2*l* támaszközű *AC* kéttámaszú törzstartóhoz jutunk (2.6/b ábra). A kényszer eltávolításával egy időben a *B* pontban a kényszer jellegének megfelelő x_1 kényszererőt működtetjük. A törzstartóhoz az a feltételi egyenlet tartozik, amely azt írja elő, hogy az eltávolított *B* támasz helyén a tartó függőleges eltolódása zérus:

$$y_B = a_0 + a_1 x_1 = 0$$

Függőleges eltolódás a *B* támasznál két forrásból származik. Az a_0 terhelési tényező a *q* egyenletesen megoszló teher okozta eltolódást jelenti (2.6/c ábra). Értékét a *q* teherből keletkező M_P nyomatékábra (2.6/d ábra) és a *B* ponton beiktatott egységnyi virtuális erő (2.6/e ábra) hatására keletkező M_Q nyomatékábra (2.6/f ábra) segítségével határozzuk meg. Mivel mindkét ábra nemlineáris, mindkét ábrát részekre kell bontani. A *B* függőleges vonalában húzott egyenes az ábrákat két részre osztja, és ekkor már csak az M_P ábrarészek nemlineárisak. A nemlineáris ábrarészek területével számolva az a_0 terhelési tényező értéke:

$$a_0 = \frac{1}{EI}\frac{ql^2}{2}\frac{2}{3}l\frac{l}{2}\frac{5}{8}2 = \frac{5}{24}\frac{ql^4}{EI} \quad [\downarrow]$$

Előre tudtuk, hogy a függőleges eltolódás a *q* teher hatására lefelé következik be, így a virtuális erőt is lefelé mutatónak vettük fel, és az a_0 értékét pozitív előjellel kaptuk meg.



2.7 ábra. Háromtámaszú tartó igénybevételi ábrái.

Az a_1 egységtényező az $x_1 = 1$ erő hatására bekövetkező függőleges eltolódás a *B* helyen (2.6/g ábra). Ennek meghatározásához szükségünk van az $x_1 = 1$ hatására keletkező nyomatékábrára (M_P) és a *B* helyen beiktatott egységnyi virtuális erő (2.6/i ábra) hatására keletkező M_Q nyomatékábrára (2.6/h és 2.6/j ábra). Most tudjuk hogy az $x_1 = 1$ hatására a *B* pont fölfelé tolódik el, így a virtuális erőt is fölfelé

mutatónak tételezzük fel. A két nyomatékábra nemlineáris és az a_0 esetében bemutatott módon az ábrákat két részre osztjuk. Segítségükkel az a_1 egységtényező értéke:

$$a_1 = \frac{1}{EI} l \frac{l}{2} \frac{1}{2} \frac{l}{2} \frac{2}{3} 2 = \frac{l^3}{6EI} \quad [\uparrow]$$

A lefelé bekövetkező a_0 és a felfelé történő a_1 függőleges elmozdulások felhasználásával a feltételi egyenletünk az

$$a_0 + a_1 x_1 = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EI} - \frac{l^3}{6EI} x_1 = 0$$

alakot ölti. Innen az

$$x_1 = \frac{5}{4} ql$$

értéket kapjuk a kényszererőre. Ezt az értéket pozitív előjellel kapjuk, ami azt jelenti, hogy a kényszererő irányát beiktatásakor (a 2.6/b ábrán) jól tételeztük fel. Az eddig ismeretlen *B* támaszerő tehát:

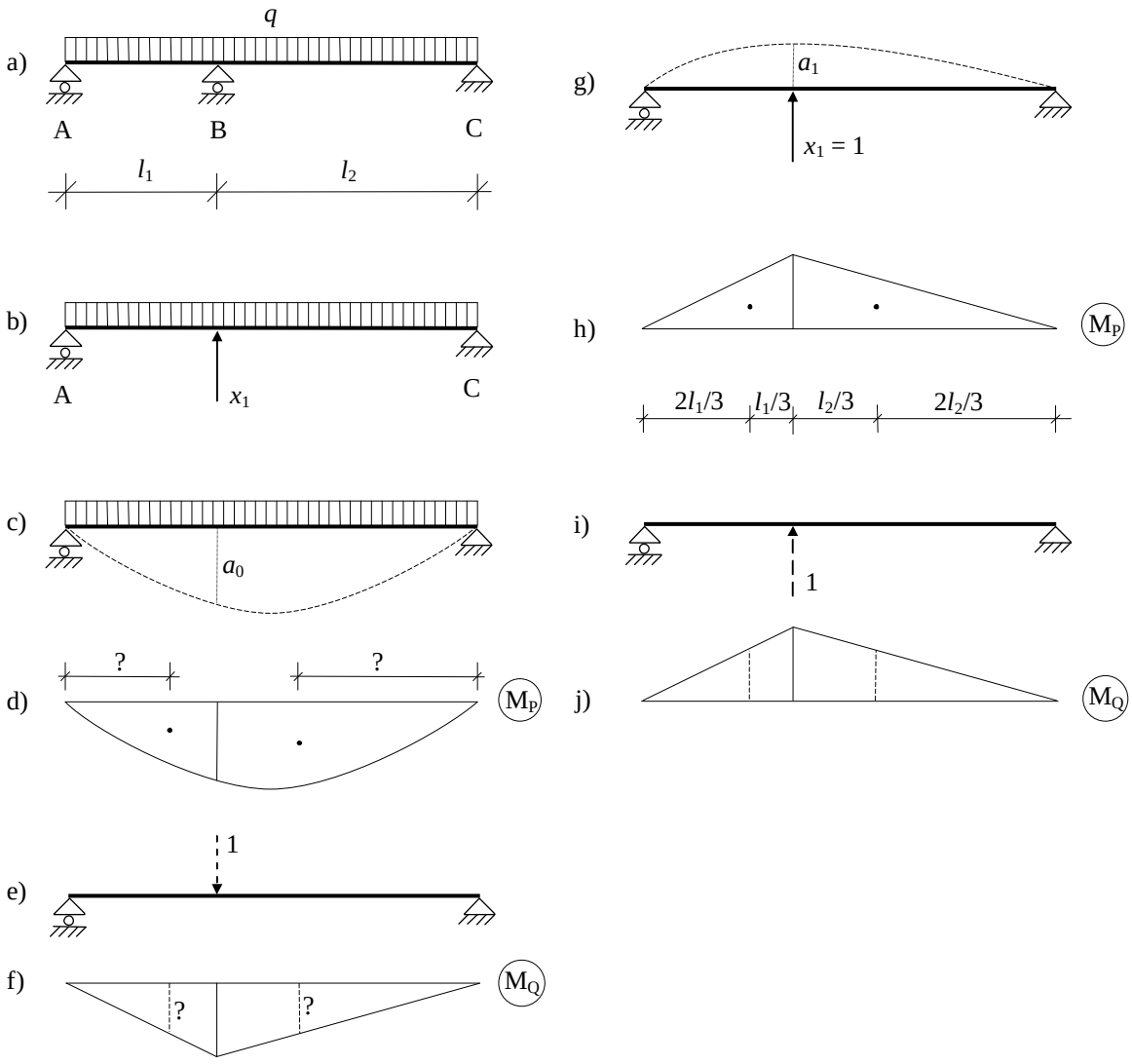
$$B = \frac{5}{4} ql \quad [\uparrow]$$

A *B* támaszerő segítségével a másik két támaszerő értéke:

$$A = C = \frac{q2l - \frac{5}{4} ql}{2} = \frac{3}{8} ql \quad [\uparrow]$$

Az *A*, *B* és *C* támaszerők ismeretében az utolsó lépés az igénybevételi ábrák előállítása a törzstartó segítségével (2.7 ábra).

Nézzük most meg, hogy hogyan alakul a számítás, ha a háromtámaszú tartó két támaszköze nem azonos, azaz, amikor $l_1 \neq l_2$ (2.8/a ábra). Az előbb bemutatott sorrendet követve először a *B* támasz eltávolításával előállítjuk a törzstartót (2.8/b ábra), majd meghatározzuk a függőleges eltolódásokat az eltávolított kényszer helyén. Az a_0 terhelési tényező meghatározása során azt látjuk, hogy a figyelembe veendő két nyomatékábra esetében (2.8/d és 2.8/f ábrák) sem az ábrarészek súlypontjának a helyét, sem pedig az ábrarészek területét nem tudjuk egyszerűen meghatározni. Ez nem azt jelenti, hogy a feladat megoldhatatlan, csak arra figyelmeztet, hogy jó lenne egyszerűbb számításokhoz vezető törzstartót választani. (A 2.8/d ábrán vázolt M_P nyomatékábra négy részre osztásával a feladat megoldható, de ennél egyszerűbb megoldást szeretnénk találni.)

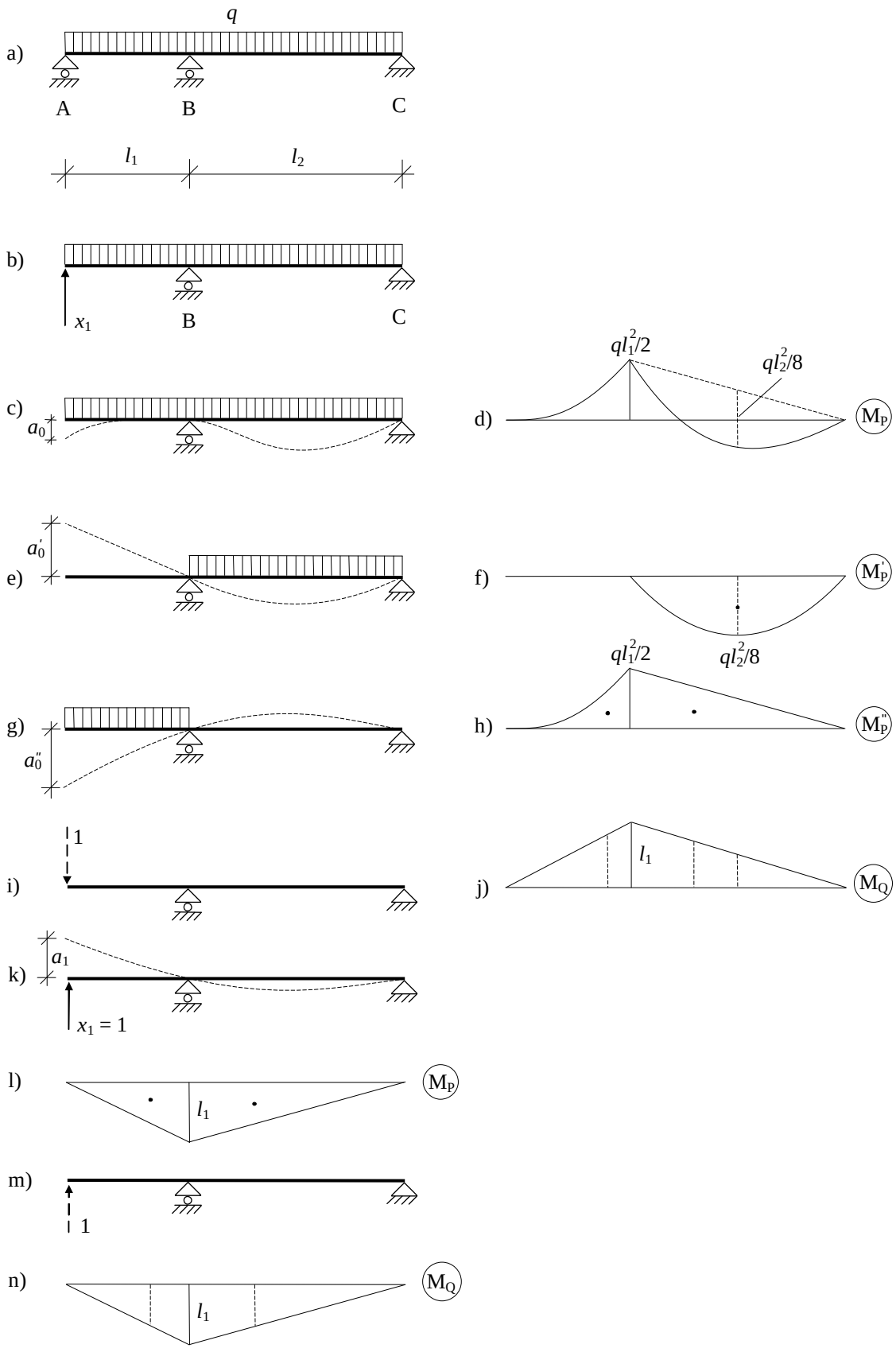


2.8 ábra. Háromtámaszú tartó különböző hosszúságú fesztávokkal.

Alakítsuk most ki a törzstartót úgy, hogy az *A* támaszt távolítjuk el (2.9/b ábra). Ekkor egy kéttámaszú konzolos tartóhoz jutunk. A hozzá tartozó feltételi egyenlet azt írja elő, hogy az eltávolított *A* támasz helyén a tartó függőleges eltolódása zérus:

$$y_A = a_0 + a_1 x_1 = 0$$

Az a_0 terhelési tényező az *A* pont *q* teher hatására bekövetkező függőleges eltolódása (2.9/c ábra). Ennek meghatározásához szükségünk van a *q* teher hatására keletkező nyomatékábrára (2.9/d ábra) és az *A* pontban beiktatott virtuális egységerő (2.9/i ábra) által okozott nyomatékábrára (2.9/j ábra). Mindkét ábra nemlineáris, ezért az ábrákat a *B* támasz függőlegese mentén részekre osztjuk. A 2.9/j ábra ekkor már két lineáris szakaszból áll, míg a (2.9/d ábra) két része nemlineáris. Ezeknek az ábrarészeknek a területét nehézkes meghatározni, ezért a szuperpozíció elvét alkalmazva a *q* terhet két szakaszra bontjuk: az *AB* és a *BC* szakaszokra (2.9/e,g ábra).



2.9 ábra. Háromtámaszú tartó. II. megoldás.

Az ezekhez tartozó nyomatékábrák (2.9/f,h ábra) már könnyen kezelhetők. Segítségükkel a terhelési tényező:

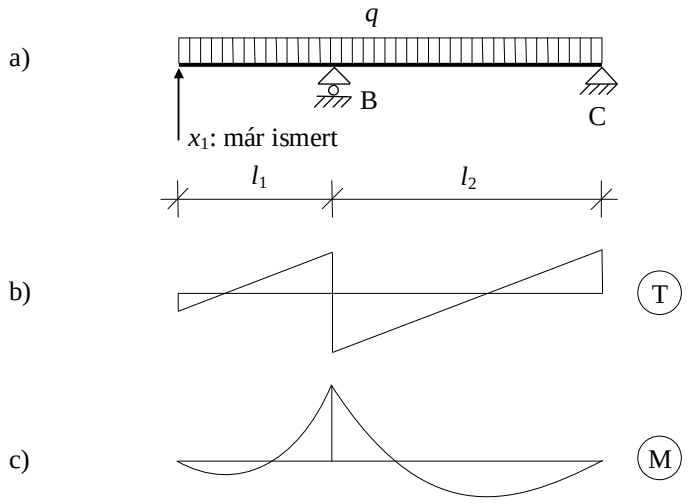
$$a_0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{ql_1^2}{2}\frac{l_1}{3}\frac{l_1 3}{4} + \frac{ql_1^2}{2}\frac{l_2}{2}\frac{l_1 2}{3} - \frac{ql_2^2}{8}\frac{l_2 2}{3}\frac{l_1}{2}\right) = \frac{ql_1}{EI}\left(\frac{l_1^3}{8} + \frac{l_1^2 l_2}{6} - \frac{l_2^3}{24}\right) \quad [\downarrow]$$

ahol feltételeztük, hogy az *A* pont a *q* teher hatására lefelé tolódik el.

Az a_1 egységtényezőt úgy kapjuk meg, hogy kombináljuk az *A* pontban működő $x_1 = 1$ erő (2.9/k ábra) hatására keletkező nyomatékábrát (2.9/l ábra) az ugyanott működő egységnyi virtuális erő (2.9/m ábra) hatására keletkező nyomatékábrával (2.9/n ábra). Mindkét ábra nemlineáris és ezért ismét – a *B* pont függőlegese mentén – két szakaszra osztjuk őket. Segítségükkel

$$a_1 = \frac{1}{EI}\left(l_1\frac{l_1}{2}\frac{l_1 2}{3} + \frac{l_1 l_2}{2}\frac{l_1 2}{3}\right) = \frac{l_1^2}{3EI}\left(l_1 + l_2\right) \quad [\uparrow]$$

A terhelési és egységtényező birtokában a feltételi egyenletből az ismeretlen kényszererő (az *A* támaszerő) már meghatározható. Segítségével a határozott törzstartón (2.10/a ábra) már csak ismert terhek vannak, így az igénybevételi ábrák (2.10/b és 2.10/c ábra) előállíthatók.



2.10 ábra. Háromtámaszú tartó. II. megoldás: igénybevételi ábrák.

Az *A* támasz eltávolításával kapott törzstartó jóval egyszerűbb megoldást tett lehetővé, mint amikor a *B* támaszt távolítottuk el, de a különbség akkor szembetűnő igazán, amikor a két támaszköz azonos hosszúságú, azaz amikor $l_1 = l_2 = l$ (2.11 ábra).

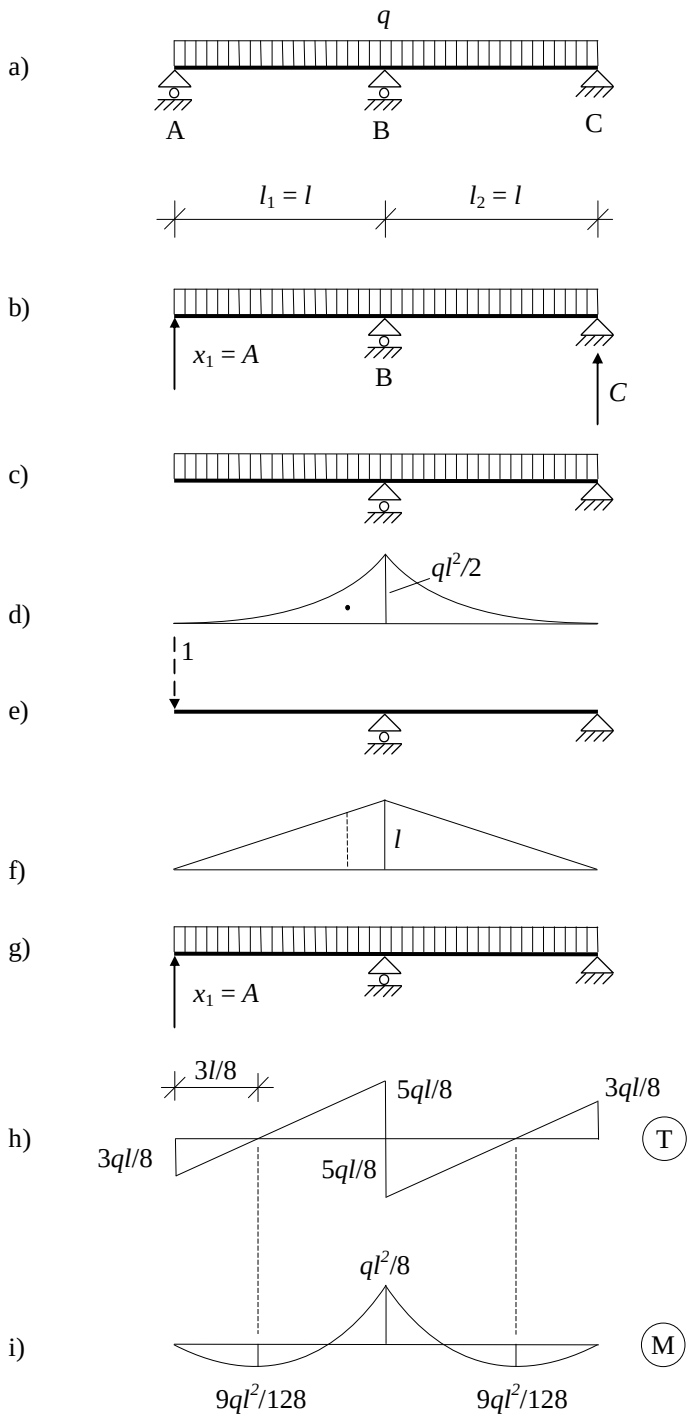
Az egyensúlyi egyenletekből ekkor azonnal adódik, hogy a *q* megoszló teher hatására a támaszerők: $B = 2ql$ és $C = 0$. Az *A* támasz eltávolítása után a tartón működő erőrendszer szimmetrikus, így a nyomatékábra is szimmetrikus.

Az előbb bemutatott lépéseket követve, az a_0 terhelési tényező értéke:

$$a_0 = \frac{1}{EI}\frac{ql^2}{2}\frac{l}{3}\frac{3l}{4}2 = \frac{ql^4}{4EI} \quad [\downarrow]$$

Az egységtényező:

$$a_1 = \frac{1}{EI}\frac{l^2}{2}\frac{2l}{3}2 = \frac{2l^3}{3EI} \quad [\uparrow]$$



2.11 ábra. Háromtámaszú tartó igénybevételi ábrái.

A feltételi egyenlet:

$$\frac{ql^4}{4EI} - \frac{2l^3}{3EI} x_1 = 0$$

ahonnan a fölös kényszer értéke

$$x_1 = \frac{3}{8} ql \quad [\uparrow]$$

A megoldáshoz szükséges nyomatékábrákat és az igénybevételi ábrákat a 2.11 ábra tartalmazza. Az igénybevételi ábrák természetesen azonosak a már korábban – másik törzstartóval – kapott eredményekkel (2.7 ábra).

2.5 Néhány alkalmazás

A következőkben az erőmódszer alkalmazására mutatunk be néhány jellegzetes példát.

2.5.1 Zárt keret

A 2.12/a ábrán vázolt zárt keret külsőleg statikailag határozott, így reakcióerői a rendelkezésre álló három egyensúlyi egyenlet segítségével kiszámíthatók.

A zárt keret igénybevételi ábráit viszont már a három egyensúlyi egyenletből nem tudjuk meghatározni. Ennek az az oka, hogy a szerkezet belsőleg statikailag határozatlan. Az ismeretlenek itt az *N*, *T* és *M* belső erők. A belső határozatlanság foka három.

Az erőmódszer elvei alapján eljárva először a szerkezet törzstartóját kell előállítani. Könnyen kezelhető törzstartóhoz jutunk, ha a keret határozatlanságát a felső *CD* rúd *E* középpontjának átvágásával szüntetjük meg (2.12/b ábra). Így egy határozott, törttengelyű tartót kapunk, amelyre a megszüntetett belső kényszereknek megfelelő x_1, x_2 és x_3 belső erőket is működtetni kell (2.12/c ábra). A törzstartóhoz tartozó három feltételi egyenlet a megszüntetett folytonosság helyreállítását hivatott biztosítani. Az egyenletek azt fejezik ki, hogy az átvágás révén keletkezett rúdvégek elfordulásainak, valamint vízszintes és függőleges eltolódásainak különbsége (a relatív elmozdulások értéke) zérus:

$$\upsilon_E = 0$$

$$u_{xE} = 0$$

$$u_{yE} = 0$$

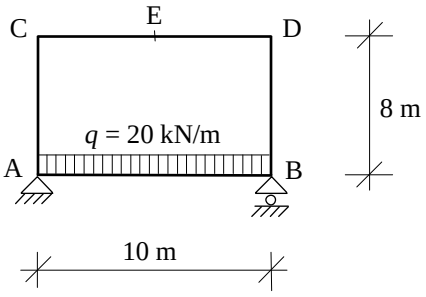
A feltételi egyenletek a terhelési és egységtényezők felhasználásával a következő alakot öltik:

$$a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

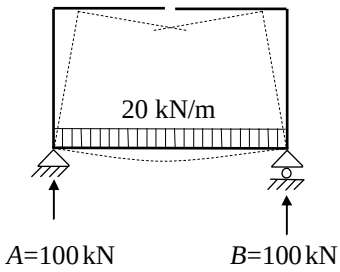
$$a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

$$a_{30} + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

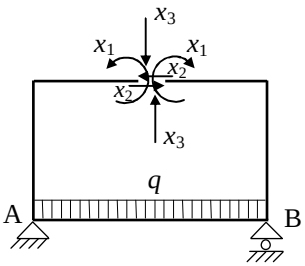
a)



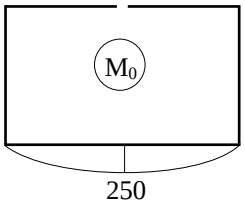
b)



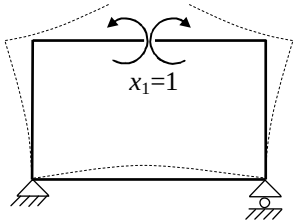
c)



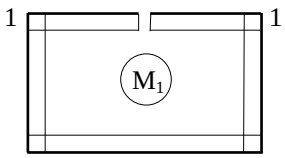
d)



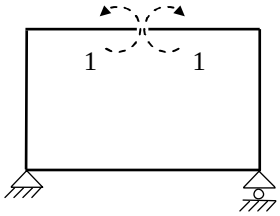
e)



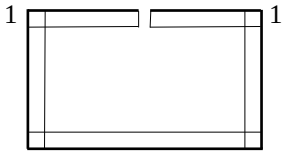
f)



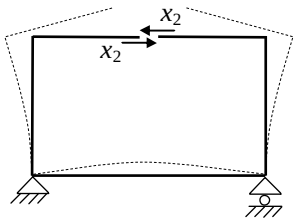
g)



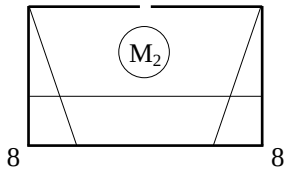
h)



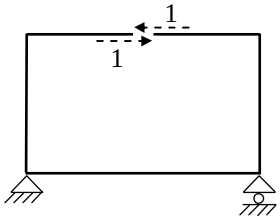
i)



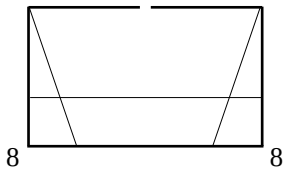
j)



k)



l)



2.12 ábra. Zárt keret.

A q intenzitású egyenletesen megoszló erővel terhelt törzstartó alakváltozása (2.12/b ábra) azt mutatja, hogy – a szimmetria következtében – az x_3 kényszererő-kettős működtetésére nincs szükség, hiszen az átvágásnál a rúdvégek függőleges eltolódásának különbsége eleve zérus, vagyis $x_3 = 0$.

A feltételi egyenletrendszer így egyszerűbb formában írható:

$$a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$$

$$a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0$$

Határozzuk meg először a terhelési tényezőket.

Az a_{10} terhelési tényező a $q = 20$ kN/m megoszló teherből az E pontnál keletkező elfordulás-különbség. Értékét a 2.12/d és 2.12/h nyomatékábrák segítségével számíthatjuk ki:

$$a_{10} = -\frac{1}{EI}\frac{250 \cdot 10 \cdot 2}{3}1 = -\frac{5000}{3EI}$$

Az a_{20} a terhelési tényező a $q = 20$ kN/m megoszló teherből az E pontnál keletkező vízszintes eltolódás-különbség. Értékét a 2.12/d és 2.12/l nyomatékábrák segítségével számíthatjuk ki:

$$a_{20} = -\frac{1}{EI}\frac{250 \cdot 10 \cdot 2}{3}8 = -\frac{40000}{3EI}$$

Határozzuk most meg az egységtényezőket.

Az a_{11} egységtényező az $x_1 = \pm 1$ nagyságú nyomaték-kettős által az átvágás helyén okozott elfordulás-különbség (2.12/e ábra). Értékét a 2.12/f és 2.12/h nyomatékábrák segítségével számítjuk ki:

$$a_{11} = \frac{1}{EI}(1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2) = \frac{36}{EI}$$

Az a_{12} egységtényező az $x_2 = \pm 1$ nagyságú erő-kettős által az átvágás helyén okozott elfordulás-különbség. Értékét a 2.12/j és 2.12/h nyomatékábrák segítségével számítjuk ki:

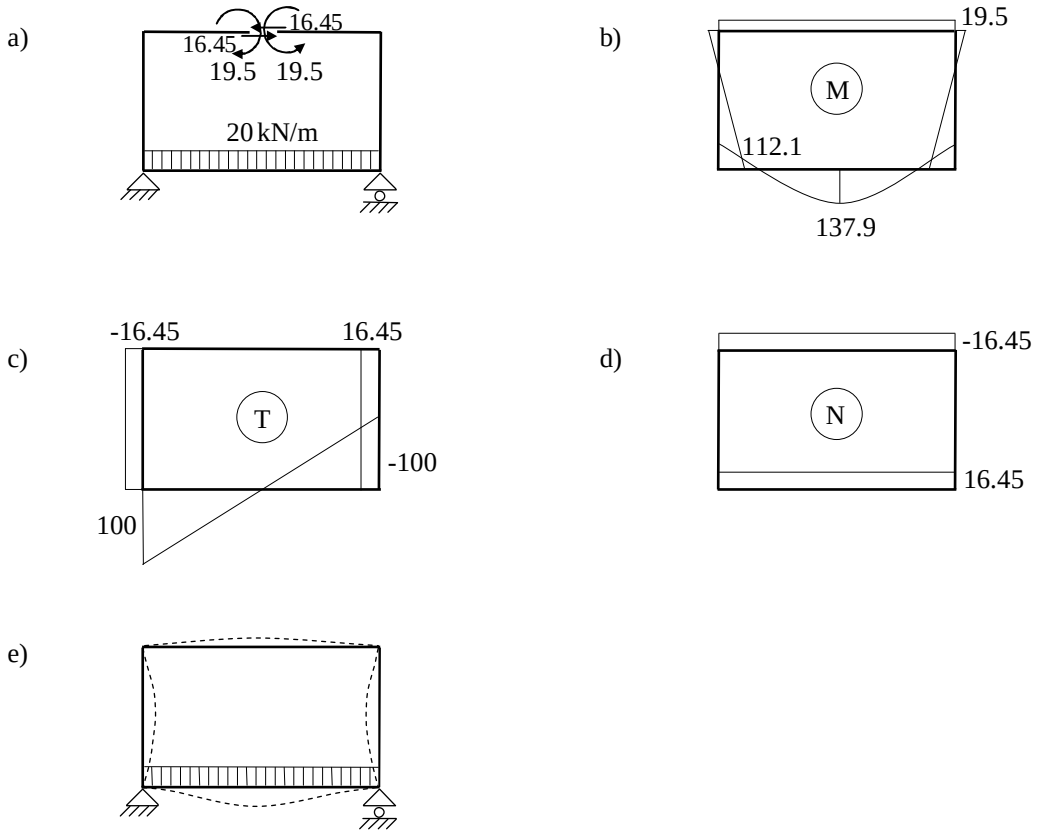
$$a_{12} = \frac{1}{EI}\left(\frac{8 \cdot 8}{2} \cdot 1 \cdot 2 + 8 \cdot 10 \cdot 1\right) = \frac{144}{EI}$$

Az a_{21} egységtényező az $x_1 = \pm 1$ nagyságú nyomaték-kettős által az átvágás helyén okozott vízszintes eltolódás-különbség. Értékét a 2.12/f és 2.12/l nyomatékábrák segítségével számítjuk ki:

$$a_{21} = \frac{1}{EI}\left(\frac{8 \cdot 8}{2} \cdot 1 \cdot 2 + 8 \cdot 10 \cdot 1\right) = \frac{144}{EI}$$

Az a_{22} egységtényező az $x_2 = \pm 1$ nagyságú erő-kettős által az átvágás helyén okozott vízszintes eltolódás-különbség. Értékét a 2.12/j és 2.12/l nyomatékábrák segítségével számítjuk ki:

$$a_{22} = \frac{1}{EI}\left(\frac{8\cdot 8}{2}\cdot\frac{8\cdot 2}{3}\cdot 2 + 8\cdot 10\cdot 8\right) = \frac{2944}{3EI}$$



2.13 ábra. Zárt keret II.

A terhelési- és egységtényezők értékeit a feltételi egyenletrendszerbe behelyettesítve a következő kétismeretlenes egyenletrendszert kapjuk:

$$-\frac{5000}{3EI} + \frac{36}{EI}x_1 + \frac{144}{EI}x_2 = 0$$

$$-\frac{40000}{3EI} + \frac{144}{EI}x_1 + \frac{2944}{3EI}x_2 = 0$$

A fenti egyenletrendszer megoldása szolgáltatja az ismeretlen kényszererők értékét, pontosabban azokat a szorzótényezőket, amelyek megmutatják, hogy az eredetileg beiktatott egységnyi kényszererők hányszorosát kell a folytonosság biztosításához működtetni:

$$x_1 = -19.50$$
$$x_2 = \ 16.45$$

Az x_1 negatív előjele azt jelzi, hogy a nyomaték-kettős előjelét rosszul tételeztük fel és az ellenkezőjére kell változtatni. A fenti eredmény azt jelenti, hogy az eredeti belsőleg háromszorosan határozatlan zárt keret egy olyan statikailag határozott tartóval helyettesíthető, amelyet az adott q = 20 kN/m egyenletesen megoszló terhelésen kívül az E pontban még egy x_1 = 19.50 kNm nyomaték-kettős [↻↺] és egy x_2 = 16.45 kN erőkettős [← →] is terhel (2.13/a ábra). Az erre a tartóra megszerkesztett igénybevételi ábrák megegyeznek az eredeti tartó (2.12/a ábra) igénybevételi ábráival. Az igénybevételi ábrákat a 2.13/b, 2.13/c és 2.13/d ábrákon adjuk meg. A tartó alakváltozási görbéjét a 2.13/e ábra mutatja.

2.5.2 Cső

A mélyépítési gyakorlatban alkalmazott csőszelvények a zárt keretekhez hasonlóan belsőleg határozatlan szerkezetek. A csőszelvények sokszor olyan speciális terhelést kapnak, hogy a szerkezetek mind a terhek, mind pedig a geometriai jellemzők szempontjából kétszeresen szimmetrikusak. A kétszeres szimmetriával járó előnyök felhasználásával igen egyszerű megoldás állítható elő.

A 2.14/a ábrán feltüntetett r sugarú kör alakú zárt ívtartót két, egyensúlyban lévő F koncentrált erő terheli. Határozzuk meg a szerkezet igénybevételi ábráit.

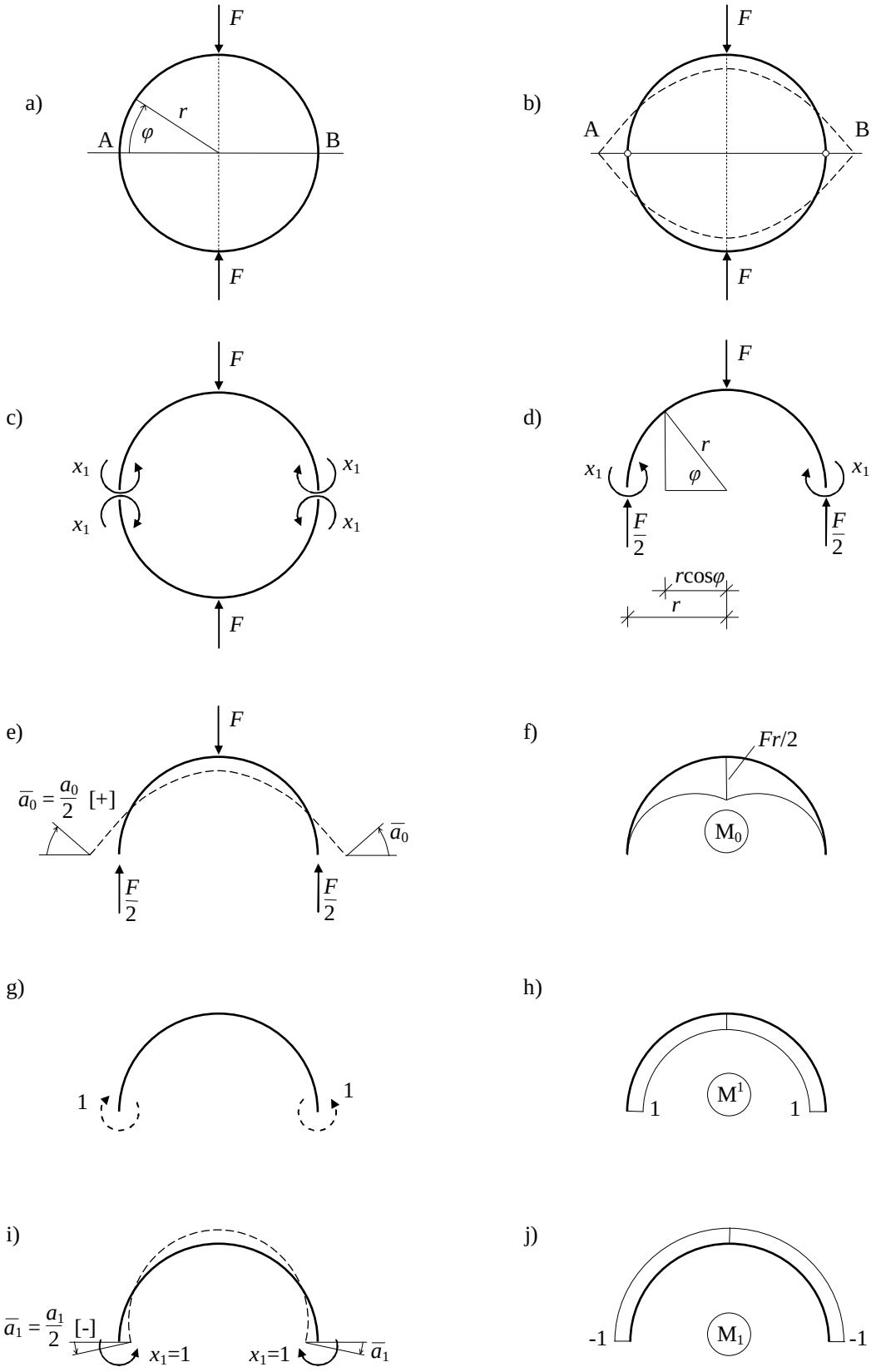
Könnyen kezelhető törzstartóhoz jutunk, ha – a kétszeres szimmetria fenntartásának igényét is figyelembe véve – az elfordulást gátló kényszert az A és B pontokban megszüntetjük (2.14/b ábra). Így egy olyan – két csuklóval összekapcsolt félkör alakú tartóból álló – törzstartót kapunk, amely a speciális terhelés következtében határozott tartóként működik. Az a feltétel, hogy az A és B pontokban a rúdvégek vízszintes és függőleges eltolódása azonos, a speciális terhelés és geometria miatt automatikusan – kényszererők fellépte nélkül – teljesül. Az A és B pontokban létrejövő elfordulások meggátlására az x_1 nyomaték-kettőst működtetjük a csatlakozó rúdvégekre (2.14/c ábra). A fentiek szerint egy feltételi egyenletre van szükségünk, amely azt fejezi ki, hogy a rúdvégek elfordulás-különbsége az A és B pontban az eredeti teher és az x_1 nyomaték-kettős hatására zérus:

$$a_0 + a_1 x_1 = 0$$

A kétszeres szimmetria miatt elegendő a szerkezet felét vizsgálni, így csak az AB felső félkör alakú határozott ívtartóval foglalkozunk (2.14/d ábra).

Az a_0 terhelési tényező a törzstartó elfordulása az A illetve a B pontban (2.14/e ábra). Meghatározásához szükségünk van az F erő okozta nyomatékok értékére (2.14/f ábra):

$$M_0(\varphi) = \frac{F}{2}(r - r\cos\varphi) = \frac{Fr}{2}(1 - \cos\varphi)$$



2.14 ábra. Koncentrált erőkkel terhelt cső I.

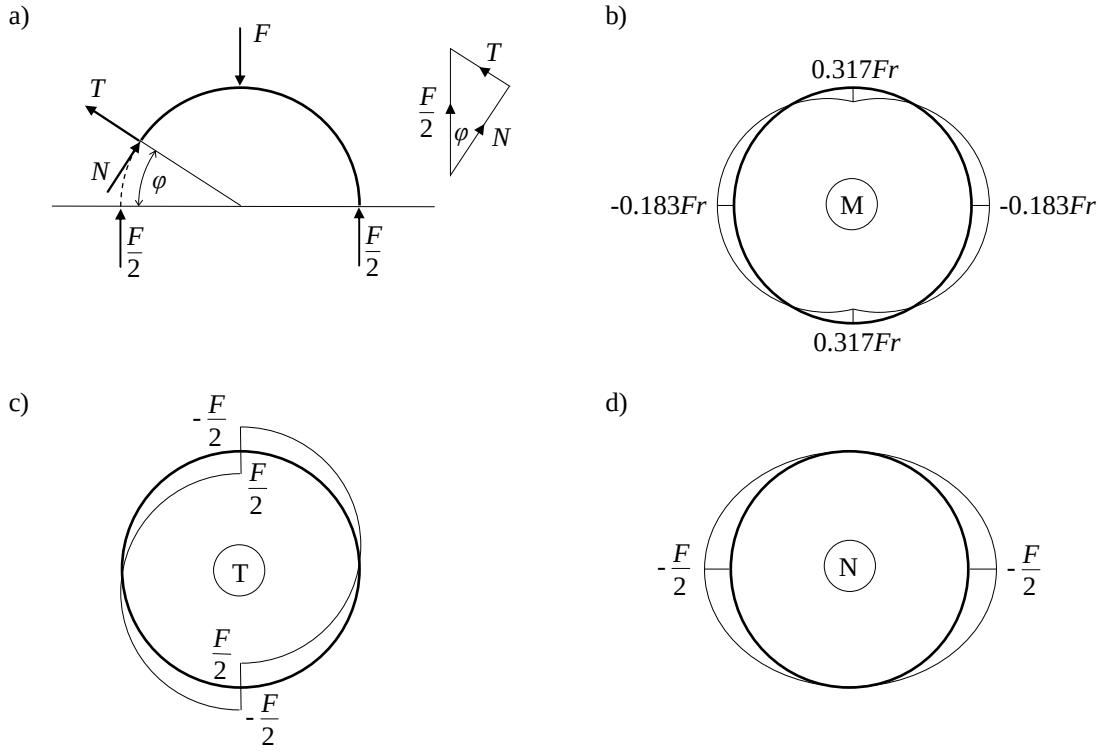
Az *A* és *B* pontban beiktatott képzelt, egységnyi nyomatékok (2.14/g ábra) hatására keletkező nyomatékábrát a 2.14/h ábra tartalmazza. A 2.14/f és 2.14/h nyomatékábrák segítségével az a_0 terhelési tényező most már meghatározható:

$$\frac{a_0}{2} = \overline{a}_0 = \frac{2}{EI}\int_0^{s=\frac{r\pi}{2}} M_0 M^1 ds = \frac{2}{EI}\int_0^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \frac{Fr}{2}(1-\cos\varphi) r d\varphi =$$

$$= \frac{Fr^2}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos\varphi) d\varphi = \frac{Fr^2}{EI}\left[\varphi - \sin\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{Fr^2}{EI}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

A fenti képletekben felhasználtuk a $ds = rd\varphi$ összefüggést is, amely lehetővé teszi az áttérést az ívhossz szerinti integrálásról a középponti szög szerinti integrálásra.

Itt jegyezzük meg, hogy a rúdvégek külső oldalán (a körön kívül) mért elfordulást tekintjük pozitívnak: a 2.14/e ábrán feltüntetett a_0 így pozitív. – Az előjelek megállapítása során támaszkodni érdemes a vonatkozó M-ábrák – jelen esetben a 2.14/f és 2.14/h ábrák – előjeleire.



2.15 ábra. Koncentrált erőkkel terhelt cső. Igénybevételi ábrák.

Az a_1 egységtényező *A* és *B* pontban beiktatott $x_1 = \pm 1$ nyomaték-kettős hatására keletkező elfordulás-különbség (2.14/i ábra). Értékének meghatározásához szükség van az M_1 nyomatékábrára (2.14/j ábra) és az *A* és *B* pontokban beiktatott képzelt, egységnyi nyomatékok hatására keletkező nyomatékábrára (2.14/h ábra). A nyomatékábrák felhasználásával az a_1 egységtényező értékét a következő összefüggés szolgáltatja:

$$\frac{a_1}{2} = \bar{a}_1 = -\frac{2}{EI}\int_0^{s=\frac{r\pi}{2}} M_1 M^1 ds = -\frac{2}{EI}\int_0^{\varphi=\frac{\pi}{2}} 1\cdot 1\cdot r d\varphi = -\frac{r\pi}{EI}$$

Az

$$\frac{Fr^2}{EI}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\frac{r\pi}{EI}x_1 = 0$$

feltételi egyenlet megoldása szolgáltatja az ismeretlen kényszererőt:

$$x_1 = Fr\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)$$

A tartó nyomatékábráját (2.15/b ábra) az

$$M = M_0 + M_1 x_1$$

összefüggés segítségével állíthatjuk elő (2.14/f és 2.14/j ábra):

$$M(\varphi) = \frac{Fr}{2}(1-\cos\varphi) - Fr\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right) = Fr\left(\frac{1}{\pi}-\frac{\cos\varphi}{2}\right)$$

A nyíróerő függvényét a nyomatékfüggvény egyszeri differenciálásával kapjuk meg (2.15/c ábra):

$$T(\varphi) = \frac{dM}{ds} = \frac{1}{r}\frac{dM}{d\varphi} = \frac{F}{2}\sin\varphi$$

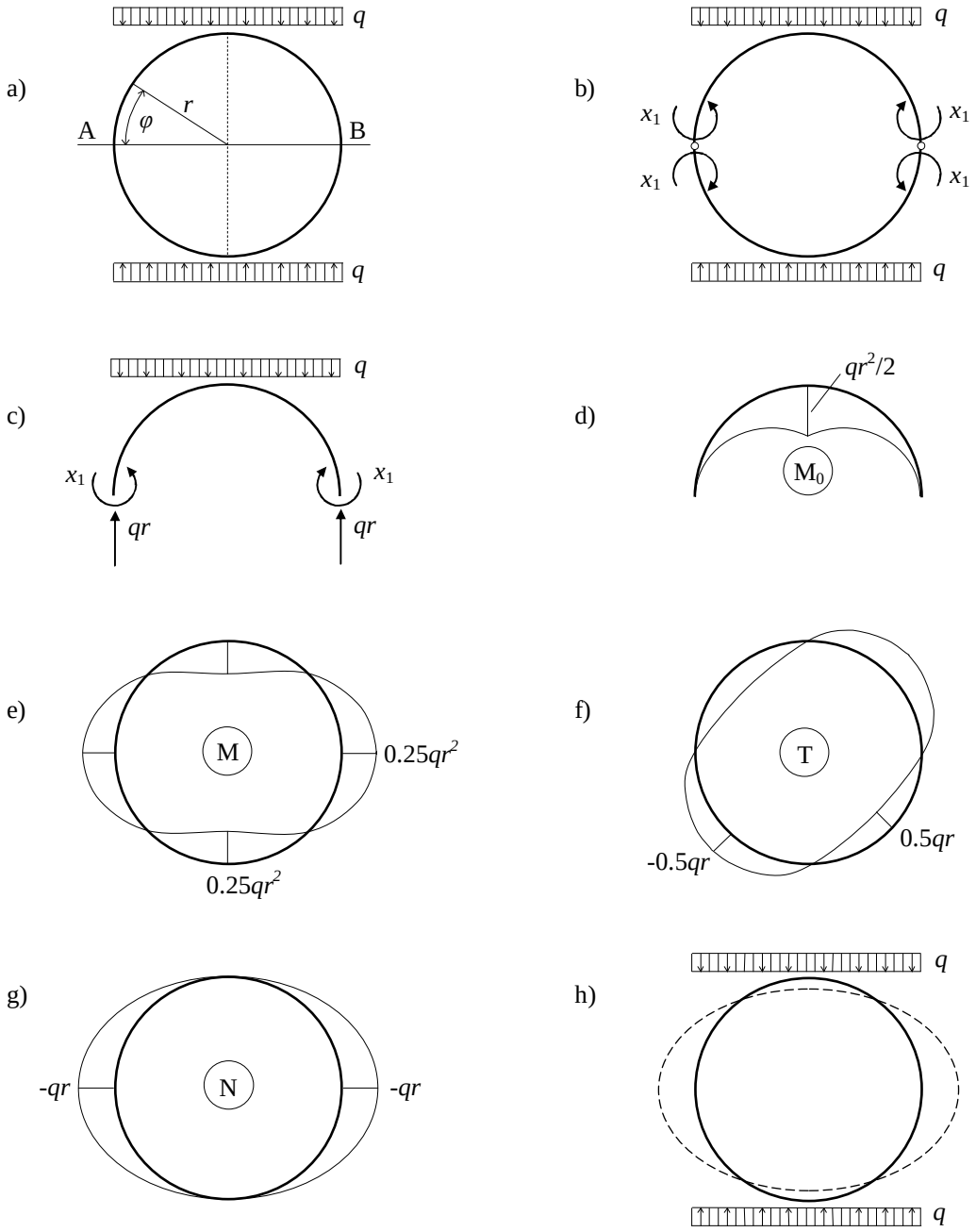
A normálerő-függvényt (2.15/d ábra) egyszerű vetületi összefüggés (2.15/a ábra) segítségével határozhatjuk meg:

$$N(\varphi) = -\frac{F}{2}\cos\varphi$$

A 2.15/a ábrán vázolt vektorháromszög természetesen ugyanazt az összefüggést szolgáltatja a nyíróerő-függvényre, mint amelyet a nyomatékfüggvény egyszeri differenciálása útján kaptunk.

A 2.16/a ábrán feltüntetett kör alakú, zárt ívtartó az előző példában szereplőtől csak abban különbözik, hogy ez utóbbit az átmérő teljes hossza mentén működő, egyensúlyban lévő rendszert alkotó, egyenletesen megoszló erők terhelik. A megoldás menete így azonos az előző feladatnál részletesen bemutatottal.

A kétszeresen szimmetrikus törzstartóra – az ismert q egyenletesen megoszló terhen kívül – most is a két nyomatékkettős (x_1) működik (2.16/b ábra). A feltételi egyenlet – és az egyenlet fizikai tartalma – szintén változatlan.



2.16 ábra. Megoszló teherrel terhelt cső.

Tekintsük ismét az *AB* félkör alakú ívtartót (2.16/c ábra). A *q* egyenletesen megoszló teher által okozott nyomatékot az

$$M_0(\varphi) = qr(r - r\cos\varphi) - q\frac{(r - r\cos\varphi)^2}{2}$$

függvény jellemzi (2.16/d ábra), amely némi átalakítás után az

$$M_0(\varphi) = \frac{qr^2}{2}\sin^2\varphi$$

alakot ölti.

Az a_0 terhelési tényező – elfordulás-különbség az *A* és *B* pontokban – értékét az

$$\frac{a_0}{2} = \bar{a}_0 = \frac{1}{EI} 2 \int_0^{s=\frac{r\pi}{2}} M_0 M_1 ds = \frac{2r}{EI} \int_0^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \frac{qr^2}{2}\sin^2\varphi d\varphi = \frac{q\pi r^3}{4EI}$$

összefüggés adja meg, ahol ismét felhasználtuk az M_1 nyomatékábrát az előző feladatból (2.14/j ábra).

Az a_1 egységtényező értéke azonos az előző példában már kiszámított értékkel:

$$\frac{a_1}{2} = \bar{a}_1 = -\frac{r\pi}{EI}$$

A

$$\frac{q\pi r^3}{4EI} - \frac{r\pi}{EI} x_1 = 0$$

feltételi egyenlet az

$$x_1 = \frac{qr^2}{4}$$

értéket szolgáltatja az ismeretlen kényszererő értékére.

A tartó nyomatékábráját az

$$M = M_0 + M_1 x_1$$

összefüggés, valamint a 2.14/j és 2.16/d ábrák segítségével határozhatjuk meg (2.16/e ábra):

$$M(\varphi) = \frac{qr^2}{2}(\sin^2\varphi - \frac{1}{2})$$

A nyíróerő függvényét ismét a nyomatékfüggvény egyszeri differenciálásával kapjuk meg:

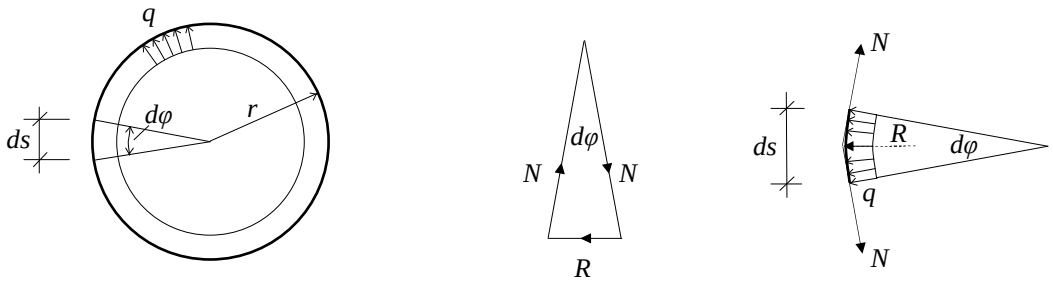
$$T(\varphi) = qr\sin\varphi\cos\varphi$$

A normálerő-függvényt vetületi összefüggés szolgáltatja:

$$N(\varphi) = -qr\cos^2\varphi$$

A nyíróerő-ábrát és a normálerő-ábrát a 2.16/f és az 2.16/g ábrákon adjuk meg. A tartó alakváltozását a 2.16/h ábra szemlélteti.

Végül a zárt, körgyűrű alakú tartók csoportjában megvizsgáljuk a terhelésnek egy speciális, a gyakorlatban mégis sokszor előforduló esetét. Ha a zárt körgyűrűre sugárirányú, a kör középpontja felé, vagy attól kifelé irányuló egyenletesen megoszló terhelés működik, akkor ezt a terhet külső-, vagy belső túlnyomásnak nevezzük. Tegyük vizsgálat tárgyává a *q* belső túlnyomással terhelt *r* sugarú körgyűrű esetét (2.17/a ábra). Az ennek hatására létrejövő igénybevételek csak előjelben különböznek a külső túlnyomással terhelt körgyűrű igénybevételeitől.



a) b)

2.17 ábra. Belső túlnyomással terhelt cső.

Képzeletben vágjunk ki a körgyűrűből egy *ds* ívhosszúságú elemi szakaszt, melyhez *dφ* nagyságú középponti szög tartozik. Az ívelemet a rá ható erőkkel a 2.17/b ábrán kinagyítva is ábrázoltuk. Az ívelemre a *ds* hosszúságon működő *q* megoszló erők *R* eredője, valamint az elem végpontjaiban, érintő irányú *N* normálerők működnek. Az egyensúly e három erő létezése esetén biztosított, így nyíróerő és hajlítónyomaték a keresztmetszeteken nem keletkezik, tehát a különleges terhelés miatt a feladat statikai szempontból határozott.

A *ds* szakaszon működő *q* megoszló erők eredője

$$R = qds$$

Mivel a *ds* távolság és a hozzá tartozó *dφ* szög igen kicsiny, érvényesnek tekinthető a

$$ds = rd\varphi$$

összefüggés. Az eredő fenti képlete így az

$$R = qrd\varphi$$

alakot ölti. A három erő egyensúlya alapján szerkesztett vektorháromszögben a két normálerő közötti szög is *dφ*, mert a normálerők az ívelem végpontjaihoz szerkesztett sugarakra merőlegesek. Ennek alapján az eredő és a normálerők között a következő összefüggés áll fenn:

$$R = Nd\varphi$$

Az eredőre kapott két egyenlet jobb oldala egyenlő:

$$Nd\varphi = qrd\varphi$$

Mindkét oldalt integrálva innen az

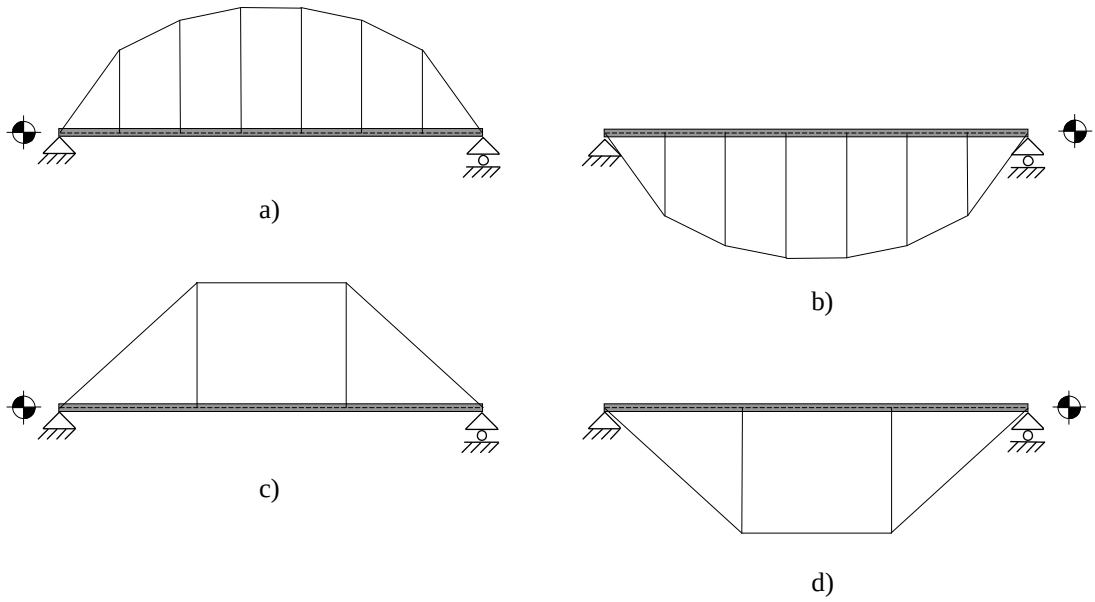
$$N = qr \tag{2.5}$$

egyszerű összefüggéshez jutunk, melyet a szakmai gyakorlatban „kazánképletnek” is neveznek, mert a gőzkazánok méretezése során is ezt használják. A gyűrűben keletkező normálerő belső túlnyomás esetén húzóerő, míg külső túlnyomás esetén nyomóerő.

2.5.3 Tömör merevítőgerendás tartó

A merevítőgerendás ívtartó egy olyan kéttámaszú tartó, amelyet a gerenda fölött vagy a gerenda alatt labilis rúdlánc erősít meg (2.18/a és 2.18/b ábrák). Az ilyen tartókat „alsópályás” esetben függesztőműveknek (2.18/a,c ábrák), „felsőpályás” esetben pedig feszítőműveknek (2.18/b,d ábrák) nevezzük. A labilis rúdlánc gyakran csak egy vagy két függőleges oszlopot tartalmaz.

A merevítőgerendás ívtartók közös tulajdonsága, hogy külsőleg határozottak, belsőleg pedig egyszeresen határozatlanok. A törzstartó felvétele minden esetben úgy történik, hogy a rúdláncot átvágjuk. A számítás akkor végezhető el a legegyszerűbben, ha ez az átvágás a rúdlánchoz képest szimmetrikusan történik.



2.18 ábra. Tömör merevítőgerendás tartók.

A számítás menetét a 2.19/a ábrán feltüntetett kéttámaszú, önmagába horgonyzott feszítőmű esetében mutatjuk be. Az alábbiakban megadott egyenletek általános érvényűek, így a több oszlopos rúdlánccal rendelkező merevítőgerendás ívtartóknál is értelemszerűen alkalmazhatók. A gerenda tehetetlenségi nyomatéka (I), valamint a rúdlánc rúdjainak keresztmetszete (A) állandó. A szerkezet rugalmassági tényezője E. A

gerendát q egyenletesen megoszló teher terheli. A törzstartót a c–d rúd átvágásával állítjuk elő. A rúd folytonosságát egy egyelőre ismeretlen nagyságú x_1 erőkettőssel pótoljuk (2.19/b ábra).

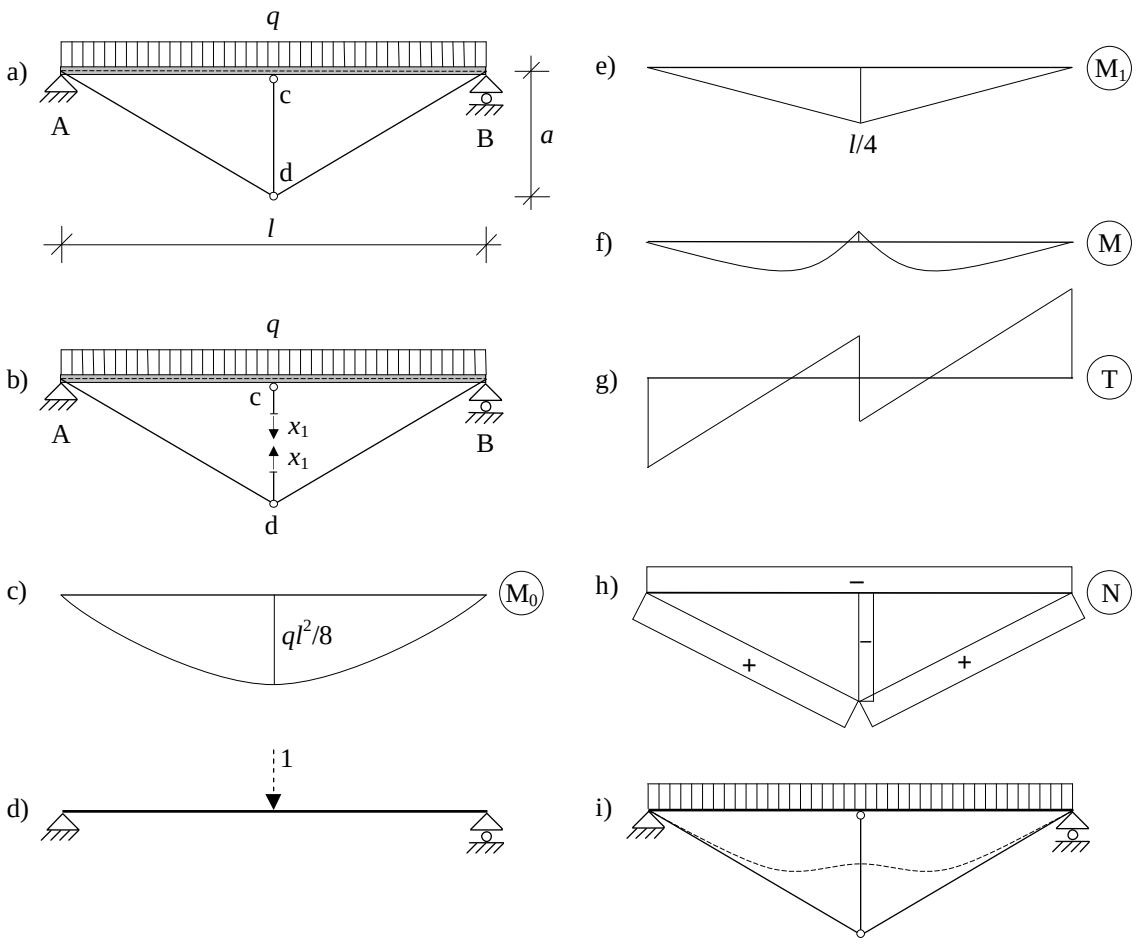
A tartó nyomatékábráját az

$$M = M_0 + M_1 x_1$$

összefüggés segítségével határozhatjuk meg, ahol az x_1 az

$$a_0 + a_1 x_1 = 0$$

feltételi egyenlet megoldása. Az M_0 a külső teherből, az M_1 pedig az átvágási keresztmetszetben beiktatott egységnyi erőkettős hatására keletkező nyomatékábra. A feltételi egyenlet azt fejezi ki, hogy az átvágás helyén a külső teherből és az egységnyi erőkettősből keletkező eltolódás-különbség zérus.



2.19 ábra. Feszítőmű.

Az a_0 terhelési tényező az átvágás helyén a q intenzitású egyenletesen megoszló teher által okozott eltolódás-különbség. Értékét az

$$a_0 = \frac{1}{EI}\int_A^B M_0 M_1 ds$$

összefüggés adja meg, ahol M_0 a q teher hatására keletkező nyomatékábra (2.19/c ábra), M_1 pedig a törzstartó c pontjában beiktatott (2.19/d ábra) egységnyi, képzelt erő által okozott nyomatékábra (2.19/e ábra). Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az átvágás miatt a rudakban rúderők nem ébrednek.

Az a_1 egységtényező az átvágás helyén az $x_1 = \pm 1$ kN nagyságú erőkettős hatására keletkező eltolódás-különbség. Értéke két részből tevődik össze:

$$a_1 = \frac{1}{EI}\int_A^B M_1^2 ds + \frac{1}{EA}\sum_{i=1}^{n} S_i^2 s_i$$

A képlet első tagja a gerenda alakváltozását, a második tag pedig a rudak hosszváltozását fejezi ki. A második tagban n a rudak száma (esetünkben három), S_i az $x_1 = 1$ kN hatására keletkező rúderők értéke és s_i a rudak hossza.

Az a_0 terhelési és az a_1 egységtényező ismeretében x_1 a feltételi egyenlet segítségével már meghatározható. Az alakhelyes igénybevételi ábrákat a 2.19/f, 2.19/g és 2.19/h ábrákon adjuk meg. A merevítőgerenda alakváltozását vázlatosan a 2.19/i ábra mutatja.

Az ábrák tanúsága szerint egy kéttámaszú gerendatartó legnagyobb nyomatékai – és lehajlása – feszítőmű beépítésével jelentősen csökkenthetők. Ennek azonban az az ára, hogy az eredetileg hajlított tartó külpontosan nyomottá válik!

2.5.4 Kétcsuklós keret

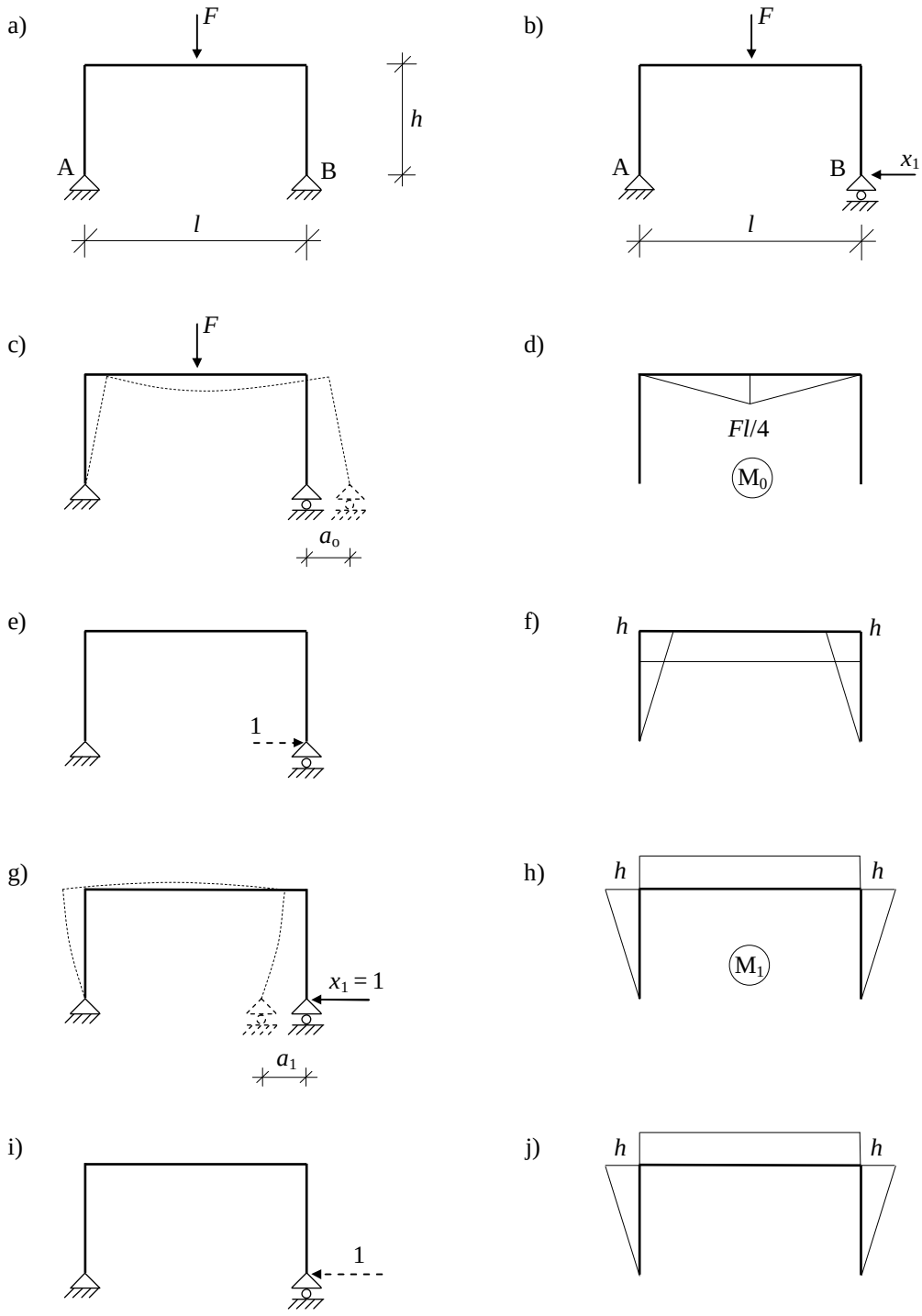
A 2.20/a ábrán vázolt keret statikailag egyszeresen határozatlan. Bár törttengelyű tartóról van szó – és így a feladat bonyolultnak tűnhet – az erőmódszer alkalmazásával ez a feladat is egyszerűen megoldható. Az egyszeresen határozatlan tartó törzstartója egy kényszer eltávolításával állítható elő. A "fölöslegesnek" ítélt kényszer legyen a B támasznál lévő és a szerkezet ottani vízszintes eltolódását megakadályozó kényszer. Ennek eltávolításával egy statikailag határozott, törttengelyű, kéttámaszú tartót kapunk (2.20/b ábra). Az eltávolított fölös kényszer helyén a kényszer jellegének megfelelő kényszererőt – esetünkben vízszintes erőt (x_1 a 2.20/b ábrán) – kell működtetni. A törzstartó egy feltételi egyenlettel együtt helyettesítheti az eredeti tartót. A feltételi egyenlet most azt fejezi ki, hogy a törzstartó vízszintes eltolódása a B támasznál zérus nagyságú:

$$x_B = a_0 + a_1 x_1 = 0$$

Az a_0 terhelési tényező az F külső teher által a B támasznál okozott vízszintes eltolódás, az a_1 egységtényező pedig az ismeretlen kényszererő egységéből a B támasznál keletkezett vízszintes eltolódás. A terhelési tényező és egységtényező értékét célszerűen a munkatételek felhasználásával számíthatjuk ki.

Az F teherből a B támasznál keletkező vízszintes eltolódás (a_0 a 2.20/c ábrán) értékének meghatározásához szükség van az F teherből keletkező nyomatékok ábrájára (2.20/d ábra) és a B támasznál beiktatott képzelt, egységnyi vízszintes erő (2.20/e ábra) hatására keletkező nyomatékábrára (2.20/f ábra). A két nyomatékábra segítségével a keresett eltolódás értéke:

$$a_0 = \frac{1}{EI}\frac{Fl}{4}\frac{l}{2}h = \frac{Fl^2 h}{8EI} \quad (\rightarrow)$$



2.20 ábra. Kétcsuklós keret erőmódszerrel.

Az $x_1 = 1$ vízszintes erő hatására a B támasznál keletkező vízszintes eltolódás az a_1 egységtényező (2.20/g ábra). Értékét az $x_1 = 1$ mint külső teher és a B támasznál beiktatott, képzelt vízszintes egységerő (2.20/i ábra) hatására keletkező nyomatékábrák (2.20/h és 2.20/j ábrák) felhasználásával számíthatjuk ki:

$$a_1 = \frac{1}{EI}\left(\frac{hh}{2}h\frac{2}{3}2 + hlh\right) = \frac{h^2}{EI}\left(\frac{2h}{3} + l\right) \quad (\leftarrow)$$

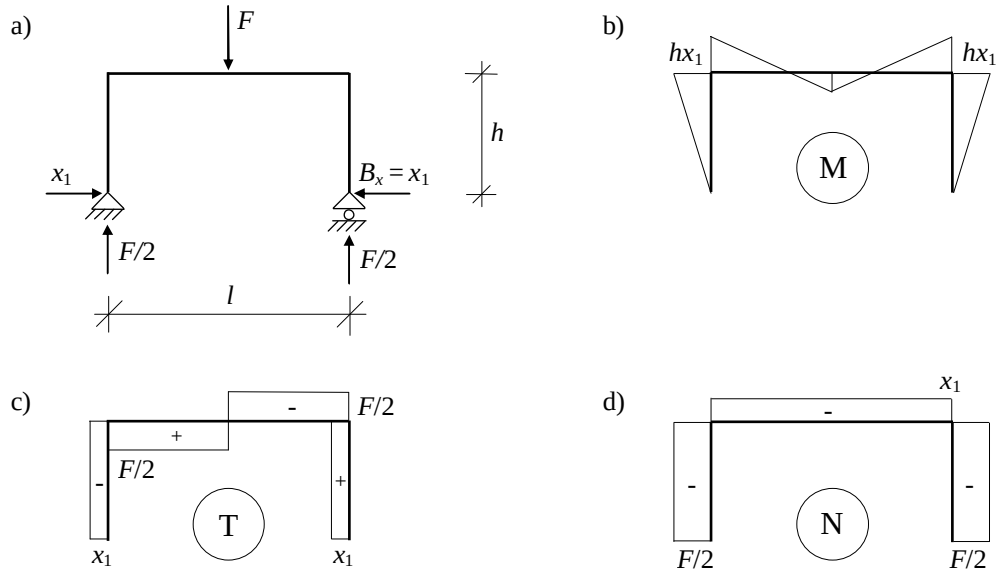
Az egység- és terhelési tényező értékének ismeretében most már behelyettesíthetünk a B támasz vízszintes eltolódásának zérus értékét kifejező feltételi egyenletbe:

$$\frac{Fl^2h}{8} - h^2\left(\frac{2h}{3} + l\right)x_1 = 0$$

A feltételi egyenletből a fölös kényszernek az az értéke adódik, amely az adott külső teher működése mellett biztosítja, hogy a B támasz nem tolódik el:

$$x_1 = \frac{Fl^2}{8h\left(\frac{2h}{3} + l\right)}$$

A statikailag határozott törzstartó terhelése most már ismert: az eredetileg működő F függőleges erő és a most kiszámított x_1 vízszintes erő (2.21/a ábra). Az igénybevételi ábrák a statikailag határozott tartók elméletében megismert módszerekkel könnyűszerrel meghatározhatók (2.21/b, 2.21/c és 2.21/d ábrák).



2.21 ábra. Kétcsuklós keret igénybevételi ábrái.

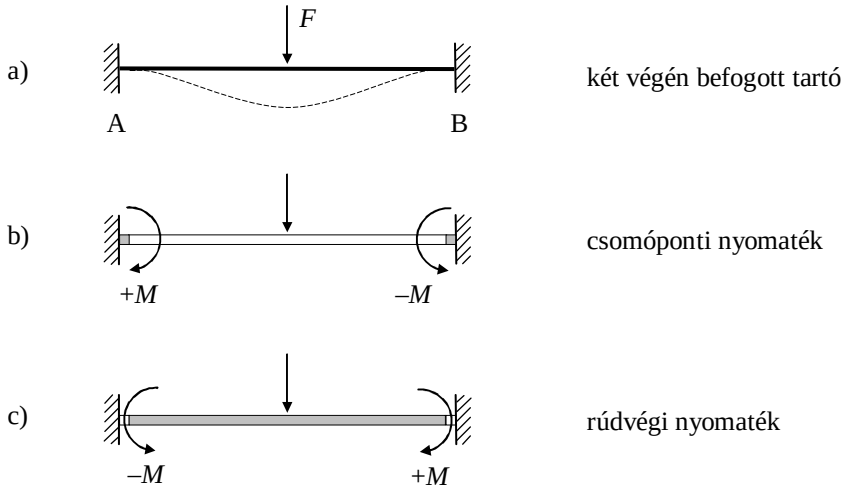
2.6 Megoldás táblázatok segítségével

Sok gyakorlati esetben – például a két végükön megtámasztott gerendatartóknál – az erőmódszer alkalmazása jelentősen egyszerűsíthető, ha táblázatokba foglalt értékek segítségével közvetlenül (feltételi egyenlet megoldása nélkül) meg tudjuk határozni a fölös kényszererő(k) értékét. Ilyen táblázatok találhatók különböző mérnöki kézikönyvekben – ilyen például a Palotás-féle Mérnöki Kézikönyv. Néhány gyakran alkalmazott tartó és terhelés esetében használhatjuk a Mechanika és Tartószerkezetek c. tárgyhoz készített „Segédletek” táblázatait is.

Mielőtt rátérhetnénk a módszer gyakorlati alkalmazásának bemutatására, szükség van a „csomóponti nyomaték” és „rúdvégi nyomaték” alapfogalmak bevezetésére.

Egy csomóponthoz csatlakozó rúd külső terhéből a csomópontra ható nyomatékot csomóponti nyomatéknak, más néven kezdeti befogási nyomatéknak nevezzük. Ez a nyomaték akkor pozitív, ha a csomópontot az óramutató járásával egyező értelemben igyekszik elfordítani; az óramutató járásával ellentétes forgatóértelmű nyomaték előjele pedig negatív. A 2.22/a ábrán vázolt két végén befogott tartó esetében a két csomóponti nyomatékot a 2.22/b ábra mutatja.

A csomópont által a rúd végére gyakorolt nyomaték a rúdvégi nyomaték. A rúdvégi nyomaték a csomóponti nyomaték ellentettje (2.22/c ábra).



2.22 ábra. Csomóponti és rúdvégi nyomatékok.

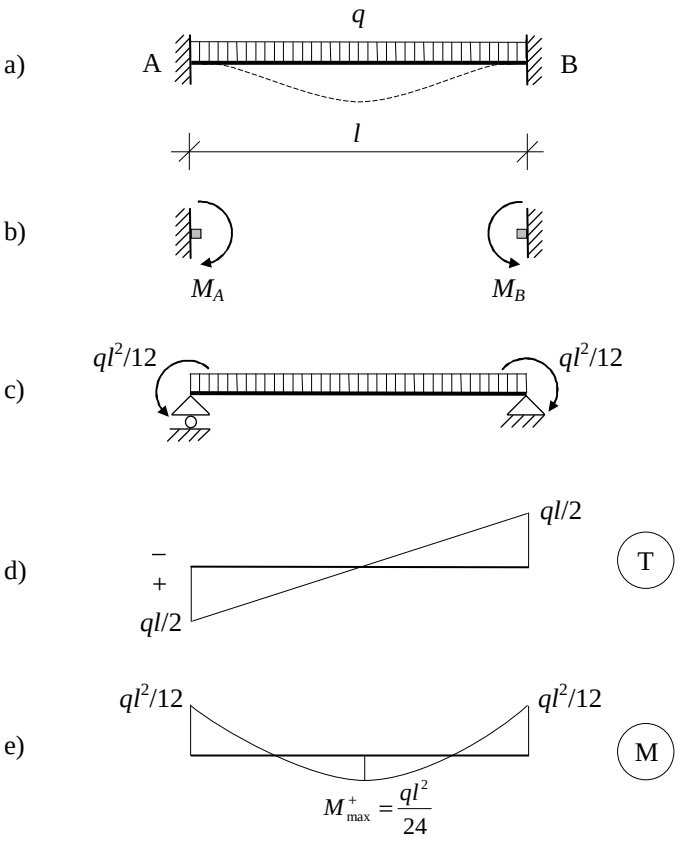
A 2.23/a ábrán vázolt két végén befogott és egyenletesen megoszló q teherrel terhelt rúd esetében úgy járhatunk el, hogy a rendelkezésünkre álló táblázatból kikeressük az A és B végpontokhoz tartozó kezdeti befogási nyomatékokat (2.23/b ábra). Ezek, például a „Segédletek” adatai szerint:

$$M_A = \frac{ql^2}{12}$$

és

$$M_B = -\frac{ql^2}{12}$$

Mivel ezek a nyomatékok csomóponti nyomatékok – a „Segédletek” táblázatai a csomóponti nyomatékokat adják meg – ezek ellentettjeit kell a rúdvégekre működtetni (2.23/c ábra). Ezek azok a nyomatékok, amelyek a 2.23/c ábrán vázolt kéttámaszú határozott törzstartó esetében szükségesek ahhoz, hogy az *A* és *B* támaszoknál az elfordulás zérus legyen. Nincs más hátra, mint meghatározni a határozott tartó reakcióerőit majd az igénybevételi ábrákat a *q* eredeti teher és a „befogásokat pótló” M_A és M_B nyomatékok hatására (2.23/d és 2.23/e ábra).



2.23 ábra. Két végén befogott tartó *q* egyenletesen megoszló terheléssel.

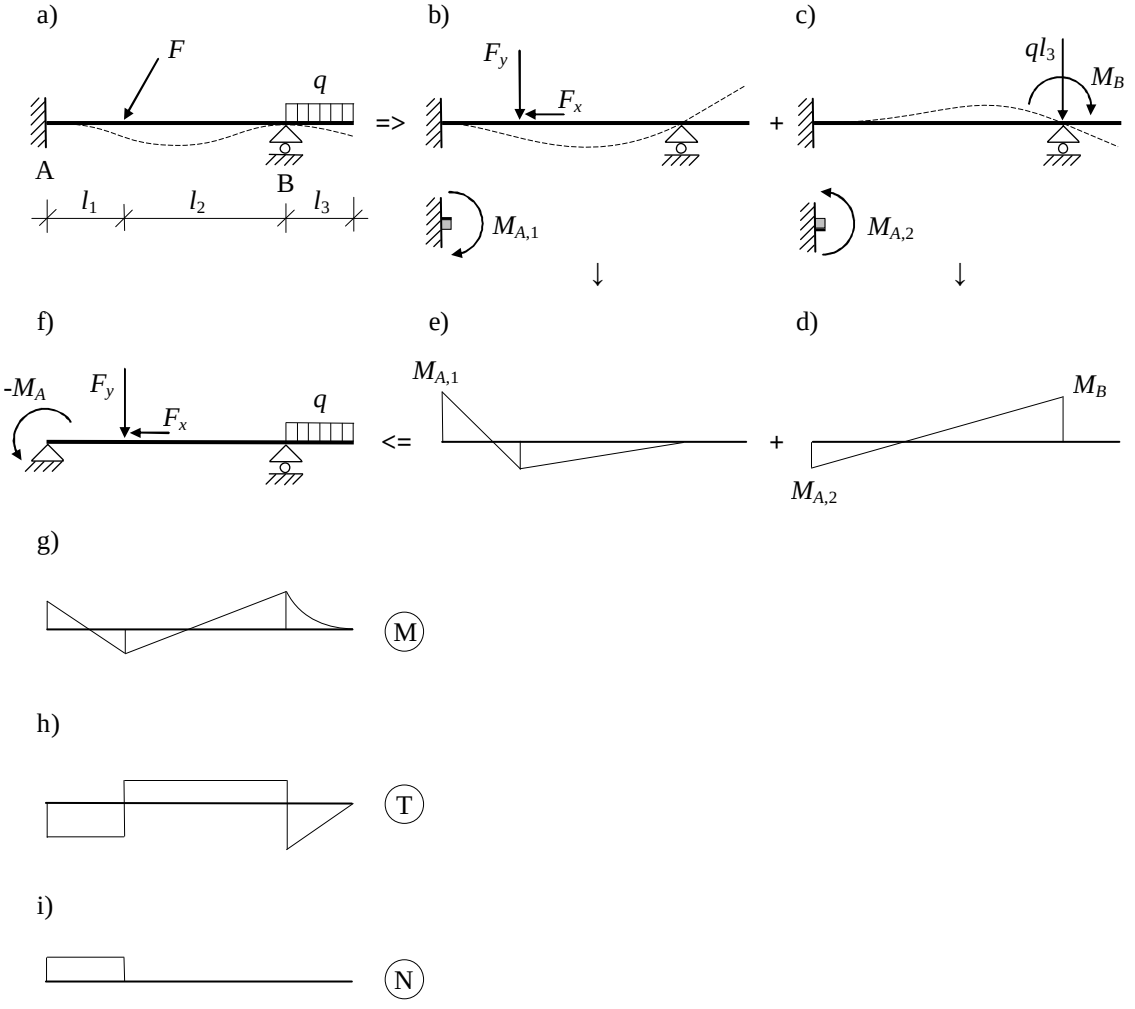
Fenti példából látható, hogy a táblázati értékek felhasználásával – ha rendelkezésre állnak – jelentős munkamennyiséget takaríthatunk meg, hiszen elmarad a feltételi egyenlet(ek) felírása és megoldása, ami az erőmódszernél a munka túlnyomóan nagy részét szokta képezni.

A fentiekhez hasonlóan járhatunk el némileg bonyolultabb tartók esetén is. Tekintsük például a 2.24/a ábrán vázolt, baloldalon befogott és jobboldalon görgős megtámasztással és konzolos túlnyúlással rendelkező tartót.

A 2.24/a ábrán vázolt esetben az erőmódszer elvét követve úgy juthatnánk a(z egyik) megoldáshoz, hogy eltávolítanánk a baloldali befogás elfordulást meggátló kényszerét és a helyére beiktatott x_1 nyomatékot abból a feltételből határoznánk meg, hogy a tartó

bal vége nem fordul el. Az x_1 nyomaték ismeretében ezután a határozott törzstartót kell csak a szokásos módon megoldani.

Ehelyett próbáljuk meg a „Segédletek” táblázatait felhasználni. Első pillantásra ez úgy tűnik, nem lehetséges, hiszen a táblázatok nem tartalmaznak konzolos tartókat és a miénkhez hasonló terheket. A tartónk és a terhelése azonban átalakítható oly módon, hogy olyan (konzol nélküli) kéttámaszú tartóhoz jutunk, amely (a teherrel együtt) már szerepel a táblázatokban.



2.24 ábra. Egyszeresen határozatlan kéttámaszú konzolos tartó.

Célunk az M_A befogási nyomaték meghatározása, majd az igénybevételi ábrák előállítása. Az első lépésben a szuperpozíció elvét felhasználva a két terhet (F és q) külön-külön tekintjük és mindkét terhet átalakítjuk. Az F erőt F_x és F_y két összetevőre bontjuk, a q intenzitású l_3 hosszon egyenletesen megoszló terhet pedig eredőjével helyettesítjük, majd áthelyezzük a B támaszhoz. Az így kapott két tartó már olyan kialakítású és terhelésű, amely szerepel a táblázatokban.

Az első teher (2.24/b ábra) esetében az F_x erő nem okoz nyomatékot az A támasznál, az F_y pedig a „Segédletek” ide vonatkozó képlete szerint

$$M_{A,1} = \frac{Fab}{2l^2}(l+a) = \frac{F_y l_1 l_2}{2(l_1+l_2)^2}(l_1+2l_2)$$

nagyságú befogási nyomatékot ébreszt. Az ehhez az esethez tartozó nyomatékábrát a 2.24/e ábra mutatja.

A másik tartó (2.24/c) esetében a *B* támasz felett álló ql_3 teher nem okoz nyomatékot, míg – a „Segédletek" ide vonatkozó képlete szerint – az $M_B = ql_3^2/2$ nyomaték hatására az *A* támasznál

$$M_{A,2} = -\frac{M}{2l^2}(l^2-3a^2) = -\frac{M_B}{2(l_1+l_2)^2}(l_1+l_2)^2 = -\frac{M_B}{2}$$

nagyságú nyomaték keletkezik. (Az *a* távolság a koncentrált nyomaték távolsága a csuklós támasztól, ami esetünkben zérus.) Az ehhez az esethez tartozó nyomatékábrát a 2.24/d ábra mutatja.

A két nyomaték előjeles összege az *A* támaszra ható csomóponti nyomaték:

$$M_A = M_{A,1} - M_{A,2}$$

Ez a csomóponti nyomaték az ábrán jelölt nagyságok esetén az óramutató járásával egyező értelmű (pozitív) értéket jelent. Ennek a nyomatéknak az ellentettjét kell működtetni a baloldalon csuklós törzstartó bal végén az *A* támasznál (2.24/f ábra).

Végül a kéttámaszú határozott törzstartóra – a $-M_A$ mellett – működtetjük az eredeti terheket (2.24/f ábra), meghatározzuk a reakcióerőket és előállítjuk az igénybevételi ábrákat (2.24/g, 2.24/h és 2.24/i ábra).

A feladat megoldása során hallgatólagosan feltételeztük, hogy az *F* erő *hatása* nagyobb a *q* egyenletesen megoszló teher hatásánál, vagyis $|M_{A,1}| > |M_{A,2}|$.

3

Gyakorló feladatok az erőmódszer alkalmazására

Az erőmódszer alkalmazása során először a statikai határozatlanság fokával megegyező számú ún. fölös kényszert kell kijelölni. A fölös kényszerek eltávolításával megkapjuk a statikailag határozott törzstartót. A törzstartón az ismert külső terhek mellett a fölös kényszereknek megfelelő – egyelőre ismeretlen – kényszererőket (erőket/nyomatékokat) is működtetni kell. A következő lépésben a kényszererőket kell meghatározni az eltávolított kényszerek helyén felírt elmozdulási (alakváltozási) feltételi egyenletek segítségével. A feltételi egyenletek

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}_\mathbf{0} = 0$$

alakúak és azt fejezik ki, hogy az eltávolított kényszerek helyén a kényszerek jellegének megfelelő elmozdulás zérus. A fölös kényszererők ismeretében már meghatározhatók az ún. maradék kényszererők. Ez egyensúlyi egyenletek segítségével történhet. Az utolsó lépés az igénybevételi ábrák előállítása a határozott tartón.

3.1 Csuklós-befogott gerendatartó

Határozzuk meg a 3.1/a ábrán vázolt tartó igénybevételi ábráit. A tartó tehetetlenségi nyomatéka állandó.

A törzstartó felvétele ennél az egyszeresen határozatlan tartónál kétféleképpen történhet. Először kéttámaszú, majd konzolos törzstartóval mutatjuk be a megoldást.

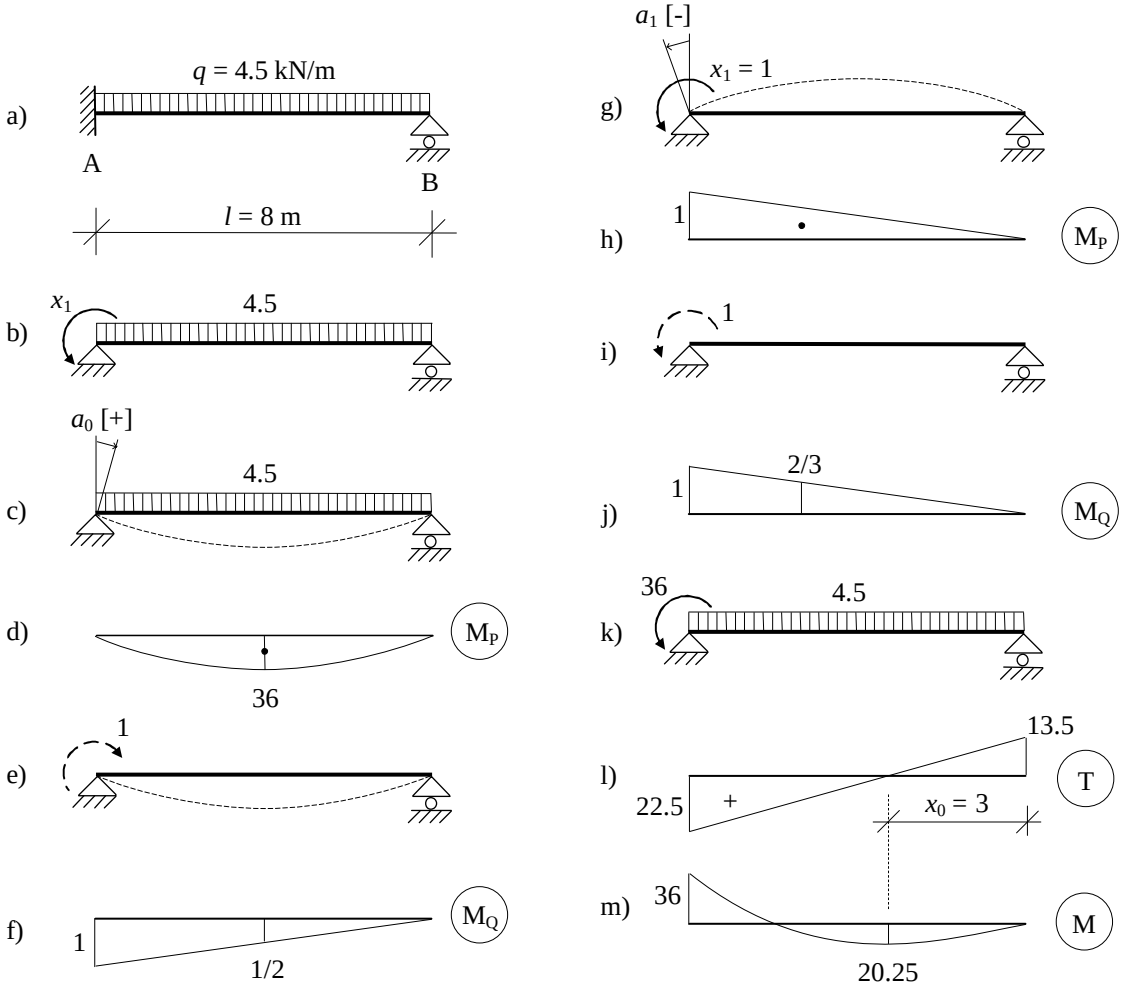
I. megoldás

Legyen a törzstartó a 3.1/b ábrán vázolt kéttámaszú tartó. A tartó bal oldalán eltávolított kényszernek megfelelően az A támasznál egy ismeretlen nagyságú nyomatékot (x_1) kell működtetni. A nyomaték értékét abból a feltételből határozzuk meg, hogy a törzstartó elfordulása az adott q külső teherből (3.1/c ábra) és az ismeretlen x_1 kényszererőből (amely most nyomaték – 3.1/g ábra) zérus. A feltételi egyenlet tehát

$$\varphi_A = a_0 + a_1 x_1 = 0$$

A terhelési tényező értékét munkaegyenlettel, az M_P és az M_Q nyomatékábrák (3.1/d és 3.1/f ábrák) felhasználásával határozzuk meg:

$$a_0 = \frac{1}{EI}\frac{36\cdot 8\cdot 2}{3}\frac{1}{2} = \frac{288}{3EI} \quad [\circlearrowright]$$



3.1 ábra. I. megoldás.

Az egységtényező értékét – az $x_1 = 1$ nagyságú nyomaték hatására keletkező elfordulást (3.1/g ábra) – a 3.1/h és 3.1/j ábrákon feltüntetett M_P és M_Q nyomatékábrák segítségével számítjuk ki:

$$a_1 = -\frac{1}{EI}\frac{1\cdot 8}{2}\frac{2}{3} = \frac{-8}{3EI} \quad [\circlearrowleft]$$

A feltételi egyenlet tehát a

$$\frac{288}{3EI} - \frac{8}{3EI}x_1 = 0$$

alakot ölti, ahonnan az ismeretlen támasznyomaték értéke

$$x_1 = 36 \text{ kNm}$$

Az ún. maradék kényszererőket a törzstartóra ható erők ismeretében (3.1/k ábra) szuperpozícióval határozzuk meg:

$$A = \frac{4.5 \cdot 8}{2} + \frac{36}{8} = 18 + 4.5 = 22.5 \text{ kN } [\uparrow]$$

$$B = \frac{4.5 \cdot 8}{2} - \frac{36}{8} = 18 - 4.5 = 13.5 \text{ kN } [\uparrow]$$

Az igénybevételi ábrákat a 3.1/l és 3.1/m ábrákon adjuk meg.

II. megoldás

Oldjuk most meg a feladatot úgy, hogy törzstartónak a 3.2/b ábrán látható konzolt választjuk. Az x_1 ismeretlen kényszererő értékét abból a feltételből határozzuk meg, hogy a tartó jobb oldali végpontjának függőleges eltolódása zérus:

$$y_B = a_0 + a_1 x_1 = 0$$

A fenti feltételi egyenletben az a_0 terhelési tényező a q = 4.5 kN/m megoszló teher, az a_1 egységtényező pedig az x_1 = 1 kN nagyságú koncentrált erő hatására bekövetkező függőleges eltolódást jelenti a statikailag határozott konzol végén.

A terhelési tényező értékét az M_P és az M_Q nyomatékábrák (3.2/d és 3.2/f ábrák) felhasználásával határozzuk meg:

$$a_0 = \frac{1}{EI} \frac{144 \cdot 8 \cdot 1}{3} \frac{8 \cdot 3}{4} = \frac{2304}{EI} \quad [\downarrow]$$

Az egységtényező értékét – az x_1 = 1 kN nagyságú erő hatására keletkező függőleges eltolódást (3.2/g ábra) – a 3.2/h és 3.2/j ábrákon feltüntetett M_P és M_Q nyomatékábrák segítségével számítjuk ki:

$$a_1 = -\frac{1}{EI} \frac{8 \cdot 8}{2} \frac{8 \cdot 2}{3} = -\frac{512}{3EI} \quad [\uparrow]$$

A

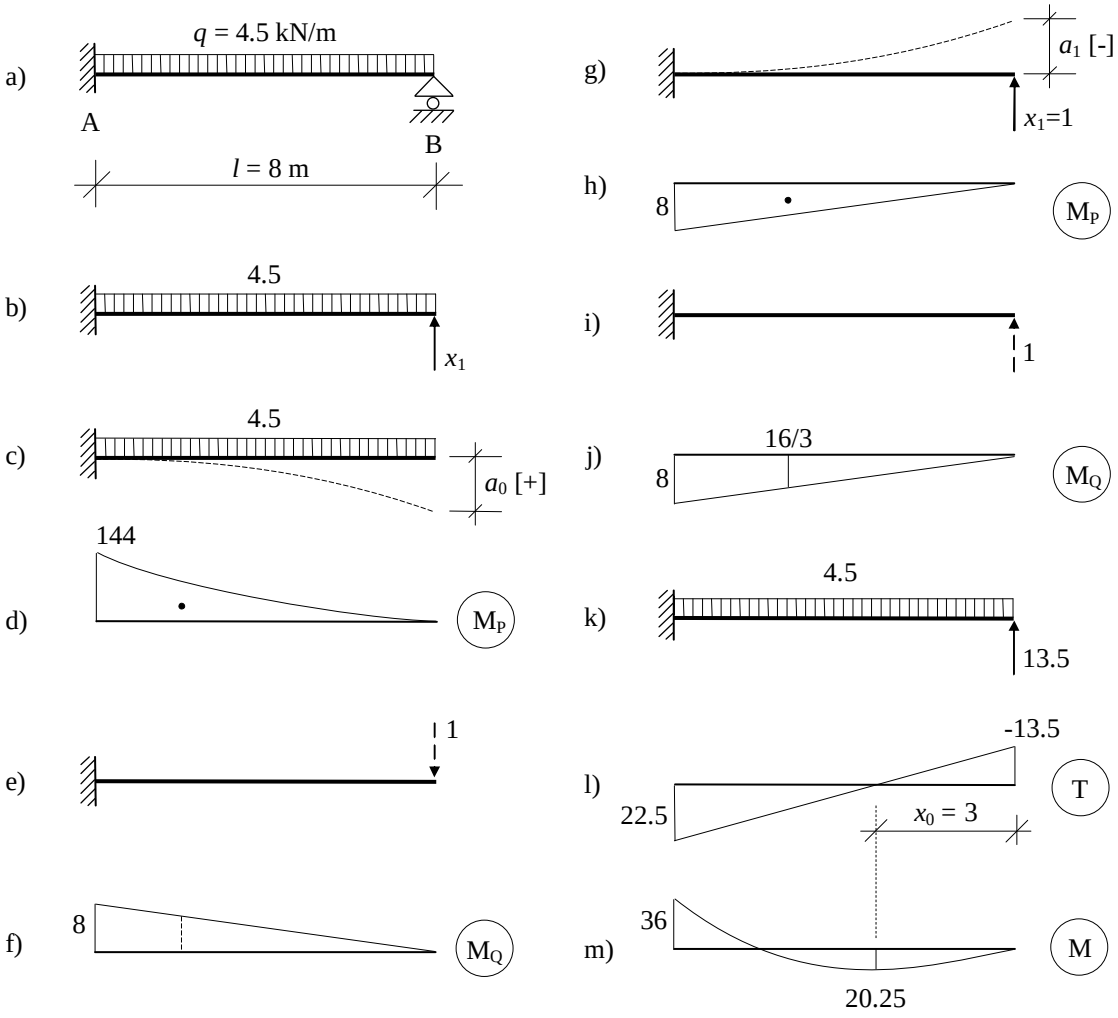
$$\frac{2304}{EI} - \frac{512}{3EI} x_1 = 0$$

feltételi egyenletből az ismeretlen kényszererő értékét már meghatározhatjuk:

$$x_1 = 13.5 \text{ kN}$$

Az ismert erőkkel terhelt határozott törzstartó (3.2/k) segítségével az igénybevételi ábrák előállítása az utolsó lépés. A nyíróerő-ábrát a 3.2/l, a nyomatékábrát pedig a

3.2/m ábrán adjuk meg. A nyíróerő-ábra és a nyomatékábra természetesen azonos az I. megoldásnál kapott ábrákkal (vö. a 3.1/l és 3.1/m ábrákkal).



3.2 ábra. II. megoldás.

3.2 Két végén befogott tartó

Határozzuk meg a 3.3/a ábrán vázolt gerendatartó igénybevételi ábráit.

A háromszorosan határozatlan tartó törzstartójának felvétele többféleképpen történhet. A megoldáshoz válasszuk a 3.3/b ábrán megadott törzstartót. A három ismeretlen kényszererő értékét az

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{10} = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{20} = 0$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{30} = 0$$

feltételi egyenletrendszerből határozzuk meg. Az egyenletek rendre azt fejezik ki, hogy az *A* támasz elfordulása, a *B* támasz elfordulása és az *A* támasz vízszintes eltolódása zérus. Az egyenletrendszer megoldásához meg kell határoznunk a terhelési és egységtényezőket. Számítsuk ki először a terhelési tényezőket.

a_{10} : az *A* támasz elfordulása a külső teherből (3.3/c ábra).

Az elfordulás a 3.3/d és 3.3/f nyomatékábrák segítségével egyszerűen meghatározható:

$$a_{10} = \frac{1}{EI}\left(\frac{3\cdot 33.75}{2}\frac{3}{4} + \frac{5\cdot 33.75}{2}\frac{5}{12}\right) = \frac{73.125}{EI} \quad [\circlearrowright]$$

a_{20} : a *B* támasz elfordulása a külső teherből (3.3/c ábra).

Az elfordulást most a 3.3/d és 3.3/h nyomatékábrák felhasználásával számítjuk ki:

$$a_{20} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{3\cdot 33.75}{2}\frac{1}{4} + \frac{5\cdot 33.75}{2}\frac{7}{12}\right) = -\frac{61.875}{EI} \quad [\circlearrowleft]$$

a_{30} : az *A* támasz vízszintes eltolódása a külső teherből.

A vízszintes eltolódás a KB szakasz megnyúlásából keletkezik:

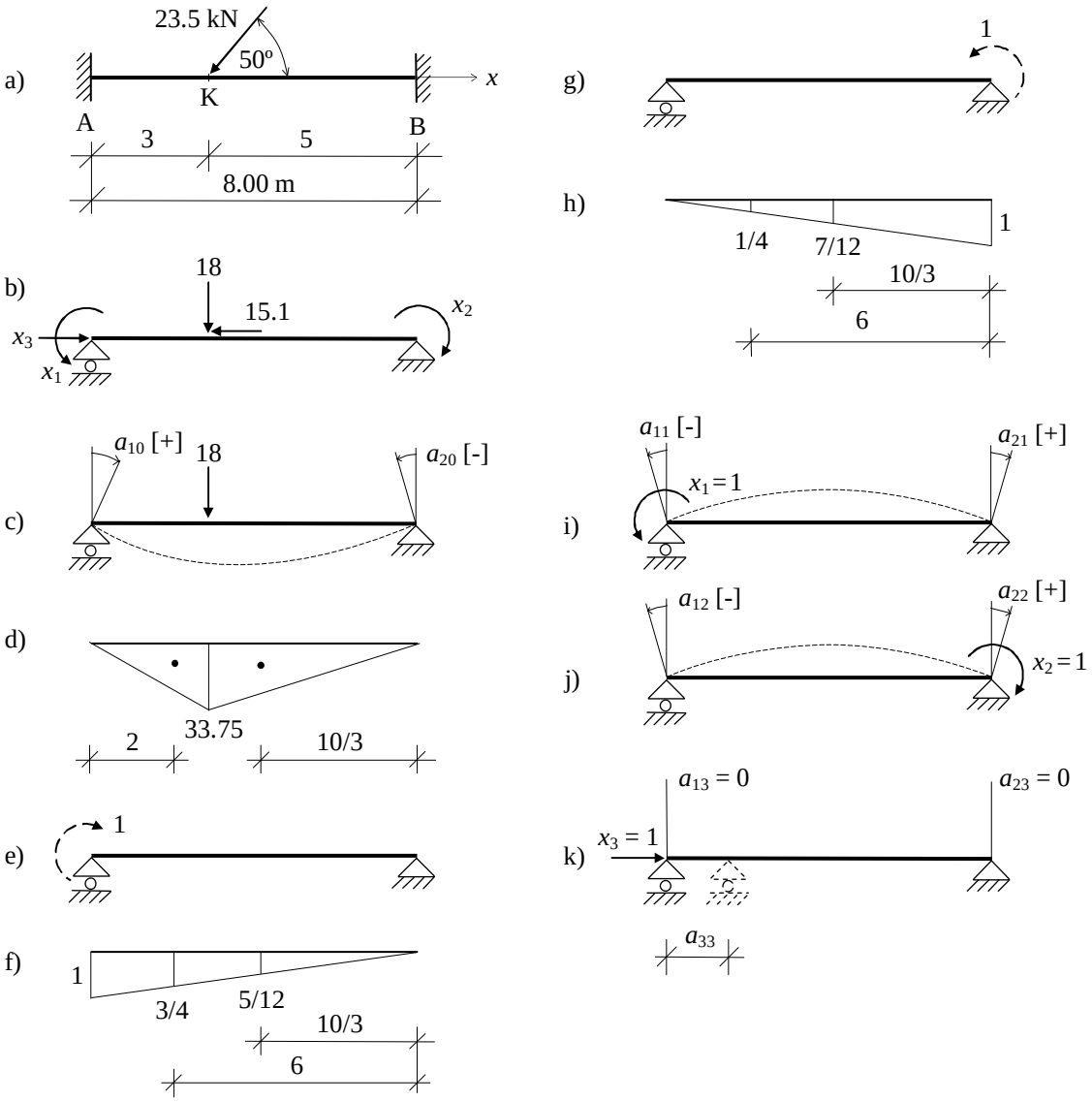
$$a_{30} = \frac{Fl}{AE} = -\frac{15.1\cdot 5}{AE} = -\frac{75.5}{AE} \quad [\leftarrow]$$

A következő lépésben határozzuk meg az egységtényezőket.

a_{11} : az *A* támasz elfordulása az $x_1 = 1$ nagyságú nyomatékból (3.3/i ábra).

Az elfordulás kiszámításához a 3.3/f ábrát használhatjuk fel, figyelembe véve, hogy az elfordulás negatív:

$$a_{11} = -\frac{1}{EI}\frac{1\cdot 8}{2}\frac{2}{3} = -\frac{8}{3EI} \quad [\circlearrowleft]$$



3.3 ábra. Két végén befogott tartó.

a_{21} : a *B* támasz elfordulása az $x_1 = 1$ nagyságú nyomatékból (3.3/i ábra).

Ezt az elfordulást a 3.3/f és 3.3/h ábrák segítségével számíthatjuk ki, figyelembe véve, hogy az elfordulás az óramutató járásával megegyezik:

$$a_{21} = \frac{1}{EI}\frac{1\cdot 8}{2}\frac{1}{3} = \frac{4}{3EI} \quad [\circlearrowright]$$

a_{31} : az *A* támasz vízszintes eltolódása az $x_1 = 1$ nagyságú nyomatékból.

Az *A* támasz az $x_1 = 1$ nagyságú nyomaték hatására nem tolódik el. Így

$$a_{31} = 0$$

a_{12} : az A támasz elfordulása az $x_2 = 1$ nagyságú nyomatékból (3.3/j ábra).

Az elfordulás meghatározása a 3.3/f és 3.3/h ábrák felhasználásával történik, figyelembe véve, hogy az elfordulás előjele negatív:

$$a_{12} = -\frac{1}{EI}\frac{1\cdot 8}{2}\frac{1}{3} = -\frac{4}{3EI} \quad [\circlearrowleft]$$

a_{22} : a B támasz elfordulása az $x_2 = 1$ nagyságú nyomatékból (3.3/j ábra).

Ezt az elfordulást a 3.3/h ábra segítségével határozhatjuk meg, figyelembe véve, hogy az elfordulás előjele pozitív:

$$a_{22} = \frac{1}{EI}\frac{1\cdot 8}{2}\frac{2}{3} = \frac{8}{3EI} \quad [\circlearrowright]$$

a_{32} : az A támasz vízszintes eltolódása az $x_2 = 1$ nagyságú nyomatékból.

Az A támasz az $x_2 = 1$ nagyságú nyomaték hatására nem tolódik el. Így

$$a_{32} = 0$$

a_{13} : az A támasz elfordulása az $x_3 = 1$ nagyságú erőből (3.3/k ábra).

Az A támasz az $x_3 = 1$ nagyságú erő hatására nem fordul el. Így

$$a_{13} = 0$$

a_{23} : a B támasz elfordulása az $x_3 = 1$ nagyságú erőből (3.3/k ábra).

A B támasz az $x_3 = 1$ nagyságú erő hatására nem fordul el. Így

$$a_{23} = 0$$

a_{33} : az A támasz vízszintes eltolódása az $x_3 = 1$ nagyságú erőből (3.3/k ábra).

Az A támasz vízszintes eltolódása az $l = 8$ m hosszúságú tartó összenyomódásából keletkezik:

$$a_{33} = \frac{Fl}{AE} = \frac{8}{AE} \quad [\rightarrow]$$

A terhelési és egységtényezők értékeinek felhasználásával a feltételi egyenletrendszer a következő alakban írható fel:

$$-\frac{8}{3EI}x_1 \quad -\frac{4}{3EI}x_2 \qquad +\frac{73.125}{EI} = 0$$

$$\frac{4}{3EI}x_1 + \frac{8}{3EI}x_2 - \frac{61.875}{EI} = 0$$

$$+\frac{8}{EA}x_3 - \frac{75.5}{EA} = 0$$

A harmadik egyenletből x_3 értéke közvetlenül meghatározható:

$$x_3 = 9.44\,\text{kN}$$

Az első és második egyenlet némi átalakítás után a

$$-2x_1 - x_2 + 54.84 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 46.41 = 0$$

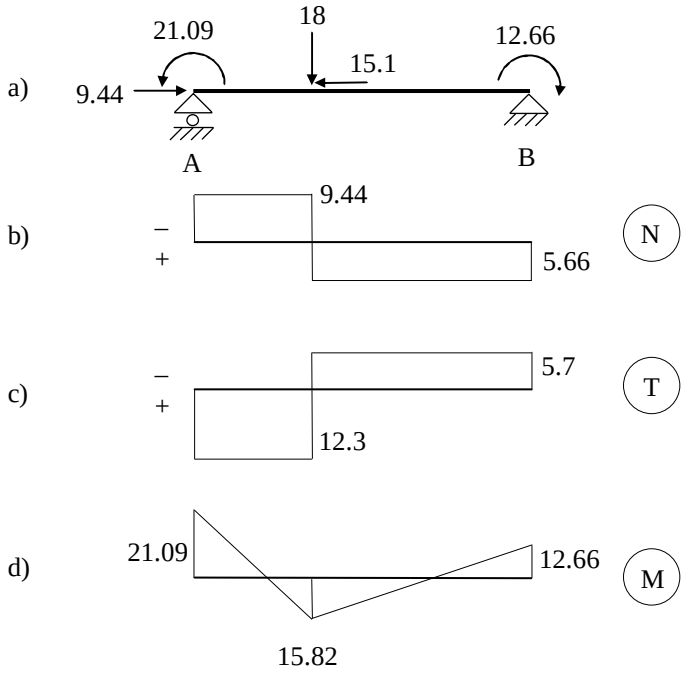
egyszerűbb alakra hozható, ahonnan az ismeretlenekre az

$$x_1 = 21.09\,\text{kNm}$$

és

$$x_2 = 12.66\,\text{kNm}$$

értékeket kapjuk.



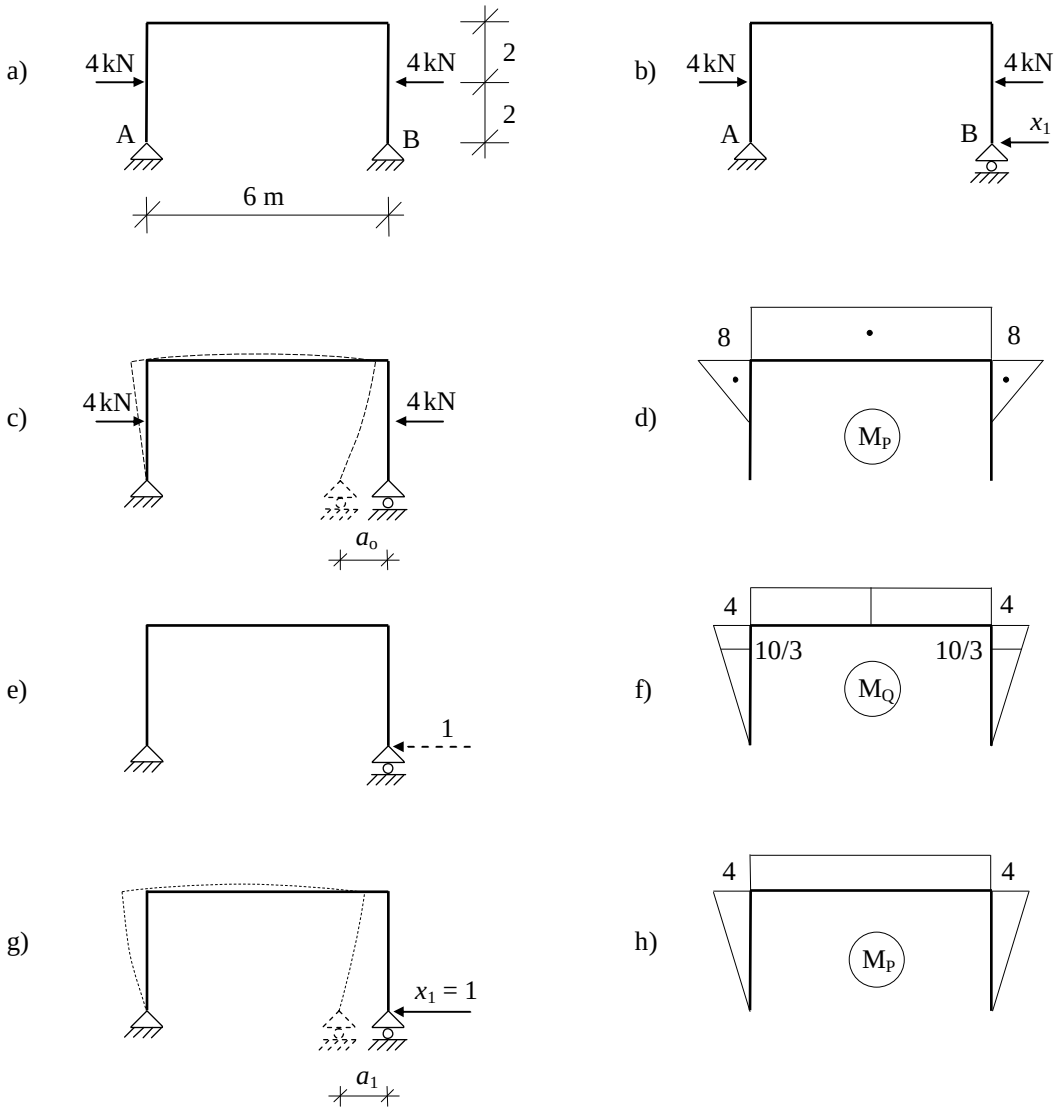
3.4 ábra. a) Törzstartó, b), c) és d) igénybevételi ábrák.

Az x_1, x_2 és x_3 pozitív előjele azt mutatja, hogy a fölös kényszererők előjelét jól tételeztük fel.

A 3.4/a ábrán feltüntettük a törzstartót az eredeti külső teherrel és a már meghatározott kényszererőkkel. Az igénybevételi ábrákat a 3.4/b, 3.4/c és 3.4/d ábrák tartalmazzák.

3.3 Kétcsuklós keret

Határozzuk meg a 3.5/a ábrán vázolt kétcsuklós keret igénybevételi ábráit. Az *EI* értéke állandó.



3.5 ábra. Kétcsuklós keret erőmódszerrel.

Válasszuk a 3.5/b ábrán látható kéttámaszú tartót az egyszeresen határozatlan tartó törzstartójának. Azt azonnal látjuk (egy *B* pontra, majd egy *A* pontra vonatkozó

nyomatéki egyenlet segítségével), hogy a két támasznál függőlege reakcióerő nem keletkezik.

Az

$$a_0 + a_1 x_1 = 0$$

feltételi egyenlet most azt fejezi ki, hogy a *B* támasz vízszintes eltolódása zérus.

Az a_0 terhelési tényező a tartó külső terheléséből a *B* támasznál keletkező vízszintes eltolódást jelenti (3.5/c ábra). Értékét az M_P és M_Q nyomatékábrák (3.5/d és 3.5/f ábra) segítségével munkatétellel határozzuk meg:

$$a_0 = \frac{1}{EI}\left(4 \cdot 6 \cdot 8 + \frac{8 \cdot 2}{2}\frac{10}{3}2\right) = \frac{736}{3EI} \quad [\leftarrow]$$

Az a_1 egységtényező az $x_1 = 1$ erőből a *B* támasznál keletkező vízszintes eltolódást jelenti (3.5/g ábra). Értékét a 3.5/f és 3.5/h ábrákon látható M_P és M_Q nyomatékábrák felhasználásával munkatétellel számítjuk ki:

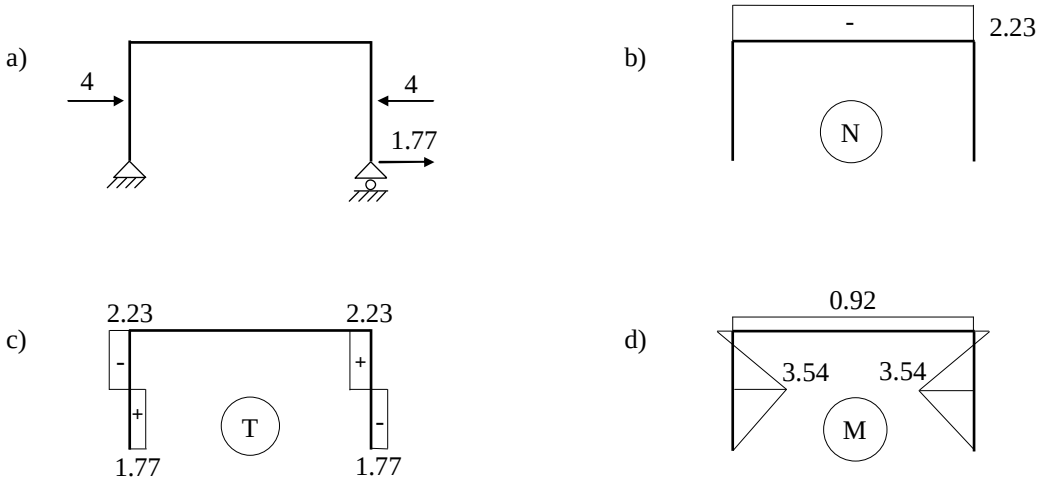
$$a_1 = \frac{1}{EI}\left(4 \cdot 6 \cdot 4 + 2\frac{4 \cdot 4}{2}\frac{4 \cdot 2}{3}\right) = \frac{416}{3EI} \quad [\leftarrow]$$

Az egység- és terhelési tényező ismeretében az ismeretlen fölös kényszererő értékét a feltételi egyenletből már meghatározhatjuk:

$$x_1 = -\frac{a_0}{a_1} = -\frac{736}{416} = -1.77\,\text{kN}$$

A negatív előjel azt mutatja, hogy a kényszererő nem balra mutat – ahogy feltételeztük (3.5/b ábra) – hanem jobbra.

Az 3.6/a ábrán ismét feltüntettük a törzstartót, a már meghatározott kényszererővel együtt. Az igénybevételi ábrák a 3.6/b, 3.6/c és 3.6/d ábrákon találhatók.



3.6 ábra. Kétcsuklós keret. a) törzstartó, b)-c)-d) igénybevételi ábrák.

3.4 Feszítőmű

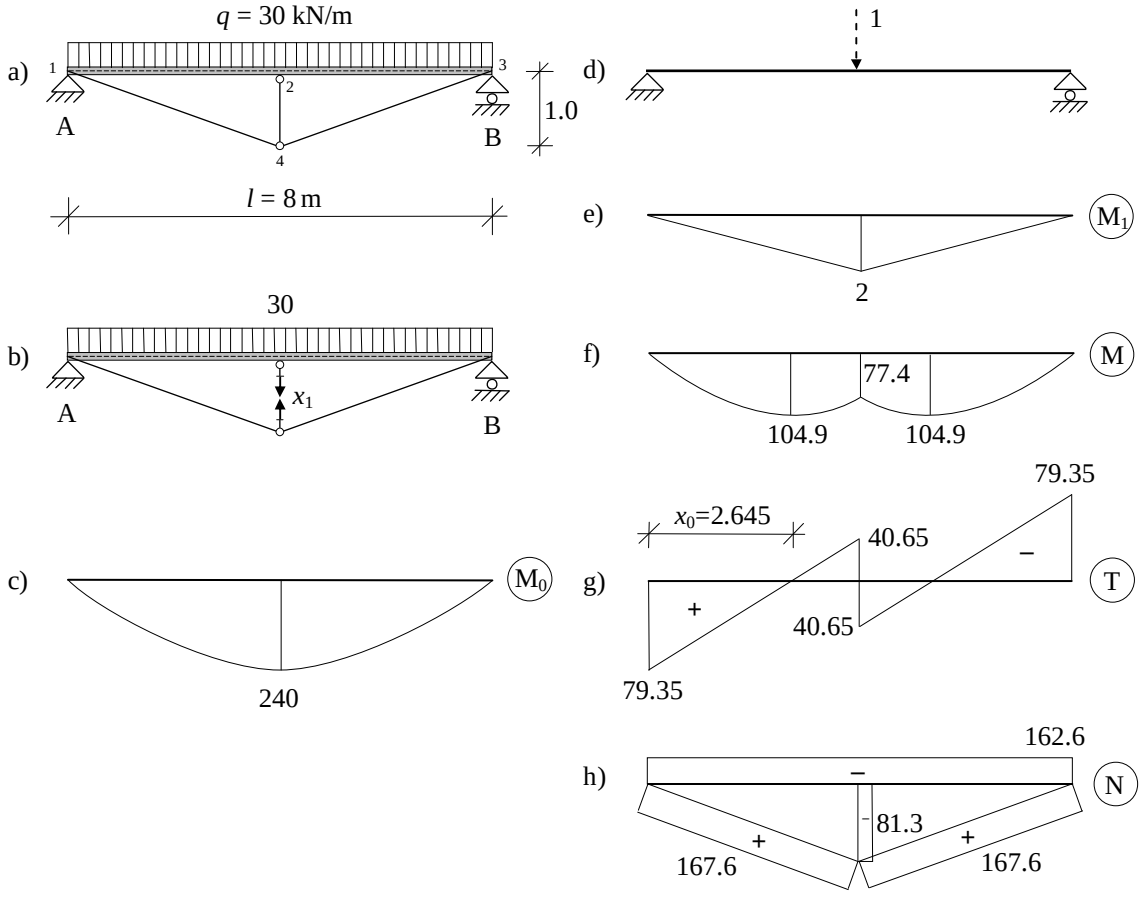
Meghatározandók a 3.7/a ábrán vázolt feszítőmű igénybevételi ábrái és a rudakban keletkező rúderők. A gerenda tehetetlenségi nyomatéka $I = 10^9$ mm^4 = 10^{-3} m^4 és a rudak keresztmetszeti területe $A = 4 \cdot 10^3$ mm^2 = $4 \cdot 10^{-3}$ m^2.

A feszítőmű külsőleg statikailag határozott, belsőleg viszont statikailag egyszeresen határozatlan. A statikai határozatlanságot a 2-4 jelű rúd átvágásával szüntetjük meg: így a 3.7/b ábrán látható törzstartót kapjuk. Az átvágott rudat a húzóerőkként működő $x_1 = \pm 1$ erőkettőssel pótoljuk.

Az

$$a_0 + a_1 x_1 = 0$$

feltételi egyenlet most azt fejezi ki, hogy az átvágás helyén az eltolódás-különbség zérus.



3.7 ábra. Feszítőmű.

A megoszló teherből keletkező M_0 nyomatékábrát a 3.7/c ábrán, az általa a törzstartón okozott eltolódás kiszámításához még szükséges, az egységnyi függőleges erőből (3.7/d ábra) keletkező M_1 nyomatékábrát pedig a 3.7/e ábrán adjuk meg.

Az a_0 terhelési tényező értéke így a munkatétel segítségével

$$a_0 = \frac{1}{EI}\frac{4\cdot 240\cdot 2}{3}\frac{2\cdot 5}{8}2 = \frac{1.6\cdot 10^6}{E}$$

A 2-4 jelű rúd átvágása miatt a megoszló teher hatására az 1-4, 2-4 és 3-4 jelű rudakban nem ébred normálerő és így a rúdláncnak nincs alakváltozása.

Az a_1 egységtényező most két részből tevődik össze: a gerenda alakváltozásából és a rúdlánc megnyúlásából. Az a_1 egységtényezőnek a gerenda alakváltozásához tartozó része (a_1') az M_1 nyomatékábra felhasználásával adódik:

$$a_1' = \frac{1}{EI}\frac{4\cdot 2}{2}\frac{2\cdot 2}{3}2 = \frac{32\cdot 10^3}{3E}$$

A beiktatott egységerő-pár hatására az 1-4, 3-4 és 2-4 jelű rudakban rúderők keletkeznek, amelyek a rúdlánc megnyúlását okozzák. Az átvágásnál jelentkező eltolódás-különbség szolgáltatja az a_1 egységtényező másik (a_1''-vel jelölt) részét. Kiszámításához szükségünk van a rúdhosszakra és a rúderőkre:

$$s_{1-4} = s_{3-4} = \sqrt{1^2 + 4^2} = 4.123\,\text{m}$$

$$s_{2-4} = 1.0\,\text{m}$$

$$S_{1-4} = S_{3-4} = 1\frac{4.123}{2} = 2.062\,\text{kN}$$

$$S_{2-4} = 1.0\,\text{kN}$$

A fenti adatok felhasználásával az eltolódás-különbség értékét a

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{S_i^2}{EA}s_i$$

képletből határozzuk meg. Így:

$$a_1'' = \frac{1}{4\cdot 10^{-3}E}\left(2\cdot 2.062^2\cdot 4.123 + 1^2\cdot 1\right) = \frac{9.015\cdot 10^3}{E}$$

Az egységtényező értéke így

$$a_1 = a_1' + a_1'' = \frac{19.68\cdot 10^3}{E}$$

Az

$$a_0 + a_1 x_1 = 0$$

feltételi egyenlet megoldása szolgáltatja a 2-4 jelű rúdban keletkező tényleges rúderő szorzószámát:

$$x_1 = -\frac{a_0}{a_1} = -\frac{1600}{19.68} = -81.3$$

A negatív előjel arra figyelmeztet, hogy a 2-4 jelű rúd előjelét rosszul tételeztük fel, vagyis a rúd nyomott lesz. A rudakban keletkező rúderők tényleges értékét a szorzószám figyelembevételével kapjuk meg:

$$S_{1-4} = 2.062 \cdot 81.3 = 167.6\,\text{kN}$$

$$S_{3-4} = 2.062 \cdot 81.3 = 167.6\,\text{kN}$$

$$S_{2-4} = 1.0 \cdot 81.3 = 81.3\,\text{kN}$$

Az S_{1-4} és S_{3-4} rudakban keletkező erők függőleges vetülete

$$S_y = 40.65\,\text{kN}$$

és vízszintes vetülete

$$S_x = 162.6\,\text{kN}$$

A fenti értékek felhasználásáva1 elkészítettük a tartó igénybevételi ábráit (3.7/f,g,h ábrák).

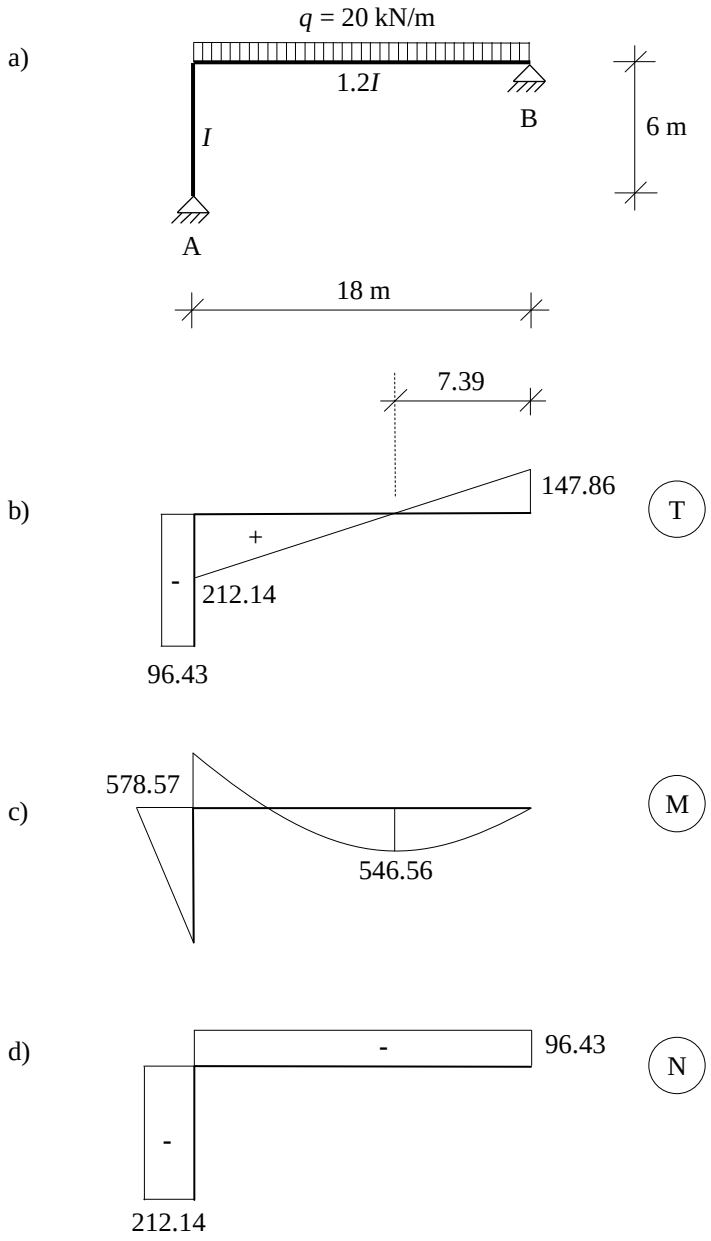
A 3.7/c és 3.7/f ábrák összevetése szemléletesen mutatja, hogy egy határozott kéttámaszú tartó maximális nyomatéka jelentősen csökkenthető feszítőmű beépítésével. Nem szabad azonban megfeledkezni arról, hogy az eredetileg hajlított tartó így külpontosan nyomottá válik!

Végül megadjuk három gyakorló feladat adatait és megoldását.

3.5 Törttengelyű tartó

Meghatározandók a 3.8/a ábrán vázolt kétcsuklós törttengelyű tartó igénybevételi ábrái. Az oszlop hosszváltozásának hatását elhanyagoljuk.

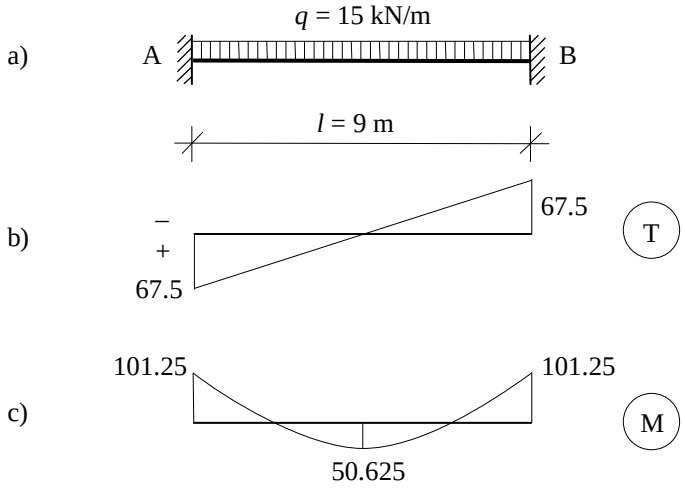
Az igénybevételi ábrákat a 3.8/b, 3.8/c és 3.8/d ábrákon tüntettük fel.



3.8 ábra. Kétcsuklós törttengelyű tartó.

3.6 Két végén befogott tartó megoszló teherrel

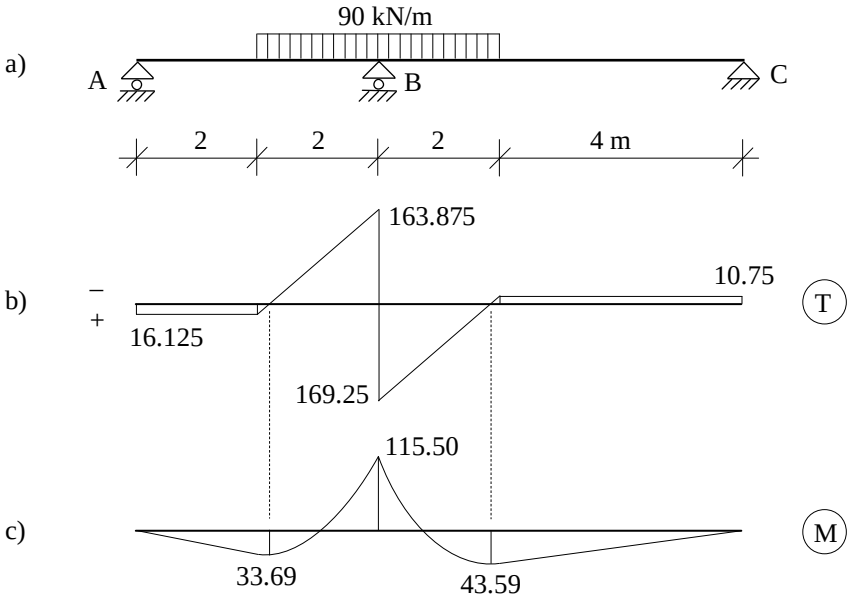
Határozzuk meg a 3.9/a ábrán vázolt két végén befogott, háromszorosan határozatlan, egyenletesen megoszló teherrel terhelt tartó igénybevételi ábráit. Az igénybevételi ábrákat a 3.9/b és 3.9/c ábrán adjuk meg.



3.9 ábra. Két végén befogott tartó.

3.7 A törzstartó megválasztásának szerepe

Oldjuk meg a 3.10/a ábrán vázolt háromtámaszú tartót különböző törzstartók alkalmazásával. Látni fogjuk, hogy a szélső támasz eltávolításával kialakított törzstartó jóval egyszerűbb megoldáshoz vezet, mint amikor a közbenső támaszt távolítjuk el. Az igénybevételi ábrákat a 3.10/b és 3.10/c ábrán adjuk meg.



3.10 ábra. Háromtámaszú tartó.

4

Mozgásmódszer

Egyes szerkezetek, különösen sokszorosan határozatlan keretszerkezetek számítására az erőmódszernél célszerűbb lehet a mozgásmódszer alkalmazása. A szerkezeteket a mozgásmódszer alapján úgy vizsgáljuk, hogy összefüggést keresünk a rudakat összekapcsoló csomópontok elmozdulásai és a terhelt vagy terheletlen, adottnak képzelt végpont-mozgású rudak által a csomópontokra kifejtett erők között. A rudak által a csomópontra kifejtett erők és a csomópontot közvetlenül támadó erők egyensúlyát biztosító csomóponti elmozdulások meghatározása fogja a módszer alkalmazása során közvetlen feladatunk tárgyát képezni. Ha ugyanis a csomóponti elmozdulásokat sikerül meghatározni, akkor a rudak minden elmozdulása és igénybevétele közvetlenül meghatározható. A csomóponti ismeretlenekről – amelyek elmozdulások – a módszert elmozdulásmódszernek is nevezik.

4.1 Alapfogalmak

Mielőtt rátérhetnénk a módszer gyakorlati alkalmazásának bemutatására, néhány alapfogalom bevezetésére illetve felidézésére van szükség.

4.1.1 Csomóponti nyomaték – rúdvégi nyomaték

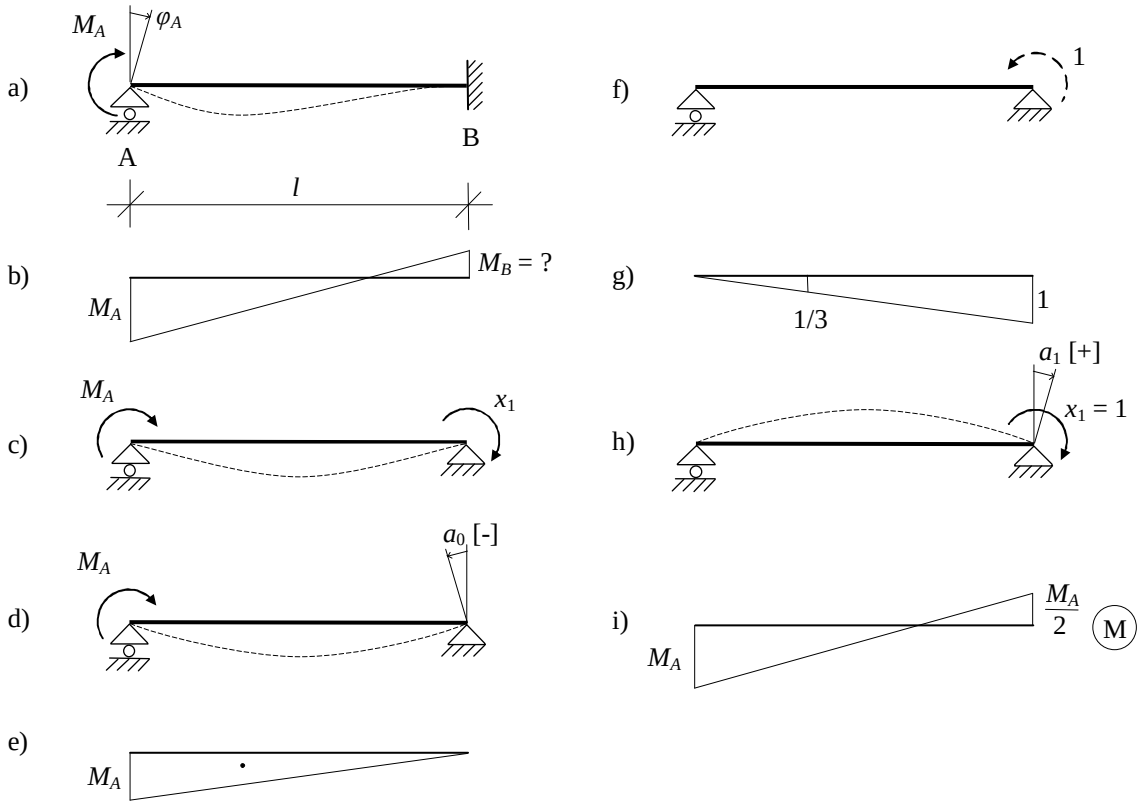
A csomóponti és rúdvégi nyomaték fogalmát a 2.6 pontban bevezettük, így itt most csak a definíciót ismételjük meg: Egy csomóponthoz csatlakozó rúd külső terhéből a csomópontra ható nyomatékot csomóponti nyomatéknak, más néven kezdeti befogási nyomatéknak nevezzük. A csomópont által a rúd végére gyakorolt nyomaték a rúdvégi nyomaték. A rúdvégi nyomaték a csomóponti nyomaték ellentettje (2.22 ábra).

Két végén megtámasztott (befogott, csuklós) rudak kezdeti befogási nyomatékai különböző terhelési esetekre mérnöki kézikönyvekben és segédletekben megtalálhatók.

4.1.2 Átviteli tényező

Az átviteli tényező értéke megadja, hogy egy rúd egyik végének M nyomatékkal történő elfordítása folytán a másik rúdvégen az M nyomaték hányszorosa lép fel.

Tekintsük először a 4.1/a ábrán vázolt, egyik végén csuklós, másik végén befogott EI = állandó merevségű tartót. A csuklós megtámasztású rúdvégre M_A végnyomaték hat. Határozzuk meg, mekkora M_B nyomaték keletkezik a rúd másik – befogott – végén. A feladatot erőmódszerrel oldjuk meg.



4.1 ábra. Az átviteli tényező meghatározása.

A tartó törzstartója egy határozott kéttámaszú tartó, amelyre a *B* támasznál egy egyelőre ismeretlen x_1 nyomaték működik (4.1/c ábra). (Az x_1 nyomaték tulajdonképpen a keresett M_B nyomaték.) Az

$$a_0 + a_1 x_1 = 0$$

feltételi egyenlet azt fejezi ki, hogy a *B* támasz elfordulása zérus. Az a_0 terhelési tényező értéke az M_A nyomaték hatására a *B* támasznál keletkező elfordulás (4.1/d ábra):

$$a_0 = -\frac{1}{EI}\frac{M_A l}{2}\frac{1}{3} = -\frac{M_A l}{6EI}$$

Az a_1 egységtényezőt az $x_1 = 1$ nyomaték hatására a *B* támasznál keletkező elfordulás értéke adja meg (4.1/h ábra):

$$a_1 = \frac{1}{EI}\frac{l}{2}\frac{2}{3} = \frac{l}{3EI}$$

A feltételi egyenlet megoldása:

$$x_1 = \frac{M_A}{2} = aM_A$$

vagyis a vizsgált rúd egyik végének M_A nyomatékkal történt elfordítása miatt a másik (befogott) rúdvégen az alkalmazott M_A nyomaték fele keletkezett. Az

$$a = 0.5 \tag{4.1}$$

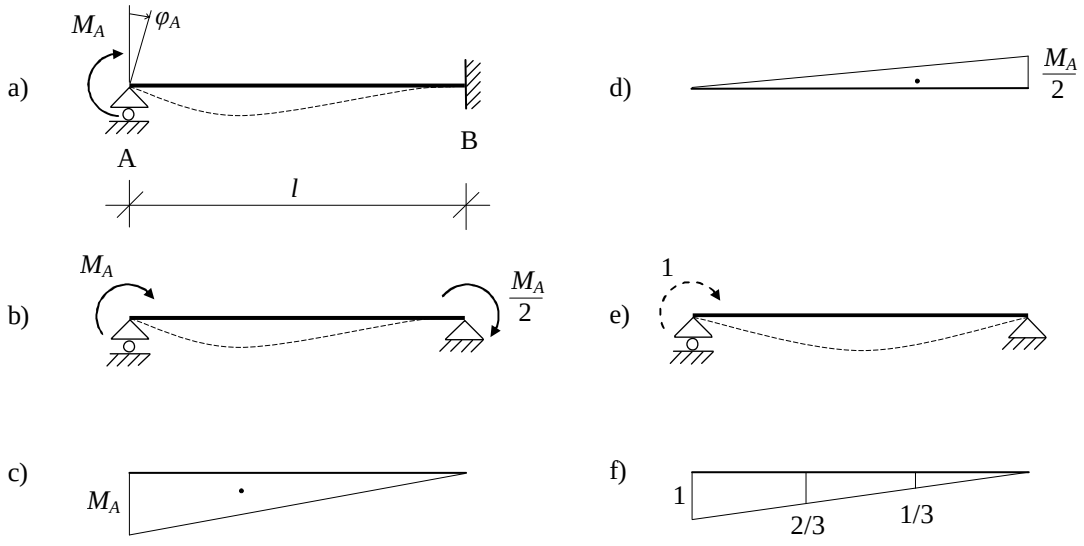
tényezőt átviteli tényezőnek nevezzük. A számítás részleteit a 4.1/c – 4.1/h ábrák segítségével követhetjük. A tartó nyomatékábráját a 4.1/i ábrán adjuk meg.

Abban az esetben, ha a vizsgált rúd másik vége csuklós, az átviteli tényező értéke zérus, hiszen a csuklós rúdvégen nyomaték nem keletkezhet:

$$a = 0 \tag{4.2}$$

4.1.3 Elfordulási merevség

Azt a végnyomatékot, amely a rúdvégen működtetve ott egységnyi elfordulást hoz létre, elfordulási merevségnek nevezzük. Másképpen megfogalmazva: az elfordulási merevség a rúdvég egységnyi elfordításához szükséges nyomaték.



4.2 ábra. Elfordulási merevség, ha a rúd másik vége befogott.

Az elfordulási merevség értéke függ a rúd másik végének megtámasztási viszonyaitól is.

Tekintsük először azt az esetet, amikor a rúd másik vége befogott (4.2 ábra). Az átviteli tényezővel kapcsolatos és az előző pontban részletezett fejtegetés eredményeképpen tudjuk, hogy a *B* támasznál az *A* támasznál működtetett *M* nyomaték fele lép fel (4.2/b ábra). Így az *A* támasz elfordulását könnyen meghatározhatjuk:

$$\varphi_A = \frac{1}{EI}\left(\frac{M_A l}{2}\frac{2}{3} - \frac{M_A}{2}\frac{l}{2}\frac{1}{3}\right) = \frac{M_A l}{4EI}$$

A számításhoz szükséges nyomatékábrákat a 4.2/c, 4.2/d és 4.2/f ábrák tartalmazzák. A fenti összefüggésből a nyomaték értékére van szükségünk:

$$M_A = \frac{4EI}{l}\varphi_A$$

Az elfordulási merevség az egységnyi elforduláshoz tartozó nyomaték, tehát értékét a $\varphi_A = 1$ helyettesítéssel kapjuk meg és K-val jelöljük:

$$K = \frac{4EI}{l}$$

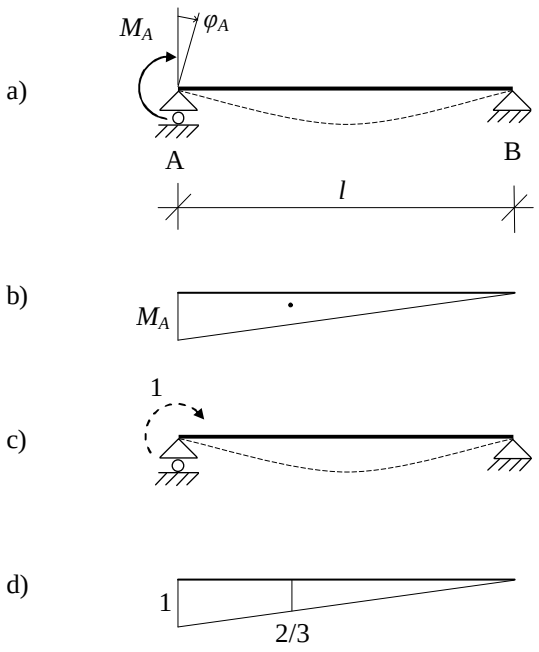
Ha az állandó merevségű rúd másik vége csuklós (4.3 ábra), a számítás hasonlóan hajtható végre (4.3/b, 4.3/c és 4.3/d ábrák). Az A támasz elfordulására ekkor a

$$\varphi_A = \frac{1}{EI}\frac{M_A l}{2}\frac{2}{3} = \frac{M_A l}{3EI}$$

és az elfordulási merevség értékére pedig a

$$K = \frac{3EI}{l}$$

összefüggést kapjuk.



4.3 ábra. Elfordulási merevség, ha a rúd másik vége csuklós.

Abban az esetben, amikor a rúd másik vége szabad, az elfordulási merevség értéke zérus (hiszen semmi sem akadályozza a rúd „egyik” végének elfordítását):

$$K = 0$$

Itt jegyezzük meg, hogy a gyakorlati számítások során – ha a szerkezet rúdjai azonos anyagból készülnek – szokás az elfordulási merevségek „egyszerűsített” értékével, az ún. merevségi számokkal (k) számolni. A merevségi számokat úgy kapjuk meg, hogy az elfordulási merevséget néggyel osztjuk és a rugalmassági modulus értéket egységnek vesszük. A merevségi szám így

$$k = \frac{I}{l}$$

a befogott, és

$$k = \frac{3}{4}\frac{I}{l}$$

a csuklós végű rúd esetén.

Tartószerkezeteink nagy része olyan, hogy egy-egy csomópontban több, esetenként különböző elfordulási merevséggel rendelkező rúd köt be. Ilyen esetekben a csomópont az elfordulási összmerevséggel jellemezhető. Egy csomópont elfordulási összmerevségén a csomóponthoz sarokmereven kapcsolt rudak csomóponti végei elfordulási merevségének összegét értjük. Másképpen megfogalmazva: az elfordulási összmerevség az a nyomaték, amely a csomópontot egységnyi elfordulásra kényszeríti.

4.1.4 Eltolódási merevség

Eltolódási merevség az a végnyomaték, amely akkor lép fel a rúdvégen, ha a két rúdvég között a rúdtengelyre merőleges irányú egységnyi eltolódást hozunk létre.

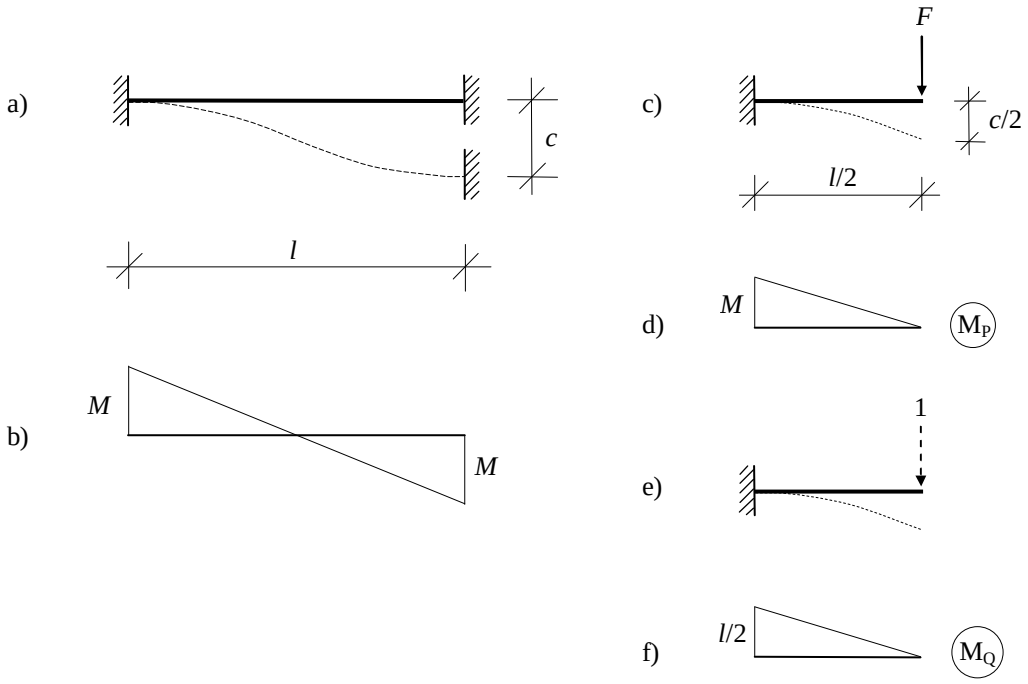
A rúd jellemzői mellett az eltolódási merevség értéke függ a vizsgált rúd végeinek megtámasztási viszonyaitól is.

Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor a rúd mindkét vége befogott (4.4/a ábra). A rúd merevsége EI állandó, hossza l, és a rúdvégek között c nagyságú eltolódás-különbséget hozunk létre.

Határozzuk meg először, hogy mekkora nyomaték keletkezik a rúdvégeken a c nagyságú eltolódás-különbség miatt. Ezt egy egyszerű fogással, a tartó „felének” vizsgálatával tehetjük meg. A vizsgálat tárgyát képező nyomatékábra (4.4/b ábra) fele ugyanis megegyezik az ismeretlen, de M nagyságú nyomatékot okozó, F erővel terhelt konzol (az eredeti tartó “fele” a 4.4/c ábrán) nyomatékábrájával (4.4/d ábra).

A konzol végpontjának $c/2$ nagyságú eltolódását munkatétellel, a 4.4/d és 4.4/f ábrák segítségével számíthatjuk ki:

$$\frac{c}{2} = \frac{1}{EI} M \frac{l}{2}\frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{2}{3} = \frac{Ml^2}{12EI}$$



4.4 ábra. Eltolódási merevség, ha a rúd mindkét vége befogott.

A fenti összefüggésből a keresett nyomaték értéke:

$$M = \frac{6EI}{l^2} c$$

Egységnyi eltolódás-különbség ($c = 1$) esetén ez az összefüggés a μ eltolódási merevség értékét szolgáltatja:

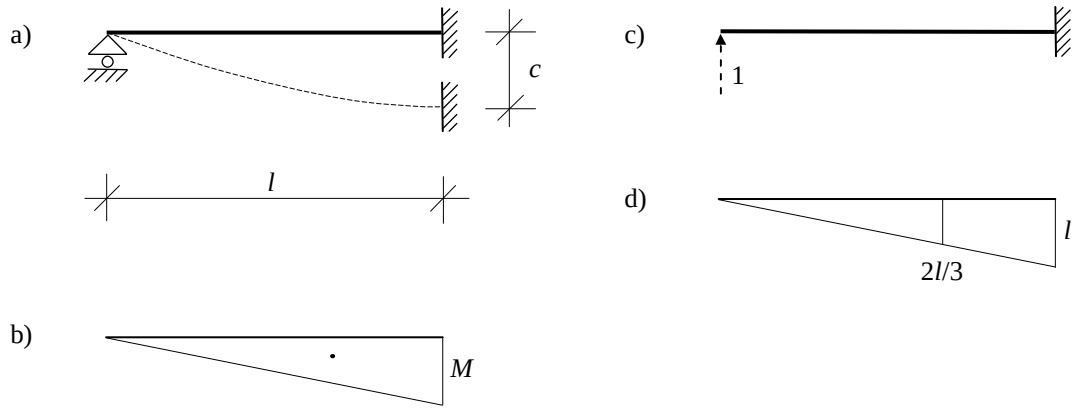
$$\mu = \frac{6EI}{l^2}$$

Az egyik végén befogott, másik végén csuklósan megtámasztott rúd (4.5/a ábra) esetében az eltolódás-különbség és a rúdvégi nyomaték közötti kapcsolatra hasonló levezetéssel a

$$c = \frac{1}{EI} M \frac{l}{2} \frac{2}{3} l = \frac{Ml^2}{3EI}$$

összefüggést kapjuk, ahonnan a keresett nyomaték:

$$M = \frac{3EI}{l^2} c$$



4.5 ábra. Eltolódási merevség, ha a rúd egyik vége csuklós, másik vége befogott.

A levezetéshez szükséges nyomatékábrák a 4.5/b-d ábrákon találhatók.

Egységnyi eltolódás-különbség esetén adódik az egyik végén befogott, másik végén csuklósan megtámasztott rúd eltolódási merevsége:

$$\mu = \frac{3EI}{l^2}$$

A most levezetett összefüggések alapján rendelkezésünkre állnak a későbbiekben szükséges eltolódási merevségek értékei. Ezen túlmenően, az

$$M = \mu c$$

összefüggés segítségével és az eltolódási merevségek ismeretében meghatározhatjuk az elemi tartók rúdvégeinek tetszőleges c eltolódás-különbségéhez tartozó rúdvégi nyomatékát is.

Az alapfogalmak ismeretében a következőkben azt nézzük meg, hogy hogyan vizsgálhatók határozatlan szerkezetek a mozgásmódszer segítségével.

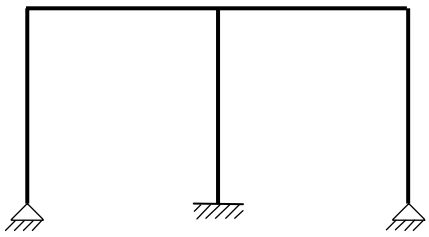
4.2 A mozgásmódszer alapelve és a számítás végrehajtásának menete

A mozgásmódszer segítségével a vizsgálatot úgy hajtjuk végre, hogy a tartót először elemi tartók és csomópontok halmazára bontjuk. A felbontásnál két – esetenként egymásnak ellentmondó – szempontot kell szem előtt tartani:

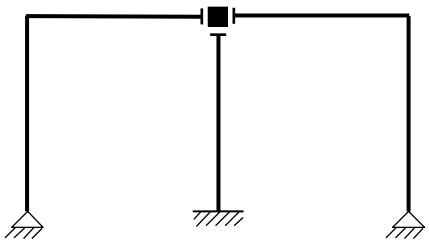
a) az elemi tartók minél egyszerűbbek legyenek,
b) a csomópontok száma minél kevesebb legyen.

A 4.6/a ábrán bemutatunk egy egyszerű rúdszerkezetet. A szerkezetet felbonthatjuk két törtvonalú és egy egyenes tengelyű elemi tartóra (4.6/b ábra), vagy öt egyenestengelyű tartóra (4.6/c ábra). Az előbbi felbontás előnye a kisebb számú elemi tartó és csomópont, hátránya viszont az, hogy a törttengelyű elemi tartók vizsgálata önmagában is bonyolult feladat lehet. Az utóbbi felbontás előnye az, hogy igen könnyen kezelhető elemi tartókat tartalmaz, hátránya viszont a viszonylag nagy számú elemi tartó és csomópont. Látható, hogy az elemi tartókra történő felbontás gondos, körültekintő munkát igényel. A következőkben mindig azt a felbontást alkalmazzuk, amely egyenes tengelyű, állandó tehetetlenségi nyomatékú elemi tartókat eredményez. Ily módon eljárva az elemi tartók alábbi két esetét kell figyelembe venni (4.7 ábra):

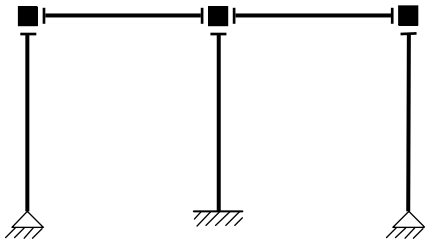
(a) mindkét végén mereven befogott tartó,
(b) egyik végén mereven befogott, másik végén csuklósan megtámasztott tartó.



a) határozatlan tartó



b) felbontás elemi tartókra I.



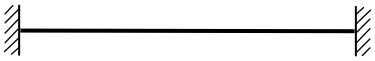
c) felbontás elemi tartókra II.

4.6 ábra. Mozgásmódszer: lehetséges elemi tartók és csomópontok.

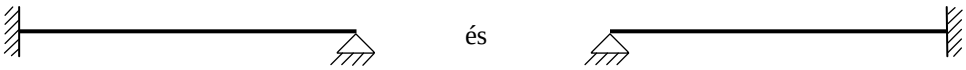
A fent részletezett módon előállított elemi tartók halmazának vizsgálata során először feltételezzük, hogy a csomópontok nem mozdulnak el. Ekkor az elemi tartók a rájuk háruló terheket vagy mindkét végén befogott tartóként, vagy egyik végén csuklós és a másik végén befogott tartóként hordják és a megfelelő kényszererőket hárítják át a

csomópontokra. Hajlított és tengelyirányban is terhelt elemi tartókon a normálerő okozta hosszváltozást a hajlítási alakváltozás mellett elhanyagoljuk.

a) mindkét végén befogott tartó



b) egyik végén befogott, másik végén csuklós tartó



4.7 ábra. Elemi tartók.

Ha az első feltételezésünknek megfelelően a csomópontok nem mozdulnak el, akkor a csomópontokban nincs egyensúly. A csomópontok egyensúlya azáltal áll helyre, hogy a csomópontok megfelelő mértékben elmozdulnak, a hozzájuk mereven csatlakozó rúdvégekkel együtt. Ez a rudakra elfordulások és eltolódások formájában kinematikai terhet gyakorol, melynek hatására a rudak meggörbülnek és így végeiken kényszererők keletkeznek. E kényszererők ellentettjei adódnak át a csomópontokra, ahol így helyreállhat az egyensúly. A csomóponti egyensúly létrejöttének feltétele így az, hogy a csomóponti elmozdulások kielégítsék az egyensúlyi feltételeket.

A mozgásmódszer alkalmazása során tehát a statikai határozatlanság miatt hiányzó egyenleteket olyan feltételi egyenletek formájában fogalmazzuk meg, amelyek csomóponti egyensúlyi feltételeket fejeznek ki. Az egyensúlyi feltételi egyenletrendszer az

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j + a_{i0} = 0 \qquad\qquad i = 1,2,...n$$

alakban írható és a szerkezet belső csomópontjainak egyensúlyát fejezi ki. Az egyenletrendszer annyi egyensúlyi egyenletet tartalmaz, amennyi az egymástól független elmozdulásjellemzők száma.

Az egyenletek ismeretlenjei az x_j csomóponti elmozdulásjellemzők. Az a_{ij} egységtényező az i-edik csomóponti dinámkomponens (erő ill. nyomaték), amely akkor keletkezik, ha a j-edik csomóponti elmozduláskomponens értéke $x_j = 1$, a többi elmozduláskomponens pedig rendre zérus. Az a_{i0} terhelési tényező a külső terhekből az i-edik csomópontban keletkező dinámkomponens (erő ill. nyomaték). A feltételi egyenletrendszer – az erőmódszernél tapasztaltakhoz hasonlóan – az

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a_0} = 0$$

mátrixegyenlet formájában írható fel, amelynek megoldása – az ismeretlen elmozduláskomponensek – a rendelkezésre álló számítógépes eljárások birtokában könnyen előállítható. A megoldás birtokában a szerkezet igénybevételeit a

$$C = C_0 + \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

szuperpozíciós képlettel lehet meghatározni, ahol C a keresett igénybevétel – nyomaték, nyíróerő, normálerő.

Itt jegyezzük meg, hogy a szerkezet nyomatékábrájának ismeretében a nyíróerő-ábra és normálerő-ábra az elemi tartók megoldása után közvetlenül is meghatározható. A gyakorlati számításoknál ez utóbbi megoldás terjedt el.

A fentiekből most már megállapíthatjuk, hogy a mozgásmódszer alkalmazása az erőmódszernél általában akkor előnyösebb, ha a szerkezet alakváltozásaira is szükség van és ha a szerkezet többszörösen határozatlan.

Végül összefoglaljuk a megoldás menetét:

1) A szerkezet felbontása elemi tartókra,
2) A feltételi egyenletek felírása és megoldása,
3) A szerkezet nyomatékábrájának előállítása az $M = M_0 + \Sigma M_j x_j$ szuperpozíciós képlet segítségével,
4) Az elemi tartók megoldása és a nyíróerő-ábra, valamint normálerő-ábra meghatározása az elemi tartók reakcióinak ismeretében.

4.3 Alkalmazási példa

A mozgásmódszerre levezetett összefüggések segítségével szerkesszük meg a 4.8/a ábrán vázolt tartó igénybevételi ábráit és határozzuk meg a B csomópont elmozdulásait.

A tartó B jelű belső csomópontja elfordulhat és vízszintesen eltolódhat. A feltételi egyenletrendszer tehát két egyenletből áll és a B csomópontra ható nyomatékok egyensúlyát, valamint a B csomópontra ható vízszintes erők egyensúlyát fejezi ki:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{B,i} = 0$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} F_{x,i} = 0$$

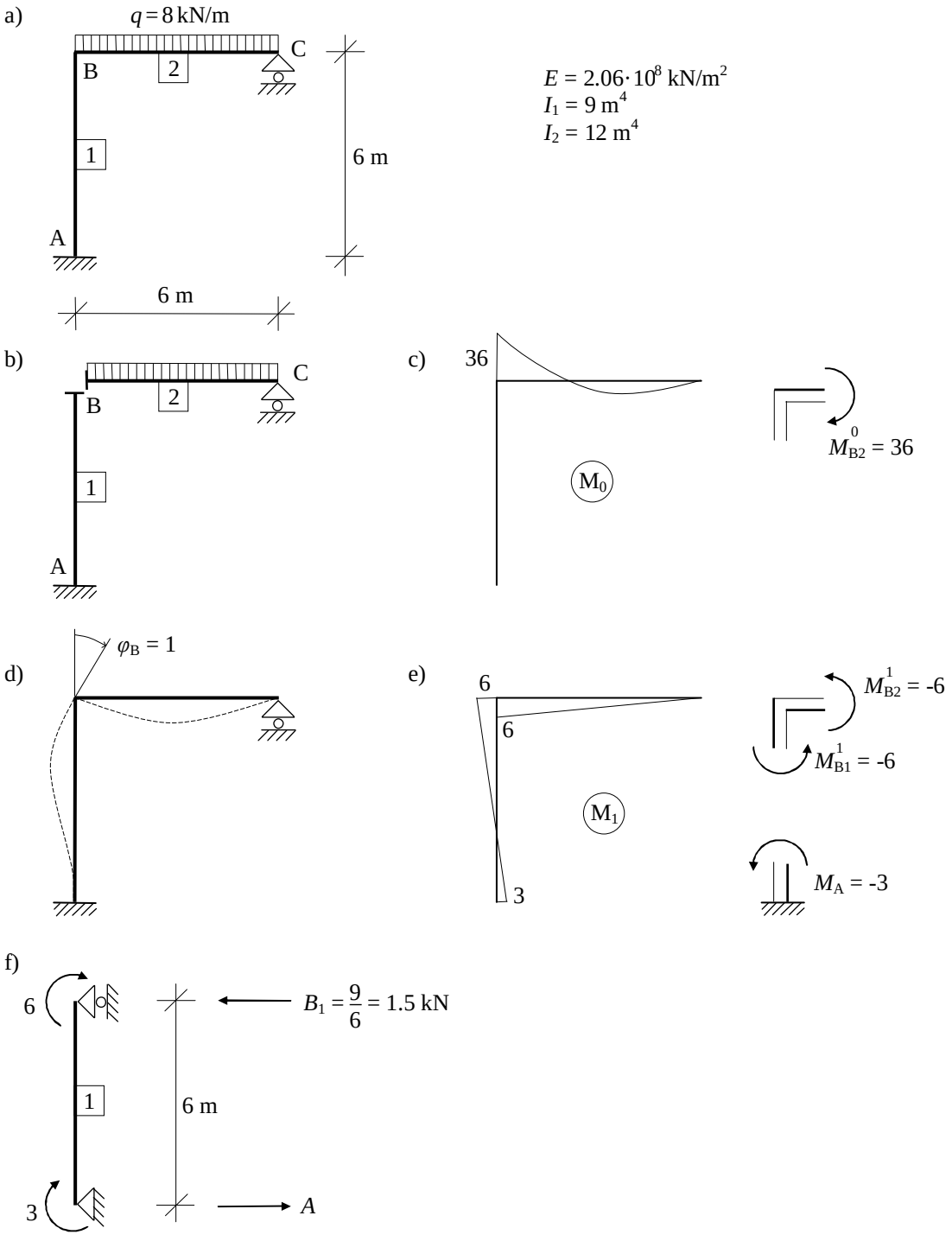
A B csomópontban nyomatékok és vízszintes erők az adott külső teherből, valamint a csomópont elfordulásából és vízszintes eltolódásából keletkeznek.

A feltételi egyenletek részletesebben az

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{10} = 0$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{20} = 0$$

alakban írhatók fel. Az a_{i0} terhelési tényezők a külső terhekből a *B* csomópontra jutó nyomatékot és vízszintes erőt, az a_{ij} egységtényezők pedig a csomópont egységnyi elfordításából és egységnyi vízszintes eltolódásából a *B* csomópontban keletkező nyomatékokat és vízszintes erőket jelentik.



4.8 ábra. Kilendülő tartó a számpéldához I.

Az egyenletekben szereplő x_1 és x_2 ismeretlenek a *B* csomópont tényleges elfordulása és vízszintes eltolódása. Az egyenletrendszer megoldásához először meg kell határozni a terhelési és egységtényezőket. Ehhez a *B* csomópontot elmozdulás- és elfordulásmentesen rögzítjük, és a szerkezetet elemi tartókra bontjuk.

Terhelési tényezők

Az elemi tartók (4.8/b ábra) közül csak a vízszintes gerenda egyenletesen megoszló terhéből jut a *B* csomópontra nyomaték

$$M_{B2}^0 = \frac{ql^2}{8} = \frac{8 \cdot 6^2}{8} = 36\,\text{kNm}$$

így ez a terhelési tényező értéke is:

$$a_{10} = M_{B2}^0 = 36\,\text{kNm}$$

Az elemi tartókon a külső teherből keletkező M_0 nyomatékábra a 4.8/c ábrán látható. Az adott külső teherből a *B* csomópontra nem jut vízszintes erő, így

$$a_{20} = 0$$

Egységtényezők

A számítási munka egyszerűsítése érdekében a rugalmassági tényező értékét egységnek vesszük. Ez az eljárás nem befolyásolja a tartó igénybevételeinek értékét, hiszen a rugalmassági tényező a számítások során egyszerűsítés folytán kiesik. Ha a tényleges elmozdulások értékeire is szükségünk van, akkor viszont az x_1 és x_2 értékeit a rugalmassági tényező valódi értékével el kell osztani.

A *B* csomópont az M_0 nyomatékábra tanúsága szerint nincs egyensúlyban és az ott fellépő kiegyensúlyozatlan nyomaték következtében elfordul. Az elfordulás mértékét még nem ismerjük, így a csomópontot $\varphi = 1$ értékkel elfordítjuk (4.8/d ábra). A keletkező csomóponti nyomaték (M_1) értékeit rendre a 4.1 pontban az elfordulási merevségre és az átviteli tényezőre levezetett összefüggések segítségével határozhatjuk meg:

$$M_{B1}^1 = \frac{4EI_1}{l_1} = \frac{4 \cdot 9}{6} = -6\,\text{kNm}$$

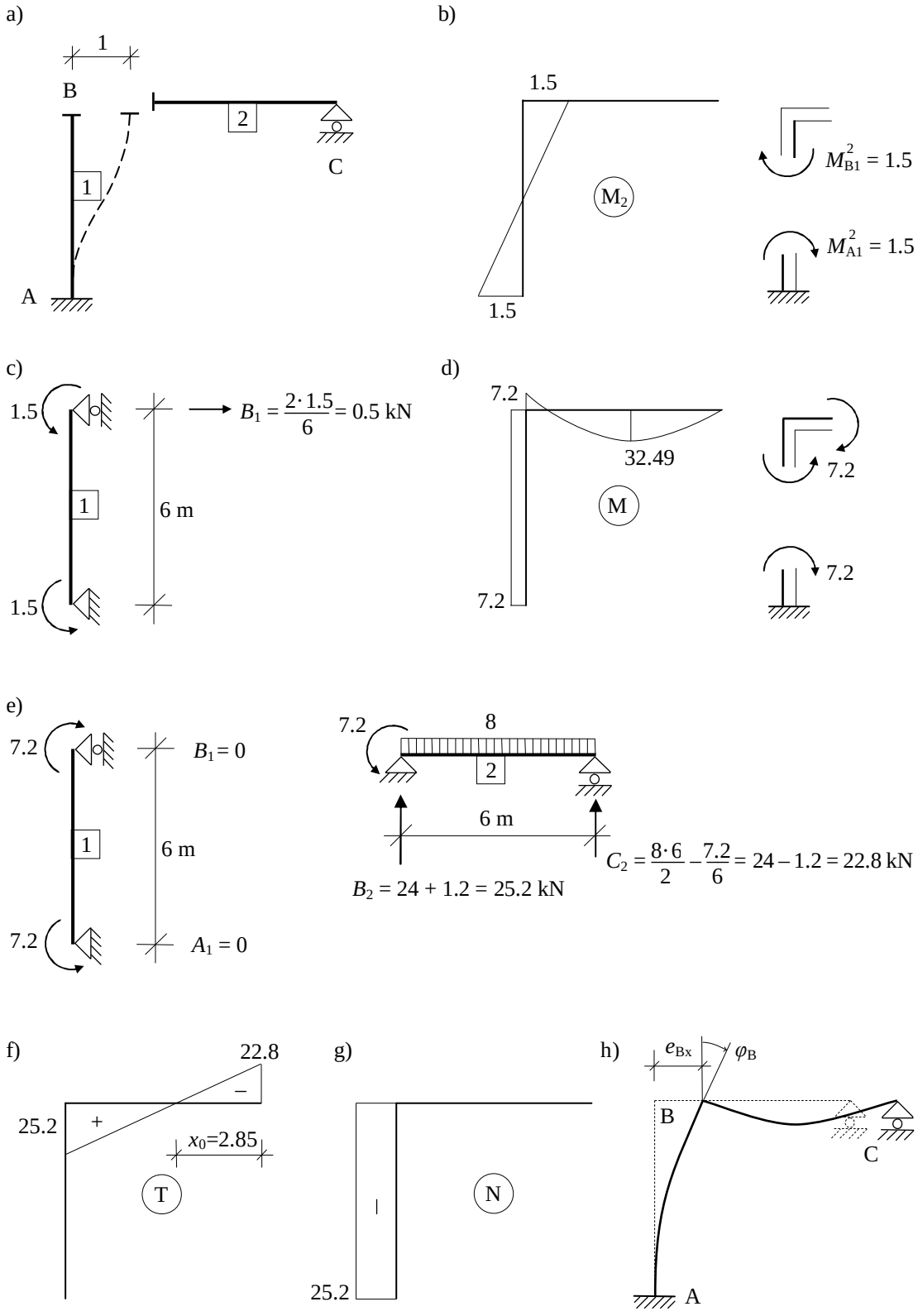
$$M_{A1}^1 = 0.5 M_{B1}^1 = -3\,\text{kNm}$$

$$M_{B2}^1 = \frac{3EI_2}{l_2} = -\frac{3 \cdot 12}{6} = -6\,\text{kNm}$$

Az egységnyi elfordításból a *B* csomópontban keletkező nyomatékok összege az

$$a_{11} = \sum_{i=1}^{2} M_{B,i}^1 = -6 - 6 = -12\,\text{kNm}$$

egységtényezőt adja.



4.9 ábra. Kilendülő tartó a számpéldához II.

Az egységnyi elfordítás miatt a B csomópontra vízszintes erő is jut. Ez az erő az a_{21} egységtényező. Értéke az 1. jelű elemi tartó B_1 reakcióerejének ellentettje:

$$a_{21} = -B_1 = -(-1.5) = 1.5\,\text{kN}\ (\rightarrow)$$

A B_1 reakcióerő számítását a 4.8/e ábra alapján a 4.8/f ábrán végeztük el.

Az a_{21} =1.5 kN vízszintes erő zérustól különböző volta arra figyelmeztet, hogy – még vízszintes külső erő jelenléte nélkül is – a vizsgált szerkezet vízszintesen elmozdul. Szükség van tehát – a tényleges vízszintes eltolódás ismerete hiányában – a tartó egységnyi vízszintes kilendítésére. Az elemi tartók rendszerének egységnyi kilendítéséből (4.9/a ábra) keletkező M_2 nyomatékábra a 4.9/b ábrán látható. A nyomatékábra jellemző értékei a 4.1.4 pontban levezetett eltolódási merevségek felhasználásával és E = 1 kN/m^2 feltételezéssel rendre

$$M_{B,1}^2 = \frac{6EI_1}{l_1^2} = \frac{6 \cdot 9}{6^2} = 1.5\ \text{kNm}$$

$$M_{A,1}^2 = \frac{6EI_1}{l_1^2} = \frac{6 \cdot 9}{6^2} = 1.5\ \text{kNm}$$

Az egységnyi kilendülés következtében a B csomópontra az $M_{B,1}^2$ nyomaték jut. Ez a nyomaték egyben az a_{12} egységtényező:

$$a_{12} = \sum_{i=1}^{2} M_{B,i}^2 = 1.5\ \text{kNm}$$

Az egységnyi kilendülés miatt a B csomópontban keletkező vízszintes erő adja az a_{22} egységtényezőt. Ez az erő az 1. jelű elemi tartó B támasznál keletkező reakcióerejének ellentettje:

$$a_{22} = -B_1 = -0.5 = -0.5\ \text{kN}$$

A számítást a 4.9/b ábrán található M_2 nyomatékábra alapján a 4.9/c ábrán végeztük el. Itt jegyezzük meg, hogy a B csomópontban működő vízszintes erők (a_{21} és a_{22}) előjele akkor pozitív, ha irányuk megegyezik a vízszintes kilendülés irányával.

Az egység- és terhelési tényezők ismeretében felírhatjuk a B csomópont egyensúlyát kifejező feltételi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} -12x_1 \quad &+1.5x_2 \quad +36 \quad = \quad 0 \\ 1.5x_1 \quad &-0.5x_2 \qquad\quad = \quad 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{aligned} x_1 \quad &= \quad 4.8 \\ x_2 \quad &= \quad 14.4 \end{aligned}$$

megadja a B csomópont elmozdulásainak nagyított értékeit. A vizsgált tartó

csomópontjaiban keletkező nyomatékok (4.9/d ábra) az

$$M = M_0 + M_1 x_1 + M_2 x_2$$

összefüggés alapján számíthatók ki:

$$\begin{array}{lcrcrcl} M_{A1} & = & & -3\cdot 4.8 & +1.5\cdot 14.4 & = & 7.2 \quad \text{kNm} \\ M_{B1} & = & & -6\cdot 4.8 & +1.5\cdot 14.4 & = & -7.2 \quad \text{kNm} \\ M_{B2} & = & 36 & -6\cdot 4.8 & & = & 7.2 \quad \text{kNm} \end{array}$$

A 4.9/d ábrán a nyomatékábra helyes megrajzolásához jól használható csomóponti vázlatokat is feltüntettünk, a húzott szál megjelölésével.

A 4.9/e ábrán vázolt elemi tartókon az eredeti külső teher és a most már ismert rúdvégi nyomatékok (a csomóponti nyomatékok ellentettjei) segítségével meghatározhatók a reakcióerők.

Az elemi tartókra működő erők ismeretében a tartó nyíróerő-ábrája könnyűszerrel megszerkeszthető (4.9/f ábra).

A normálerő-ábrát a *B* csomópontban ébredő reakcióerők ellentettjeinek felhasználásával állíthatjuk elő. A *B* csomópontban a 2. jelű gerendára nem adódik át vízszintes erő, mert a B_1 reakcióerő zérus (4.9/e ábra). Nem is adódhatna, hiszen a *C* görgős megtámasztásnál nem tudna a megtámasztó szerkezetre átadódni. A *B* csomópontban működő 25.2 kN lefelé mutató erő (a B_2 reakcióerő ellentettje) az 1. jelű oszlopot nyomja. A normálerő-ábra a 4.9/g ábrán látható.

Ki kell még számítanunk a *B* csomópont elmozdulásait. Ez igen egyszerűen a csomóponti elfordulás és eltolódás nagyított értékeinek felhasználásával történhet. A csomópont tényleges elfordulása

$$\varphi_B = \frac{x_1}{E} = \frac{4.8}{2.06\cdot 10^8} = 2.33\cdot 10^{-8}\ \text{rad} = 2.33\cdot 10^{-6}\ \%\ [\circlearrowright]$$

a vízszintes eltolódás pedig

$$u_{Bx} = \frac{x_2}{E} = \frac{14.4}{2.06\cdot 10^8} = 6.99\cdot 10^{-8}\ \text{m} = 6.99\cdot 10^{-5}\ \text{mm}\ (\rightarrow)$$

A tartó nagyított alakváltozásait a 4.9/h ábra mutatja.

A feltűnően kis elmozdulások (φ_B és u_{Bx}) oka az, hogy az egyszerű számítási munka érdekében aránytalanul nagy tehetetlenségi nyomatékokkal számoltunk.

4.4 Egy speciális megoldási lehetőség: a nyomatékosztás módszere

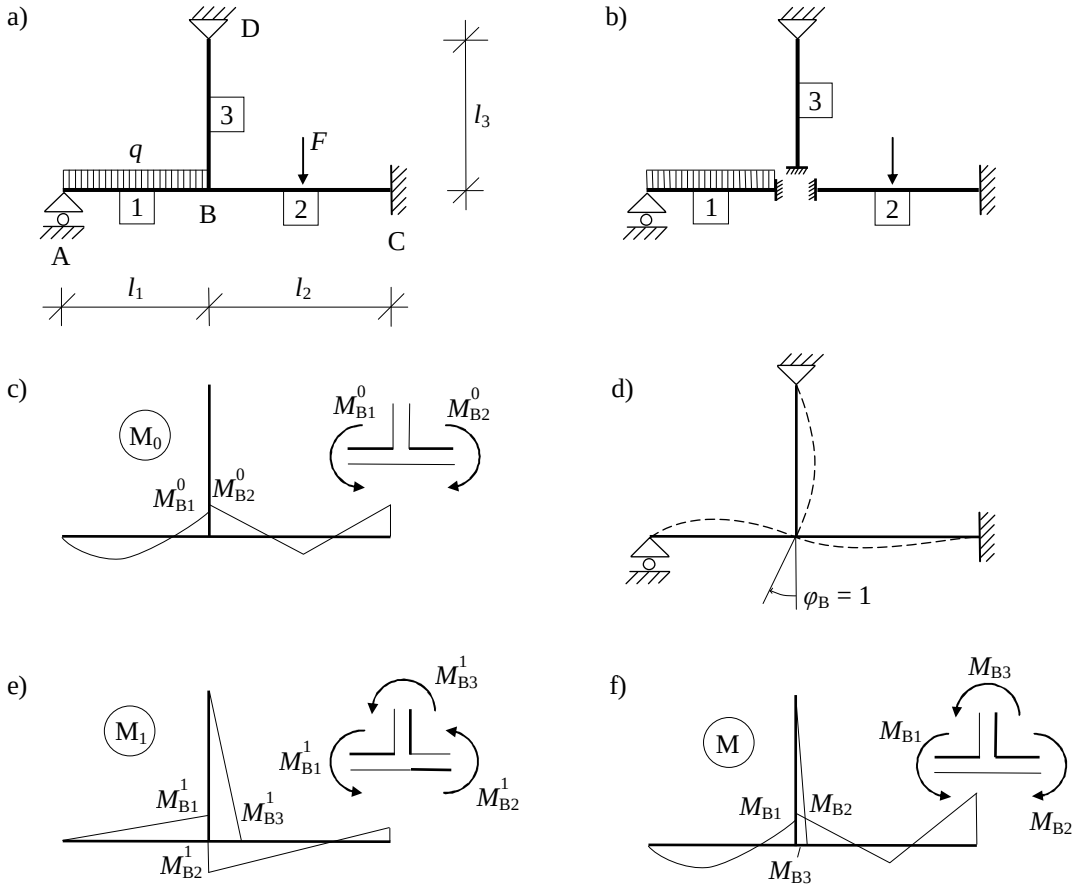
Tekintsük a 4.10/a ábrán vázolt paraméteresen megadott, három rúdból álló tartót, ún. rúdcsillagot. Rúdcsillagnak nevezzük a két vagy több rúdból álló olyan síkbeli keretszerkezetet, melynek rúdjai egy közös pontból, az ún. belső csomópontból sugárszerűen ágaznak ki és a rudak külső végei befogottak vagy csuklóval megtámasztottak. (A 6.1.2 pontban részletesebben is foglalkozunk rúdcsillaggal.)

Állítsuk elő a tartó nyomatékábráját a mozgásmódszer elvei alapján. Az elemi tartókat a 4.10/b ábra tartalmazza. A külső terhekből az elemi tartókon keletkező M_0 nyomatékokat a 4.10/c ábrán adjuk meg. A B csomópontban keletkező nyomatékok összege a terhelési tényező:

$$a_0 = \sum_{i=1}^{3} M_{Bi}^0 = M_{B1}^0 + M_{B2}^0$$

A B csomópont egyensúlya csak úgy biztosítható, ha a csomópont elfordul (4.10/d ábra). Az egységnyi elfordulás következtében keletkező M_1 nyomatékokat a 4.10/e ábrán tüntetjük fel. Az egységnyi elfordulás miatt a B csomópontban keletkező nyomatékok összege az a_1 egységtényező:

$$a_1 = \sum_{i=1}^{3} M_{Bi}^1 = M_{B1}^1 + M_{B2}^1 + M_{B3}^1$$



4.10 ábra. Rúdcsillag.

Az

$$a_1 x_1 + a_0 = 0$$

feltételi egyenlet megoldása után, az

$$x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$$

elfordulás ismeretében a tartó nyomatékábrája az

$$M = M_0 + M_1 x_1$$

szuperpozíciós összefüggés segítségével állítható elő (4.10/f ábra). Vizsgáljuk most meg részletesen, hogyan számíthatók ki a nyomatékábra jellemző belső csomóponti értékei. Határozzuk meg először az M_{B1} nyomatékot:

$$M_{B1} = M_{B1}^0 + M_{B1}^1 x_1 = M_{B1}^0 + M_{B1}^1 \frac{a_0}{a_1}$$

A fenti egyenletben szereplő M_{B1}^1 kifejezés az 1. jelű rúd elfordulási merevsége, az a_1 egységtényező a B csomópont elfordulási összmerevsége, az a_0 terhelési tényező pedig a B csomópontra jutó összes külső nyomaték $\Sigma M_{B,i}^0$. Ezek figyelembevételével – és az elfordulási merevségek k „egyszerűsített" értékével dolgozva – a fenti egyenlet az

$$M_{B1} = M_{B1}^0 + \frac{k_1}{\sum_{i=1}^{3} k_i} \sum_{i=1}^{3} M_{Bi}^0$$

alakot ölti. A fenti eljárást a B csomópontba bekötő másik két rúdvégre alkalmazva az

$$M_{B2} = M_{B2}^0 + \frac{k_2}{\sum_{i=1}^{3} k_i} \sum_{i=1}^{3} M_{Bi}^0$$

$$M_{B3} = M_{B3}^0 + \frac{k_3}{\sum_{i=1}^{3} k_i} \sum_{i=1}^{3} M_{Bi}^0$$

összefüggéseket kapjuk.

A vizsgálat tárgyát képező egy belső csomóponti mozgásjellemzővel bíró szerkezet esetében tehát a tartó végleges csomóponti nyomatékait a mozgásmódszerre jellemző feltételi egyenlet megoldása nélkül is előállíthatjuk. Bármely csomóponti rúdvég végleges nyomatékát megkapjuk úgy, hogy az adott rúd külső terhéből a csomópontra jutó nyomatékhoz (M_{Bi}^0) hozzáadjuk a csomóponti összes külső nyomaték (ΣM_{Bi}^0) bizonyos hányadát ($k_i / \Sigma k_i$-szorosát). Ez az eljárás a nyomatékosztás módszere, amely a fenti egy belső csomóponti mozgásjellemzővel rendelkező szerkezetnél azonos a mozgásmódszerrel. A nyomatékosztás módszerével azonban nem csak az itt bemutatott egyszerű szerkezet-típusok vizsgálhatók, hanem – bizonyos meggondolások figyelembevételével – bonyolultabb, több elmozdulásjellemzővel rendelkező szerkezetek is megoldhatók. Ez lesz majd a 6. fejezet témája.

5

Gyakorló feladatok a mozgásmódszer alkalmazására

A statikai határozatlanság miatt "hiányzó" egyenletek a mozgásmódszernél csomóponti egyensúlyi egyenletek. A szerkezet elemi tartókra való felbontása után annyi csomóponti egyensúlyi egyenletet kell felírni, ahány belső csomóponti elmozdulás van. Az

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a_0} = 0$$

feltételi egyenletek tehát a belső csomópont(ok) egyensúlyát fejezik ki és megoldásuk azt adja meg, hogy az egyensúly milyen belső csomóponti elmozdulások mellett lehetséges. A belső csomóponti elmozdulások ismeretében a szerkezet nyomatékábrája szuperpozícióval – a külső terhekből és az elmozdulásokból keletkező nyomatékok előjeles összegzésével – határozható meg. Ezután már az elemi tartók reakcióerői kiszámíthatók és előállíthatjuk a szerkezet nyíróerő és normálerő ábráját.

5.1 Törttengelyű tartó

Meghatározandók az 5.1/a ábrán vázolt szerkezet igénybevételi ábrái. Legyen $I_1 = 2$ m^4, $I_2 = 1.5$ m^4 és E = állandó.

A szerkezetnek egy belső csomópontja van és ez a belső csomópont egyetlen elmozdulásra képes: elfordulhat. A csomópont x és y irányú eltolódását az A és a C támaszok gátolják. Ez azt jelenti, hogy egyetlen belső csomóponti egyensúlyi egyenletet kell felírni:

$$a_0 + a_1 x_1 = 0$$

Ez a csomópont elfordulásának megfelelő nyomatéki egyenlet a B csomópontban fellépő nyomatékok egyensúlyát fejezi ki. Az a_0 terhelési tényező az adott külső terhekből keletkező nyomatékok algebrai összegét, az a_1 egységtényező pedig a csomópont egységnyi elfordulásából keletkező nyomatékok algebrai összegét jelöli. A feltételi egyenlet megoldása megadja, hogy milyen x_1 csomóponti elfordulás mellett lesz a B csomópont egyensúlyban.

A szerkezet elemi tartóinak rendszerét az 5.1/b ábrán, az elemi tartókon a külső terhekből keletkező M_0 nyomatékábrát pedig az 5.1/c ábrán adjuk meg. A külső terhekből az A és B csomópontra ható kezdeti befogási nyomatékok (azaz a rúdvégi nyomatékok ellentettjei) a következők:

$$M_{0,A1} = -\frac{M}{l}(2a - \frac{3a^2}{l}) = -\frac{-10}{6}(2 \cdot 2 - \frac{3 \cdot 2^2}{6}) = 3.333\,\text{kNm}$$

$$M_{0,B1} = \frac{M}{l}(2b - \frac{3b^2}{l}) = \frac{-10}{6}(2 \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4^2}{6}) = 0.0\,\text{kNm}$$

$$M_{0,B2} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \cdot 5^2}{8} = 6.25\,\text{kNm}$$

Ezek a nyomatékok a csomópontot órairányban akarják elfordítani, ezért pozitív előjelűek.

A *B* csomóponton fellépő nyomatékok algebrai összege adja a terhelési tényező értékét:

$$a_0 = \sum_{i=1}^{2} M_{0,Bi} = 0 + 6.25 = 6.25\,\text{kNm}$$

A *B* csomópont egységnyi elfordításához tartozó tartóalakot az 5.1/d ábrán, a keletkező M_1 nyomatékábrát pedig az 5.1/e ábrán tüntetjük föl.

A *B* csomópont óramutató járásával megegyező egységnyi elfordításából az elemi tartókról a csomópontra jutó nyomatékokat az elfordulási merevségek segítségével számíthatjuk ki. Az értékek – E = 1 kN/m^2 feltételezéssel – a következők:

$$M_{1,B1} = -\frac{4EI_1}{l_1} = -\frac{4 \cdot 2}{6} = -1.333\,\text{kNm}$$

$$M_{1,B2} = -\frac{3EI_2}{l_2} = -\frac{3 \cdot 1.5}{5} = -0.9\,\text{kNm}$$

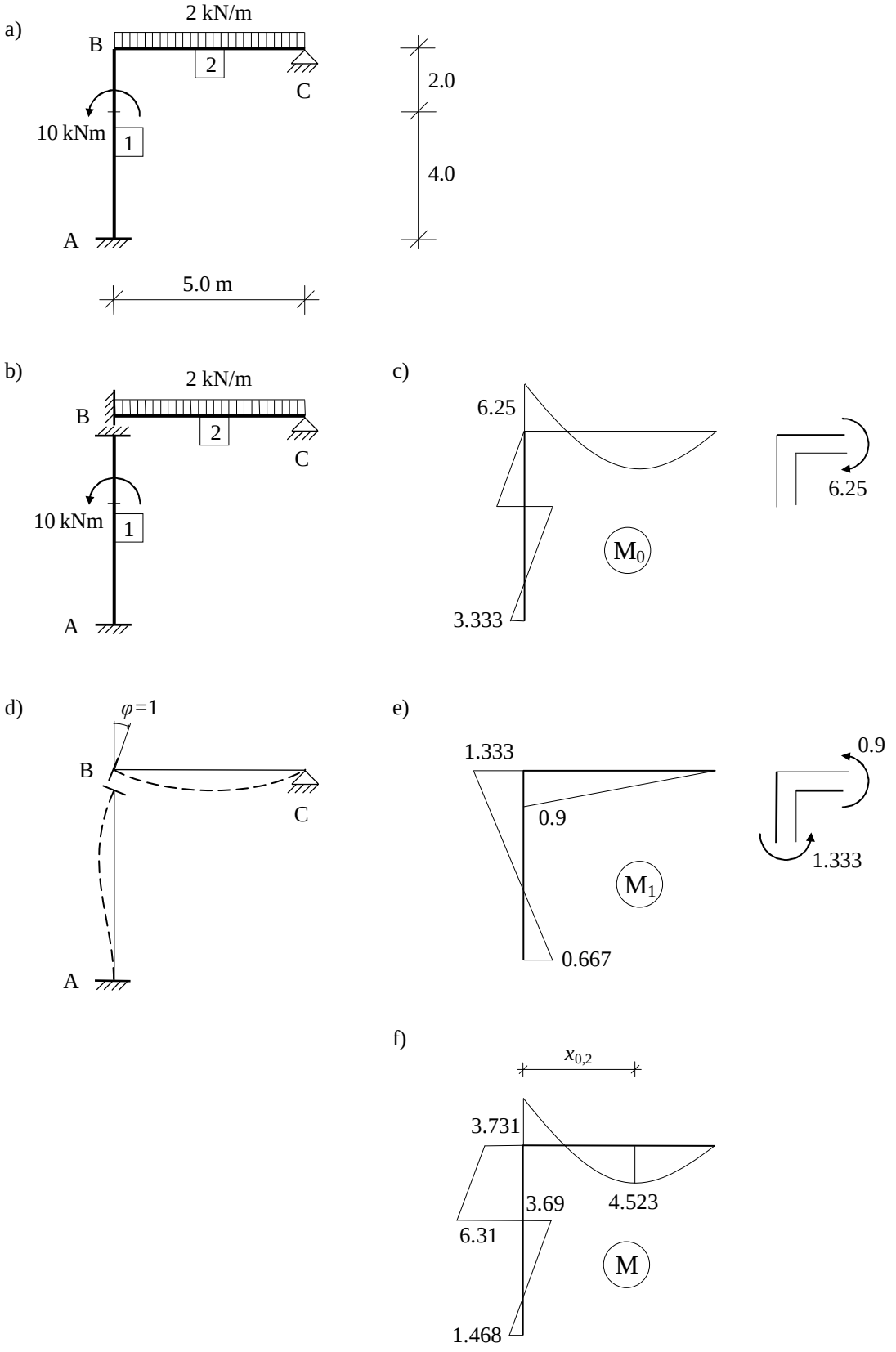
és

$$M_{1,A1} = \frac{M_{1,B1}}{2} = -0.667\,\text{kNm}$$

Ezek a nyomatékok a megfelelő csomópontot az óramutató járásával ellenkező irányban akarják elfordítani, ezért negatív előjelűek.

A *B* csomópontban keletkező nyomatékok összege adja az egységtényezőt:

$$a_1 = \sum_{i=1}^{2} M_{1,Bi} = -1.333 - 0.9 = -2.233\,\text{kNm}$$



5.1 ábra. Törttengelyű tartó.

A feltételi egyenlet

$$6.25 - 2.233x_1 = 0$$

megoldása szolgáltatja a *B* csomópont egyensúlyához szükséges elfordulás mértékét:

$$x_1 = 2.7985$$

A *B* csomópont elfordulásának ismeretében a szerkezet nyomatékábrája az adott terhekből és az egyensúlyhoz szükséges csomóponti elfordulásból keletkező csomóponti nyomatékok összegzésével állítható elő:

$$M = M_0 + M_1 x_1$$

Ezt a nyomatékábrát az

$$M_{A1} = 3.333 - 0.667 \cdot 2.7985 = 1.468\,\text{kNm}$$

$$M_{B1} = \quad -1.333 \cdot 2.7985 = -3.731\,\text{kNm}$$

$$M_{B2} = 6.25 \quad -0.9 \cdot 2.7985 = 3.731\,\text{kNm}$$

jellemző értékek felhasználásával az 5.1/f ábrán adjuk meg.

A nyíróerő és normálerő ábrák megrajzolásához először meg kell határozni az elemi tartók (5.2/a és 5.2/b ábra) reakcióerőit:

$$B_1 = \frac{10 - 3.731 + 1.468}{6} = 1.29\,\text{kN} \;\; [\rightarrow]; \qquad A_1 = 1.29\,\text{kN} \;\; [\leftarrow]$$

$$B_2 = \frac{2 \cdot 5}{2} + \frac{3.731}{5} = 5 + 0.746 = 5.746\,\text{kN} \;\; [\uparrow]; \qquad C_2 = 5 - 0.746 = 4.254\,\text{kN} \;\; [\uparrow]$$

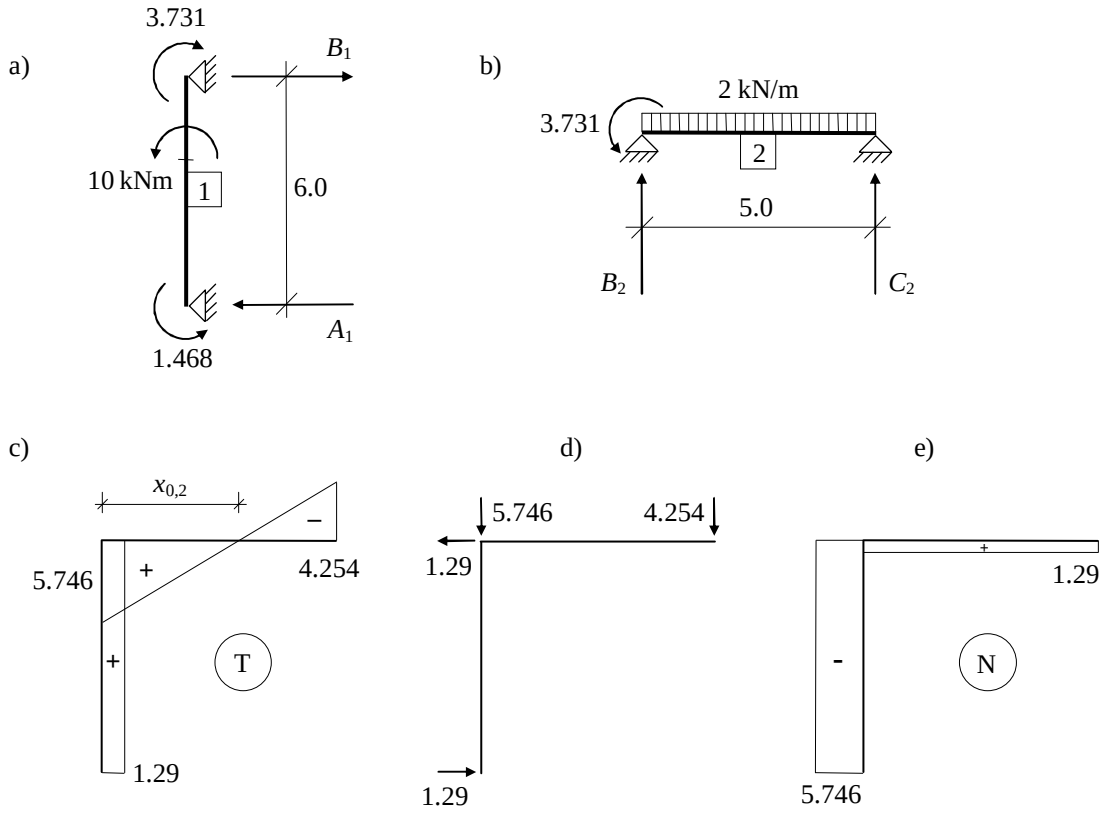
Az elemi tartók nyíróerő-ábráinak "összerajzolásával" megkapjuk a szerkezet nyíróerő-ábráját (5.2/c ábra).

A reakcióerők ismeretében meghatározhatók a nyomatékok „közbenső" értékei is:

$$M_1^{\text{k,bal}} = 1.468 - 4 \cdot 1.29 = -3.69\,\text{kNm}; \qquad M_1^{\text{k, jobb}} = 3.731 + 2 \cdot 1.29 = 6.31\,\text{kNm}$$

$$x_{0,2} = \frac{5.746}{2} = 2.873\,\text{m}; \qquad M_{2,\max} = -3.731 + 5.746 \cdot 2.873 - 2\frac{2.873^2}{2} = 4.523\,\text{kNm}$$

Az elemi tartók reakcióinak ellentettjei a *B* csomópontban a merőlegesen csatlakozó tartókon keresztül normálerőkként, az *A* és *C* támaszoknál pedig közvetlenül adódnak át a földre (5.2/d ábra). A *B* csomópontnál fellépő erők segítségével előállítható a szerkezet normálerő-ábrája (5.2/e ábra).



5.2 ábra. Törttengelyű tartó. Elemi tartók; T- és N-ábra.

5.2 Kilendülő rúdcsillag

Határozzuk meg az 5.3/a ábrán vázolt rúdcsillag igénybevételi ábráit és a *B* csomópont elmozdulásait. Legyen $I_1 = 4I_0$, $I_2 = I_0$, $I_3 = 2I_0$, $I_0 = 10^{-4}$ m^4 és $E = 2.06 \cdot 10^8$ kN/m^2.

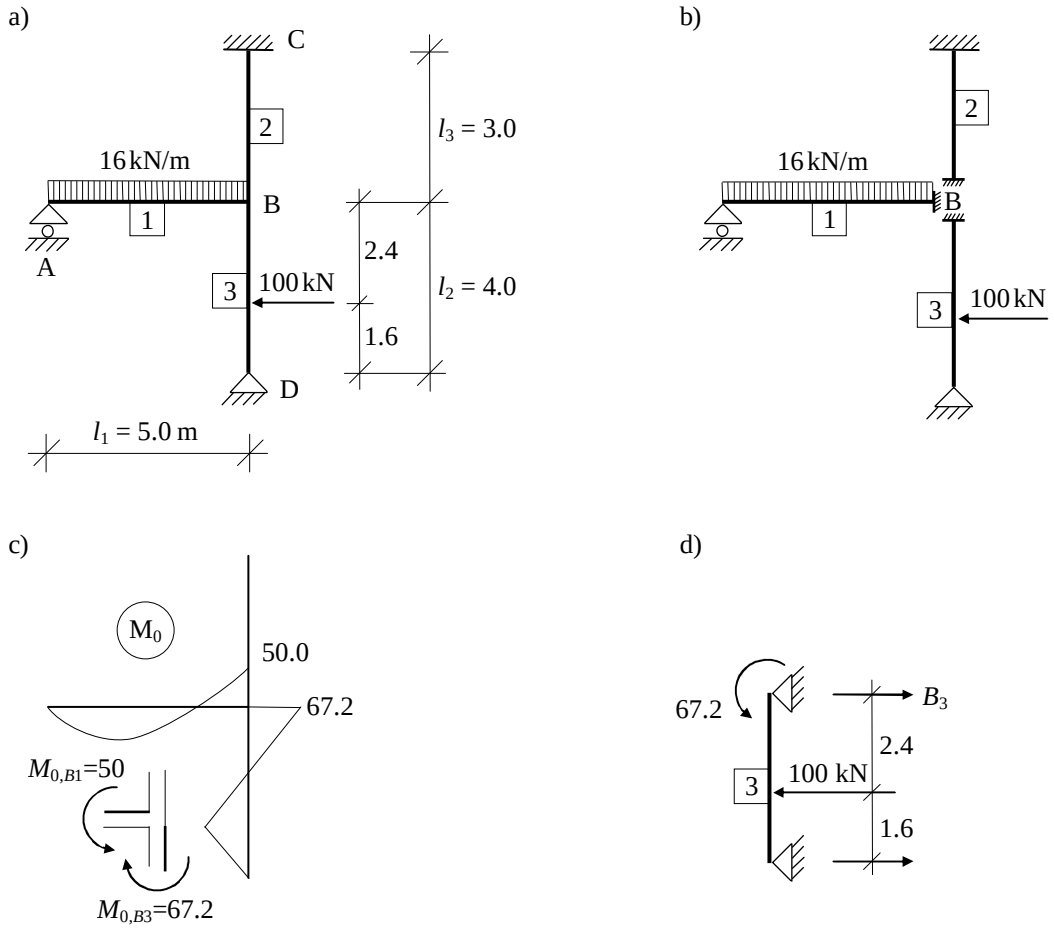
A háromszorosan határozatlan rúdcsillag egyetlen belső csomópontja elfordulhat és vízszintesen eltolódhat. Két egyensúlyi egyenletre van tehát szükség: a *B* csomópontra ható nyomatékok egyensúlyát kifejező

$$\sum_{i=1}^{3} M_i = 0$$

nyomatéki egyenletre és a *B* csomópontra ható vízszintes erők egyensúlyát kifejező

$$\sum_{i=1}^{3} F_{x,i} = 0$$

vízszintes vetületi egyenletre.



5.3 ábra. Kilendülő rúdcsillag.

A *B* csomópontban erők és nyomatékok a külső teherből, a csomópont elfordulásából és vízszintes eltolódásából keletkeznek. Ennek megfelelően a fenti egyensúlyi egyenletek részletesebben az

$$a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$$

$$a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0$$

alakban írhatók fel. E feltételi egyenletrendszer megoldásához – a *B* csomópont elfordulásának és vízszintes eltolódásának meghatározásához – elő kell állítani a terhelési tényezőket (a_{i0}) és az egységtényezőket (a_{ij}). A következőkben ezt mutatjuk be.

Terhelési tényezők

Az elemi tartók (5.3/b ábra) rúdvégeiről a külső terhekből a *B* csomópontra jutó nyomatékok

$$M_{0,B1} = -\frac{ql^2}{8} = -\frac{16 \cdot 5^2}{8} = -50\ \text{kNm}, \qquad M_{0,B2} = 0$$

$$M_{0,B3} = \frac{Fab}{2l^2}(l+a) = \frac{100 \cdot 1.6 \cdot 2.4}{2 \cdot 4^2}(4+1.6) = 67.2\ \text{kNm}$$

összege az a_{10} terhelési tényezőt adja:

$$a_{10} = \sum_{i=1}^{3} M_{0,Bi} = -50 + 67.2 = 17.2\ \text{kNm}$$

Az elemi tartókon a külső terhekből keletkező M_0 nyomatékok ábrája az 5.3/c ábrán látható.

A külső terhelésből a B csomópontra jutó vízszintes erő értéke az a_{20} terhelési tényezőt adja. Ez az erő a 3. jelű elemi tartó B_3 reakcióerejének ellentettje (5.3/d ábra):

$$a_{20} = -B_3 = \frac{100 \cdot 1.6}{4} + \frac{67.2}{4} = 56.8\,\text{kN} \quad [\leftarrow]$$

Egységtényezők

A számítási munka egyszerűsítése érdekében a következőkben a tehetetlenségi nyomatékok arányaival számolunk – elhagyjuk az $I_o=10^{-4}$ szorzótényezőt – és a rugalmassági tényező értékét egységnek vesszük. Így a B csomópont elmozdulásainak nagyított értékeit kapjuk meg. Ez elegendő az igénybevételek meghatározásához, de a tényleges elmozdulások kiszámításánál a valódi értékekkel kell majd számolni.

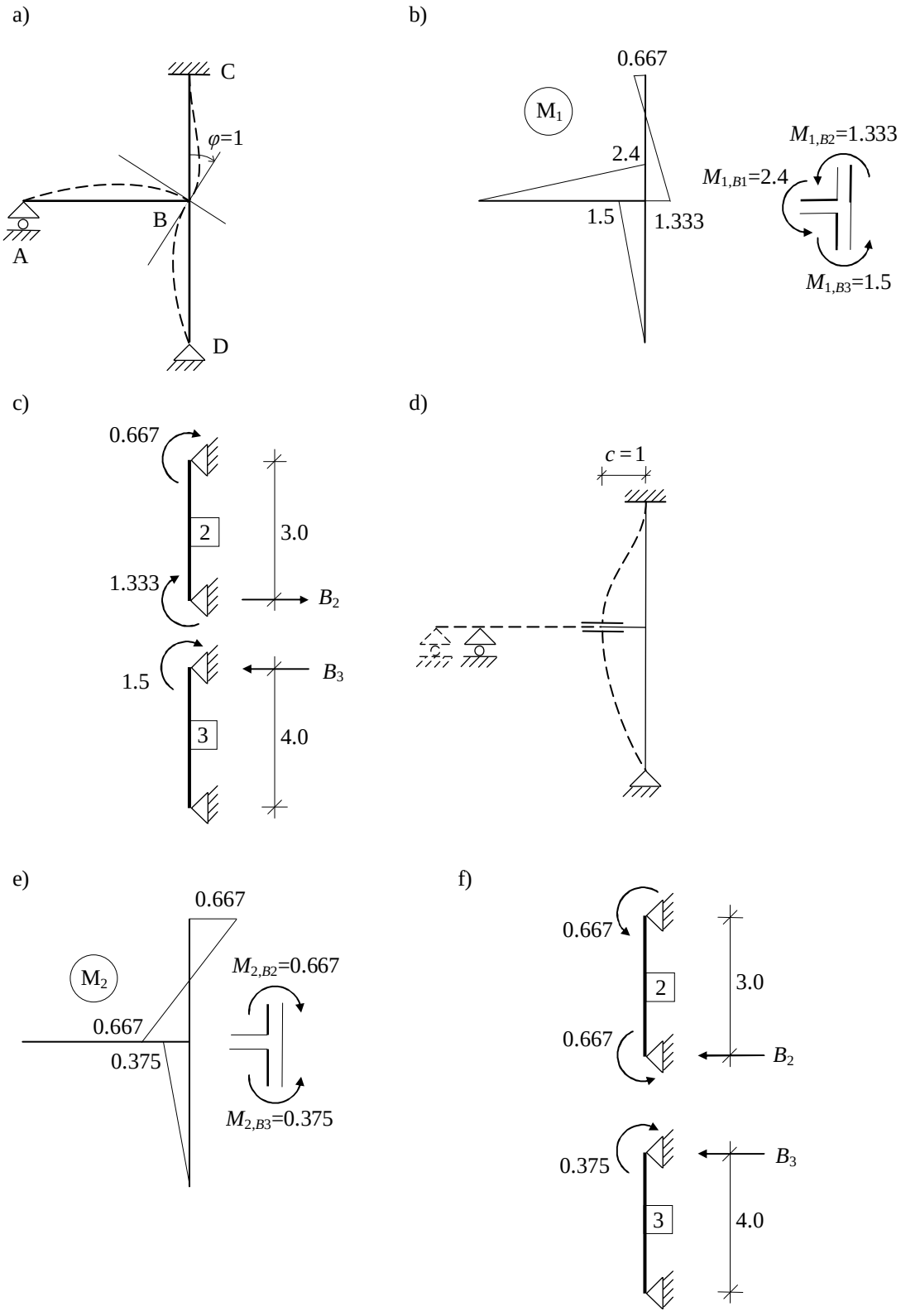
A B csomópont egységnyi elfordításából (5.4/a ábra) keletkező M_1 nyomatékábrát az 5.4/b ábrán vázoltuk. A jellemző értékek rendre

$$M_{1,B1} = -\frac{3EI_1}{l_1} = -\frac{3 \cdot 4}{5} = -2.4\ \text{kNm}$$

$$M_{1,B2} = -\frac{4EI_2}{l_2} = -\frac{4 \cdot 1}{3} = -1.333\ \text{kNm}$$

$$M_{1,B3} = -\frac{3EI_3}{l_3} = -\frac{3 \cdot 2}{4} = -1.5\ \text{kNm}$$

$$M_{1,C2} = \frac{M_{1,B2}}{2} = -0.667\ \text{kNm}$$



5.4 ábra. Kilendülő rúdcsillag. Egységnyi elfordítás, egységnyi eltolás.

Az egységnyi elfordulásból a *B* csomóponton keletkező nyomatékok összege az

$$a_{11} = \sum_{i=1}^{3} M_{1,Bi} = -2.4 - 1.333 - 1.5 = -5.233\,\text{kNm}$$

egységtényezőt adja.

Az egységnyi elfordítás miatt a *B* csomóponton keletkező vízszintes erő az a_{21} egységtényezőt szolgáltatja. Ez az erő a 2. és 3. jelű elemi tartók *B* támasznál ébredő reakcióerői összegének ellentettje:

$$a_{21} = -(B_2 + B_3) = -\left(\frac{1.333 + 0.667}{3} - \frac{1.5}{4}\right) = -(0.667 - 0.375) = -0.292\,\text{kN}\ [\leftarrow]$$

A számítást az 5.4/c ábra alapján végeztük el. Az elemi tartók rendszerének egységnyi kilendítéséből (5.4/d ábra) keletkező M_2 nyomatékábra az 5.4/e ábrán látható. A nyomatékábra jellemző értékei $E = 1$ kN/m^2 feltételezéssel:

$$M_{2,B2} = \frac{6EI_2}{l_2^2} = \frac{6 \cdot 1}{3^2} = 0.667\,\text{kNm}$$

$$M_{2,C2} = \frac{6EI_2}{l_2^2} = \frac{6 \cdot 1}{3^2} = 0.667\,\text{kNm}$$

$$M_{2,B3} = \frac{3EI_3}{l_3^2} = -\frac{3 \cdot 2}{4^2} = -0.375\,\text{kNm}$$

Az egységnyi kilendülés következtében a *B* csomópontban keletkező nyomatékok összege az

$$a_{12} = \sum_{i=1}^{3} M_{2,Bi} = 0.667 - 0.375 = 0.292\,\text{kNm}$$

egységtényezőt szolgáltatja.

Az egységnyi kilendülés miatt a *B* csomópontban keletkező vízszintes erő adja az a_{22} egységtényezőt. Ez az erő a 2. és 3. jelű elemi tartók *B* támasznál keletkező reakcióerői összegének ellentettje:

$$a_{22} = -(B_2 + B_3) = -\left(-\frac{2 \cdot 0.667}{3} - \frac{0.375}{4}\right) = 0.444 + 0.094 = 0.538\,\text{kN}\ [\rightarrow]$$

A számítást az 5.4/e és 5.4/f ábrák alapján végeztük el. Itt jegyezzük meg, hogy a jobbra mutató vízszintes erőket tekintettük pozitívnak.

Az egység- és terhelési tényezők ismeretében felírhatjuk a *B* csomópont egyensúlyát kifejező feltételi egyenletrendszert:

$$17.2 - 5.233x_1 + 0.292x_2 = 0$$

$$-56.8 - 0.292x_1 + 0.538x_2 = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$x_1 = 9.465 \qquad \text{és} \qquad x_2 = 110.7$$

megadja a B csomópont elmozdulásainak mértékét. Természetesen "nagyított" elmozdulásokról van szó, hiszen a számítást $E = 1$ kN/m^2 rugalmassági tényezővel és $I_o = 1$ m^4 tehetetlenségi nyomatékkal hajtottuk végre.

A vizsgált tartón keletkező nyomatékok (5.5/a ábra) az

$$M = M_0 + M_1 x_1 + M_2 x_2$$

összefüggés alapján számíthatók ki:

$$M_{B1} = -50.0 - 2.4 \cdot 9.465 = -72.71\,\text{kNm}$$

$$M_{B2} = 1.333 \cdot 9.465 - 0.667 \cdot 110.7 = 61.22\,\text{kNm}$$

$$M_{B3} = 62.7 - 1.50 \cdot 9.465 - 0.375 \cdot 110.7 = 11.49\,\text{kNm}$$

$$M_{C2} = -0.667 \cdot 9.465 + 0.667 \cdot 110.7 = 67.52\,\text{kNm}$$

Az 5.5/c ábrán vázolt elemi tartók segítségével meghatározhatjuk a reakcióerőket:

$$A_1 = \frac{16 \cdot 5}{2} - \frac{72.71}{5} = 40 - 14.54 = 25.46\,\text{kN}\ [\uparrow]; \qquad B_1 = 40 + 14.54 = 54.54\,\text{kN}\ [\uparrow]$$

$$B_2 = \frac{67.52 + 61.22}{3} = 42.9\,\text{kN}\ [\leftarrow]; \qquad C_2 = 42.9\,\text{kN}\ [\rightarrow]$$

$$B_3 = \frac{100 \cdot 1.6}{4} + \frac{11.49}{4} = 40 + 2.9 = 42.9\,\text{kN}\ [\rightarrow]$$

$$D_3 = \frac{100 \cdot 2.4}{4} - \frac{11.49}{4} = 60 - 2.9 = 57.1\,\text{kN}\ [\rightarrow]$$

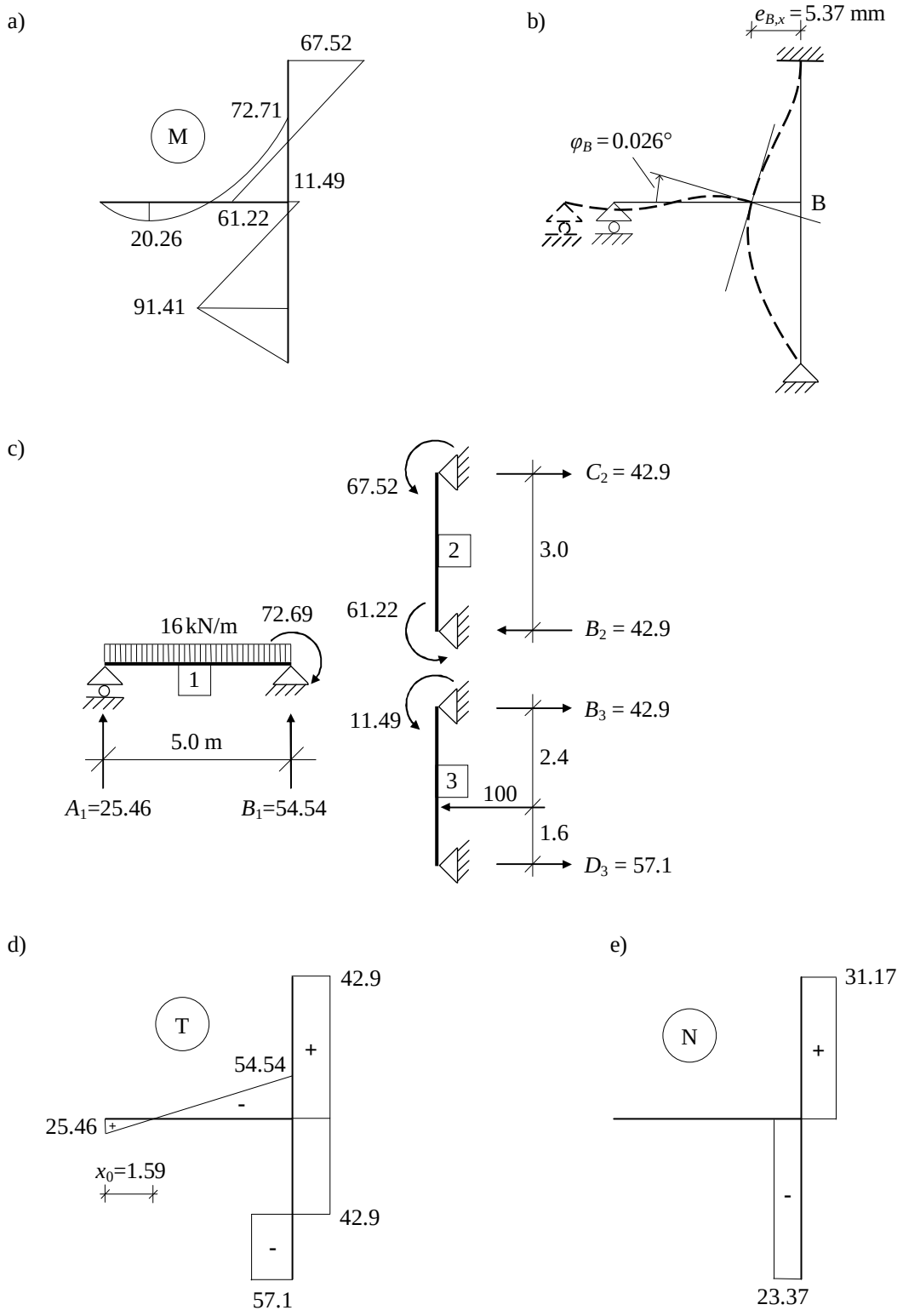
A nyíróerő-ábrát az 5.5/d ábrán találjuk.

Az 1-es mezőben keletkező maximális nyomaték értékének meghatározásához szükségünk van az x_0 zérushely (5.5/d ábra) értékére. Az $A_1 = 25.46$ kN nagyságú reakcióerő értékének ismeretében a

$$25.46 - 16x_0 = 0$$

vetületi egyenletből

$$x_0 = 1.59\,\text{m}$$



5.5 ábra. Kilendülő rúdcsillag. Igénybevételi ábrák.

A normálerő-ábrát a *B* csomópontban ébredő reakcióerők ellentettjeinek felhasználásával állíthatjuk elő. A *B* csomópontban az 1. jelű gerendára ható vízszintes erők eredője zérus, így a gerendában normálerő nem keletkezik. Nem is keletkezhet,

hiszen a görgős megtámasztású *A* támasznál nem tudna a megtámasztó szerkezetre átadódni. A *B* csomópontban ható 54.54 kN nagyságú függőleges, lefelé mutató erő a *C* és *D* támaszoknál adódik át a földre. A B_1 reakcióerő lefelé mutató ellentettjéből számítható

$$N_2 = B_1 \frac{l_3}{l_2 + l_3} = 54.54 \frac{4}{7} = 31.17\,\text{kN}$$

nagyságú erő a *BC* szakaszon húzza a 2. jelű rudat, az

$$N_3 = B_1 \frac{l_2}{l_2 + l_3} = 54.54 \frac{3}{7} = 23.37\,\text{kN}$$

nagyságú erő pedig a *BD* szakaszon nyomóerőként működik a 3. jelű rúdon. (Itt feltételeztük, hogy a 2. és 3. rúd keresztmetszeti területe azonos, vagyis hogy $A_2 = A_3$.)

A fentiek figyelembevételével megszerkesztett normálerő ábra az 5.5/e ábrán látható. A következőkben határozzuk meg a *B* csomópont tényleges elmozdulásait. Ez igen egyszerűen a nagyított értékek (x_1 és x_2) segítségével történhet: csak el kell őket osztani a tényleges merevségekkel. A csomópont elfordulása így

$$\varphi_B = \frac{x_1}{EI_0} = \frac{9.455}{2.06 \cdot 10^8 \cdot 10^{-4}} = 4.59 \cdot 10^{-4} = 0.0459\% = 0.026^{\text{o}}$$

a vízszintes eltolódása pedig

$$e_{Bx} = \frac{x_2}{EI_0} = \frac{110.7}{2.06 \cdot 10^8 \cdot 10^{-4}} = 53.7 \cdot 10^{-4}\,\text{m} = 5.37\text{mm}\ \ [\leftarrow]$$

A tartó alakváltozásait az 5.5/b ábra mutatja.

5.3 Belső csomóponton terhelt rúdcsillag

Érdekes feladatot mutat az 5.6/a ábra, ahol az egyetlen teher a *B* belső csomópontot terhelő, 250 kNm nagyságú koncentrált nyomaték. Határozzuk meg a szerkezet igénybevételi ábráit. *EI* = állandó.

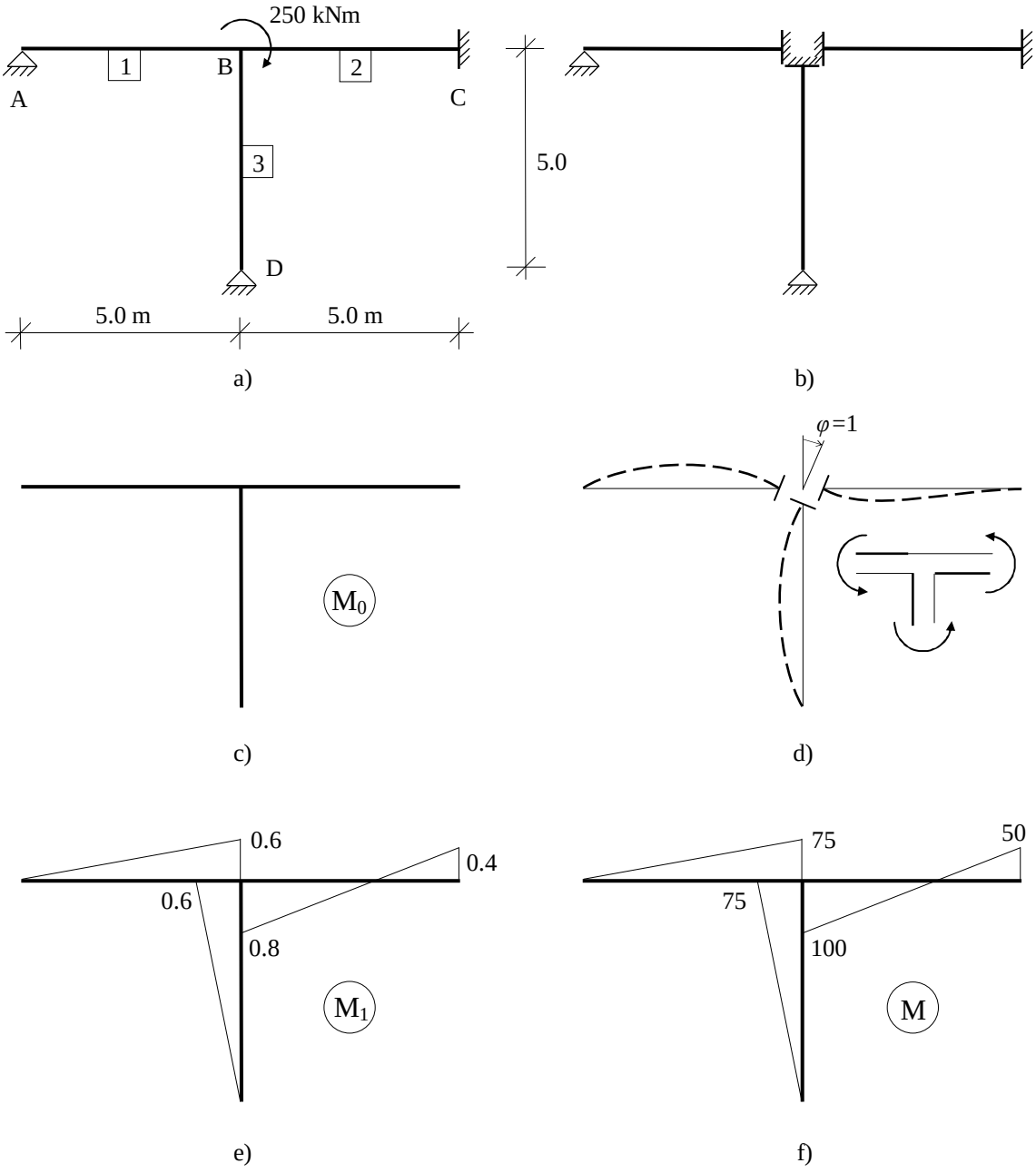
A szerkezetnek egy belső csomópontja van és ez a belső csomópont egyetlen elmozdulásra képes: elfordulhat. A csomópont *x* és *y* irányú eltolódását az *A*, *C* és a *D* támaszok megakadályozzák. Ez azt jelenti, hogy egyetlen belső csomóponti egyensúlyi egyenletet kell felírni:

$$a_0 + a_1 x_1 = 0$$

Ez a csomópont elfordulásával kapcsolatos nyomatéki egyenlet a *B* csomópontban fellépő nyomatékok egyensúlyát fejezi ki. Az a_0 terhelési tényező az adott külső terhekből keletkező nyomatékok algebrai összegét, az a_1 egységtényező pedig a csomópont egységnyi elfordulásából keletkező nyomatékok algebrai összegét jelöli. A feltételi egyenlet megoldása megadja, hogy milyen x_1 csomóponti elfordulás mellett lesz a *B* csomópont egyensúlyban.

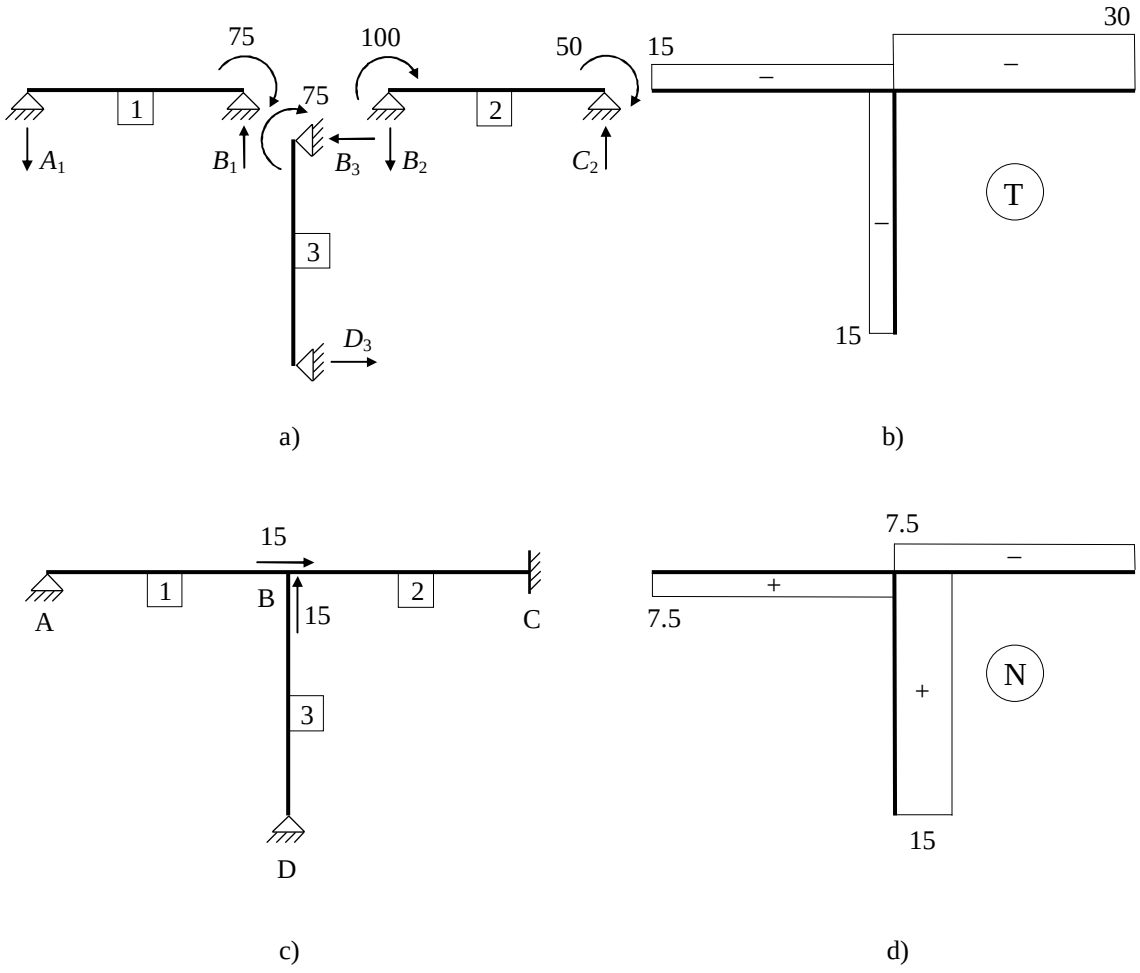
A szerkezet elemi tartóinak rendszere az 5.6/b ábrán látható. A szokásos módon eljárva a következő lépés az elemi tartókon a külső terhekből keletkező M_0 nyomatékábra valamint az a_0 terhelési tényező előállítása. Az elemi tartókon teher nincs, így az M_0 nyomatékábra végig zérus értékekkel rendelkezik (5.6/c ábra). Van viszont a B csomópontot közvetlenül terhelő teher, a 250 kNm nagyságú koncentrált nyomaték. Ez most a terhelési tényező:

$$a_0 = 250\ \text{kNm}$$



5.6 ábra. Koncentrált nyomatékkal terhelt rúdcsillag; M-ábra.

A terhelési tényező azt is mutatja, hogy a *B* csomópont az óramutatóval egyező forgatóértelemmel fordul el. A *B* csomópont egységnyi elfordításához tartozó tartóalakot az 5.6/d ábrán, a keletkező M_1 nyomatékábrát pedig az 5.6/e ábrán tüntetjük föl.



5.7 ábra. Koncentrált nyomatékkal terhelt rúdcsillag; T-ábra és N-ábra.

A *B* csomópont óramutató járásával megegyező egységnyi elfordításából az elemi tartókról a csomópontra jutó nyomatékokat az elfordulási merevségek segítségével számíthatjuk ki. Az értékek – $E = 1$ kN/m^2 feltételezéssel – a következők:

$$M_{1,B1} = -\frac{3EI_1}{l_1} = -\frac{3\cdot 1}{5} = -0.6\,\text{kNm}$$

$$M_{1,B2} = -\frac{4EI_2}{l_2} = -\frac{4\cdot 1}{5} = -0.8\,\text{kNm}$$

$$M_{1,B3} = -\frac{3EI_3}{l_3} = -\frac{3\cdot 1}{5} = -0.6\,\text{kNm}$$

és

$$M_{1,C2} = \frac{M_{1,B2}}{2} = -0.4\,\text{kNm}$$

Ezek a nyomatékok a megfelelő csomópontot az óramutató járásával ellenkező irányban akarják elfordítani, ezért negatív előjelűek.

A *B* csomópontban keletkező nyomatékok összege adja az egységtényezőt:

$$a_1 = \sum_{i=1}^{3} M_{1,Bi} = -0.6 - 0.8 - 0.6 = -2.0\,\text{kNm}$$

Az

$$a_0 + a_1 x_1 = 250 - 2x_1 = 0$$

feltételi egyenlet megoldása szolgáltatja a *B* csomópont egyensúlyához szükséges elfordulás mértékét:

$$x_1 = 125$$

A *B* csomópont elfordulásának ismeretében a szerkezet nyomatékábrája az adott terhekből és az egyensúlyhoz szükséges csomóponti elfordulásból keletkező csomóponti nyomatékok összegzésével állítható elő:

$$M = M_0 + M_1 x_1$$

Ezt a nyomatékábrát az

$$M_{B1} = -0.6 \cdot 125 = -75\,\text{kNm}$$

$$M_{B2} = -0.8 \cdot 125 = -100\,\text{kNm}$$

$$M_{B3} = -0.6 \cdot 125 = -75\,\text{kNm}$$

és

$$M_{C2} = \frac{M_{B2}}{2} = -50\,\text{kNm}$$

jellemző értékek felhasználásával az 5.6/f ábrán adjuk meg.

A nyíróerő és normálerő ábrák megrajzolásához először meg kell határozni az elemi tartók (5.7/a ábra) reakcióerőit:

$$A_1 = -\frac{75}{5} = -15\,\text{kN}\ \ [\downarrow]; \qquad\qquad B_1 = 15\,\text{kN}\ \ [\uparrow]$$

$$B_2 = -\frac{100+50}{5} = -30\ \text{kN}\ \ [\downarrow]; \qquad C_2 = 30\ \text{kN}\ \ [\uparrow]$$

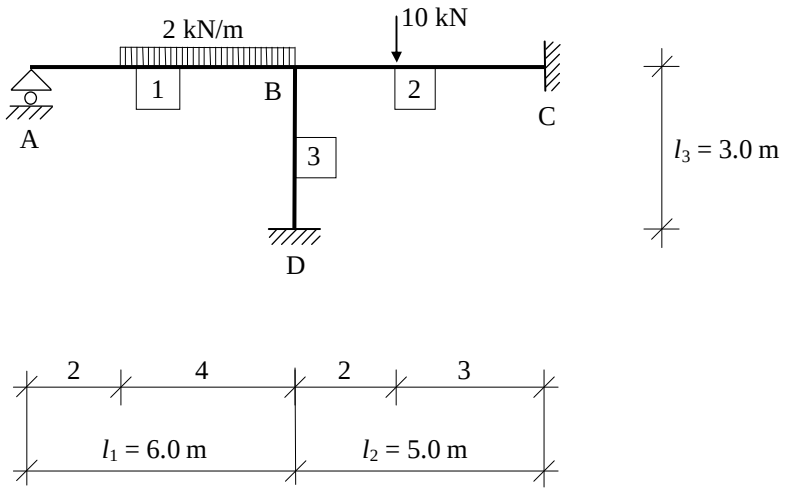
$$B_3 = -\frac{75}{5} = -15\ \text{kN}\ \ [\leftarrow]; \qquad C_3 = 15\ \text{kN}\ \ [\rightarrow]$$

Az elemi tartók nyíróerő-ábráinak "összerajzolásával" megkapjuk a szerkezet nyíróerő-ábráját (5.7/b ábra).

Az elemi tartók reakcióinak ellentettjei a *B* csomópontban a merőlegesen csatlakozó tartókon keresztül normálerőkként (5.7/c ábra), az *A*, *C* és *D* támaszoknál pedig közvetlenül adódnak át a földre. A *B* csomópontnál fellépő erők segítségével állítható elő a szerkezet normálerő-ábrája (5.7/d ábra). Az 1. jelű rúd húzott, a 2. jelű rúd nyomott lesz. Az 1. jelű rúd megnyúlásának meg kell egyeznie a 2. jelű rúd összenyomódásával ($|\Delta l_1| = |\Delta l_2|$). Feltéve hogy $EA_1 = EA_2$, $|N_1| = |N_2| = 15/2$ és így $N_1 = +7.5$ kN és $N_2 = -7.5$ kN.

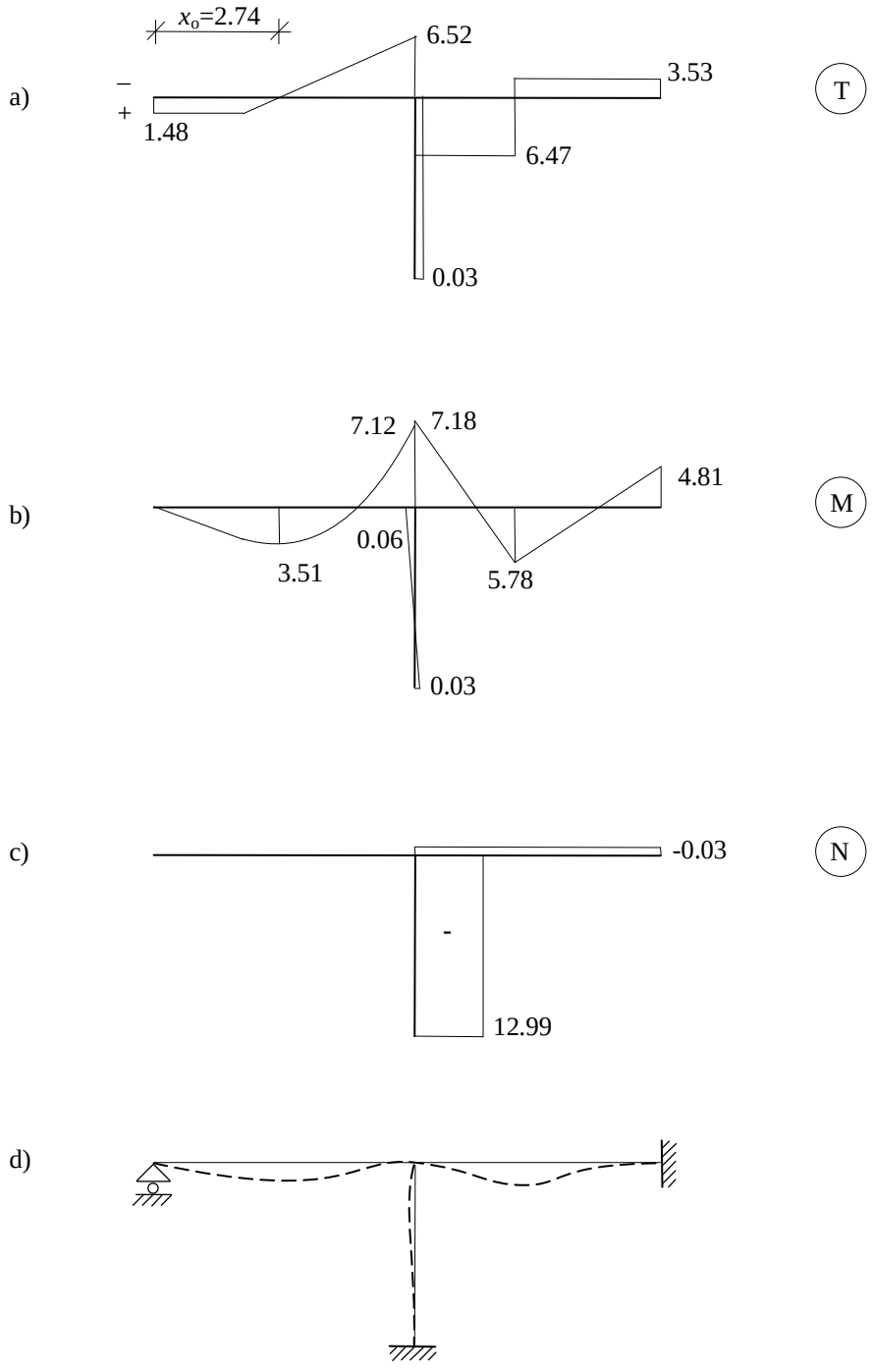
5.4 Általános terhelésű rúdcsillag

Végül otthoni gyakorlásra megadjuk az 5.8 ábrán vázolt szerkezet adatait. Legyen $I_1 = 1\ \text{m}^4$, $I_2 = 1\ \text{m}^4$, $I_3 = 3\ \text{m}^4$ és E = állandó. Határozzuk meg az igénybevételi ábrákat.



5.8 ábra. Rúdcsillag.

Az igénybevételi ábrákat az 5.9/a, 5.9/b és 5.9/c ábrák tartalmazzák. A tartó alakváltozásait az 5.9/d ábra mutatja.



5.9 ábra. Rúdcsillag. T-, M- és N-ábra. Alakváltozás.

MEGJEGYZÉS
Gyakorló feladatként a 7.2 fejezet összes feladata felhasználható.

6

A nyomatékosztás módszere

A számítógépek széleskörű elterjedése előtt a statikai gyakorlat gyakran előnyben részesítette a Hardy Cross-tól származó nyomatékosztási módszert, amely – mint a 4. fejezet végén láthattuk – lényegében az elmozdulás módszer átalakított változata. Alkalmazása különösen többszörösen határozatlan rúdszerkezetek vizsgálatára volt előnyös. Bár a mai számítógépes korban a sokszorosan határozatlan szerkezetek számítását automatikusan a számítógépre bízzuk, mégis bemutatjuk a nyomatékosztás módszerét, mert szemléletessége nagymértékben hozzásegít a szerkezet statikai viselkedésének megértéséhez és bizonyos rutin megszerzéséhez.

Az 1. fejezetben említett célkitűzéseinknek megfelelően a módszer bemutatása során csupán egyenestengelyű és a csomópontok ill. támaszok között állandó keresztmetszetű szerkezetekre szorítkozunk, bár az alapelvek más szerkezetek esetén is értelemszerűen alkalmazhatók.

6.1 Fix csomópontú szerkezetek

Amint az 1. fejezetben már említettük, az olyan szerkezeteket, melyek csomópontjai a külső erők hatására csak elfordulást végezhetnek, fix csomópontú szerkezeteknek nevezzük. Ide soroljuk a fix csomópontú kereteket, valamint a nem süllyedő alátámasztású többtámaszú tartókat. Minthogy ezek vizsgálata egyszerűbb, a módszer bemutatását ezekkel kezdjük.

6.1.1 Alapfogalmak

A 4.1.1 pontban megismerkedtünk a “rúdvégi nyomaték”, valamint a “csomóponti nyomaték” fogalmával. Ismeretes, hogy a műszaki irodalomban – a későbbiekben tárgyalásra kerülő okok miatt – a csomóponti nyomatékokat kezdeti befogási nyomatékoknak is nevezik. A továbbiakban feltételezzük, hogy az olvasó a kezdeti befogási nyomatékok képleteit tartalmazó táblázatos összeállítással rendelkezik (pl. „Segédletek a mechanika és tartószerkezetek c. tárgyhoz”).

A 4.1.2 pontban igazoltuk, hogy a rúdvégek között az átviteli tényező 0.5, ha a rúd másik vége befogott, és 0, ha a rúd másik vége csuklós.

A 4.1.3 pontban levezettük az “elfordulási merevség (K)” és a “merevségi szám (k)” képleteit és ezekre az alábbi összefüggéseket kaptuk.

Mindkét végén befogott rúd esetén:

$$K = \frac{4EI}{l} \qquad \text{és} \qquad k = \frac{I}{l}$$

Egyik végén befogott másik végén csuklós megtámasztású rúd esetén:

$$K = \frac{3EI}{l} \qquad \text{és} \qquad k = \frac{3}{4}\frac{I}{l}$$

A következőkben merevségi számokkal (k) fogunk dolgozni.

Elfordulási összmerevség (Σk) alatt az azonos csomópontban található rudak merevségi számainak összegét értjük.

6.1.2 A rúdcsillag

A 4.4 pontban ismertetett definíció szerint rúdcsillagnak nevezzük a két, vagy több rúdból álló olyan síkbeli keretszerkezetet, melynek rúdjai egy közös pontból, az ún. belső csomópontból sugárszerűen ágaznak ki és a rudak külső végei befogottak vagy csuklóval megtámasztottak (6.1/a ábra).

Működjön a rúdcsillag belső csomópontjára annak síkjában ható M_0 nyomatékú terhelő erőpár. Feladatunk annak meghatározása, hogy ebből az egyes rúdvégekre milyen nagyságú csomóponti nyomaték jut.

Az egyes rudak geometriai jellemzőinek és külső megtámasztásmódjának ismeretében azok merevségi számai rendre meghatározhatók:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1}, \qquad k_2 = \frac{3}{4}\frac{I_2}{l_2}, \qquad k_3 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3}, \qquad k_4 = \frac{I_4}{l_4}$$

Jelöljük az egyes rudak belső végére jutó csomóponti nyomatékot a rúd sorszáma szerint M_1, M_2, M_3 és M_4-el.

A csomópont egyensúlyban csak úgy lehet, ha a $\Sigma M = 0$, illetve részletesen kiírva, ha az

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_0 = 0$$

egyenlet teljesül.

A csomópontra ható M_0 terhelő nyomaték hatására a csomópont elfordul és vele együtt elfordulnak a belső rúdvégek is, mégpedig valamennyi azonos φ szöggel (6.1/b ábra).

A csomóponti nyomaték, a merevségi szám és az elfordulás közti összefüggés, a 4.1.3 pontban foglaltak alapján:

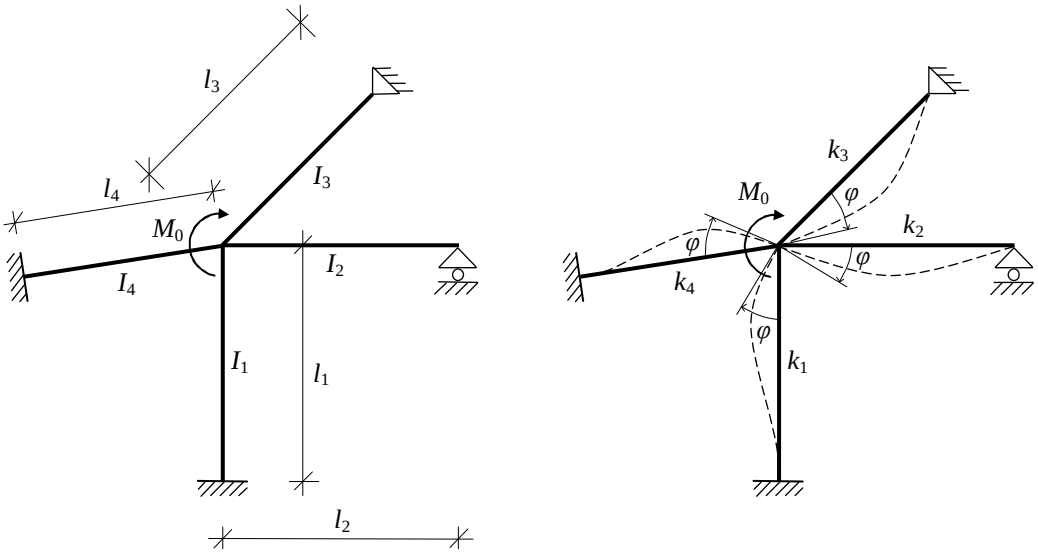
$$M_1 = k_1\varphi, \qquad M_2 = k_2\varphi, \qquad M_3 = k_3\varphi, \qquad M_4 = k_4\varphi$$

Ezek felhasználásával felírható, hogy

$$\varphi(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$$

Mivel a φ szög minden csatlakozó rúdvégre vonatkozóan azonos, az előző összefüggés alapján a merevségi számokra és az egyes rúdvégekre jutó csomóponti nyomatékokra a következő arányosság érvényes:

$$M_1 : M_2 : M_3 : M_4 = k_1 : k_2 : k_3 : k_4$$



a) alapadatok b) meggörbült alak

6.1 ábra. Rúdcsillag.

Ez utóbbi összefüggésből kitűnik, hogy a belső rúdvégek az M_0 nyomatékból merevségi számaik arányában osztoznak.

Minthogy

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} = \frac{k_1}{k_1 + k_2 + k_3 + k_4},$$

$$\frac{M_2}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 + k_3 + k_4},$$

illetve

$$\frac{M_i}{\sum M_i} = \frac{k_i}{\sum k_i}$$

és

$$\sum M_i = -M_0$$

így

$$-\frac{M_i}{M_0} = \frac{k_i}{\sum k_i}$$

Ebből

$$M_i = -\frac{k_i}{\sum k_i} M_0$$

Ha bevezetjük az

$$\alpha_i = \frac{k_i}{\sum k_i}$$

osztási tényezőt, a belső rúdvégre jutó csomóponti nyomaték értéke

$$M_i = -\alpha_i M_0$$

Itt jegyezzük meg, hogy az osztási tényezőket az építőmérnöki gyakorlatban nyomatékosztási tényezőknek nevezik.

Végül a külső rúdvégekre jutó csomóponti nyomatékot úgy kapjuk meg, hogy a belső rúdvégi csomóponti nyomatékot befogott külső vég esetén 0.5, csuklós külső vég esetén 0 átviteli tényezővel szorozzuk.

A gyakorlati számítások során hasznos ellenőrzési lehetőséget biztosít az a tény, hogy a nyomatékosztási tényezők összege (csomópontonként) mindig egy:

$$\sum \alpha_i = \sum \frac{k_i}{\sum k_i} = \frac{\sum k_i}{\sum k_i} = 1$$

Készítsük el a 6.2/a ábrán látható rúdcsillag nyomatékábráját!

Először a rudak merevségi számát határozzuk meg:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{15}{5} = 3\,, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{20}{4} = 5\,, \qquad k_3 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{4}\frac{8}{3} = 2$$

$$\sum k_i = 3 + 5 + 2 = 10$$

A nyomatékosztási tényezők:

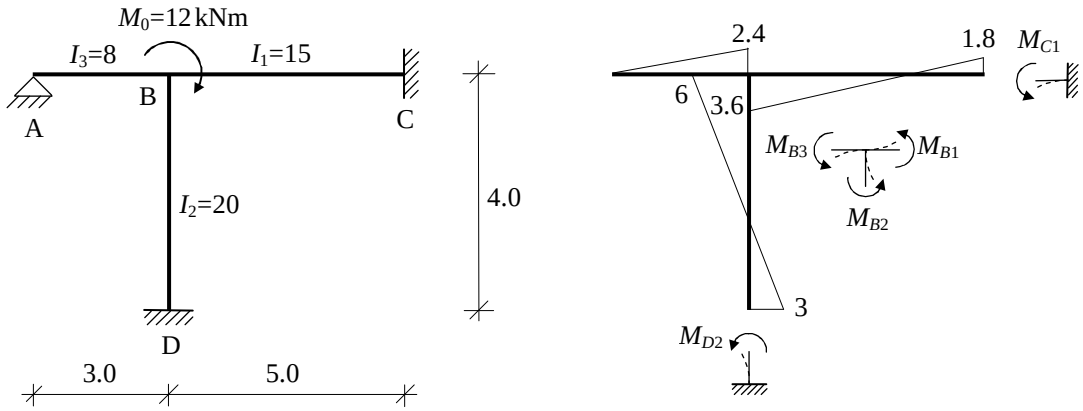
$$\alpha_1 = \frac{k_1}{\sum k_i} = \frac{3}{10} = 0.3\,, \qquad \alpha_2 = \frac{k_2}{\sum k_i} = \frac{5}{10} = 0.5\,, \qquad \alpha_3 = \frac{k_3}{\sum k_i} = \frac{2}{10} = 0.2$$

A nyomatékosztási tényezők segítségével meghatározhatók a belső rúdvégekre jutó csomóponti nyomatékok:

$$M_{B1} = -0.3 \cdot 12 = -3.6 \text{ kNm}\,, \qquad M_{B2} = -0.5 \cdot 12 = -6.0 \text{ kNm}$$

$$M_{B3} = -0.2 \cdot 12 = -2.4 \text{ kNm}$$

Ezek a nyomatékok azért negatív előjelűek, mert a pozitív M_0 terhelő nyomatékot negatív csomóponti nyomatékkal lehet egyensúlyozni.



a) rúdcsillag b) M-ábra

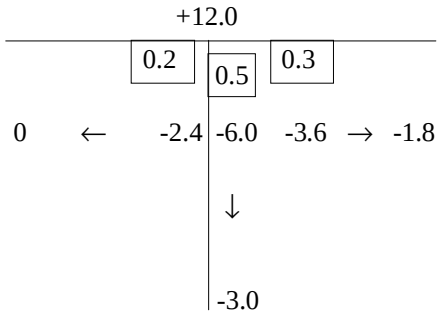
6.2 ábra. Rúdcsillag és nyomatékábrája.

A külső rúdvégekre jutó csomóponti nyomatékok:

$$M_{C1} = -0.5 \cdot 3.6 = -1.8 \text{ kNm}, \quad M_{D2} = -0.5 \cdot 6.0 = -3.0 \text{ kNm}, \quad M_{A3} = 0$$

A rúdcsillag nyomatékábráját a 6.2/b ábrán készítettük el.

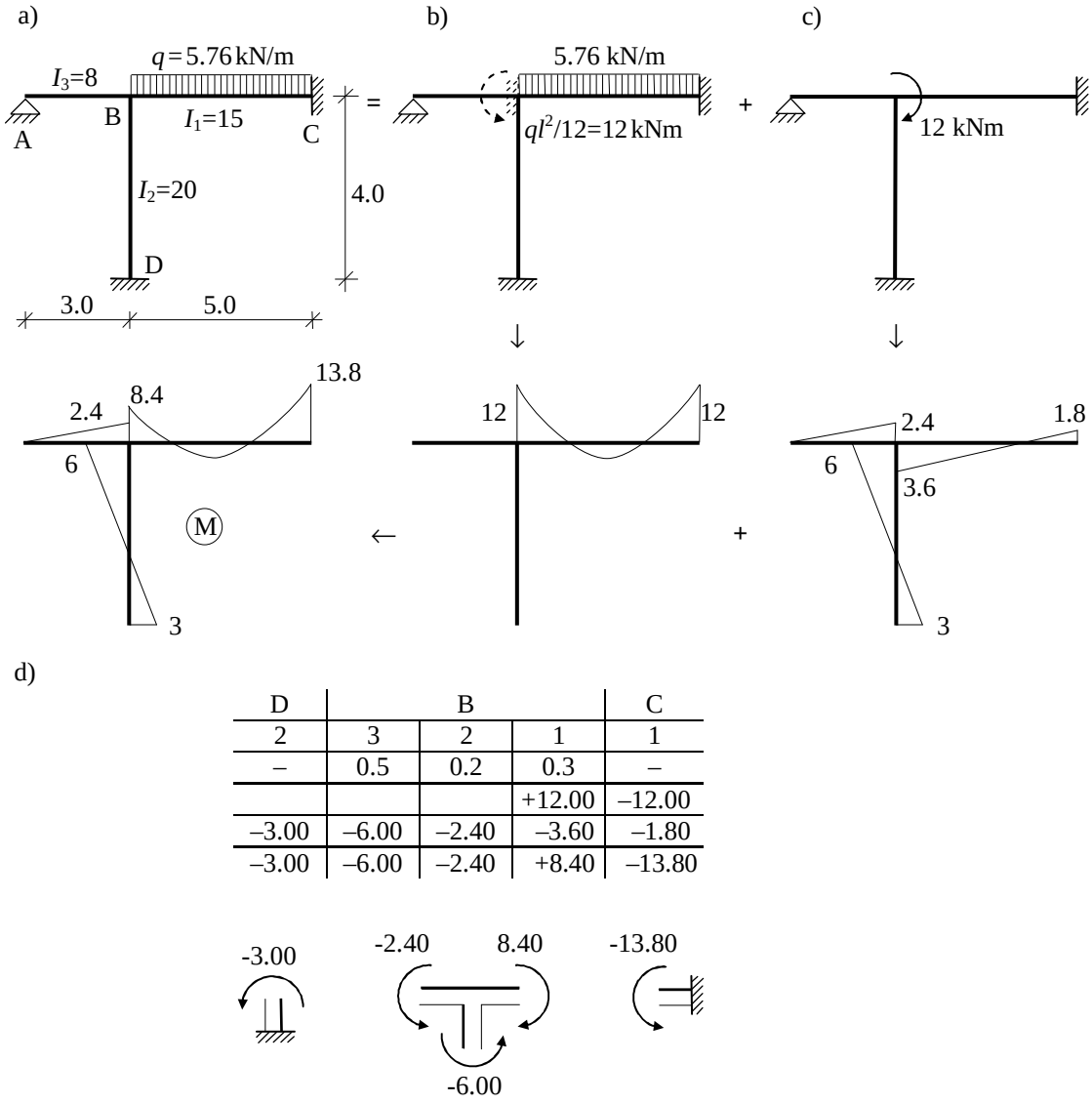
Az ábra csomóponti vázlatain szaggatott vonallal feltüntettük a *B*, *C* és *D* csomópontok nyomatékkal terhelt rúdvégeinek alakváltozását és ebből azonnal kitűnik, hogy az adott rúdvégnek melyik a "húzott oldala". Ez azért fontos, mert a nyomatékokat mindig a rúd húzott oldalára kell felmérni.



6.3 ábra. Séma a nyomatékosztáshoz.

Az M_0 nyomatéknak a belső rúdvégekre való elosztása (röviden: nyomatékosztás) igen szemléletesen végezhető el egy erre a célra készült vázlatos rajzon (sémán), melynek vázát a szerkezet hálózati rajza képezi, és az egyes rúdvégeken a megfelelő nyomatékosztási tényezők szerepelnek (6.3 ábra).

Ha a rúdcsillag a síkjában működő tetszőleges erőkkel van terhelve (pl. a 6.4/a ábra) és az egyes rúdvégekre jutó csomóponti nyomatékok értékét keressük, a feladatot két lépésben oldjuk meg.



d)

D	B			C
2	3	2	1	1
–	0.5	0.2	0.3	–
			+12.00	–12.00
–3.00	–6.00	–2.40	–3.60	–1.80
–3.00	–6.00	–2.40	+8.40	–13.80

6.4 ábra. Tetszőleges erőkkel terhelt rúdcsillag.

Első lépésben a belső – esetünkben *B* – csomópontot tökéletesen befogottnak képzeljük (6.4/b ábra) és megállapítjuk, hogy az egyes rudak, mint befogott kéttámaszú tartók befogószerkezetükre mekkora – ún. kezdeti befogási – nyomatékot gyakorolnak. E nyomatékokat a 6.1.1 pontban már említett táblázatokban található képletek segítségével számítjuk ki. Példánkban kezdeti befogási nyomaték csak az 1. jelű rúd végein ébred, és ezek előjeles nagysága:

$$M_{1B}^{0} = \frac{ql^2}{12} = \frac{5.76 \cdot 5^2}{12} = 12.0 \text{ kNm}$$

$$M_{1C}^{0} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{5.76 \cdot 5^2}{12} = -12.0 \text{ kNm}$$

A számítás második lépésében a *B* csomópontot a befogás alól képzeletben felszabadítjuk (6.4/c ábra) és a csomópontra ható csomóponti nyomaték ellentettjét az oda befutó rudak vége között – a nyomatékosztási tényezők arányában – elosztjuk, figyelembe véve, hogy a rúdvégekre jutó nyomatékok összege a kezdeti befogási nyomatékot egyensúlyozza, s így azzal ellentétes előjelű kell legyen. A rudak külső végeire az átviteli tényezővel szorzott nyomatékot hárítjuk. Példánkban e második lépés teljesen megegyezik a 6.2 ábrán feltüntetett rúdcsillag esetével, és így a nyomatékosztás eredménye is azzal megegyező.

Végül az előző lépésekben meghatározott csomóponti nyomatékok előjelhelyes összegezése útján a végleges csomóponti nyomatékokhoz jutunk. Példánk esetében megrajzoltuk az 1. és 2. lépéshez tartozó, valamint az ezek összegezése útján nyert végleges nyomatékábrát is.

A gyakorlatban a számítást a már említett séma segítségével vagy táblázatos formában végezzük el. Ebben a példában a táblázatos formát választottuk (6.4/d ábra). A számítás lépései itt is jól megfigyelhetők.

A nyomatékosztás módszert a rúdcsillagra alkalmazva megismerkedtünk annak legfontosabb alapelveivel. E módszer célszerűen alkalmazható a fix csomópontú keretek és a nem süllyedő alátámasztású többtámaszú tartók csomóponti nyomatékainak számítására is. A következőkben a módszer alkalmazását e szerkezetekre kidolgozott számpéldák segítségével mutatjuk be.

6.1.3 Fix csomópontú keretek

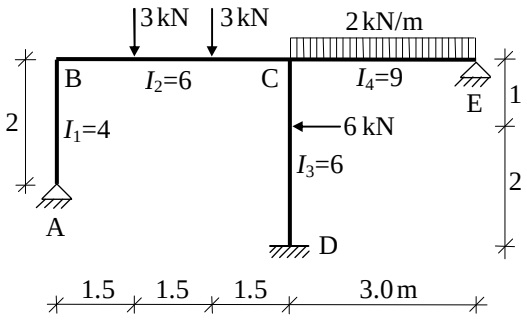
A számítás menetét a 6.5/a ábrán feltüntetett fix csomópontú kerettel kapcsolatban részletezzük.

A számítás előkészítése abban áll, hogy a *B* és *C* belső csomópontokba befutó rúdvégeket tökéletesen befogottnak képzeljük, és meghatározzuk az egyes rudak merevségi számát és az összmerevségek értékét:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{4}{2} = 1.5, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{6.0}{4.5} = 1.333, \qquad \sum_{\mathrm{B}} k_i = 2.833$$

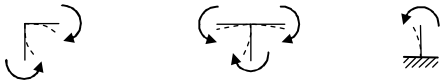
$$k_2 = 1.333, \qquad k_3 = \frac{I_3}{l_3} = \frac{6}{3} = 2.0, \qquad k_4 = \frac{3}{4}\frac{I_4}{l_4} = \frac{3}{4}\frac{9}{3} = 2.25, \qquad \sum_{\mathrm{C}} k_i = 5.583$$

a) fix csomópontú keret

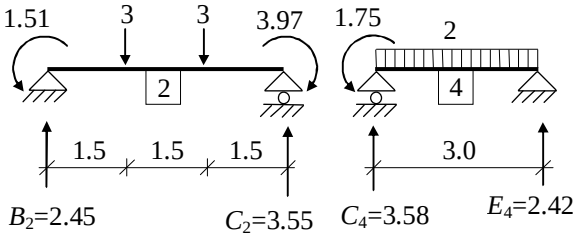


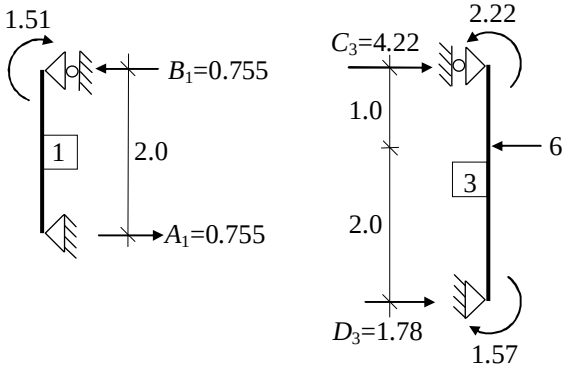
b) nyomatékosztás

B		C			D	
1	2	2	3	4	3	
0.530	0.470	0.239	0.358	0.403	–	
	+3.00	–3.00	+2.67	+2.25	–1.33	1. lépés
	–0.23	–0.46	–0.69	–0.77	–0.35	2. lépés
–1.47	–1.30	–0.65				3. lépés
	+0.08	+0.16	+0.23	+0.26	+0.11	4. lépés
–0.04	–0.04	–0.02				5. lépés
			+0.01	+0.01		6. lépés
–1.51	+1.51	–3.97	+2.22	+1.75	–1.57	7. lépés

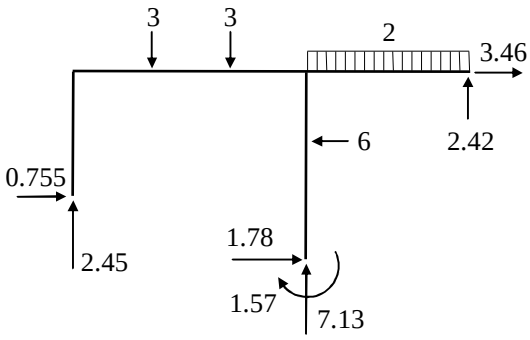


c) elemi tartók

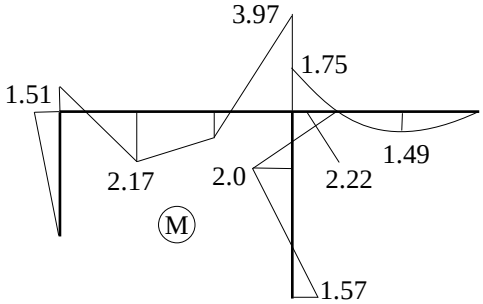


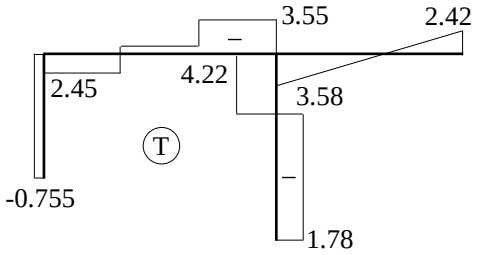


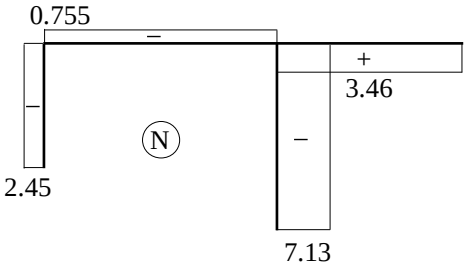
d) a keretre hatók erők



e) igénybevételi ábrák







6.5 ábra. Fix csomópontú keret.

Meghatározzuk az egyes csomópontokban a nyomatékosztási tényezők értékét:

$$\alpha_{B1} = \frac{k_1}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{1.5}{2.833} = 0.530\,, \qquad \alpha_{B2} = \frac{k_2}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{1.333}{2.833} = 0.470$$

$$\alpha_{C2} = \frac{k_2}{\sum_{\mathrm{C}} k_i} = \frac{1.333}{5.583} = 0.239\,, \qquad \alpha_{C3} = \frac{k_3}{\sum_{\mathrm{C}} k_i} = \frac{2.0}{5.583} = 0.358$$

$$\alpha_{C4} = \frac{k_4}{\sum_{\mathrm{C}} k_i} = \frac{2.25}{5.583} = 0.403$$

Természetesen a nyomatékosztási tényezők összege minden csomópontban: 1.

A nyomatékosztási tényezők értékét a számítási sémában a megfelelő csomópont illetve rúdvég alá, a harmadik sorba beírjuk (6.5/b ábra).

Ezután – a belső csomópontokba befutó rúdvégeket még mindig befogottnak képzelve – meghatározzuk az egyes rúdvégekhez tartozó csomóponti nyomaték (kezdeti befogási nyomaték) értékét (például a „Segédletek” táblázatainak felhasználásával):

$$M_{B2}^{0} = \frac{2}{9} Fl = \frac{2}{9} 3 \cdot 4.5 = 3.0\ \mathrm{kNm}\,, \qquad M_{C2}^{0} = -\frac{2}{9} Fl = -\frac{2}{9} 3 \cdot 4.5 = -3.0\ \mathrm{kNm}$$

$$M_{C4}^{0} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \cdot 3^2}{8} = 2.25\ \mathrm{kNm}$$

$$M_{C3}^{0} = \frac{Fab^2}{l^2} = \frac{6 \cdot 1 \cdot 2^2}{3^2} = 2.67\ \mathrm{kNm}$$

$$M_{D3}^{0} = -\frac{Fa^2 b}{l^2} = -\frac{6 \cdot 1^2 \cdot 2}{3^2} = -1.33\ \mathrm{kNm}$$

1. lépés

Az így kiszámított csomóponti nyomaték értékeket a megfelelő nyomatékosztási tényezők alá, a táblázat negyedik sorába beírjuk.

2. lépés

Kiválasztjuk a keret egy tetszőleges csomópontját (példánkban a *C* csomópontot). Ezt a csomópontot ideiglenesen felszabadítjuk a befogás alól és itt a csomóponti nyomatékok előjeles összegzése útján meghatározzuk a kiegyensúlyozatlan nyomatékot (ΔM):

$$\Delta M_C = 2.67 + 2.25 - 3.00 = 1.92\ \mathrm{kNm}$$

Ezután nyomatékegyensúlyozást végzünk, azaz a kiegyensúlyozatlan nyomatékkal egyező nagyságú, de ellentétes előjelű (-1.92 kNm) nyomatékot az egyes

nyomatékosztási tényezőkkel szorozva a rúdvégek között szétosztjuk. Példánk esetében az egyes rúdvégekre jutó nyomatékok a következők:

2. jelű rúd jobboldali végére: $0.239 \cdot (-1.92) = -0.46$ kNm,
3. jelű rúd felső végére: $0.358 \cdot (-1.92) = -0.69$ kNm,
4. jelű rúd baloldali végére: $0.403 \cdot (-1.92) = -0.77$ kNm.

Ezeket az értékeket a táblázat 5. sorában feljegyezzük, majd nyomatékátvitelt végzünk. Az átvitt nyomatékok:

2. jelű rúd baloldali végére: $0.5 \cdot (-0.46) = -0.23$ kNm,
3. jelű rúd alsó végére: $0.5 \cdot (-0.69) = -0.35$ kNm,
4. jelű rúd jobboldali végére: $0 \cdot (-0.77) = 0$.

Ezen értékeket a megfelelő számoszlopokban szintén feljegyezzük, a *C* csomóponti nyomatékokat pedig annak kifejezéséül, hogy ott a nyomatékegyensúlyozás és az átvitel megtörtént, és a csomópont egyensúlyban van, aláhúzzuk. Ezek után a *C* csomópontot ismét rögzítettnek tekintjük.

3. lépés

Most egy másik (példánkban a *B*) csomópontban szüntetjük meg a befogást és ott végzünk nyomatékegyensúlyozást. A *B* csomópontban a kiegyensúlyozatlan nyomaték: $\Delta M = +3 - 0.23 = +2.77$ kNm. Példánk esetében a kiegyensúlyozáshoz szükséges nyomaték:

1. jelű rúd felső végén $0.53 \cdot (-2.77) = -1.47$ kNm,
2. jelű rúd baloldali végén $0.47 \cdot (-2.77) = -1.30$ kNm,

a 2. jelű rúd jobboldali végére (a *C* csomópontba) pedig $0.5 \cdot (-1.30) = -0.65$ kNm nagyságú nyomatékot kell átvinni.

További lépések

Az előző lépések kapcsán említett műveleteket a keret valamennyi csomópontján többször elvégezzük. Így számpéldánk esetében felváltva a *C* és *B* csomópontokat vesszük sorra.

Ezáltal a kiegyensúlyozatlan nyomatékok egyre kisebbek lesznek, míg végül is (példánkban a 6. lépés után) elhanyagolhatóan kicsinyekké válnak. Ekkor a számítást befejezzük és a csomóponti nyomatékok számoszlopait előjelhelyesen összegezzük (7. lépés). Így a végleges csomóponti nyomatékokhoz jutunk.

A teljesség érdekében elkészítjük a keret igénybevételi ábráit is. Először a nyomatékábrát célszerű megrajzolni. A csomóponti nyomatékok előjele alapján a nyomatékosztási táblázat alatt feltüntettük a rúdvégek alakváltozását és ebből azonnal kitűnik, hogy az adott rúdvégnek melyik a húzott oldala. Ez azért fontos, mert a nyomatékokat mindig a rúd húzott oldalára kell fölmérni. A keret csomópontok ill. támaszok közti rúdelemei végnyomatékos kéttámaszú tartóknak tekinthetők, melyeken a csomóponti nyomatékokkal ellentétes rúdvégi nyomatékok működnek (6.5/c ábra). Ezért mind a nyomatékábra felrajzolása, mind a támaszerő komponensek számítása tekintetében a végnyomatékos kéttámaszú tartóknál szokásos eljárást követjük.

A normálerő- és nyíróerő-ábra felrajzolásához célszerű a keretre ható összes külső erőt a szerkezet nézetrajzába berajzolni (6.5/d ábra). Az igénybevételi ábrákat a 6.5/e ábrán találjuk.

6.1.4 Fix alátámasztású többtámaszú tartók

A nem süllyedő alátámasztású többtámaszú tartó a fix csomópontú keret különleges esetének tekinthető. Minden támaszpontot olyan csomópontnak tekinthetünk, amelybe befutó keretoszlop megrövidülése és merevsége zérus. Az ilyen tartókat merev, vagy fix alátámasztású tartóknak is hívják. Így a keretek esetére bemutatott eljárás értelemszerűen alkalmazható a többtámaszú tartók támasznyomatékainak számítására is. Első példaként a 6.6 ábrán feltüntetett öttámaszú tartó támasznyomatékait határozzuk meg a nyomatékosztás módszerével. A számítási sémát is a 6.6 ábrán tüntettük fel. A támasznyomatékokat 0.001 kNm pontossággal kívánjuk meghatározni. Először a számítás előkészítéseként a közbenső alátámasztások helyén tökéletesen befogottnak tekintett tartó egyes rúdjainak (támasztól-támaszig terjedő tartószakaszok) merevségi számát, a nyomatékosztási tényezőket és a csomóponti nyomatékokat (kezdeti befogási nyomatékokat) határozzuk meg. Minthogy a tartó inercianyomatéka végig állandó, arra bármilyen állandó számot felvehetünk. Legyen $I = 1$.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{6} = 0.125, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$k_3 = \frac{I_3}{l_3} = \frac{1}{4} = 0.25, \qquad k_4 = \frac{3}{4}\frac{I_4}{l_4} = \frac{3}{4}\frac{1}{6} = 0.125$$

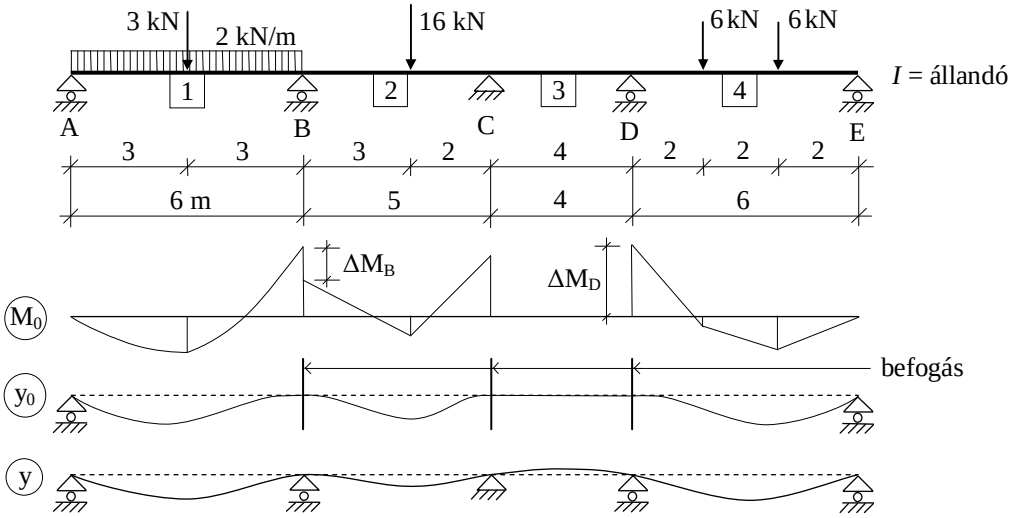
$$\sum_{\mathrm{B}} k_i = 0.325, \qquad \sum_{\mathrm{C}} k_i = 0.45, \qquad \sum_{\mathrm{D}} k_i = 0.375$$

Nyomatékosztók:

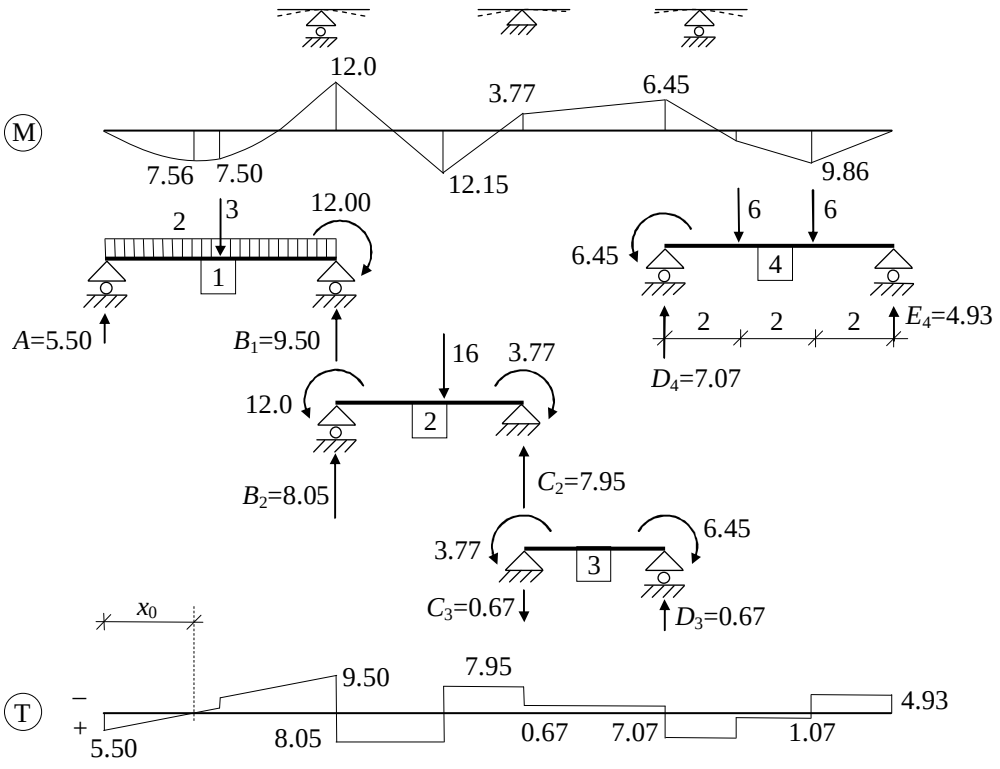
$$\alpha_{B1} = \frac{k_1}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{0.125}{0.325} = 0.385, \qquad \alpha_{B2} = \frac{k_2}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{0.2}{0.325} = 0.615$$

$$\alpha_{C2} = \frac{k_2}{\sum_{\mathrm{C}} k_i} = \frac{0.2}{0.45} = 0.444, \qquad \alpha_{C3} = \frac{k_3}{\sum_{\mathrm{C}} k_i} = \frac{0.25}{0.45} = 0.556$$

$$\alpha_{D3} = \frac{k_3}{\sum_{\mathrm{D}} k_i} = \frac{0.25}{0.375} = 0.667, \qquad \alpha_{D4} = \frac{k_4}{\sum_{\mathrm{D}} k_i} = \frac{0.125}{0.375} = 0.333$$



α_i	0.385	0.615	0.444	0.556	0.667	0.333
1. lépés	–12.375	+7.680	–11.520	0	0	+12.000
2. lépés	+1.808	+2.887	+1.443	–4.00	–8.000	–4.000
3. lépés		+3.125	+6.250	+7.827	+3.913	
4. lépés	–1.203	–1.922	–0.962	–1.305	–2.610	–1.303
5. lépés		+0.502	+1.005	+1.262	+0.631	
6. lépés	–0.193	–0.309	–0.154	–0.210	–0.421	–0.210
7. lépés		+0.081	+0.162	+0.202	+0.101	
8. lépés	–0.031	–0.050	–0.025	–0.033	–0.067	–0.034
9. lépés		+0.013	+0.026	+0.032	+0.016	
10. lépés	–0.005	–0.008	–0.004	–0.005	–0.011	–0.005
11. lépés		+0.002	+0.004	+0.005	+0.003	
12. lépés	–0.001	–0.001	+0.001	–0.001	–0.002	–0.001
13. lépés	–12.000	+12.000	–3.774	+3.774	–6.447	+6.447



6.6 ábra. Öttámaszú tartó.

A kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{B1}^{0} = -\frac{ql^2}{8} - \frac{3}{16}Fl = -\frac{2\cdot 6^2}{8} - \frac{3}{16}3\cdot 6 = -12.375 \text{ kNm}$$

$$M_{B2}^{0} = \frac{Fab^2}{l^2} = \frac{16\cdot 3\cdot 2^2}{5^2} = 7.68 \text{ kNm}$$

$$M_{C2}^{0} = -\frac{Fa^2b}{l^2} = -\frac{16\cdot 3^2\cdot 2}{5^2} = -11.52 \text{ kNm}$$

$$M_{C3}^{0} = M_{D3}^{0} = 0$$

$$M_{D4}^{0} = \frac{1}{3}Fl = \frac{1}{3}6\cdot 6 = 12.0 \text{ kNm}$$

A kezdeti befogási nyomatékok (M_0) ábráját a végleges (M) nyomatéki ábrával való összehasonlítás céljából a tartó alatt feltüntettük. Felrajzoltuk a tartó meggörbült tengelyvonalát is a közbülső támaszok befogással való helyettesítése esetére (y_0) és a támaszok teljes felszabadítása utáni – tényleges – állapotra (y) is.

1. lépés

Az előzőekben meghatározott kezdeti befogási nyomatékok értékét beírjuk a táblázat első sorába a megfelelő nyomatékosztási tényezők alá.

2. lépés

Kiválasztjuk a tartó egy, vagy több nem szomszédos (példánkban a *B* és *D*) csomópontját, ezeket a befogás alól ideiglenesen felszabadítjuk és nyomaték-egyensúlyozást végzünk.

Példánkban a kiegyensúlyozatlan nyomatékok:

$$\Delta M_B = -12.375 + 7.68 = -4.695 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_D = 12.0 + 0.0 = 12.0 \text{ kNm}$$

Az egyensúlyozó nyomatékok ellentétes előjelűek és azokból az egyes rúdvégekre a megfelelő nyomatékosztóval szorzott érték jut:

1. jelű rúd jobboldali végére 0.385(+4.695) = + 1.808 kNm,
2. jelű rúd baloldali végére 0.615(+4.695) = + 2.887 kNm,
3. jelű rúd jobboldali végére 0.667(-12.000) = – 8.000 kNm,
4. jelű rúd baloldali végére 0.333(-12.000) = – 4.000 kNm.

Ezeket az értékeket a megfelelő számoszlopba beírjuk, majd nyomatékátvitelt végzünk. Minthogy az *A* és *E* támaszon a tartó szabadon elfordulhat, ezeken a helyeken nyomatékátvitel nem történik.

A 2. jelű rúd jobboldali végére $0.5(+2.887) = +1.443$ kNm,
a 3. jelű rúd baloldali végére $0.5(-8.000) = -4.000$ kNm

értékű nyomatékot viszünk át.

E nyomaték értékeket a megfelelő rúdvégek alatt új számsorba írjuk és annak kifejezéseként, hogy a *B* és *D* jelű csomópont egyensúlyozása, valamint a nyomaték-átvitel megtörtént, a *B* és *D* jelű csomóponthoz tartozó számértékeket aláhúzzuk. Ezután a *B* és *D* jelű csomópontokat ismét befogottnak tekintjük.

3. lépés

Kiválasztjuk a tartó egy közbenső alátámasztását, pl. a *C*-t, és most ott szüntetjük meg a befogást, és ott végzünk nyomatékegyensúlyozást. Példánkban a kiegyensúlyozatlan nyomaték:

$$\Delta M_C = -11.52 + 1.443 - 4.000 = -14.077 \text{ kNm}$$

Az egyensúlyozó nyomatékok:

a 2. jelű rúd jobboldali végén $0.444(+14.077) = +6.250$ kNm,
a 3. jelű rúd baloldali végén $0.556(+14.077) = +7.827$ kNm.

Az átvitt nyomatékok:
a 2. jelű rúd baloldali végére $0.5(+6.250) = +3.125$ kNm
a 3. jelű rúd jobboldali végére $0.5(+7.827) = +3.913$ kNm.

E számértékeket a megfelelő rúdvégek alatt új sorban feljegyezzük, a *C* jelű csomóponthoz tartozó számértékeket aláhúzzuk, majd a *C* jelű csomópontot újra befogottnak tekintjük.

További lépések

Az előzőekben elvégzett műveleteket a tartó valamennyi közbülső alátámasztási pontján megismételjük. Így a kiegyensúlyozatlan nyomatékok egyre kisebbek lesznek, míg végül az előzetesen megadott pontossághoz mérten elhanyagolhatóan kicsinyekké válnak. (Példánkban az egyensúlyozást felváltva a *B* és *D* ill. a *C* alátámasztás helyén végeztük.) Ezután (esetünkben a 12. lépés után) a számítást lezárjuk (13. lépés): a nyomatékok számoszlopait aláhúzzuk, az egyes számoszlopokat pedig egyenként összegezzük. Az így nyert összegek a csomóponti nyomatékok keresett értékei, mégpedig a 2.6 pontban (a 2.22 ábrán) ismertetett szabálynak megfelelő előjelekkel. A nyomatékábra előjelszabályára való áttérést, a tartó szakaszokra bontását, a támaszerő komponensek számítását és az igénybevételi ábrák megrajzolását a fix csomópontú kereteknél megismert módon végezzük el. A 6.6 ábrán az igénybevételi ábrákat és a tartó szakaszokra bontását is feltüntettük.

Konzolos többtámaszú tartó

A nyomatékosztás módszer értelemszerűen alkalmazható abban az esetben is, ha a tartó egyik, vagy mindkét szélső alátámasztásán konzolosan túlnyúlik.

A számítás alapelve jól érzékelhető a 6.7/a ábrán vázolt egyik végén befogott, másik végén konzolosan túlnyúló kéttámaszú tartó példáján.

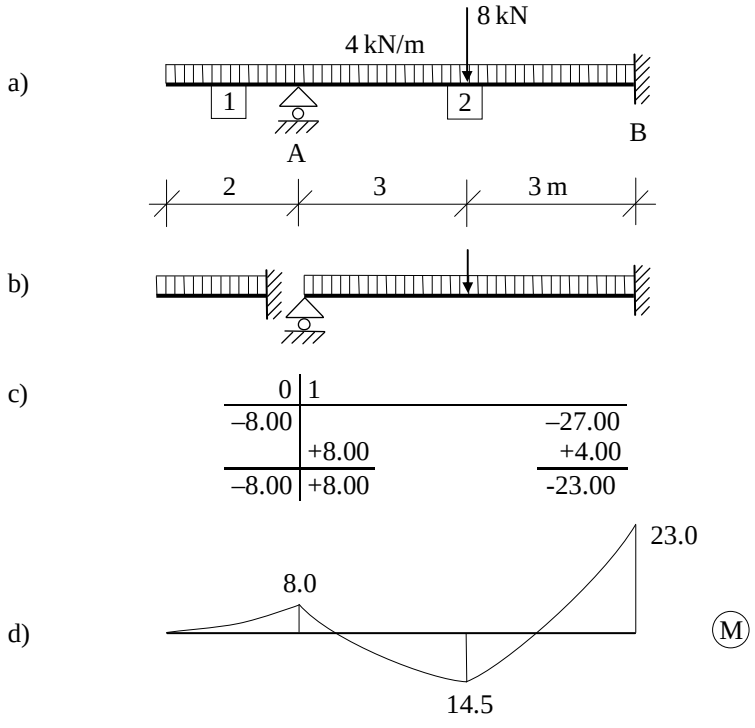
A konzolosan túlnyúló kéttámaszú tartó egy a befogási keresztmetszetben működő erőpár hatására a csuklós támasz felett szabadon elfordul, anélkül, hogy a konzolosan túlnyúló része meggörbülne. Ebből az következik, hogy a konzol merevségi száma zérus, és a két támasz közötti rúdszakasz merevségi számának meghatározása során a rúdszakaszt egyik végén csuklósnak tekintjük (6.7/b ábra).

Merevségi számok:

$$k_1 = 0\,, \qquad k_2 = \frac{3}{4}\frac{I_2}{l_2} = \frac{3}{4}\frac{1}{6} = 0.125\,, \qquad \sum_A k_i = 0 + 0.125 = 0.125$$

A nyomatékosztási tényezők:

$$\alpha_1 = \frac{k_1}{\sum_A k_i} = 0.0\,, \qquad \alpha_2 = \frac{k_2}{\sum_A k_i} = \frac{0.125}{0.125} = 1.0$$



6.7. ábra. Konzolos kéttámaszú tartó.

Az előzőekben ismertetett elvek alapján a csomóponti nyomatékok (kezdeti befogási nyomatékok):

$$M_{A1}^0 = -\frac{ql^2}{2} = -\frac{4\cdot 2^2}{2} = -8.0\ \text{kNm}, \qquad M_{A2}^0 = 0.0\ \text{kNm}$$

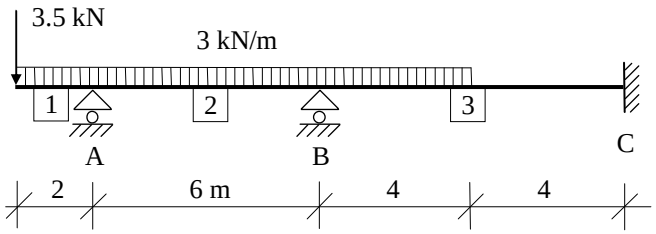
$$M_{B2}^0 = -\frac{ql^2}{8} - \frac{3}{16}Fl = -\frac{4\cdot 6^2}{8} - \frac{3}{16}8\cdot 6 = -27.0\ \text{kNm}$$

Ezután az *A* támaszon nyomatékegyensúlyozást, majd nyomatékátvitelt végzünk, végül a nyomatékokat előjelhelyesen összegezzük. A nyomatékosztás táblázatát a 6.7/c ábrán, a tartó nyomatékábráját a 6.7/d ábrán tüntettük fel.

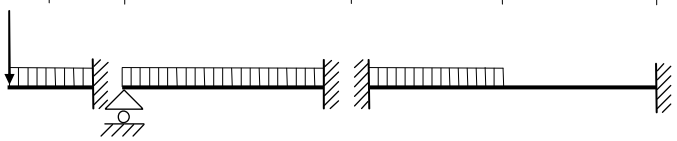
Többtámaszú tartó esetére a számítás menetét a 6.8/a ábrán feltüntetett háromtámaszú tartó segítségével mutatjuk be.

Minthogy a konzolos szélső rúd (példánkban 1–2 jelű) egy a nem konzolos végén működő erőpár hatására a másik (példánkban az *A*) támasz fölött szabadon elfordul, a konzol pedig egyenes marad, a konzol merevségi száma zérus, a hozzá csatlakozó rúdszakaszé pedig úgy számítható, mintha az *A* szélső támasz felett csuklós megtámasztású lenne (6.8/b ábra).

a)



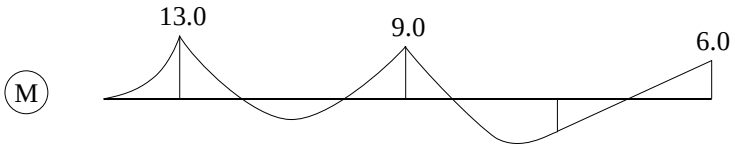
b)



c)

α_i	0	1	0.5	0.5	
1. lépés	–13.00		–13.50	+11.00	–5.00
2. lépés	0	+13.00	+6.50		
3. lépés			–2.00	–2.00	–1.00
4. lépés	–13.00	+13.00	–9.00	+9.00	–6.00

d)



6.8 ábra. Konzolos többtámaszú tartó.

Példánkban a merevségi számok:

$$k_1 = 0, \qquad k_2 = \frac{3}{4}\frac{I_2}{l_2} = \frac{3}{4}\frac{1}{6} = 0.125, \qquad \sum_A k_i = 0.125$$

$$k_3 = \frac{I_3}{l_3} = \frac{1}{8} = 0.125, \qquad \sum_B k_i = 0.25$$

Így a nyomatékosztási tényezők:

$$\alpha_{A1} = \frac{k_1}{\sum_A k_i} = \frac{0}{0.125} = 0.0, \qquad \alpha_{A2} = \frac{k_2}{\sum_A k_i} = \frac{0.125}{0.125} = 1.0$$

$$\alpha_{B2} = \frac{k_2}{\sum_B k_i} = \frac{0.125}{0.25} = 0.5, \qquad \alpha_{B3} = \frac{k_3}{\sum_B k_i} = \frac{0.125}{0.25} = 0.5$$

1. lépés

A csomóponti nyomatékok (kezdeti befogási nyomatékok) számítása során az előzőekben ismertetett elveken kívül figyelembe vesszük, hogy a konzolos támasz feletti nyomatékot úgy kapjuk meg, hogy a támaszpontra felírjuk a konzolon (balra) lévő erők forgatónyomatékát. Példánkban ez az érték

$$M_{A1}^0 = -\frac{ql^2}{2} - Fl = -\frac{3.0 \cdot 2^2}{2} - 3.5 \cdot 2 = -13.0 \text{ kNm}$$

Minthogy az *A* támaszpontban egyébként csuklós alátámasztást tételeztünk fel:

$$M_{A2}^0 = 0.0 \text{ kNm} \qquad \text{és} \qquad M_{B2}^0 = -\frac{ql^2}{8} = -\frac{3.0 \cdot 6^2}{8} = -13.5 \text{ kNm}$$

A többi kezdeti befogási nyomaték:

$$M_{B3}^0 = \frac{qc^2}{12l^2}(6l^2 - 8lc + 3c^2) = \frac{3.0 \cdot 4^2}{12 \cdot 8^2}(6 \cdot 8^2 - 8 \cdot 8 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2) = 11.0 \text{ kNm}$$

$$M_{C3}^0 = -\frac{qc^3}{12l^2}(4l - 3c) = -\frac{3.0 \cdot 4^3}{12 \cdot 8^2}(4 \cdot 8 - 3 \cdot 4) = -5.0 \text{ kNm}$$

A csomóponti nyomaték értékeket a megfelelő nyomatékosztási tényezők alá írjuk (6.8/c ábra).

2. lépés

A konzolos szélső támasz felett nyomatékegyensúlyozást végzünk. A kiegyensúlyozatlan nyomaték: ΔM = -13.00 kNm, így ezt a 2. jelű rúd baloldali végén működő +13.00 kNm nagyságú nyomatékkal egyensúlyozzuk, melynek felét a 2. jelű rúd jobboldali végére átvisszük.

3. lépés

A *B* jelű támaszpontban a kiegyensúlyozatlan $\Delta M = -13.50 + 11.00 + 6.50 = +4.00$ kNm nagyságú nyomaték ellentettjét a nyomatékosztási tényezőknek megfelelően elosztjuk és a befogott rúdvégre nyomatékátvitelt végzünk.

4. lépés

Most már a tartón kiegyensúlyozatlan nyomaték nincs, így a számítást lezárjuk. A támasznyomatékok keresett összegeit a számoszlopok összege adja. A 6.8/d ábrán a tartó nyomatékábráját is feltüntettük.

Amint azt ebből a példából is láttuk, konzolos többtámaszú tartó esetén a nyomatékosztást mindig a konzolos támasznál kell kezdeni, és az egyensúlyozó nyomaték felét a szomszédos támaszra át kell vinni, de a későbbiekben a konzolos támaszra nyomatékot átvinni már nem szabad!

6.2 Eltolható csomópontú szerkezetek

Az 1. fejezetben már említettük, hogy az olyan szerkezeteket, melyek belső csomópontjai a külső erők hatására az elforduláson kívül eltolódást is végezhetnek, eltolható csomópontú szerkezeteknek nevezzük. A következőkben az alapfogalmak ismertetése után néhány alapeset bemutatása útján a nyomatékosztás módszert e szerkezetekre alkalmazzuk.

6.2.1 Alapfogalmak

A 4.1.4. pontban bevezettük az eltolódási merevség fogalmát és levezettük a vonatkozó képleteket. Az eltolódási merevség az a rúd végén ébredő nyomaték, amely egységnyi – elfordulásmentes – támaszponti eltolódás hatására keletkezik. Értéke

- mindkét végén befogott rúd esetén: $\mu = 6\dfrac{EI}{l^2}$

- egyik végén befogott, másik végén csuklósan megtámasztott rúd esetén: $\mu = 3\dfrac{EI}{l^2}$

Tetszőleges *c* távolságú eltolódás esetén az eltolódási nyomaték az

$$M = c\mu$$

összefüggés segítségével határozható meg.

Megjegyezzük, hogy ha valamely eltolható csomópontú szerkezet vizsgálatát a nyomatékosztás módszerrel akarjuk elvégezni, az eltolódási merevséget csomóponti nyomatéknak kell tekinteni, és az ennek megfelelő előjelszabályt kell alkalmazni.

6.2.2 Süllyedő alátámasztású többtámaszú tartó

A gyakorlatban sok esetben előfordul, hogy a többtámaszú tartó eredetileg egy egyenesbe eső támaszpontjai a terhelés hatására, az egyenlőtlen talaj-összenyomódás vagy más ok következtében egymáshoz képest elmozdulnak. Ez a relatív elmozdulás –

amint az a következőkből is kitűnik – a tartó igénybevételeit jelentős mértékben módosíthatja.

A támaszpont-elmozdulás hatására keletkező nyomatékok számítása két lépésben történik.

Először a csomópontokat az adott távolsággal eltoljuk, miközben befogottnak képzeljük azokat (tehát az elfordulást nem tesszük lehetővé). Az így keletkező kezdeti befogási nyomatékok számítása az előző pontban bemutatott képletek segítségével történik.

Második lépésként – a tényleges helyzetnek megfelelően – lehetővé tesszük, hogy a csomópontok a rájuk ható (az első lépésben kiszámított) nyomatékok hatására szabadon elforduljanak.

Az eljárás tehát abból áll, hogy az eltolódási nyomatékokból kiindulva, a csomópontok egyensúlyának létrehozása céljából nyomatékosztást végzünk. Ezzel a csomópontok elfordulását vesszük figyelembe.

Az eljárás alkalmazását a következő számpéldán mutatjuk be.

Határozzuk meg a 6.9/a ábrán feltüntetett háromtámaszú tartó támasznyomatékait, ha az *A* támaszponthoz viszonyítva a *B* támaszpont 20 mm-el, a *C* támaszpont pedig 35 mm-el lesüllyed (6.9/b ábra). A tartó keresztmetszetét a 6.9/c ábrán tüntettük fel.

A tartó anyaga fa, rugalmassági tényezője $E = 1.5\cdot 10^4$ N/mm^2 (MPa). A keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{240\cdot 400^3}{12} = 1.28\cdot 10^9 \,\text{mm}^4$$

Az eltolódási merevségek:

$$\mu_1 = 6\frac{EI}{l_1^2} = \frac{6\cdot 1.5\cdot 10^4\cdot 1.28\cdot 10^9}{4000^2} = 7.2\cdot 10^6 \,\text{Nmm}$$

$$\mu_2 = 3\frac{EI}{l_2^2} = \frac{3\cdot 1.5\cdot 10^4\cdot 1.28\cdot 10^9}{6000^2} = 1.6\cdot 10^6 \,\text{Nmm}$$

Az egyes csomópontokban a kezdeti befogási nyomatékokat a szomszéd támasz helyzetéhez viszonyított süllyedéskülönbségből számíthatjuk ki:

$$M_{A1}^0 = M_{B1}^0 = c_1\mu_1 = (20-0)7.2\cdot 10^6 = 1.44\cdot 10^8 \,\text{Nmm} = 144 \,\text{kNm}$$

$$M_{B2}^0 = c_2\mu_2 = (35-20)1.6\cdot 10^6 = 2.4\cdot 10^7 \,\text{Nmm} = 24 \,\text{kNm}$$

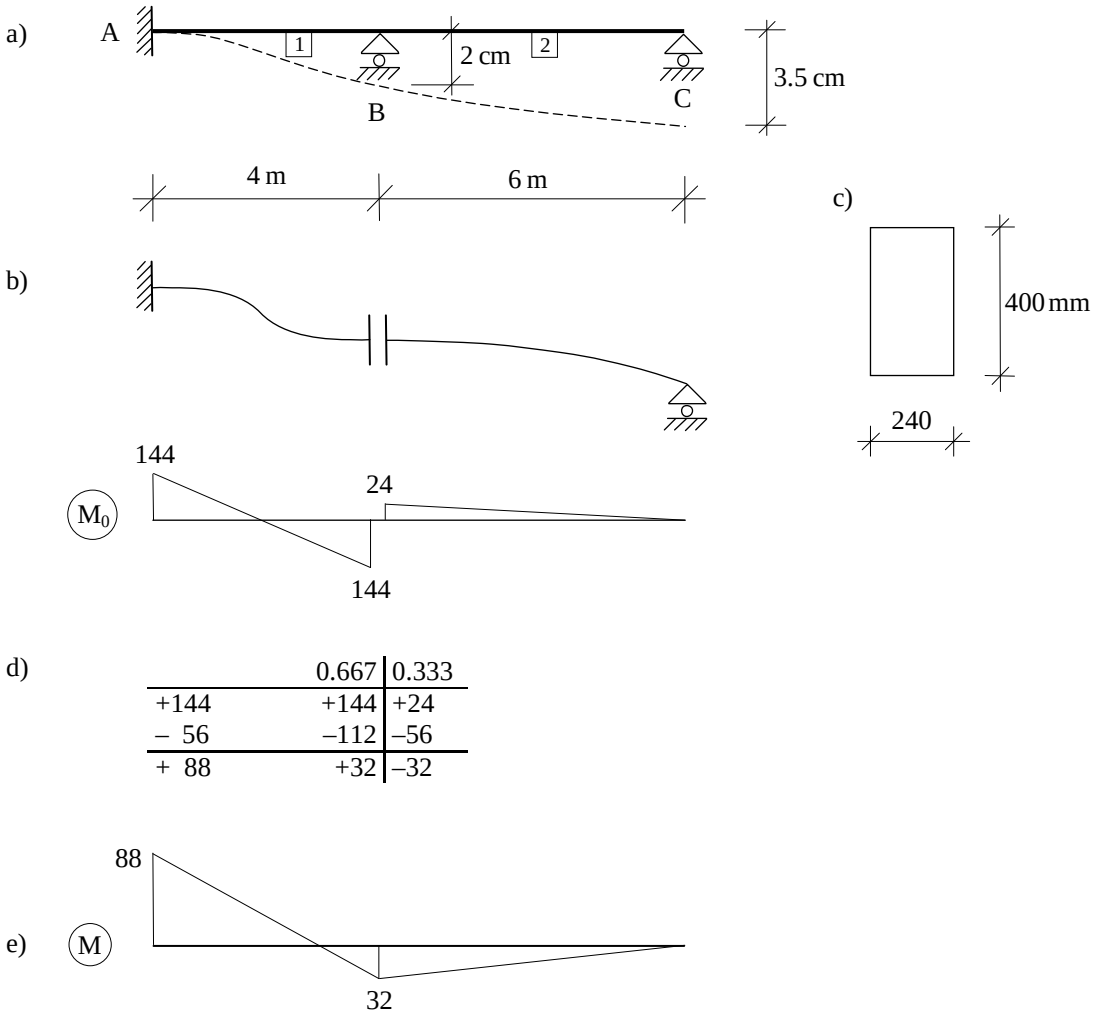
A 6.9/b ábra alatt a kezdeti befogási nyomatékok diagramját is feltüntettük.

Ezután meghatározzuk a merevségi számokat és a nyomatékosztási tényezőket:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{1}{4} = 0.25, \qquad k_2 = \frac{3}{4}\frac{I_2}{l_2} = \frac{3}{4}\frac{1}{6} = 0.125, \qquad \sum_{\text{B}} k_i = 0.25 + 0.125 = 0.375$$

A nyomatékosztási tényezők:

$$\alpha_{B1} = \frac{k_1}{\sum_{B} k_i} = \frac{0.25}{0.375} = 0.667\,, \qquad \alpha_{B2} = \frac{k_2}{\sum_{B} k_i} = \frac{0.125}{0.375} = 0.333$$



6.9 ábra. Süllyedő alátámasztású többtámaszú tartó.

A nyomatékosztást az ismert módon a 6.9/d ábrán végeztük el. Végül elkészítettük a tartó nyomatékábráját is (6.9/e ábra).

Megjegyezzük még, hogy az így meghatározott – a támaszpontok relatív elmozdulásából származó – igénybevételeket a terhelés hatására keletkező igénybevételekkel előjelhelyesen összegezni kell.

Ha a példánkban szereplő tartón például a szokásos lefelé irányuló terhelőerők is működnek, melyek hatására – általában – negatív támasznyomatékok keletkeznek, a támaszpont-elmozdulás az M_A támasznyomatékot és az M_2 mezőnyomatékot növeli, míg az M_B támasznyomatékot csökkenti.

6.2.3 Eltolható csomópontú keretek

Az eltolható csomópontú kereteket aszerint hogy a csomópontok eltolódását egy vagy több képzelt megtámasztással tudjuk megakadályozni, az egyszeresen és a többszörösen eltolható keretek csoportjára oszthatjuk. A következőkben – eredeti célkitűzésünknek megfelelően – csupán az egyszeresen eltolható keretekkel foglalkozunk.

E tartószerkezetek vizsgálatával kapcsolatban a következő kérdésekre válaszolunk:

a) Milyen nyomatékok keletkeznek a szerkezeten, ha annak egyes csomópontjait adott távolsággal eltoljuk?
b) Milyen nyomatékok keletkeznek a szerkezeten, ha annak egyes csomópontjait adott erővel eltoljuk?
c) Milyen nyomatékok keletkeznek a szerkezeten, ha annak csomópontjai az adott terhelés hatására maguktól eltolódnak?

Kikötjük még, hogy a keret csak egymásra merőleges rudakat tartalmaz, a rudak tengelyirányú hosszváltozásait pedig – minthogy ezek a tengelyre merőleges irányú eltolódásokhoz képest elhanyagolhatóan kicsinyek – figyelmen kívül hagyjuk.

A feladatok megoldását, mely lényegében a 6.2.2 pontban ismertetett elveken alapul, számpéldákon mutatjuk be.

Adott távolsággal eltolt csomópont

Határozzuk meg a 6.10/a ábrán feltüntetett keret nyomatékait, ha annak felső (*B*, *C*) csomópontjait tetszőleges *c* távolsággal eltoljuk. A kapott nyomatékokból határozzuk meg, mekkora vízszintes (T_0) erő tudja ezt az eltolódást létrehozni. Legyen $I_1 = 3\ \mathrm{m}^4$, $I_2 = 2\ \mathrm{m}^4$, $I_3 = 6\ \mathrm{m}^4$ és $E = 80\ \mathrm{kN/m}^2$.

Először a keretgerendát végtelen merevnek tekintjük. Ezért a *B* és *C* csomópont csak eltolódhat, de el nem fordulhat. Ha az eltolódás egységnyi távolsággal történik (6.10/b ábra), az oszlopok befogott végein éppen az eltolódási merevséggel egyező nagyságú nyomatékok (6.10/c ábra) keletkeznek:

$$M_{B,1} = M_{A,1} = \mu_1 = 6\frac{EI_1}{l_1^2} = \frac{6 \cdot 80 \cdot 3}{6^2} = 40\,\mathrm{kNm}$$

és

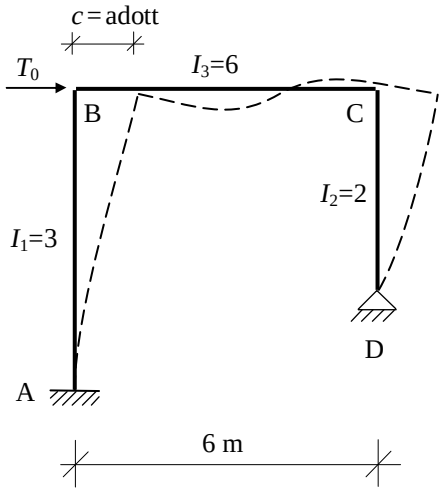
$$M_{C,2} = \mu_2 = 3\frac{EI_2}{l_2^2} = \frac{3 \cdot 80 \cdot 2}{4^2} = 30\,\mathrm{kNm}$$

Második lépésben a csomópontokat szabadon elfordulni engedjük, aminek következtében mindhárom rúd meggörbül (szaggatott meggörbült vonal a 6.10/a ábrán). Ennek hatását úgy vesszük figyelembe, hogy az előzőekben meghatározott kezdeti befogási nyomatékokból kiindulva nyomatékosztást végzünk. Ehhez kiszámítjuk a merevségi számokat és a nyomatékosztási tényezőket:

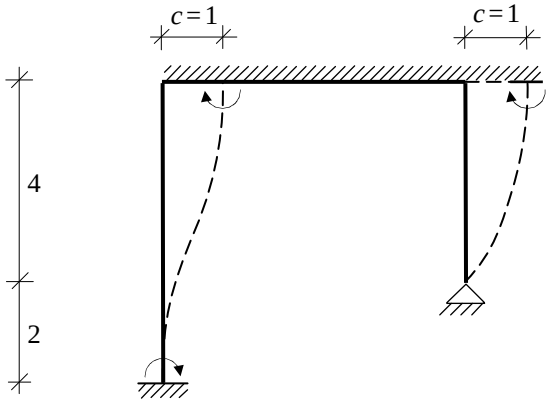
$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{6} = 0.5, \qquad k_2 = \frac{3}{4}\frac{I_2}{l_2} = \frac{3}{4}\frac{2}{4} = 0.375, \qquad k_3 = \frac{I_3}{l_3} = \frac{6}{6} = 1.0$$

$$\sum_{\mathrm{B}} k_i = 0.5 + 1.0 = 1.5, \qquad \sum_{\mathrm{C}} k_i = 0.375 + 1.0 = 1.375$$

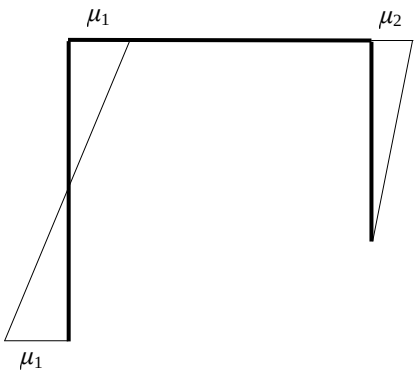
a)



b)



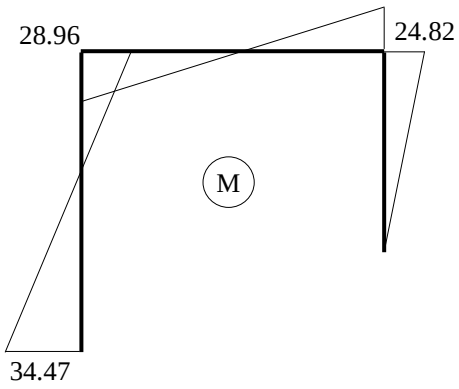
c)



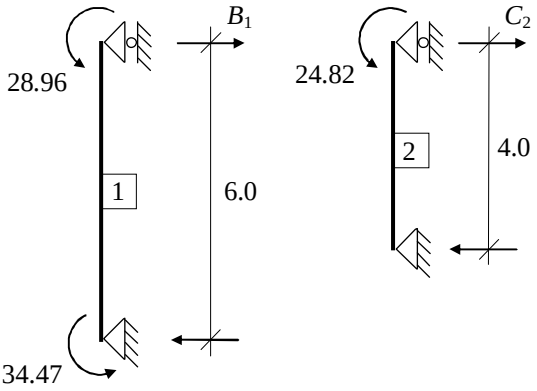
d)

A	B		C	
1	1	3	3	2
–	0.333	0.667	0.727	0.273
+40.00	+40.00			+30.00
–6.67	–13.33	–26.67	–13.33	
		–6.06	–12.12	–4.55
+1.01	+2.02	+4.04	+2.02	
		–0.73	–1.47	–0.55
+0.12	+0.24	+0.49	+0.25	
		–0.09	–0.18	–0.07
+0.01	+0.03	+0.06	+0.03	
			–0.02	–0.01
+34.47	+28.96	–28.96	–24.82	+24.82

e)



f)



6.10 ábra. Adott távolsággal kilendülő keret.

A nyomatékosztási tényezők:

$$\alpha_{B1} = \frac{k_1}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{0.5}{1.5} = 0.333, \qquad \alpha_{B3} = \frac{k_3}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{1.0}{1.5} = 0.667$$

$$\alpha_{C3} = \frac{k_3}{\sum_{\mathrm{C}} k_i} = \frac{1.0}{1.375} = 0.727, \qquad \alpha_{C2} = \frac{k_2}{\sum_{\mathrm{C}} k_i} = \frac{0.375}{1.375} = 0.273$$

A nyomatékosztást a 6.10/d ábrán végeztük el. Most már elkészíthetjük a nyomaték-ábrát (6.10/e ábra alatt), és kiszámíthatjuk az egységnyi eltolódást okozó T_0 erő nagyságát. Ez utóbbit az 1. és 2. jelű oszlop felső támaszerőinek összegeként kapjuk (6.10/f ábra):

$$T_0 = B_1 + C_2 = \frac{28.96 + 34.47}{6} + \frac{24.82}{4} = 16.78 \text{ kN } [\rightarrow]$$

Adott erővel eltolt csomópont

Ha egy keret csomópontjaira adott nagyságú, az eltolódás vonalával egybeeső hatásvonalon működő erő hat, és az ennek hatására keletkező nyomatékokat keressük, a feladat csak közvetett úton oldható meg.

Először – az előző pontban ismertetett módon – tetszőleges távolsággal eltoljuk a csomópontokat és meghatározzuk az ennek hatására keletkező nyomatékok és az ezt létrehozó eltolóerő nagyságát. Minthogy a nyomatékok az eltoló erővel arányosak, meghatározzuk az adott és a számításból kapott eltolóerő hányadosát. Az adott erő hatására keletkező nyomatékokat úgy kapjuk meg, hogy e hányadossal az ismert nyomatékokat megszorozzuk. E nyomatékábrához tartozó eltolóerő természetesen most már az adott erővel megegyező nagyságú és irányú.

Első példaként határozzuk meg, hogy a 6.11/a ábrán vázolt kereten milyen nyomatékok keletkeznek T_0 = 24 kN nagyságú eltolóerő hatására.

Minthogy a tartó a 6.10/a ábrán feltüntetett szerkezettel minden tekintetben megegyezik, e szerkezeten működő nyomatékokat pedig T_E = l6.78 kN nagyságú eltolóerő esetére az előző példából ismerjük, a keresett nyomatékokat a következő módon számítjuk:

$$M_{A1} = \frac{24.0}{16.78} 34.47 = 1.43 \cdot 34.47 = 49.30 \text{ kNm}$$

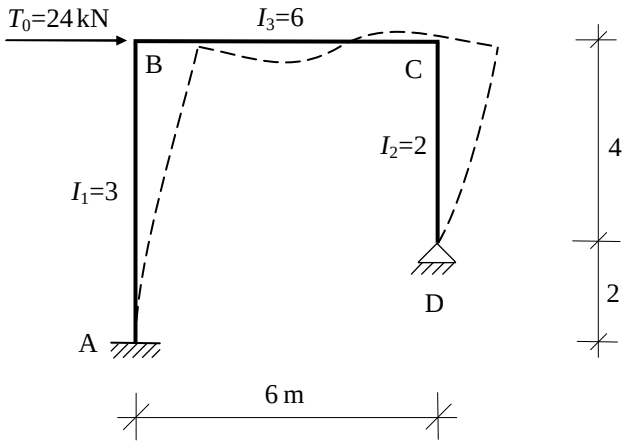
$$M_{B1} = -M_{B3} = 1.43 \cdot 28.96 = 41.40 \text{ kNm}$$

$$M_{C2} = -M_{C3} = 1.43 \cdot 24.82 = 35.50 \text{ kNm}$$

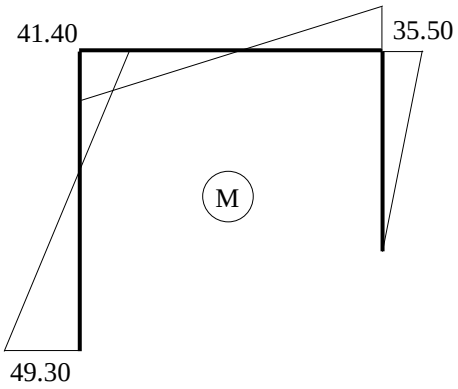
Az így meghatározott nyomaték alapján számított eltolóerő pedig valóban

$$T_0 = B_1 + C_2 = \frac{49.30 + 41.40}{6} + \frac{35.50}{4} = 24.00 \text{ kN}$$

a) kilendülő keret



b) M-ábra



6.11 ábra. Adott erővel kilendített keret.

Második példaként határozzuk meg a 6.12/a ábrán feltüntetett keret nyomatékait balra irányuló T_0 = 4.6 kN nagyságú eltolóerő hatására! Legyen $I_1 = I_2 = I_3 = 4$ m^4, $I_4 = 9$ m^4, $I_5 = 12$ m^4 és $E = 10$ kN/m^2.

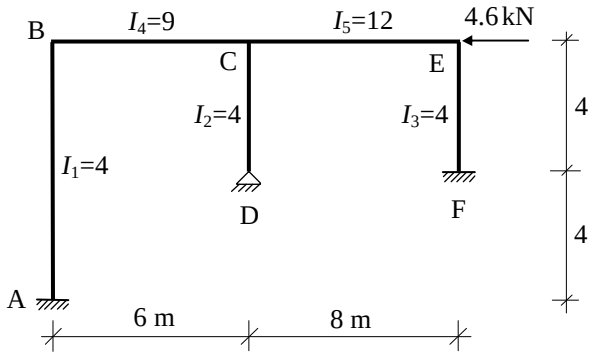
Az egységnyi kilendítés (6.12/b ábra) hatására keletkező befogási nyomatékok (6.12/c ábra):

$$M_{A,1} = M_{B,1} = \mu_1 = 6\frac{EI_1}{l_1^2} = \frac{6\cdot 10\cdot 4}{8^2} = -3.75\,\text{kNm}$$

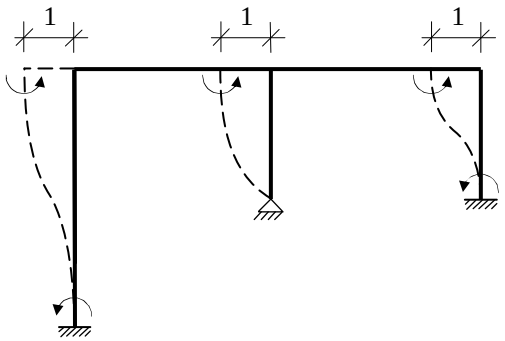
$$M_{C,2} = \mu_2 = 3\frac{EI_2}{l_2^2} = \frac{3\cdot 10\cdot 4}{4^2} = -7.5\,\text{kNm}$$

$$M_{E,3} = M_{F,3} = \mu_3 = 6\frac{EI_3}{l_3^2} = \frac{6\cdot 10\cdot 4}{4^2} = -15.0\,\text{kNm}$$

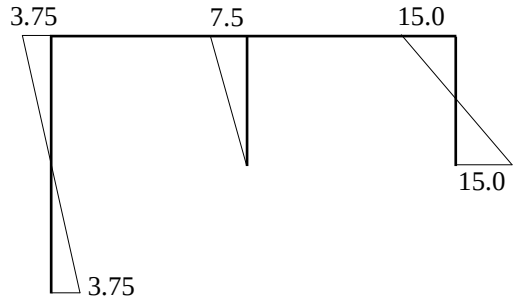
a)



b)



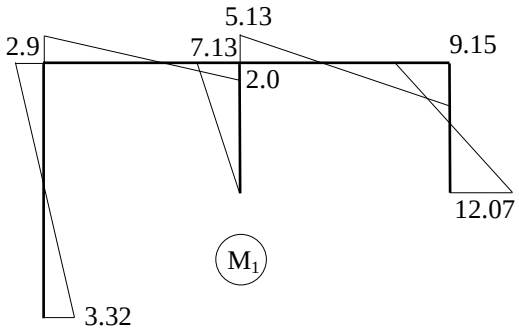
c)



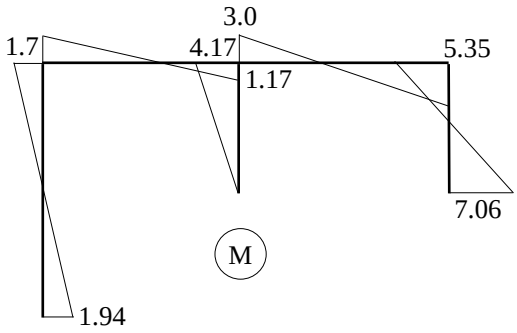
d)

A	B		C			E		F
1	1	4	4	2	5	5	3	3
–	0.25	0.75	0.4	0.2	0.4	0.6	0.4	–
–3.75	–3.75			–7.50			–15.00	–15.00
+0.47	+0.94	+2.81	+1.40		+4.50	+9.00	+6.00	+3.00
		+0.32	+0.64	+0.32	+0.64	+0.32		
–0.04	–0.08	–0.24	–0.12		–0.10	–0.19	–0.13	–0.06
		+0.04	+0.09	+0.04	+0.09	+0.04		
	–0.01	–0.03	–0.02		–0.01	–0.02	–0.02	–0.01
			+0.01	+0.01	+0.01			
–3.32	–2.90	+2.90	+2.00	–7.13	+5.13	+9.15	–9.15	–12.07

e)



f)



6.12 ábra. Adott erővel kilendített keret.

A merevségi számok és a nyomatékosztási tényezők:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{4}{8} = 0.5, \qquad k_4 = \frac{I_4}{l_4} = \frac{9}{6} = 1.5, \qquad \sum_{\mathrm{B}} k_i = 0.5 + 1.5 = 2.0$$

$$k_2 = \frac{3}{4}\frac{I_2}{l_2} = \frac{3}{4}\frac{4}{4} = 0.75, \qquad k_5 = \frac{I_5}{l_5} = \frac{12}{8} = 1.5, \qquad \sum_{\mathrm{C}} k_i = 0.75 + 1.5 + 1.5 = 3.75$$

$$k_3 = \frac{I_3}{l_3} = \frac{4}{4} = 1.0, \qquad \sum_{\mathrm{E}} k_i = 1.5 + 1.0 = 2.5$$

$$\alpha_{B1} = \frac{k_1}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{0.5}{2.0} = 0.25, \qquad \alpha_{B4} = \frac{k_4}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{1.5}{2.0} = 0.75$$

$$\alpha_{C2} = \frac{k_2}{\sum_{\mathrm{C}} k_i} = \frac{0.75}{3.75} = 0.2, \quad \alpha_{C4} = \frac{k_4}{\sum_{\mathrm{C}} k_i} = \frac{1.5}{3.75} = 0.4, \quad \alpha_{C5} = \frac{k_5}{\sum_{\mathrm{C}} k_i} = \frac{1.5}{3.75} = 0.4$$

$$\alpha_{E5} = \frac{k_5}{\sum_{\mathrm{E}} k_i} = \frac{1.5}{2.5} = 0.6, \qquad \alpha_{E3} = \frac{k_3}{\sum_{\mathrm{E}} k_i} = \frac{1.0}{2.5} = 0.4$$

A nyomatékosztást az ismert módon, a 6.12/d ábrán végeztük el. A számítás eredményei alapján nyomatékábrát (M_1) készítettünk (6.12/e ábra). Az ehhez tartozó eltolóerő:

$$B_1' + C_2' + E_3' = \frac{3.32 + 2.9}{8} + \frac{7.13 + 9.15 + 12.07}{4} = 7.865 \text{ kN} \quad [\leftarrow]$$

és az ennek hatására a gerendaszinten keletkező ún. megtámasztó erő:

$$T_1 = -(B_1' + C_2' + E_3') = 7.865 \text{ kN} \quad [\rightarrow]$$

Ha a vízszintes gerenda szintjére vízszintes vetületi egyenletet írunk föl, akkor megkapjuk hogy az egységnyi kilendítés hányszorosára (x_1) van szükség hogy a szerkezet egyensúlyban legyen:

$$T_0 + T_1 x_1 = -4.6 + 7.865 x_1 = 0$$

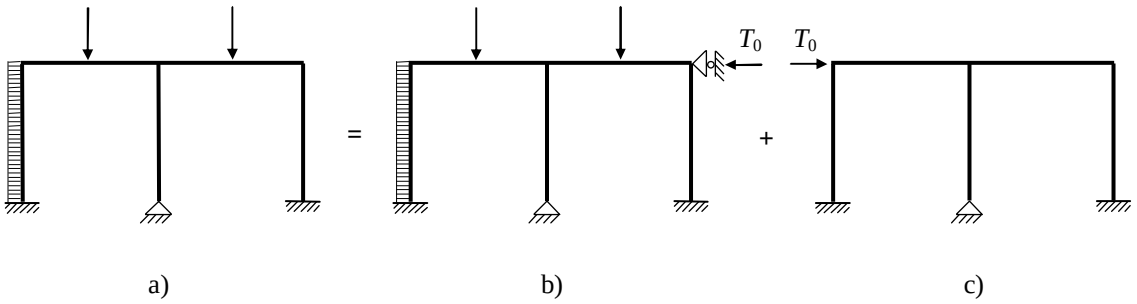
Innen:

$$x_1 = \frac{4.6}{7.865} = 0.585$$

Ennek alapján már előállítható a végleges nyomatékábra (6.12/f ábra): $M = M_1 x_1$.

Terhelés hatására eltolódó csomópontú keret

Az eddig megtárgyalt kérdések után most már a legáltalánosabb kérdésre is választ adhatunk. Nevezetesen arra, hogy milyen nyomatékok keletkeznek a szerkezeten, ha annak csomópontjai az adott terhelés hatására eltolódnak.



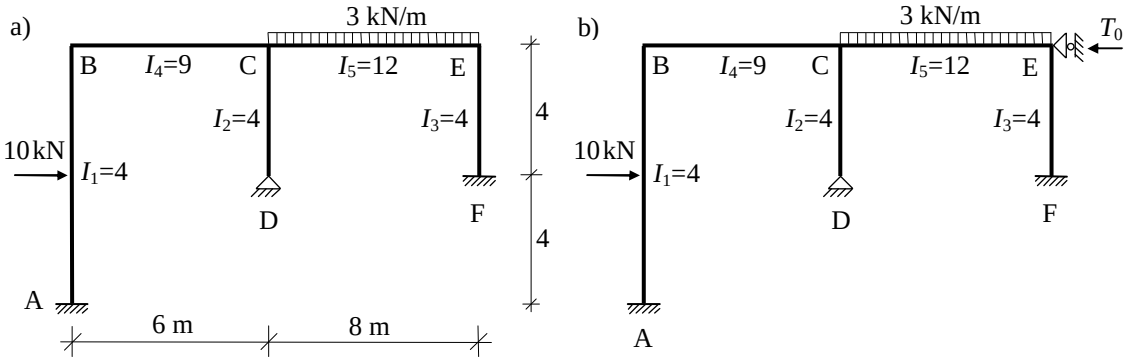
6.13 ábra. Terhelés hatására eltolódó csomópontú keret.

A megoldás módja a következő:

Először a tetszőlegesen terhelt eltolható csomópontú keretet (6.13/a ábra) képzelt megtámasztással látjuk el (6.13/b ábra), és a nyomatékosztás módszerével meghatározzuk az így keletkezett elforduló, de el nem tolódó csomópontú szerkezet nyomatékait. Meghatározzuk továbbá a képzelt megtámasztásban keletkező támaszerő nagyságát és irányát is. Ennek ellentettje a keretet kilendítő erő (T_0). A második lépésben eltávolítjuk a képzelt támaszt és a kilendítő erővel terheljük a szerkezetet (6.13/c ábra). Kiszámítjuk az ennek hatására keletkező nyomatékokat.

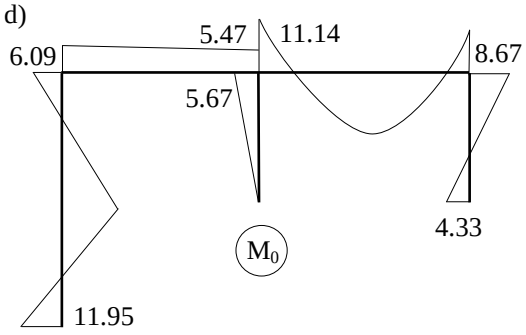
Az első és második lépésben kapott nyomatékok összegezése után a végleges nyomatékokhoz jutunk.

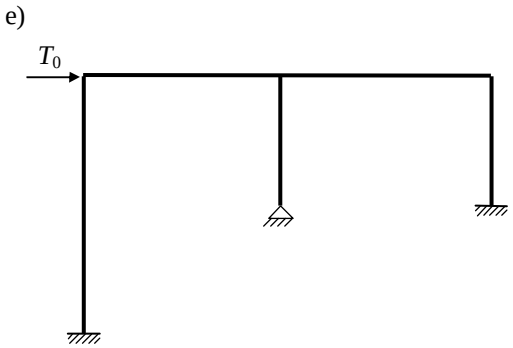
Első példaként határozzuk meg a 6.14/a. ábrán feltüntetett keret nyomatékait.
Először a keretet egy képzelt támasz segítségével fix csomópontúvá tesszük (6.14/b ábra). Minthogy a tartó geometriai jellemzőit tekintve teljesen megegyezik az előző számpéldában szereplő szerkezettel (6.12/a ábra), a merevségi számok és a nyomatékosztási tényezők azonosak az ott meghatározottakkal.

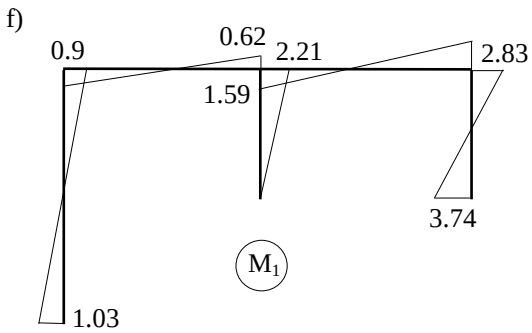


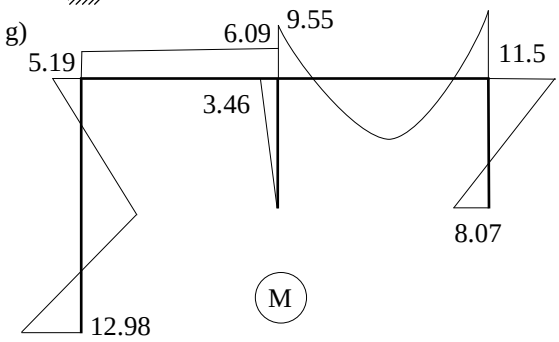
c)

A	B		C			E		F
1	1	4	4	2	5	5	3	3
–	0.25	0.75	0.40	0.20	0.40	0.60	0.40	–
+10.00	–10.00				+16.00	–16.00		
+1.25	+2.50	+7.50	+3.75		+4.80	+9.60	+6.40	+3.20
		–4.91	–9.82	–4.91	–9.82	–4.91		
+0.61	+1.23	+3.68	+1.84		+1.47	+2.94	+1.97	0.98
		–0.66	–1.32	–0.66	–1.33	–0.66		
+0.08	+0.16	+0.50	+0.25		+0.20	+0.40	+0.26	+0.13
		–0.09	–0.18	–0.09	–0.18	–0.09		
+0.01	+0.02	+0.07	+0.03		+0.02	+0.05	+0.04	+0.02
			–0.02	–0.01	–0.02			
+11.95	–6.09	+6.09	–5.47	–5.67	+11.14	–8.67	+8.67	+4.33









h)

A	B		C			E		F
1	1	4	4	2	5	5	3	3
+11.95	–6.09	+6.09	–5.47	–5.67	+11.14	–8.76	+8.76	+4.33
+1.03	+0.90	–0.90	–0.62	+2.21	–1.59	–2.83	+2.83	+3.74
+12.98	–5.19	+5.19	–6.09	–3.46	+9.55	–11.50	+11.50	+8.07

6.14 ábra. Kilendülő háromlábas keret.

A kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{A1}^{0} = -M_{B1}^{0} = \frac{Fl}{8} = \frac{10 \cdot 8}{8} = 10.0 \text{ kNm}$$

$$M_{C5}^{0} = -M_{E5}^{0} = \frac{ql^2}{12} = \frac{3 \cdot 8^2}{12} = 16.0 \text{ kNm}$$

Ezek alapján a fix csomópontú keret nyomatékosztását a 6.14/c, nyomatékábráját pedig a 6.14/d ábrán tüntettük fel. A képzelt támaszban keletkező támaszerő

$$B_1^0 + C_2^0 + E_3^0 = 5 + \frac{6.09 - 11.95}{8} + \frac{5.67 - 8.67 - 4.337}{4} = 2.435 \text{ kN} [\leftarrow]$$

ellentettje a kilendítő erő:

$$T_0 = -(B_1^0 + C_2^0 + E_3^0) = 2.435 \text{ kN} [\rightarrow]$$

Ezután ezzel az eltoló erővel terheljük a szerkezetet (6.14/e ábra).

Az előző számpéldában egy balra irányuló 4.60 kN nagyságú erő hatására keletkező nyomatékokat ugyanezen szerkezeten már meghatároztuk. Minthogy a T_0 = 2.435 kN nagyságú erő jobbfelé irányuló, az ebből származó nyomatékokat úgy kapjuk, hogy az előző példában meghatározott értékeket

$$-\frac{2.435}{4.600} = -0.53$$

értékkel szorozzuk (6.14/f ábra).

Végül a fix csomópontú és az eltolható szerkezet esetére nyert nyomaték értékeket előjelhelyesen összegezzük (6.14/h ábra) és így megkapjuk a végleges nyomatékokat (6.14/g ábra).

Második példaként a 6.15/a ábrán feltüntetett eltolható csomópontú keret nyomatékait számítjuk ki. E = állandó.

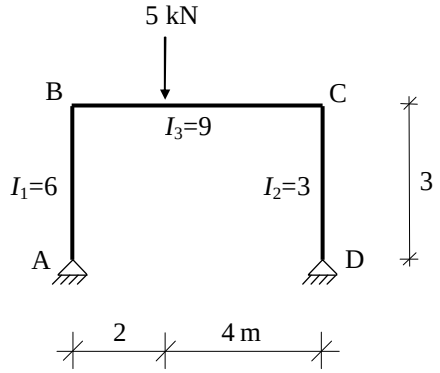
Először a fix csomópontúvá tett szerkezet (6.15/b ábra) számítását hajtjuk végre.

A merevségi számok:

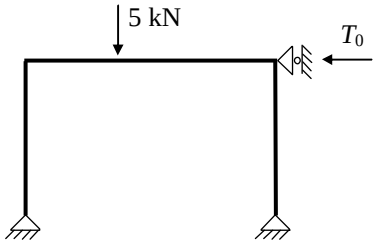
$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{6}{3} = 1.5, \qquad k_2 = \frac{3}{4}\frac{I_2}{l_2} = \frac{3}{4}\frac{3}{3} = 0.75, \qquad k_3 = \frac{I_3}{l_3} = \frac{9}{6} = 1.5$$

$$\sum_{\text{B}} k_i = 1.5 + 1.5 = 3.0, \qquad \sum_{\text{C}} k_i = 1.5 + 0.75 = 2.25$$

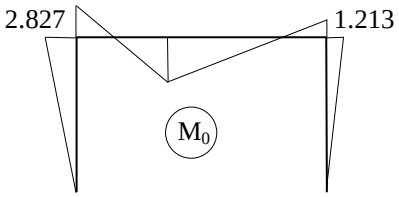
a)



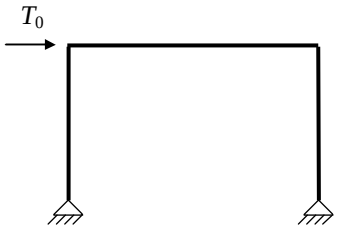
b)



d)



e)



c)

B		C	
1	3	3	2
0.5	0.5	0.667	0.333
	+4.444	–2.222	
–2.222	–2.222	–1.111	
	+1.111	+2.222	+1.111
–0.555	–0.556	–0.278	
	+0.092	+0.185	+0.093
–0.046	–0.046	–0.023	
	+0.008	+0.015	+0.008
–0.004	–0.004	–0.002	
		+0.001	+0.001
–2.827	+2.827	–1.213	+1.213

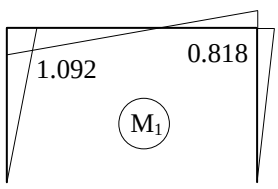
f)

B		C	
1	3	3	2
0.5	0.5	0.667	0.333
+2.000			+1.000
–1.000	–1.000	–0.500	
	–0.167	–0.333	–0.167
+0.084	+0.083	+0.042	
	–0.014	–0.028	–0.014
+0.007	+0.007	+0.003	
+0.001	–0.001	–0.002	–0.001
+1.092	–1.092	–0.818	+0.818

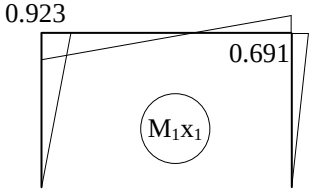
i)

B		C	
1	3	3	2
–2.827	+2.827	–1.213	+1.213
+0.923	–0.923	–0.691	+0.691
–1.904	+1.904	–1.904	+1.904

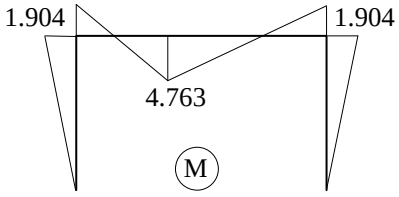
g)



h)



j)



6.15 ábra. Kétcsuklós kilendülő keret.

A nyomatékosztási tényezők:

$$\alpha_{B1} = \frac{k_1}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{1.5}{3.0} = 0.5, \qquad \alpha_{B3} = \frac{k_3}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{1.5}{3.0} = 0.5$$

$$\alpha_{C3} = \frac{k_3}{\sum_{\mathrm{C}} k_i} = \frac{1.5}{2.25} = 0.667, \qquad \alpha_{C2} = \frac{k_2}{\sum_{\mathrm{C}} k_i} = \frac{0.75}{2.25} = 0.333$$

A kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{B3}^0 = \frac{Fab^2}{l^2} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 4^2}{6^2} = 4.444 \text{ kNm}$$

$$M_{C3}^0 = -\frac{Fa^2b}{l^2} = -\frac{5 \cdot 2^2 \cdot 4}{6^2} = -2.222 \text{ kNm}$$

A nyomatékosztást a 6.15/c ábrán végeztük el, az M_0 nyomatékábra a 6.15/d ábrán látható. A kilendítő erő a képzelt megtámasztó erő ellentettje:

$$T_0 = -(B_1^0 + C_2^0) = \frac{2.827 - 1.213}{3} = 0.538 \text{ kN} \quad [\rightarrow]$$

A következő lépés a kilendítő erővel terhelt szerkezet (6.15/e ábra) számítása.
A kezdeti befogási nyomatékok az egységnyi kilendítésből:

$$M_{B,1} = 3\frac{EI_1}{l_1^2} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 6}{3^2} = 2.0 \text{ kNm}$$

$$M_{C,2} = 3\frac{EI_2}{l_2^2} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 3}{3^2} = 1.0 \text{ kNm}$$

Ezek alapján a nyomatékosztást a 6.15/f ábrán végeztük el. A nyomatékábrát a 6.15/g ábrán láthatjuk. Az ehhez tartozó megtámasztó erő:

$$T_1 = -(B_1' + C_2) = \frac{1.092 + 0.818}{3} = 0.637 \text{ kN} \quad [\leftarrow]$$

A

$$T_0 + T_1 x_1 = 0$$

vízszintes vetületi egyenletből

$$x_1 = \frac{0.538}{0.637} = 0.845$$

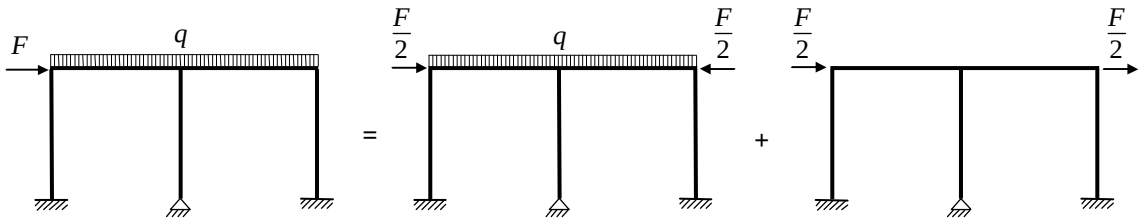
A végleges nyomatékábrát az

$$M = M_0 + M_1 x_1$$

összefüggésből határozhatjuk meg. Az összegzést a 6.15/i ábrán végeztük el. A nyomatékábra a 6.15/j ábrán látható.

6.3 Szimmetrikus tartószerkezetek

Szimmetrikus elrendezésű tartószerkezetek vizsgálata – ha a terhelés szimmetrikus vagy antimetrikus – lényegesen egyszerűsíthető. A szimmetriának természetesen teljesnek kell lennie, tehát azonkívül hogy a szerkezet statikai vázlata szimmetrikus, még a szimmetrikus helyzetű rudak tehetetlenségi nyomatékának és megtámasztási módjának is azonosnak kell lenniük. A szimmetrikus elrendezésből származó egyszerűsítések olyan jelentősek, hogy esetenként érdemes lehet általános terhelést is egy szimmetrikus és egy antimetrikus részből összetettnek tekinteni (6.16 ábra).



6.16 ábra. Általános terhelés felbontása szimmetrikus és antimetrikus részre.

Itt említjük meg, hogy ha egy kilendülő tartó szimmetrikus és a terhelése is szimmetrikus, akkor a tartó nem lendül ki. Ekkor a fix megtámasztásúnak tekintett szerkezet megoldása a végleges megoldás.

6.3.1 A szimmetriából adódó egyszerűsítések

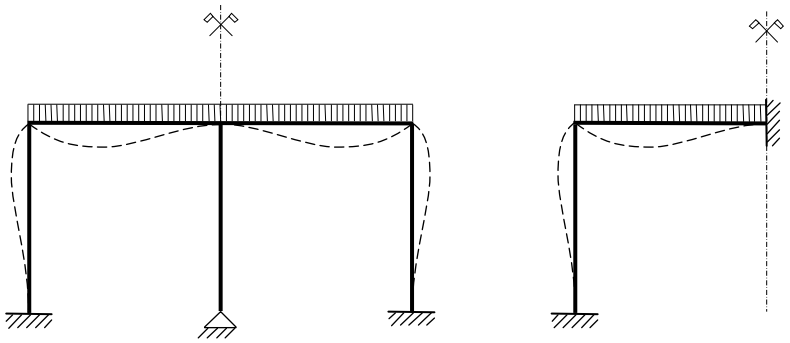
A szimmetriából eredő egyszerűsítések következő négy esetét különböztetjük meg.

1) A szimmetriatengely csomóponton megy át és a teher szimmetrikus (6.17/a ábra).

Ekkor szimmetrikus lesz a szerkezet alakváltozása is. Így a szimmetriatengelybe eső csomópontban a rúdvégek elfordulása és eltolódása is zérus, éppen úgy, mintha ott befogás lenne.

Az egyszerűsítés ekkor abból áll, hogy a szimmetriatengely vonalában a szerkezetet befogottnak tekintjük és annak csak a szimmetriatengely egyik oldalára eső felével számolunk (6.17/b ábra).

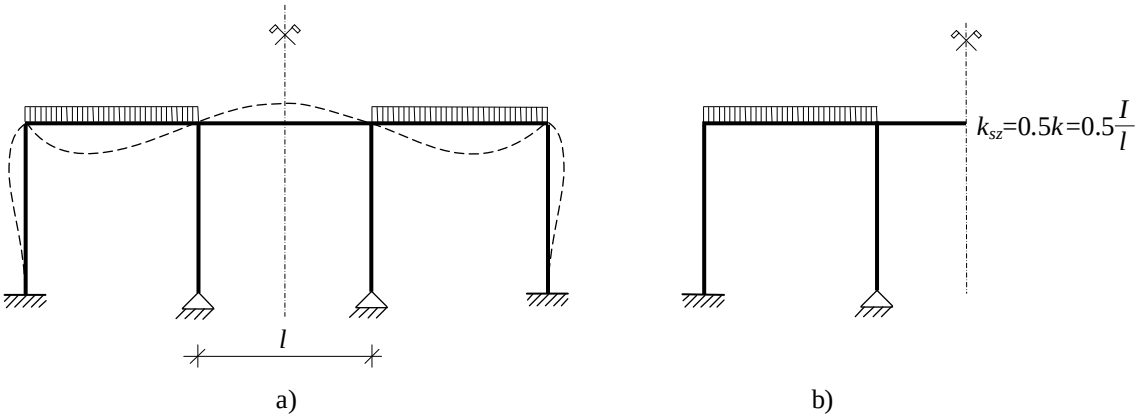
A szimmetriatengelybe eső rúd a szerkezet szimmetrikus alakváltozása miatt nem görbül meg, abban nyomaték és nyíróerő nem keletkezik, tehát a nyomatékosztás során figyelmen kívül hagyható.



6.17 ábra. A szimmetriatengely csomóponton megy át.

2) A szimmetriatengely rúdközépen megy át és a teher szimmetrikus (6.18/a ábra).

Ekkor az egyszerűsítés más meggondoláson alapul. Bár a szimmetriatengelybe eső pontban az elfordulás ez esetben is zérus, nem tekinthetjük itt a szerkezetet befogottnak, mert az eltolódás nem egyenlő nullával. Mégis elhagyhatjuk a számítás során a szerkezet felét, ha a szimmetriatengelyt metsző rúdnak az elfordulási merevségét a szimmetrikus alakváltozás figyelembevételével kezeljük.



6.18 ábra. A szimmetriatengely rúdközépen megy át.

Mint ismeretes, a rúd elfordulási merevségén azt a végnyomatékot értjük, amely egységnyi támaszponti elfordulást hoz létre.

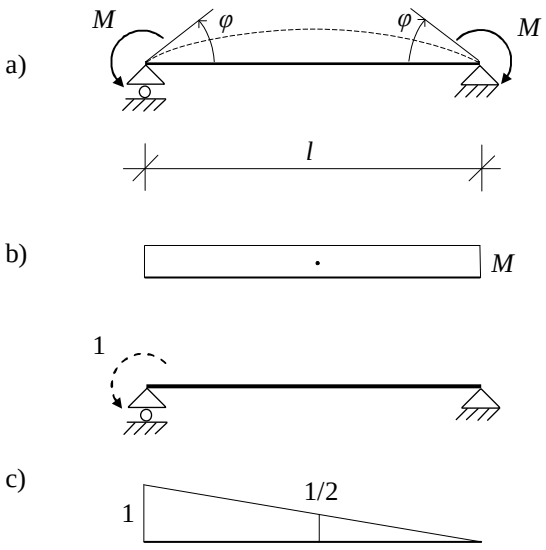
Ha azonban a rúd alakváltozása szimmetrikus, akkor az egyik végén alkalmazott *M* nyomatékkal egyidejűleg a másik végén egy ugyanolyan nagyságú, ellentétes forgásértelmű *M* nyomaték is működik, és az egyik végén létrejött elfordulással egyidejűleg a másik végén is fellép egy szimmetrikus elfordulás. Ilyen rúd esetén tehát a közönséges elfordulási merevségen kívül egy szimmetrikus elfordulási merevségről is beszélhetünk, melyet a következő módon definiálhatunk. A szimmetrikus elfordulási merevségen a tartó két végén alkalmazott azon végnyomatékot értjük, amely szimmetrikusan egységnyi elfordulást eredményez a rúd mindkét végén (6.19/a ábra).

A támaszponti elfordulás munkatétellel számolva (6.19/b-c ábra):

$$\varphi = \frac{1}{EI} Ml \frac{1}{2} = \frac{Ml}{2EI}$$

Ebből az *M* végnyomaték:

$$M = \frac{2EI}{l} \varphi$$



6.19 ábra. Rúdvégek szimmetrikus elfordulása.

A definíció értelmében, ha $\varphi = 1$, akkor a szimmetrikus elfordulási merevséget (K_{sz}) kapjuk:

$$K_{sz} = \frac{2EI}{l}$$

A merevségi szám *(k)* és az elfordulási merevség között fennálló

$$k_{sz} = \frac{1}{4E} K_{sz}$$

ismert összefüggés alapján

$$k_{sz} = \frac{1}{4E} \frac{2EI}{l}$$

vagyis a szimmetrikus merevségi szám:

$$k_{sz} = \frac{1}{2}\frac{I}{l}$$

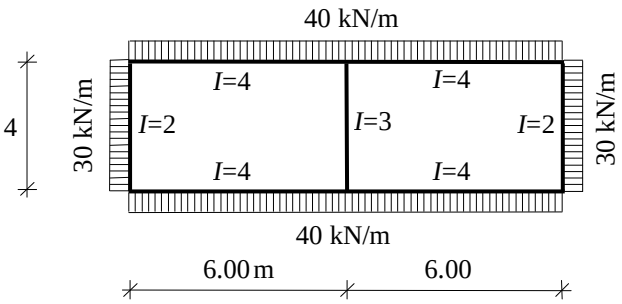
ahol l a szimmetriatengely által félbevágott rúd *teljes* hossza.

Ha tehát a szimmetriatengelyt metsző rudak merevségi számát $k_{sz} = 0.5k$-val vesszük számításba, elegendő a tartónak a szimmetriatengely egyik oldalára eső felével dolgozni (6.18/b ábra). Természetesen a szimmetriatengely túlsó felére semmiféle nyomatéki értéket nem kell átvinnünk.

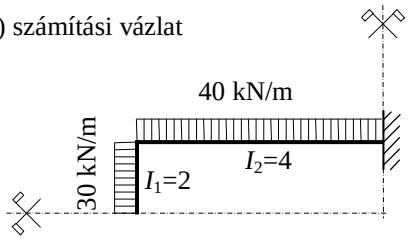
Az előzőekben tárgyalt két eset alkalmazását a következő számpéldán mutatjuk be. Határozzuk meg a 6.20/a ábrán feltüntetett zárt keret nyomatékábráját.

A keret két szimmetriatengellyel is rendelkezik. A függőleges szimmetriatengely csomóponton megy át, amelyben befogást tételezhetünk fel, a vízszintes szimmetriatengely pedig rúdközépen megy át, és ezt a merevségi szám meghatározásánál vesszük figyelembe. Így tehát a 6.20/b ábrán feltüntetett egyszerűsített statikai vázlattal dolgozhatunk.

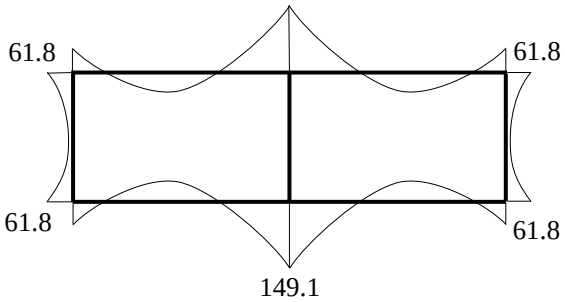
a) kétszeresen szimmetrikus zárt keret



b) számítási vázlat



d) M-ábra



c) nyomatékosztás

1	2	2
0.273	0.727	–
–40.0	+120.0	–120.0
–21.8	– 58.2	– 29.1
–61.8	+61.8	–149.1

6.20 ábra. Kétszeresen szimmetrikus zárt keret.

A merevségi számok:

$$k_{sz,1} = \frac{1}{2}\frac{I}{l} = \frac{1}{2}\frac{2}{4} = 0.25$$

$$k_2 = \frac{I}{l} = \frac{4}{6} = 0.667$$

A nyomatékosztási tényezők:

$$\alpha_1 = \frac{0.25}{0.917} = 0.273$$

$$\alpha_2 = \frac{0.667}{0.917} = 0.727$$

A kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_1^0 = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{30 \cdot 4^2}{12} = -40 \text{ kNm}$$

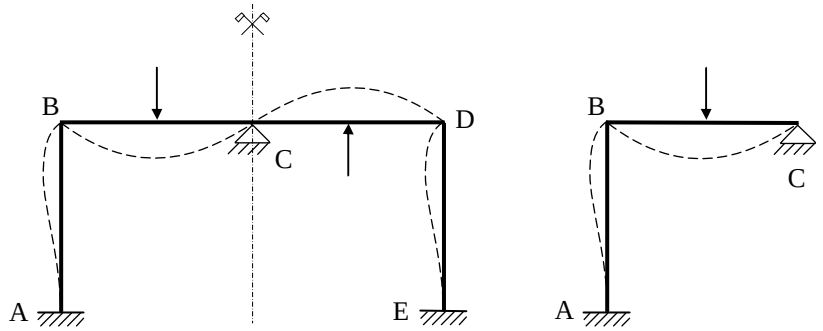
$$M_2^0 = \pm\frac{ql^2}{12} = \pm\frac{40 \cdot 6^2}{12} = \pm 120 \text{ kNm}$$

A nyomatékosztást a 6.20/c, a nyomatékábrát a 6.20/d ábrán tüntettük fel.

Megjegyezzük még, hogy a szimmetrikusan terhelt, szimmetrikus elrendezésű eltolható csomópontú szerkezetek képzelt támaszaiban keletkező erő a nyomatékábra szimmetriája miatt mindig zérus, és így ezek fix csomópontú szerkezetként kezelhetők.

3) A szimmetriatengely csomóponton megy át és a teher antimetrikus.

Ekkor antimetrikusak a hajlítónyomatékok és az alakváltozások is, így a hajlító-nyomatékokat elég a szerkezet egyik oldalán meghatározni, mert a másik oldalon azonos nagyságú, de ellentétes előjelű nyomatékok keletkeznek.



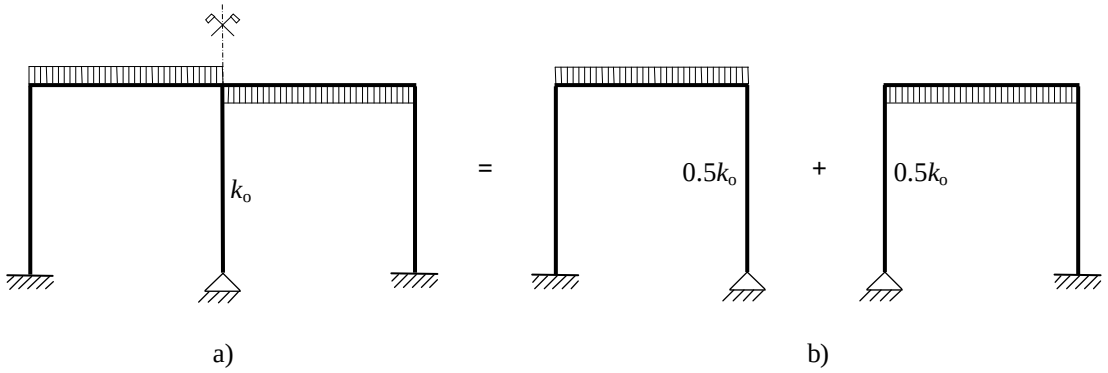
a) b)

6.21 ábra. A szimmetriatengely támaszon megy át.

Ha a szimmetriatengely csomóponton megy át, de rúd nem esik a szimmetriatengelybe, akkor általában a csomóponthoz csak két rúd csatlakozik (6.21/a ábra). Ez esetben a szóban forgó csomópontra ható kezdeti befogási nyomatékok – az antimetria miatt – azonos nagyságúak és azonos előjelűek. Így az egyensúlyozó nyomatékok a kezdeti befogási nyomatékokkal azonos nagyságúak, de ellentétes előjelűek kell legyenek, tehát a nyomatékok összege zérus. E csomópont tehát úgy

kezelhető, mintha ott csukló lenne és elegendő a szerkezet felével foglalkozni (6.21/b ábra).

Ha a szimmetriatengely olyan csomópontot metsz át, melyhez még a szimmetriatengelybe eső rúd is csatlakozik (6.22/a ábra), akkor a szimmetriatengelybe eső rudat a szimmetrikusan elhelyezkedő rudak azonos mértékben és azonos értelemben igyekeznek elfordítani, tehát a szimmetriatengelybe eső rúd merevségét (k_o) megfelezhetjük (6.22/b ábra).

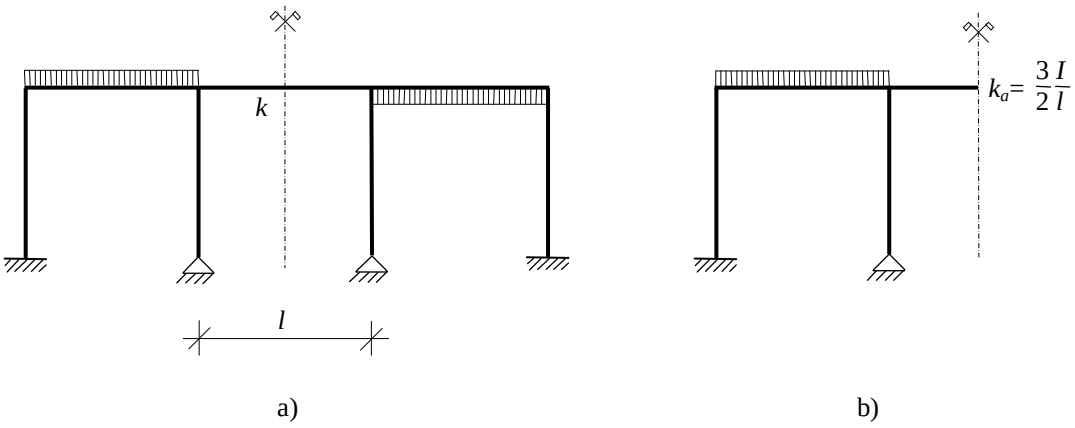


6.22 ábra. Szimmetriatengely csomóponton és rúdon megy át.

Ilyenkor is elég csak a szerkezet felével dolgozni. Nem szabad azonban megfeledkezni arról, hogy a szimmetriatengelybe eső rudakon kapott nyomatékokat – a méretezés során – kétszeres értékkel kell számításba vennünk, mert ezek a rudak a két szerkezetrész mindegyikében szerepelnek.

4) A szimmetriatengely rúdközépen megy át és a teher antimetrikus (6.23/a ábra).

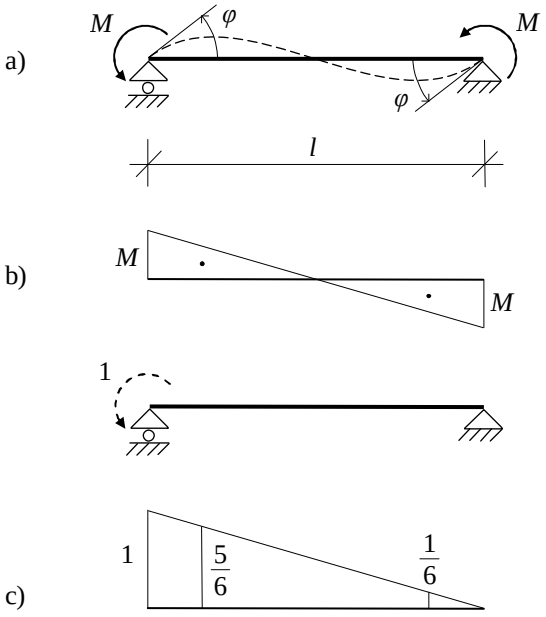
Ekkor ismét elég csak a szerkezet felével dolgozni (6.23/b ábra), ha a szimmetriatengely által elmetszett rúd merevségének számítása során figyelembe vesszük azt a körülményt, hogy annak két végén egyidejűleg, azonos nagyságú és azonos forgásértelmű nyomatékok keletkeznek.



6.23 ábra. Szimmetrikus szerkezet antimetrikus terheléssel.

Az ilyen rúd merevségét – az antimetrikus elfordulási merevséget – a következő módon határozhatjuk meg.

Az antimetrikus elfordulási merevségen a tartó két végén alkalmazott azon végnyomatékot értjük, amely antimetrikusan egységnyi elfordulást eredményez a rúd mindkét végén (6.24/a ábra).



6.24 ábra. Rúdvégek antimetrikus elfordulása.

A támaszponti elfordulás (a 24/b és 24/c ábrák segítségével):

$$\varphi = \frac{1}{EI}\frac{Ml}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\right) = \frac{Ml}{6EI}$$

Ebből az M végnyomaték:

$$M = \frac{6EI}{l}\varphi$$

A definíció értelmében, ha $\varphi = 1$, akkor az antimetrikus elfordulási merevséget (K_a) kapjuk:

$$K_a = \frac{6EI}{l}$$

A merevségi szám (k_a) és a merevség között fennálló

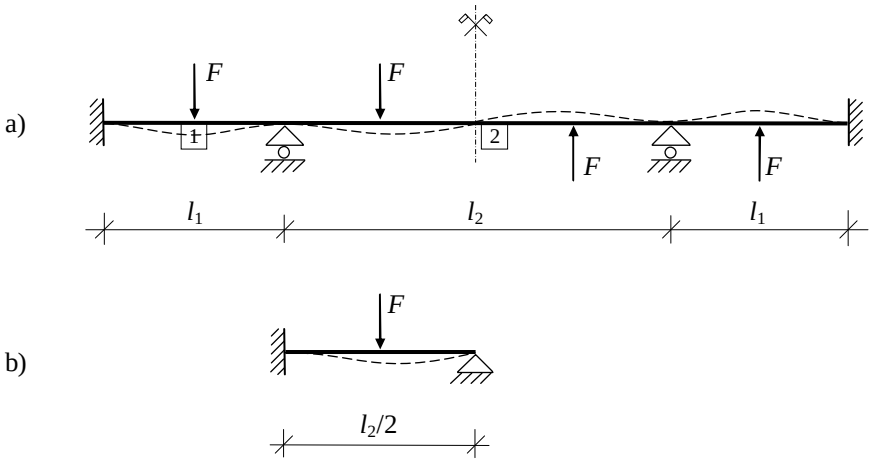
$$k_a = \frac{K_a}{4E}$$

összefüggés alapján tehát az antimetrikus merevségi szám

$$k_a = \frac{1}{4E}\frac{6EI}{l} = \frac{3}{2}\frac{I}{l}$$

Ha tehát a szimmetriatengelyt metsző rudak merevségi számát $k_a = 1.5k$-val vesszük számításba, akkor elegendő a tartónak a szimmetriatengely egyik oldalára eső felével dolgoznunk (6.23/b ábra). Természetesen a szimmetriatengely túlsó felére semmiféle nyomatéki értéket nem kell átvinnünk.

Amikor a szimmetriatengelyt metsző rúd is terhelt (6.25/a ábra), akkor a kezdeti befogási nyomaték meghatározásánál is figyelembe lehet venni, hogy a rúd közepén az eltolódás zérus (de az elfordulás nem). A rúd közepén csuklót lehet feltételezni, és a rúd kezdeti befogási nyomatékát így a szimmetriatengelynél csuklósan megtámasztott $l/2$ fesztávolságú rúdon lehet meghatározni (6.25/b ábra).



6.25 ábra. A szimmetriatengelyt metsző rúd is terhelt.

Az antimetrikusan terhelt, szimmetrikus szerkezetek esetére megismert egyszerűsítések alkalmazását a következő számpéldán mutatjuk be.

Határozzuk meg a 6.26/a ábrán feltüntetett fix csomópontú keret nyomatékábráját.

A keret szimmetriatengelye egy rúd közepén és egy olyan csomóponton megy át, amelyhez még a szimmetriatengelybe eső rúd is csatlakozik. Ezt a szóban forgó rudak merevségi számainak meghatározásánál, illetve a szimmetriatengelybe eső rúd nyomatékábrájának elkészítésénél vesszük figyelembe. Így tehát a 6.26/b ábrán feltüntetett egyszerűsített statikai vázlattal dolgozhatunk.

A merevségi számok:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{12}{4} = 3\,, \qquad k_{a2} = \frac{3}{2}\frac{I_2}{l_2} = \frac{3}{2}\frac{16}{8} = 3$$

$$k_3 = \frac{I_3}{l_3} = \frac{6}{3} = 2, \qquad \sum_{\mathrm{B}} k_i = 3+3+2 = 8$$

$$k_4 = \frac{3}{4}\frac{I_4}{l_4} = \frac{3}{4}\frac{16}{4} = 3, \qquad k_5 = \frac{I_5}{l_5} = \frac{12}{4} = 3$$

$$k_6 = \frac{I_6}{l_6} = \frac{6}{3} = 2, \qquad \sum_{\mathrm{D}} k_i = 2+3+3+2 = 10$$

$$k_7 = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{I_7}{l_7} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{8}{3} = 1, \qquad \sum_{\mathrm{E}} k_i = 3+1 = 4$$

A nyomatékosztási tényezők:

$$\alpha_{B1} = \frac{k_1}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{3}{8} = 0.375, \qquad \alpha_{B2} = \frac{k_{a2}}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{3}{8} = 0.375$$

$$\alpha_{B3} = \frac{k_3}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{2}{8} = 0.25$$

$$\alpha_{D3} = \frac{k_3}{\sum_{\mathrm{D}} k_i} = \frac{2}{10} = 0.2, \qquad \alpha_{D4} = \frac{k_4}{\sum_{\mathrm{D}} k_i} = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$\alpha_{D5} = \frac{k_5}{\sum_{\mathrm{D}} k_i} = \frac{3}{10} = 0.3, \qquad \alpha_{D6} = \frac{k_6}{\sum_{\mathrm{D}} k_i} = \frac{2}{10} = 0.2$$

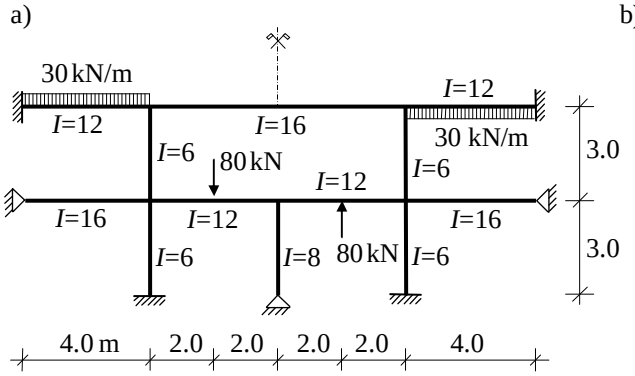
$$\alpha_{E5} = \frac{k_5}{\sum_{\mathrm{E}} k_i} = \frac{3}{4} = 0.75, \qquad \alpha_{E7} = \frac{k_7}{\sum_{\mathrm{E}} k_i} = \frac{1}{4} = 0.25$$

A kezdeti befogási nyomatékok:

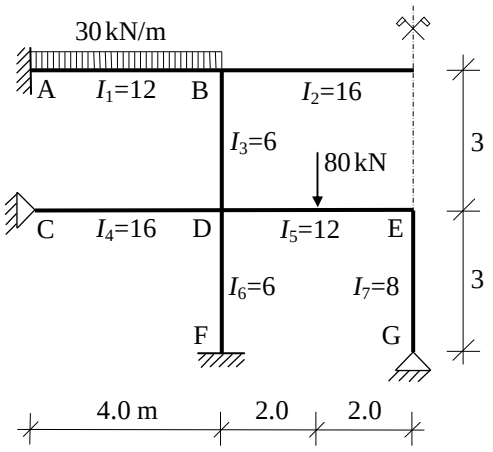
$$M_1^0 = \pm\frac{ql^2}{12} = \pm\frac{30\cdot 4^2}{12} = \pm 40 \text{ kNm}$$

$$M_2^0 = \pm\frac{Fl}{8} = \pm\frac{80\cdot 4}{8} = \pm 40 \text{ kNm}$$

a)



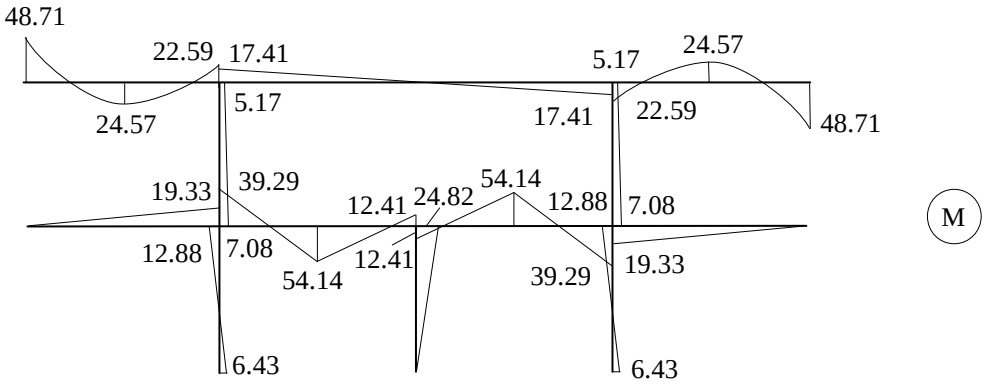
b)



c)

A	B			D				E		F
1	1	2	3	3	4	5	6	5	7	6
–	0.375	0.375	0.250	0.200	0.300	0.300	0.200	0.750	0.250	–
+40.00	–40.00					+40.00		–40.00		
			–4.00	–8.00	–12.00	–12.00	–8.00	–6.00		–4.00
+8.25	+16.50	+16.50	+11.00	+5.50		+17.25		+34.50	+11.50	
			–2.28	–4.55	–6.82	–6.83	–4.55	–3.41		–2.28
+0.43	+0.85	+0.85	+0.57	+0.29		+1.28		+2.56	+0.85	
			–0.16	–0.32	–0.47	–0.47	–0.31	–0.23		–0.15
+0.03	+0.06	+0.06	+0.04	+0.02		+0.09		+0.17	+0.06	
				–0.02	–0.04	–0.03	–0.02			
+48.71	–22.59	+17.41	+5.17	–7.08	–19.33	+39.29	–12.88	–12.41	+12.41	–6.43

d)



6.26 ábra. Szimmetrikus, fix csomópontú keret antimetrikus terheléssel.

A nyomatékosztást az ismert módon, a 6.26/c ábrán végeztük el. A számítás eredményei alapján készült nyomatékábrát a 6.26/d ábrán tüntettük fel.

6.3.2 Általános terhelésű szimmetrikus szerkezetek

Ha a szerkezet szimmetrikus elrendezésű, tetszőleges terhelés esetén is lehetőség van az egyszerűsítésre. Minden terhelés előállítható ugyanis egy szimmetrikus és egy antimetrikus terhelés összegeként. Ha a szimmetriatengely bal oldalán levő terheléseket T_b-vel, a szimmetriatengely jobb oldalán levőket pedig T_j-vel jelöljük, akkor a terhelés szimmetrikus része mindkét oldalon

$$T_{sz} = \frac{T_b + T_j}{2}$$

a terhelés antimetrikus része a bal oldalon

$$T_{a,b} = \frac{T_b - T_j}{2}$$

és a jobb oldalon

$$T_{a,j} = -\frac{T_b - T_j}{2}$$

A terhek összege a bal oldalon

$$T_{sz} + T_{a,b} = \frac{T_b + T_j}{2} + \frac{T_b - T_j}{2} = T_b$$

a jobb oldalon pedig

$$T_{sz} + T_{a,j} = \frac{T_b + T_j}{2} - \frac{T_b - T_j}{2} = T_j$$

eredményt ad, tehát az eljárás valóban helyes.

Az eljárás alkalmazását a következő számpéldán mutatjuk be.
Egy szimmetrikus elrendezésű négytámaszú tartót a 6.27/a ábrán feltüntetett teher terheli. I = állandó.

Készítsük el a nyomatékábrát a teher szimmetrikus és antimetrikus részre bontása útján!

Először az adott teher felbontását végezzük el.

A szélső mezők szimmetrikus terhe mindkét oldalon

$$q_{sz} = \frac{q_b + q_j}{2} = \frac{4+0}{2} = 2 \text{ kN/m}$$

az antimetrikus teher a baloldali mezőben

$$q_{a,b} = \frac{q_b - q_j}{2} = \frac{4-0}{2} = 2 \text{ kN/m}$$

a jobboldali mezőben

$$q_{a,j} = -\frac{q_b - q_j}{2} = -\frac{4-0}{2} = -2 \text{ kN/m}$$

értékű.

A szimmetrikus terhelésű tartót a 6.27/b, az antimetrikus terhelésű tartót a 6.27/c ábrán tüntettük fel.

A tartók szimmetriatengelye rúdközépen megy át, ezt a szóban forgó rúd merevségi számának meghatározásánál vesszük figyelembe. Így mindkét terhelési esetben a szimmetriatengelytől balra eső ún. egyszerűsített tartóval dolgozhatunk.

A szimmetrikus terhelésű tartó számítása

A merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{6} = 0.125, \qquad k_{sz,2} = \frac{1}{2}\frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{2}\frac{1}{8} = 0.0625, \qquad \sum_{\text{B}} k_i = 0.1875$$

A nyomatékosztási tényezők:

$$\alpha_{B1} = \frac{k_1}{\sum_{\text{B}} k_i} = \frac{0.125}{0.1875} = 0.667, \qquad \alpha_{B2} = \frac{k_{sz,2}}{\sum_{\text{B}} k_i} = \frac{0.0625}{0.1875} = 0.333$$

A kezdeti befogási nyomatékok:

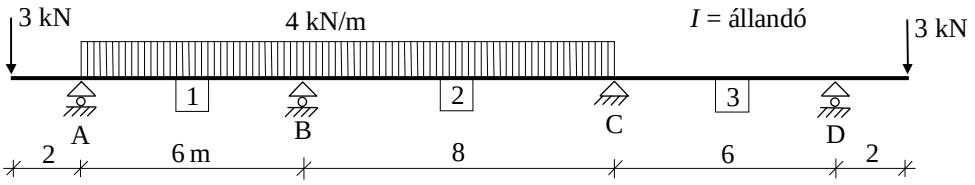
$$M^0_{A,k} = -Fl = -3 \cdot 2 = -6 \text{ kNm}$$

$$M^0_{B,1} = -\frac{ql^2}{8} = -\frac{2 \cdot 6^2}{8} = -9 \text{ kNm}$$

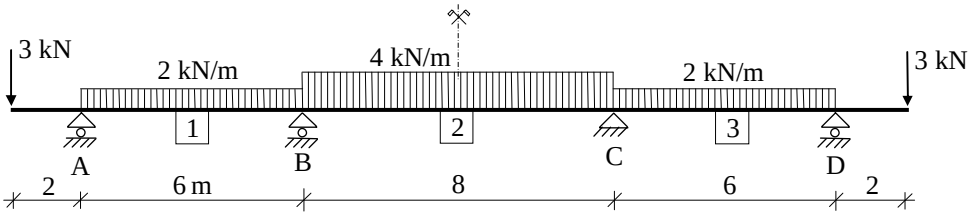
$$M^0_{B,2} = \frac{ql^2}{12} = \frac{4 \cdot 8^2}{12} = 21.33 \text{ kNm}$$

A nyomatékosztást a 6.27/d, a nyomatékábrát a 6.27/g ábrán tüntettük fel.

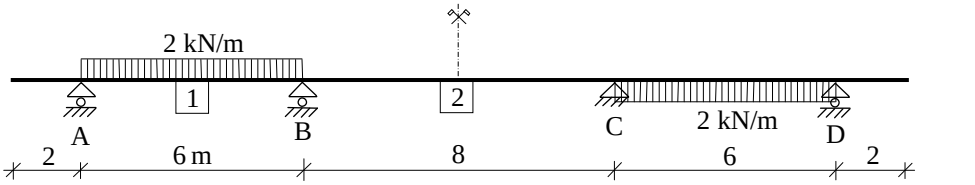
a)



b)



c)



d)

A		B	
k	1	1	2
0	1	0.667	0.333
–6.00		–9.00	+21.33
	+6.00	+3.00	
		–10.23	–5.10
–6.00	+6.00	–16.23	+16.23

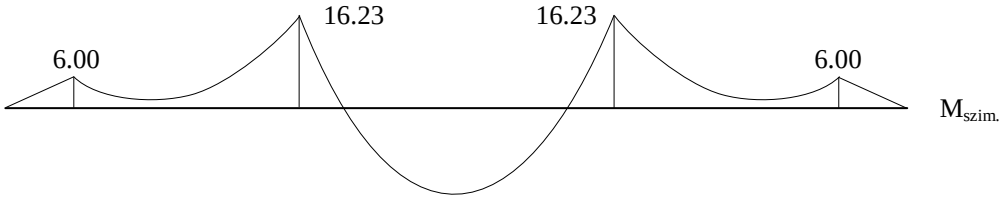
e)

B	
1	2
0.4	0.6
–9.00	
+3.60	+5.40
–5.40	+5.40

f)

A		B		C		D	
k	1	1	2	2	3	3	k
–6.00	+6.00	–16.23	+16.23	–16.23	+16.23	–6.00	+6.00
		–5.40	+5.40	+5.40	–5.40		
–6.00	+6.00	–21.63	+21.63	–10.83	+10.83	–6.00	+6.00

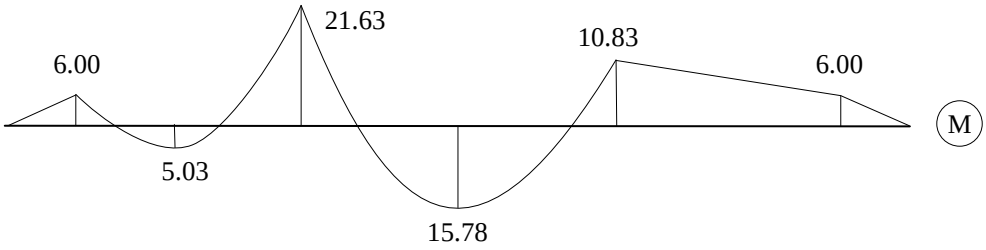
g)



h)



i)



6.27 ábra. Szimmetrikus tartó általános terheléssel.

Az antimetrikus terhelésű tartó számítása

A merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{6} = 0.125, \qquad k_{a,2} = \frac{3}{2}\frac{I_2}{l_2} = \frac{3}{2}\frac{1}{8} = 0.1875, \qquad \sum_{\mathrm{B}} k_i = 0.3125$$

A nyomatékosztási tényezők:

$$\alpha_{B1} = \frac{k_1}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{0.125}{0.3125} = 0.4, \qquad \alpha_{B2} = \frac{k_{a,2}}{\sum_{\mathrm{B}} k_i} = \frac{0.1875}{0.3125} = 0.6$$

A kezdeti befogási nyomaték:

$$M_{B,1}^{0} = -\frac{ql^2}{8} = -\frac{2 \cdot 6^2}{8} = -9 \text{ kNm}$$

A nyomatékosztást a 6.27/e, a nyomatékábrát a 6.27/h ábrán tüntettük fel.

Végül a két különválasztott terhelési eset hatására létrejött nyomatékok előjelhelyes összegezéseként (6.27/f ábra) az eredeti tartó nyomatékábrájához jutottunk, melyet a 6.27/i ábrán tüntettünk fel.

7

Gyakorló feladatok a nyomatékosztási módszer alkalmazására

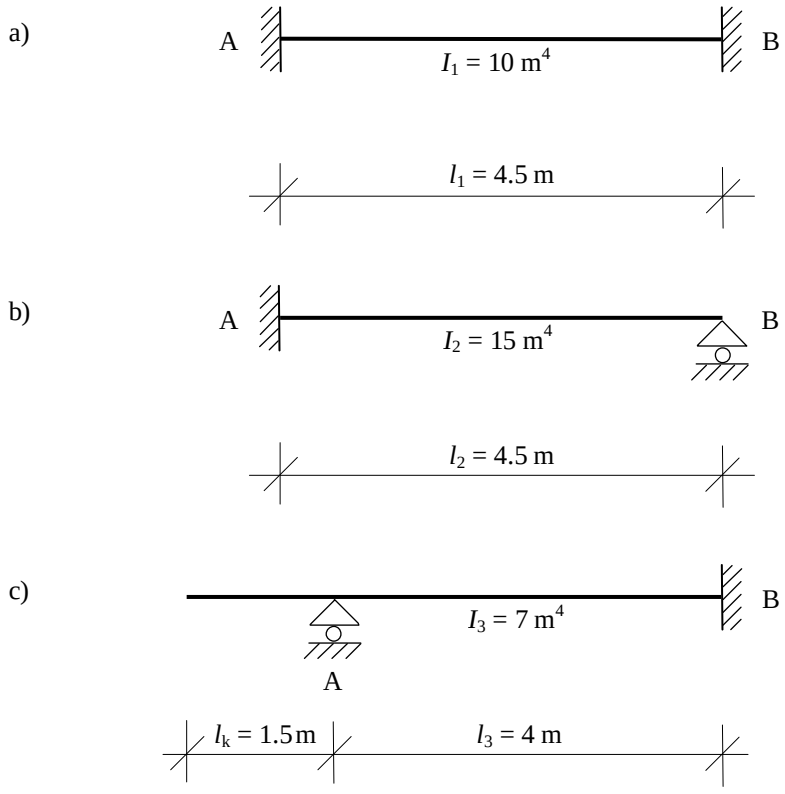
A gyakorló feladatok bemutatása előtt először összefoglaljuk a számításhoz szükséges alapfogalmakat és alapelveket konkrét adatokkal rendelkező tartók segítségével.

7.1 Alapfogalmak

A) Merevségi szám (7.1.1 ábra)

Két végén befogott rúd (7.1.1/a ábra):

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{10}{4.5} = 2.222$$



7.1.1 ábra. Tartók a merevségi számokhoz.

Egyik végén befogott másik végén szabadon felfekvő rúd (7.1.1/b ábra):

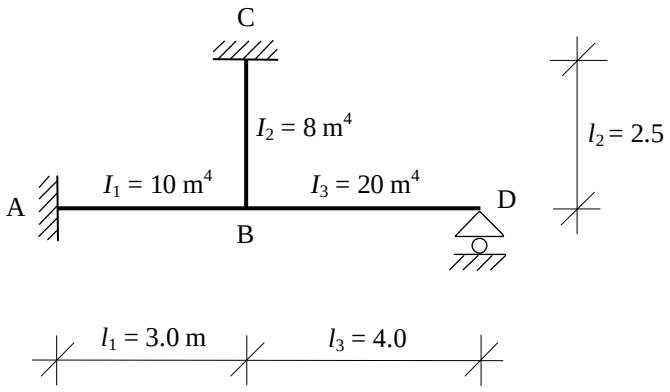
$$k_2 = \frac{3}{4}\frac{I_2}{l_2} = \frac{3}{4}\frac{15}{4.5} = 2.50$$

Egyik végén befogott, másik végén konzolos rúd (7.1.1/c ábra):

$$k_3 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{4}\frac{7}{4} = 1.313$$

B) Nyomatékosztók

A csomópontban keletkező nyomatékon a csomópontba csatlakozó rudak merevségi számaik arányában osztoznak. A rúd nyomatékosztója a rúd merevségi számának és a csomópont összmerevségének a hányadosa (α).



7.1.2 ábra. Tartó a nyomatékosztókhoz.

A 7.1.2 ábrán vázolt tartó esetében:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{10}{3} = 3.333, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{8}{2.5} = 3.20, \qquad k_3 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{4}\frac{20}{4} = 3.75$$

$$\sum_{i=1}^{3} k_i = k_1 + k_2 + k_3 = 3.333 + 3.20 + 3.75 = 10.283$$

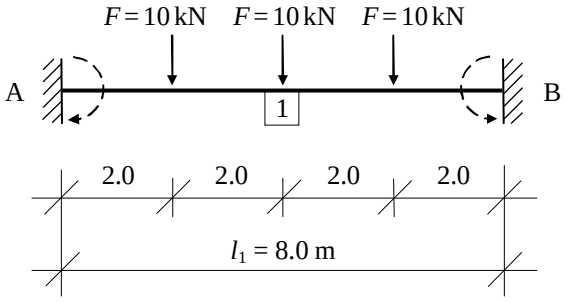
$$\alpha_1 = \frac{k_1}{\Sigma k_i} = \frac{3.333}{10.283} = 0.324, \quad \alpha_2 = \frac{k_2}{\Sigma k_i} = \frac{3.20}{10.283} = 0.311, \quad \alpha_3 = \frac{k_3}{\Sigma k_i} = \frac{3.75}{10.283} = 0.365$$

Egy csomópont nyomatékosztóinak összege mindig 1-el egyenlő:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.324 + 0.311 + 0.365 = 1.0$$

C) Kezdeti befogási nyomatékok

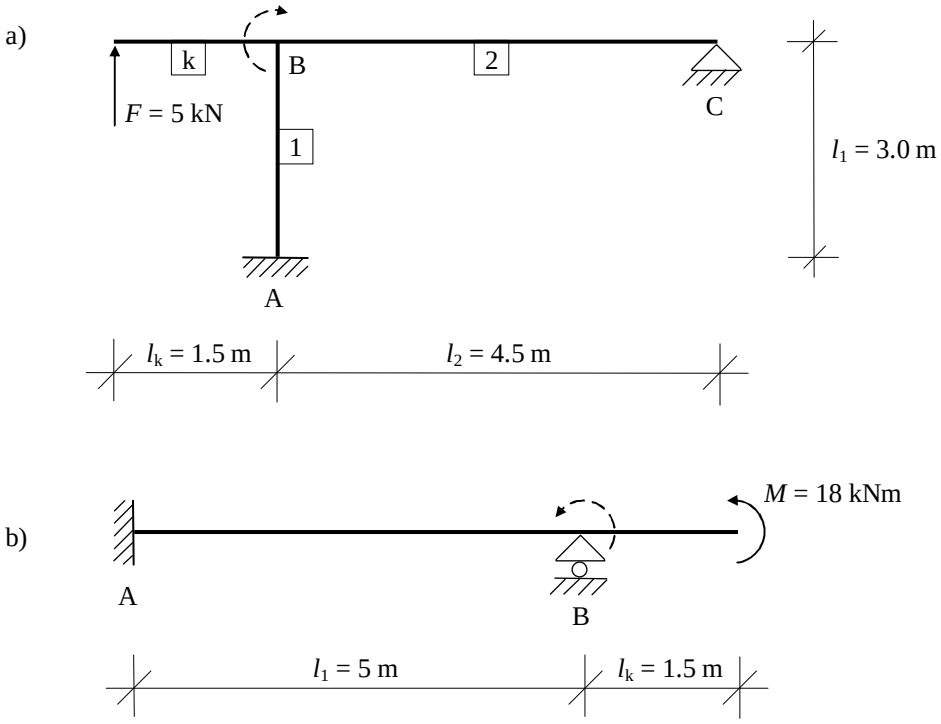
Az egyik, illetve a mindkét végén befogott tartók befogási nyomatékaira különböző terhek esetén a „Segédletek” táblázatos formában képleteket közöl. A képletek a befogási nyomatékok (csomóponti nyomatékok) értékeit előjelhelyesen adják meg. A 7.1.3 … 7.1.7 ábrákon látható tartóknál a csomóponti nyomatékokat szaggatott vonallal szemléltetjük. A csomóponti nyomaték előjele akkor pozitív, ha a csomópontot órairányban akarja elfordítani.



7.1.3 ábra. Három koncentrált erővel terhelt, két végén befogott tartó.

A 7.1.3 ábrán vázolt két végén befogott tartó esetében:

$$M_{A,1} = \frac{5}{16} F l_1 = \frac{5}{16} 10 \cdot 8 = 25.0\,\text{kNm}, \qquad M_{B,1} = -\frac{5}{16} F l_1 = -\frac{5}{16} 10 \cdot 8 = -25.0\,\text{kNm}$$



7.1.4 ábra. Kezdeti befogási nyomaték konzolos tartók esetében.

A kezdeti befogási nyomatékok között számítjuk ki a konzolon lévő teher által okozott nyomatékot is (7.1.4/a ábra):

$$M_{B,k} = Fl_k = 5 \cdot 1.5 = 7.50\,\text{kNm}$$

és (7.1.4/b ábra):

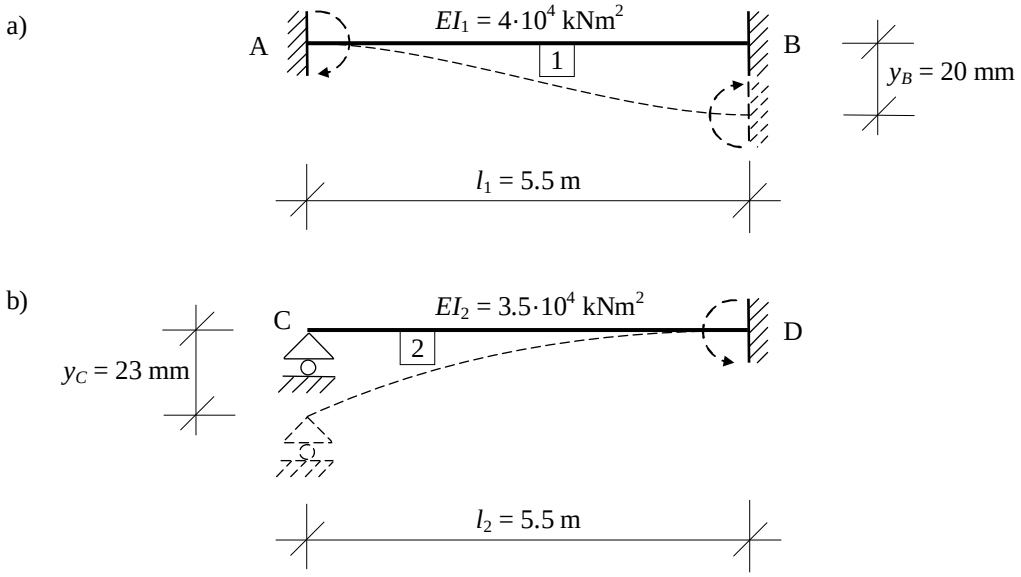
$$M_{B,k} = M = -18\,\text{kNm}$$

Kezdeti befogási nyomaték keletkezhet a csomópontok eltolódásából (7.1.5/a ábra)

$$M_{A,1} = M_{B,1} = 6\frac{EI_1}{l_1^2} y_B = 6\frac{4 \cdot 10^4}{5.5^2} 0.02 = 158.67\,\text{kNm}$$

vagy támaszsüllyedésből is (7.1.5/b ábra).

$$M_{D,2} = -3\frac{EI_2}{l_2^2} y_C = -3\frac{3.5 \cdot 10^4}{5.5^2} 0.023 = -79.83\,\text{kNm}$$



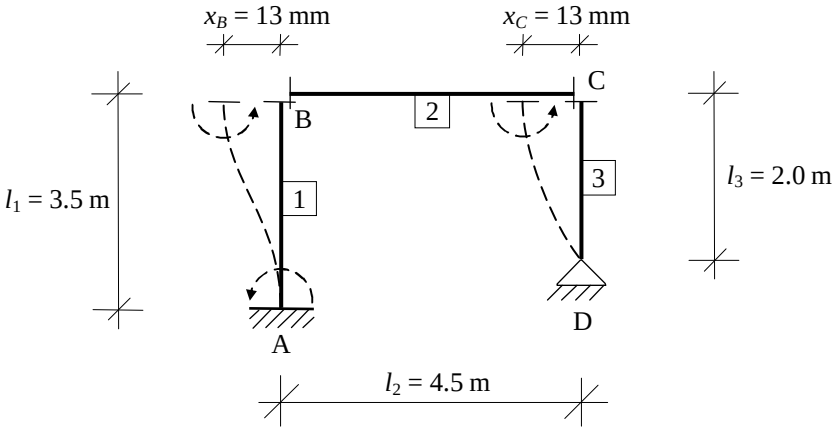
7.1.5 ábra. Kezdeti befogási nyomaték támaszmozgás következtében.

A nyomatékok előjele szemlélet alapján dönthető el, annak segítségével, hogy hol keletkezik húzás a meggörbülés miatt. Nagysága a közölt képletekből a befogási viszonyoknak megfelelően számítható.

A 7.1.6. ábrán vázolt szerkezet „terhe” a *B* és *C* csomópontok 13 milliméteres vízszintes elmozdulása. Az ennek következtében keletkező kezdeti befogási nyomatékok értéke ($EI = 5 \cdot 10^4$ kNm^2 merevséggel számolva):

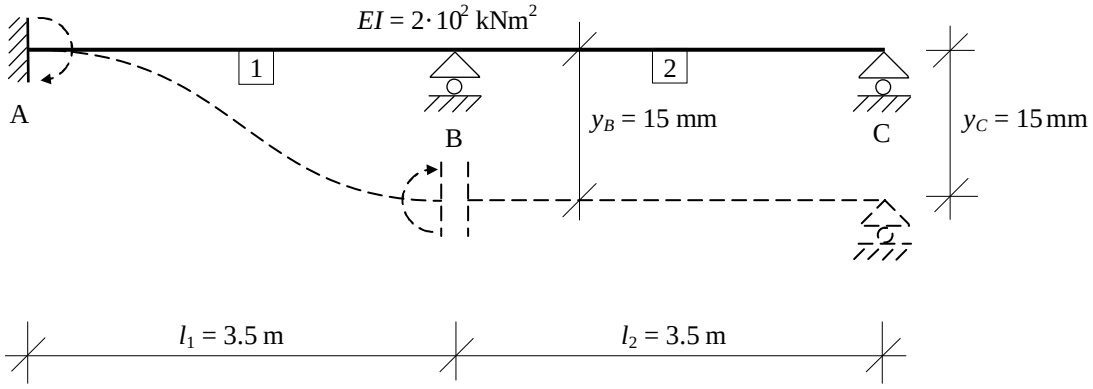
$$M_{A,1} = M_{B,1} = 6\frac{EI_1}{l_1^2}x_B = -6\frac{5\cdot 10^4}{3.5^2}0.013 = -318.37\ \text{kNm}$$

$$M_{C,3} = -3\frac{EI_3}{l_3^2}x_C = -3\frac{5\cdot 10^4}{2^2}0.013 = -487.5\ \text{kNm}$$



7.1.6 ábra. A befogási nyomaték előjelének megállapítása csomópontok mozgása esetében.

Támaszsüllyedés esetén nem az egyes támaszok süllyedése az elsődleges, hanem a rúd végpontjai közötti süllyedéskülönbség (Δy).



7.1.7 ábra. A befogási nyomaték azonos süllyedésű rúdvégek esetében zérus.

Abban az esetben, amikor a rúd két végpontja azonos mértékben süllyed (a 2. rúd a 7.1.7 ábrán), nincs süllyedéskülönbség, a rúd nem görbül meg, és így kezdeti befogási nyomaték nem keletkezik:

$$M_{B,2} = 0$$

és a másik rúd esetében:

$$M_{A,1} = M_{B,1} = 6\frac{EI}{l_1^2}(y_B - y_A) = 6\frac{2\cdot 10^2}{3.5^2}(0.015 - 0.0) = 1.469\ \text{kNm}$$

D) Nyomatékosztás

A számítást célszerű táblázatosan végezni. A táblázat első sorába a csomópontokat, a második sorba a rúdvégeket, a harmadik sorba pedig a nyomatékosztókat tüntetjük fel. Ez a rész tulajdonképpen a táblázat fejléce. A következő sor tartalmazza a kezdeti befogási nyomatékokat, majd a táblázat többi sorában hajtjuk végre a tényleges nyomatékosztást.

Ha van konzol, akkor a nyomatékosztást ott *kell* kezdeni. Ha nincs, akkor a nyomatékosztást annál a belső csomópontnál célszerű kezdeni, ahol a legnagyobb a kezdeti befogási nyomatékok algebrai összege. Egy csomópont egyensúlyozása úgy történik, hogy a csomóponti nyomatékösszeget megszorozzuk a nyomatékosztókkal és a kapott értékeket (egyensúlyozó nyomatékokat) ellenkező előjellel beírjuk a rúdvégekhez. A művelet végrehajtása után a csomópont egyensúlyban van. Egyensúlyozás során a nyomatékok egy része átadódik a szomszédos csomópontokra. Az átvitt nyomatékhányadot az átviteli tényező határozza meg. Az átviteli tényező belső csomópontoknál és befogásoknál 0.5, csuklónál és konzolnál 0. Konzolra tehát nyomatékosztásból nem adódhat át nyomaték. A konzollal rendelkező csomópont nyomatékosztói (két rúd esetében) 0 és 1.

A nyomatékosztás végeredményeként csomóponti nyomatékokat kapunk. Egy csomóponton belül ezek előjelhelyes összege zérus, ami azt jelenti, hogy a csomópont egyensúlyban van.

E) A nyomatékábra előállítása

A nyomatékábra mindig a szerkezet húzott oldalára kerül. A csomópontok kirajzolásával és a nyomatékok előjelének figyelembevételével a húzott oldal szemlélet alapján eldönthető. A 7.1.8/a ábrán vázolt rúdcsillag esetében például ha a *B* csomópont rúdvégeire kapott értékek a nyomatékosztás végén rendre:

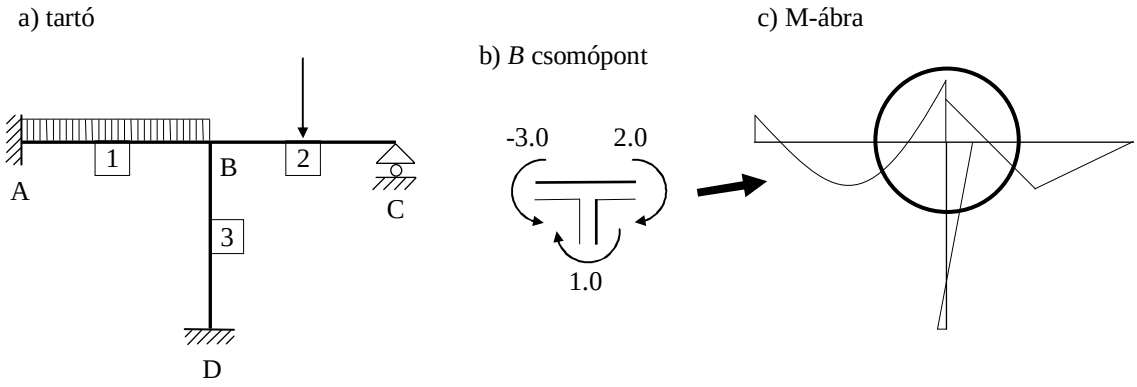
$$M_{B,1} = -3.0\ \text{kNm}$$

$$M_{B,2} = 2.0\ \text{kNm}$$

és

$$M_{B,3} = 1.0\ \text{kNm}$$

akkor a 7.1.8/b ábrán kirajzolt csomóponti nyomatékokhoz jutunk, amelyek a megfelelő rúdvégekre rajzolva kijelölik a húzott oldalakat és így megmutatják, hogy a nyomatékábrában hova kell a nyomatékokat rajzolni (7.1.8/c ábra).



7.1.8 ábra. A nyomatékábra mindig a húzott oldalra kerül.

F) Nyíró- és normálerő-ábra előállítása

A rudakra a nyomatékosztásból kapott csomóponti nyomatékok ellentettjét, a rúdvégi nyomatékokat és a külső terheket működtetjük. Így kéttámaszú, esetleg konzolos kéttámaszú tartók reakcióerőit kell meghatároznunk. A vízszintes rudak esetében az előjelek megadása egyértelmű: a negatív értékeket felülre, a pozitív értékeket pedig alulra rajzoljuk. A függőleges rudak esetében több lehetőség van; kereteknél szokták például a belső oldalra a pozitív, a külső oldalra pedig a negatív értékeket rajzolni. A fontos az, hogy az előjelek egyértelműen meg legyenek adva. Erre az a legjobb megoldás, ha az előjeleket berajzoljuk az ábrába.

G) Szimmetrikus tartószerkezetek szimmetrikus teherrel

Elegendő a szerkezet felével dolgozni. A szimmetriatengely túlsó felére semmiféle nyomatékot nem kell átvinni. Ha a tartó szimmetriatengelye csomóponton megy át és a teher is szimmetrikus, akkor a szimmetriatengelybe eső csomópontban a rúdvégek elfordulása és eltolódása is zérus, éppen úgy, mintha ott befogás lenne. Ezen a helyen a szerkezetet befogottnak tekintjük és csak a szimmetriatengely egyik oldalára eső felével számolunk. Ha a tartó szimmetriatengelye rúdközépen megy át és a teher szimmetrikus, akkor a szimmetriatengelybe eső keresztmetszetben a rúdvégek elfordulása zérus, de az eltolódása nem egyenlő zérussal. A szimmetrikus alakváltozást egy szimmetrikus merevségi számmal vesszük figyelembe. A merevségi szám

$$k_{sz} = 0.5k = 0.5\frac{I}{l}$$

ahol l a szimmetriatengellyel metszett rúd teljes hossza.

H) Szimmetrikus tartószerkezetek antimetrikus teherrel

Elegendő a szerkezet felével dolgozni. A szimmetriatengely túlsó felére semmiféle nyomatékot nem kell átvinni. Ha a szimmetriatengely csomóponton megy át, akkor a csomópontra ható kezdeti befogási nyomatékok az antimetria miatt azonos nagyságúak és azonos előjelűek. A csomópont úgy kezelhető, mintha csukló lenne, ezért ott nyomatékosztást nem kell végrehajtani. Ha a szimmetriatengely rúdközépen megy át, akkor a rúd antimetrikus merevségét a

$$k_a = 1.5k = 1.5\frac{I}{l}$$

összefüggésből számítjuk ki. A merevségi szám meghatározásánál *l* a szimmetria-tengellyel metszett rúd teljes hossza.

I) Többtámaszú tartó igénybevételeinek szélsőértékei

Valamely támaszközben a pozitív nyomatéki maximumot úgy kapjuk, hogy a szóban forgó támaszközt, valamint a szomszédos támaszközöket kihagyva minden második támaszközt terheljük az esetleges teherrel. Egy támasz feletti keresztmetszetben a negatív nyomatéki maximumot megkapjuk, ha a támasztól balra és jobbra eső támaszközt, valamint a szomszédos támaszközt kihagyva minden második támaszközt terheljük az esetleges teherrel. Egy támaszerő maximumát ugyanazon terhelési eset adja, mely a támasz feletti keresztmetszetben a támasznyomaték maximumát szolgáltatja.

7.2 Rúdcsillagok

7.2.1 Rúdcsillag támasztól kinyúló konzollal

Határozzuk meg a 7.2.1/a ábrán vázolt rúdcsillag igénybevételi ábráit.

Az *AB* rúdhoz konzol csatlakozik. Ilyenkor a rudat egyik végén befogott, másik végén csuklós elemi tartóval számoljuk és a konzolon lévő nyomatékot majd a nyomatékosztásnál vesszük figyelembe. Az elemi tartókat a 7.2.1/b ábra mutatja.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{8}{3} = 2.0\,, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{12}{4} = 3.0\,, \qquad k_3 = \frac{I_3}{l_3} = \frac{4}{4} = 1.0$$

Összmerevség:

$$\sum_{i=1}^{3} k_i = k_1 + k_2 + k_3 = 2.0 + 3.0 + 1.0 = 6.0$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_1 = \frac{k_1}{\Sigma k_i} = \frac{2}{6} = 0.333\,, \qquad \alpha_2 = \frac{k_2}{\Sigma k_i} = \frac{3}{6} = 0.5\,, \qquad \alpha_3 = \frac{k_3}{\Sigma k_i} = \frac{1}{6} = 0.167$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.333 + 0.5 + 0.167 = 1.0$$

Kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{A,k} = -20 \cdot 1 = -20.0\,\text{kNm}$$

$$M_{A,1} = 0$$

$$M_{B,1} = -\frac{3}{16} F l_1 = -\frac{3}{16} 20 \cdot 3 = -11.25\,\text{kNm}$$

$$M_{B,2} = \frac{q l^2}{12} = \frac{12 \cdot 4^2}{12} = 16.0\,\text{kNm}$$

$$M_{C,2} = -\frac{q l^2}{12} = -\frac{12 \cdot 4^2}{12} = -16.0\,\text{kNm}$$

$$M_{B,3} = \frac{F l}{8} = \frac{20 \cdot 4}{8} = 10.0\,\text{kNm}$$

$$M_{D,3} = -\frac{F l}{8} = -\frac{20 \cdot 4}{8} = -10.0\,\text{kNm}$$

A nyomatékosztók és a kezdeti befogási nyomatékok ismeretében elvégezhető a nyomatékosztás. (A számítást a konzolnál kezdjük!)

A nyomatékosztást a 7.2.1/c táblázatban végeztük el. A táblázat utolsó sora tartalmazza a nyomatékábra csomóponti értékeit. A csomóponti értékek alatt célszerű megrajzolni a vonatkozó csomópontokat a rúdvégekkel és ott feltüntetni a megfelelő forgatóértelmű nyomatékokat is. Ezek a vázlatok kijelölik a nyomatékok helyét is, szem előtt tartva azt a szabályt, hogy a nyomatékokat mindig a húzott oldalra rajzoljuk. A nyomatékábrát a 7.2.1/d ábrán vázoltuk. Megjegyezzük, hogy a mezőnyomatékok meghatározása csak a reakciók kiszámítása után történik meg.

A csomóponti nyomatékok ismeretében a következő lépés az elemi tartók megoldása. Ha egy csomóponthoz konzol is csatlakozik, akkor a számítás ezen szakaszában célszerű ezt a konzolt együtt kezelni a támasz másik oldalán lévő rúddal. Így három tartóhoz jutunk (7.2.2/a ábra), amelyekre a külső terhek mellett az eredetileg befogott rúdvégeken működtetjük a már ismert rúdvégi nyomatékokat (a csomóponti nyomatékok ellentettjeit) is. Ily módon eljárva a reakcióerőket egyensúlyi egyenletek segítségével határozhatjuk meg. Ahol lehetséges, a reakcióerők számításánál célszerű kihasználni a szuperpozíció nyújtotta egyszerűbb számítási lehetőségeket.

A reakcióerők rendre:

$$A = \frac{20 \cdot 4 + 20 \cdot 1.5 - 9.5}{3} = 33.5\,\text{kN}\ \ [\uparrow]; \qquad B_1 = \frac{20 \cdot 1.5 - 20 \cdot 1 + 9.5}{3} = 6.5\,\text{kN}\ \ [\uparrow]$$

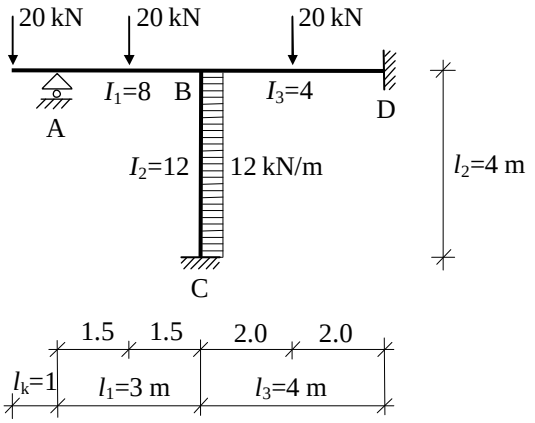
$$B_2 = \frac{12 \cdot 4}{2} - \frac{22.19 - 3.62}{4} = 24 - 4.64 = 19.36\,\text{kN}\ \ [\rightarrow]; \quad C = 24 + 4.64 = 28.64\,\text{kN}\ \ [\rightarrow]$$

$$B_3 = \frac{20}{2} - \frac{12.06 - 5.88}{4} = 10 - 1.55 = 8.45\,\text{kN}\ \ [\uparrow]; \qquad D = 10 + 1.55 = 11.55\,\text{kN}\ \ [\uparrow]$$

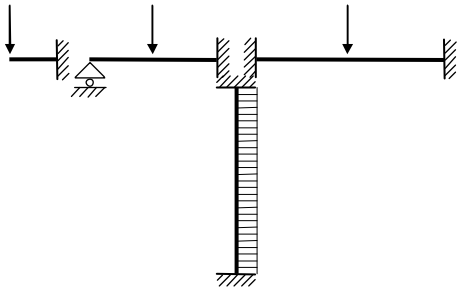
A 2-es rúdon keletkező maximális nyomaték (7.2.1/d) értékének meghatározásához szükségünk lesz az x_0 zérushely (7.2.2/b ábra) értékére:

$$x_0 = \frac{28.64}{12} = 2.386\,\text{m}$$

a) rúdcsillag



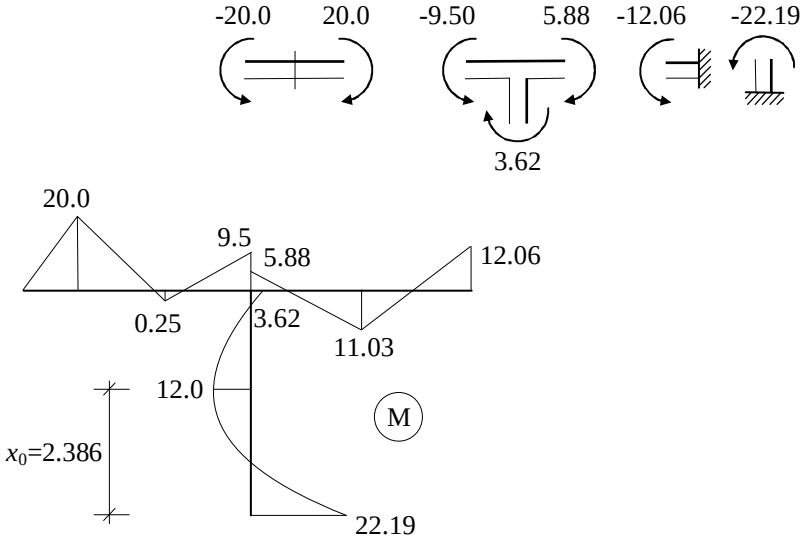
b) elemi tartók



c) nyomatékosztás

csomópontok	A		B			D	C
rudak	k	1	1	2	3	3	2
nyomatékosztók	0	1	0.333	0.5	0.167	–	–
kezdeti bef. nyomatékok	-20.00		-11.25	16.00	10.00	-10.00	-16.00
nyomatékosztás		20.00	10.00				
			- 8.25	-12.38	-4.12	-2.06	-6.19
M-ábra értékei	-20.00	20.00	- 9.50	3.62	5.88	-12.06	-22.19

d) M-ábra



7.2.1 ábra. Rúdcsillag támasztól kinyúló konzollal.

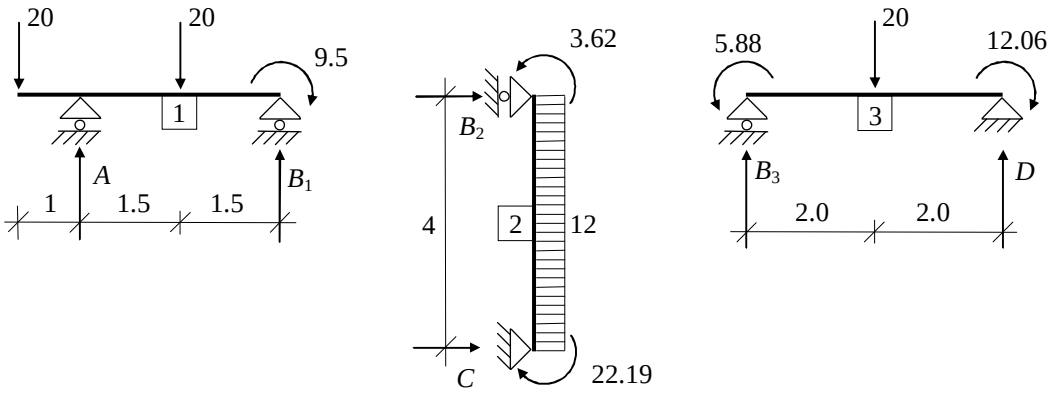
Az elemi tartók nyíróerő-ábráinak “összerajzolásával” megkapjuk a szerkezet nyíróerő-ábráját (7.2.2/b ábra).

A reakcióerők ismeretében meghatározhatók a mezőnyomatékok értékei is:

$$M_1 = -(9.5 - 6.5 \cdot 1.5) = 0.25\,\text{kNm}; \qquad M_3 = 8.45 \cdot 2 - 5.88 = 11.03\,\text{kNm}$$

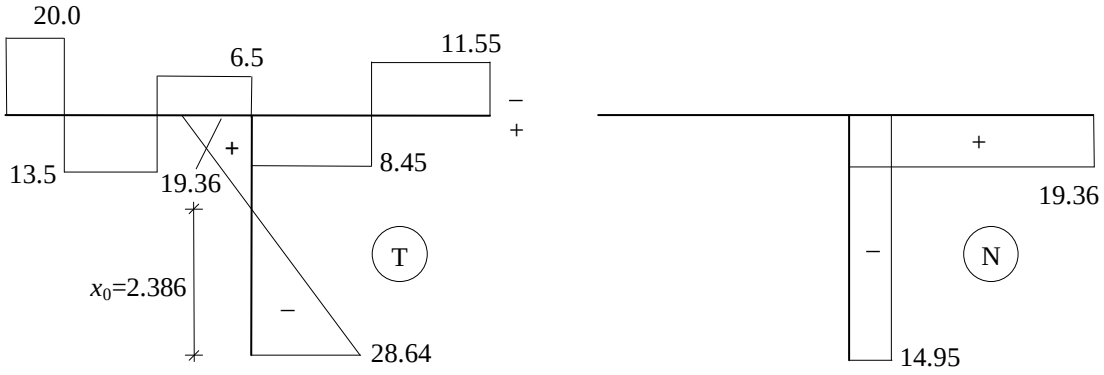
$$M_2 = -22.19 + 28.64 \cdot 2.386 - 12\frac{2.386^2}{2} = 12.0\,\text{kNm}$$

a) elemi tartók



b) T-ábra

c) N-ábra



7.2.2 ábra. Rúdcsillag elemi tartói; T- és N-ábra.

A nyíróerő-ábra számításánál az egyes törzstartókon meghatározott nyíróerő-ábrákat a tartó hálózatára rajzoljuk fel. A normálerő-ábra előállításánál arra kell figyelnünk, hogy a kényszerek közül melyik alkalmas normálerő felvételére. Normálerőt általában fix csuklónál és befogásnál egyensúlyozhatunk. Esetünkben az 1-es rúd nem tud normálerőt felvenni. A 2-es oszlopra az 1-es és 3-as rúd *B* támaszerőinek ellentettje működik. A 3-as rúd normálereje a 2-es rúd *B* támaszerejének ellentettje lesz. A nyíróerő-ábrát a 7.2.2/b, a normálerő-ábrát a 7.2.2/c ábrán láthatjuk.

7.2.2 Rúdcsillag belső csomópontból elágazó konzollal

Határozzuk meg a 7.2.3/a ábrán vázolt rúdcsillag igénybevételi ábráit.

Az elemi tartókat a 7.2.3/b ábra mutatja.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{10}{5} = 2.0\,, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{16}{4} = 4.0\,, \qquad k_3 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{4}\frac{25}{6} = 3.125$$

Külön figyelmet érdemel a *B* csomópontról felfelé elágazó konzol. A konzol másik vége szabad, amely emiatt nem tud ellenállni ha a *B* csomópontot elfordítjuk, így elfordulási merevsége zérus:

$$k_k = 0$$

Összmerevség:

$$\sum_{i=1}^{4} k_i = k_1 + k_2 + k_3 + k_k = 2.0 + 4.0 + 3.125 + 0 = 9.125$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_1 = \frac{k_1}{\Sigma k_i} = \frac{2}{9.125} = 0.219\,, \qquad \alpha_2 = \frac{k_2}{\Sigma k_i} = \frac{4}{9.125} = 0.438\,,$$

$$\alpha_3 = \frac{k_3}{\Sigma k_i} = \frac{3.125}{9.125} = 0.343\,, \qquad \alpha_k = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_k = 0.219 + 0.438 + 0.343 + 0 = 1.0$$

Kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{A,1} = \frac{15 \cdot 2 \cdot 3^2}{5^2} + \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 5^2}(12 \cdot 1.5^2 \cdot 3.5 - 3 \cdot 3^2 \cdot 1.5 + 3^2 \cdot 5) = 15.75\,\text{kNm}$$

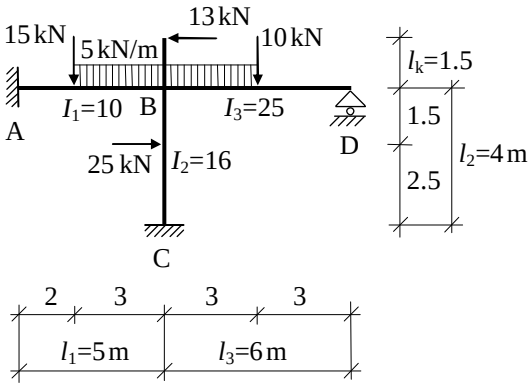
$$M_{B,1} = -\frac{15 \cdot 2^2 \cdot 3}{5^2} - \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 5^2}(12 \cdot 1.5 \cdot 3.5^2 - 3 \cdot 3^2 \cdot 3.5 + 3^2 \cdot 5) = -15.75\,\text{kNm}$$

$$M_{B,2} = -\frac{25 \cdot 2.5^2 \cdot 1.5}{4^2} = -14.65\,\text{kNm}; \qquad M_{C,2} = \frac{25 \cdot 2.5 \cdot 1.5^2}{4^2} = 8.79\,\text{kNm}$$

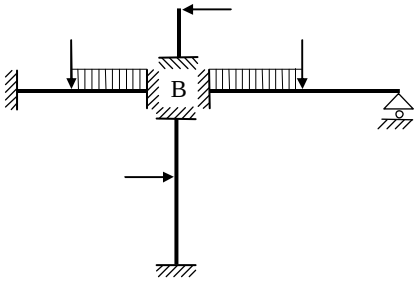
$$M_{B,3} = \frac{3}{16}10 \cdot 6 + \frac{1}{2}\frac{5 \cdot 4.5 \cdot 3}{6^2}\left(6^2 - 4.5^2 - \frac{3^2}{4}\right) = 23.91\,\text{kNm}$$

$$M_{B,k} = -13 \cdot 1.5 = -19.5\,\text{kNm}$$

a) konzolos rúdcsillag

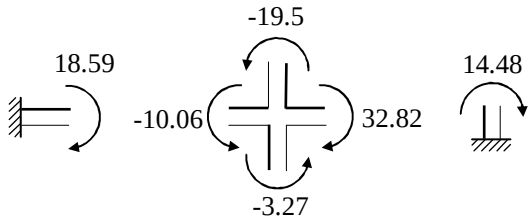


b) elemi tartók

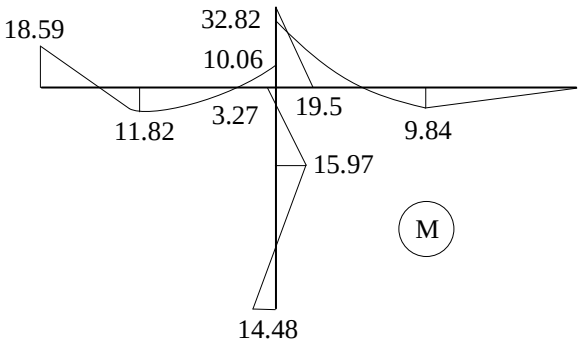


c) nyomatékosztás

csomópontok	A	B				C
rudak	1	1	3	k	2	2
nyomatékosztók	–	0.219	0.343	0.0	0.438	–
kezdeti befogási nyomatékok	15.75	–15.75	23.91	–19.5	–14.65	8.79
nyomatékosztás	2.84	5.69	8.91	0.0	11.38	5.69
M-ábra értékei	18.59	–10.06	32.82	–19.5	–3.27	14.48



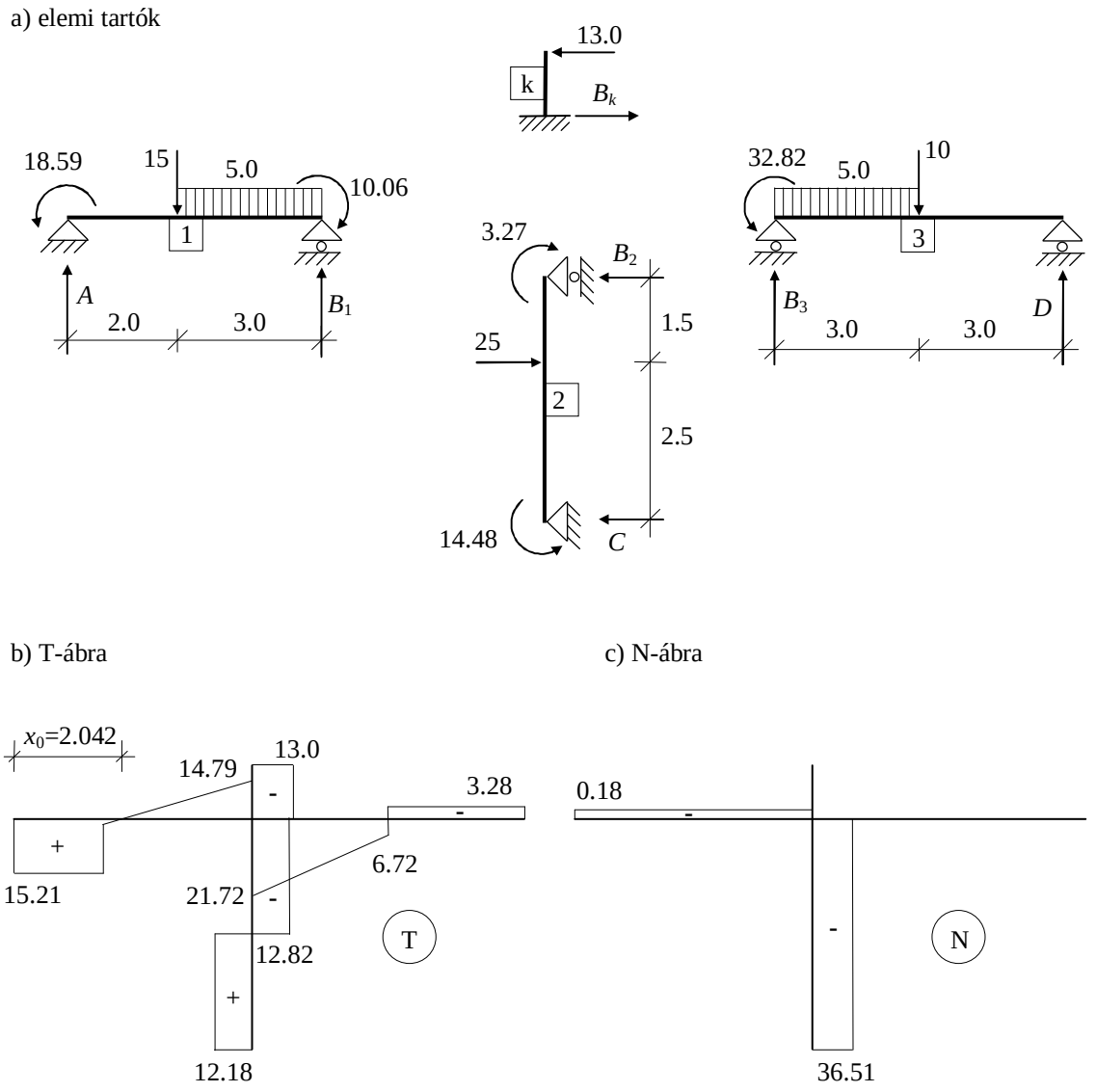
d) M-ábra



7.2.3 ábra. Rúdcsillag belső csomóponti konzollal: nyomatékosztás és M-ábra.

A nyomatékosztók és a kezdeti befogási nyomatékok ismeretében elvégezhető a nyomatékosztás (7.2.3/c ábra). A nyomatékosztás táblázatának utolsó sora tartalmazza a nyomatékábra csomóponti értékeit. A csomóponti értékek alatt megrajzoltuk a vonatkozó csomópontokat a rúdvégekkel és feltüntettük a megfelelő forgatóértelmű

nyomatékokat is. Ezek a vázlatok kijelölik a nyomatékok helyét is, szem előtt tartva azt a szabályt, hogy a nyomatékokat a húzott oldalra rajzoljuk. A nyomatékábrát a 7.2.3/d ábrán vázoltuk. Megjegyezzük, hogy a mezőnyomatékok meghatározása csak a reakciók kiszámítása után történik meg.



7.2.4 ábra. Rúdcsillag belső csomóponti konzollal: elemi tartók; T- és N-ábra.

A csomóponti nyomatékok ismeretében a következő lépés az elemi tartók megoldása. A négy elemi tartót a 7.2.4/a ábra tartalmazza, amelyekre a külső terhek mellett az eredetileg befogott (de most csuklós) rúdvégeken működtetjük a már ismert rúdvégi nyomatékokat – a csomóponti nyomatékok ellentettjeit – is. Ily módon eljárva a reakcióerőket egyensúlyi egyenletek segítségével határozhatjuk meg. Ahol lehetséges, a reakcióerők számításánál célszerű kihasználni a szuperpozíció nyújtotta egyszerűbb számítási lehetőségeket.

A reakcióerők rendre:

$$A = \frac{15\cdot 3 + 5\cdot 3\cdot 1.5 + 18.59 - 10.06}{5} = 15.21\,\text{kN}\ \ [\uparrow]$$

$$B_1 = \frac{15\cdot 2 + 5\cdot 3\cdot 3.5 - 18.59 + 10.06}{5} = 14.79\,\text{kN}\ \ [\uparrow]$$

$$B_2 = \frac{25\cdot 2.5 + 3.27 - 14.48}{4} = 12.82\,\text{kN}\ [\leftarrow] \quad C = \frac{25\cdot 1.5 - 3.27 + 14.48}{4} = 12.18\,\text{kN}\ [\leftarrow]$$

$$B_3 = \frac{10\cdot 3 + 5\cdot 3\cdot 4.5 + 32.82}{6} = 21.72\,\text{kN}\ [\uparrow] \quad D = \frac{10\cdot 3 + 5\cdot 3\cdot 1.5 - 32.82}{6} = 3.28\,\text{kN}\ [\uparrow]$$

Az elemi tartók nyíróerő-ábráinak “összerajzolásával” megkapjuk a szerkezet nyíróerő-ábráját (7.2.4/b ábra).

Az 1-es rúdon keletkező maximális nyomaték (7.2.3/d) értékének meghatározásához szükségünk lesz az x_0 zérushely (7.2.4/b ábra) értékére. A

$$15.21 - 15 - 5(x_0 - 2) = 0$$

vetületi egyenletből:

$$x_0 = 2.042\,\text{m}$$

A reakcióerők ismeretében meghatározhatók a mezőnyomatékok értékei is:

$$M_1 = -18.6 + 15.21\cdot 2.042 - 15\cdot 0.042 - 5\cdot 0.042\cdot 0.021 = 11.82\,\text{kNm}$$

$$M_2 = 3.27 - 12.82\cdot 1.5 = 15.97\,\text{kNm}, \qquad M_3 = -(-3.28\cdot 3) = 9.84\,\text{kNm}$$

A nyíróerő-ábra számításánál az egyes törzstartókon meghatározott nyíróerő-ábrákat a tartó hálózatára rajzoljuk fel. A normálerő-ábra előállításánál arra kell figyelnünk, hogy normálerőt csak az *A* és a *C* befogásnál tudunk átadni. Az 1-es rúdra a konzol és a 2-es rúd fejt ki normálerőt. A 2-es rúdra az 1-es és 3-as rúd ad át nyomóerőt.

7.2.3 Rúdcsillag két konzollal

Határozzuk meg a 7.2.5/a ábrán vázolt rúdcsillag igénybevételi ábráit. Legyen $I_1 = 30\ \text{m}^4$, $I_2 = 12\ \text{m}^4$, $I_3 = 24\ \text{m}^4$ és E = állandó.

Az elemi tartókat a 7.2.5/b ábra mutatja.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{30}{6} = 3.75, \qquad k_2 = \frac{3}{4}\frac{I_2}{l_2} = \frac{3}{4}\frac{12}{4} = 2.25, \qquad k_3 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{4}\frac{24}{4} = 4.5$$

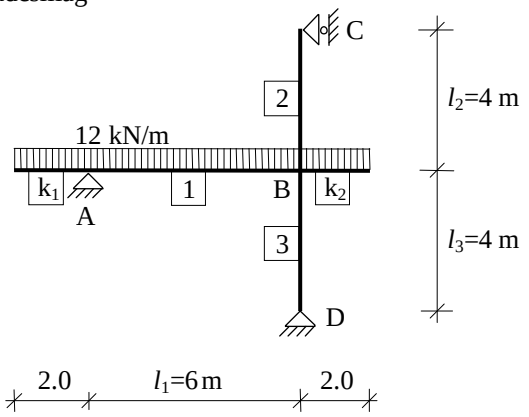
A konzolok elfordulási merevsége zérus:

$$k_{k,1} = 0 \qquad \text{és} \qquad k_{k,2} = 0$$

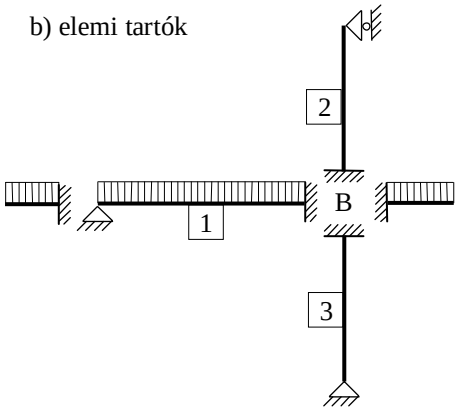
Összmerevség a *B* csomópontnál:

$$\sum_{i=1}^{4} k_i = k_1 + k_2 + k_3 + k_{k,2} = 3.75 + 2.25 + 4.5 + 0 = 10.5$$

a) rúdcsillag

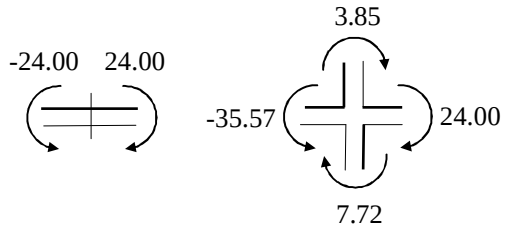


b) elemi tartók

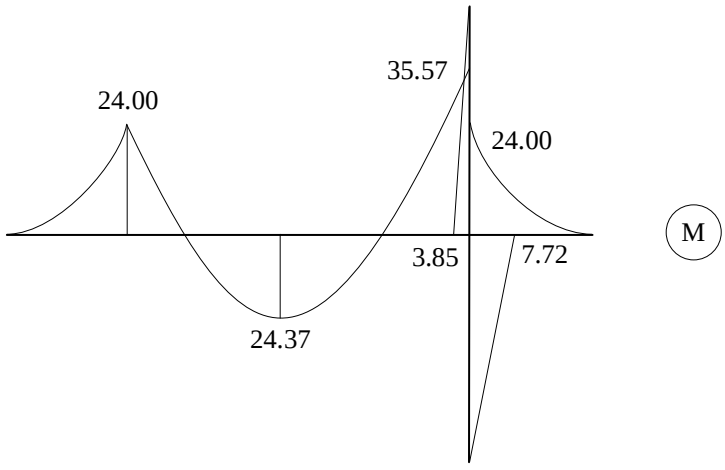


c) nyomatékosztás

csomópontok	A		B			
rudak	k_1	1	1	2	3	k_2
nyomatékosztók	0	1	0.357	0.214	0.429	0
kezdeti bef. nyomatékok	-24.00		-54.00			24.00
nyomatékosztás		24.00	12.00			
			6.43	3.85	7.72	
M-ábra értékei	-24.00	24.00	-35.57	3.85	7.72	24.00



d) M-ábra



7.2.5 ábra. Rúdcsillag két konzollal: elemi tartók, nyomatékosztás, M-ábra.

Nyomatékosztók:

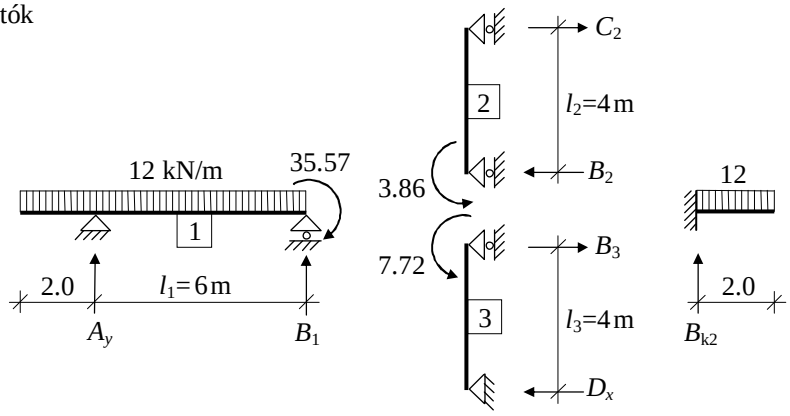
$$\alpha_{B1} = \frac{k_1}{\Sigma k_i} = \frac{3.75}{10.5} = 0.357\,, \qquad \alpha_{B2} = \frac{k_2}{\Sigma k_i} = \frac{2.25}{10.5} = 0.214$$

$$\alpha_{B3} = \frac{k_3}{\Sigma k_i} = \frac{4.5}{10.5} = 0.429\,, \qquad \alpha_{k2} = 0$$

Ellenőrzés:

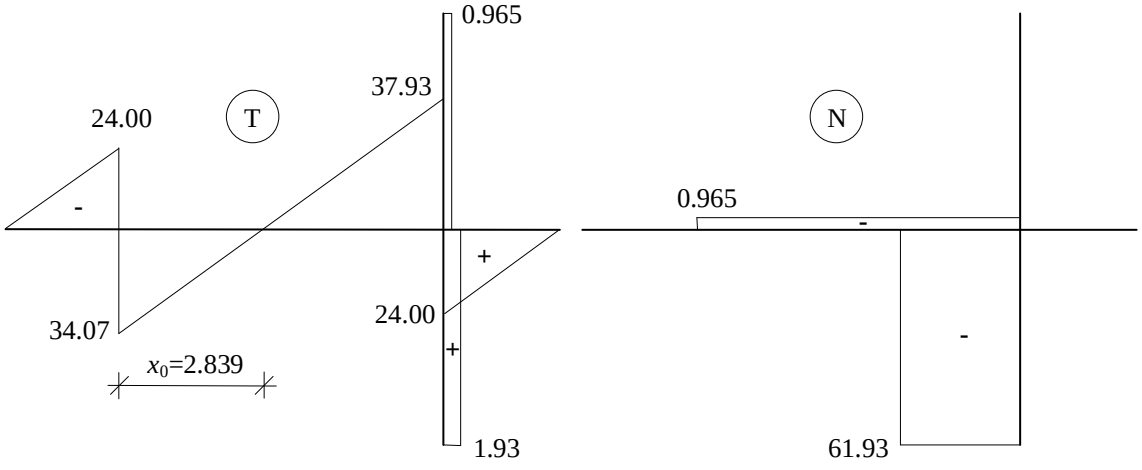
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_{k2} = 0.357 + 0.214 + 0.429 = 1.0$$

a) elemi tartók



b) T-ábra

c) N-ábra



7.2.6 ábra. Elemi tartók a reakciók számításához, T-ábra, N-ábra.

Kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{A,k1} = -12 \cdot 2 \cdot 1 = -24.0\,\text{kNm}$$

$$M_{B,1} = -\frac{ql^2}{8} = -\frac{12 \cdot 6^2}{8} = -54.0\,\text{kNm}$$

$$M_{B,k2} = 12 \cdot 2 \cdot 1 = 24.0\,\text{kNm}$$

A nyomatékosztás a 7.2.5/c, a nyomatéki ábra a 7.2.5/d ábrán látható.

A reakcióerők meghatározása a 7.2.6/a ábra szerinti elemi tartók segítségével történik. Az egyszerűbb számítás érdekében az 1. gerendát és a baloldali k_1 jelű konzolt együtt tekintjük és az így keletkező 8-méteres konzolos kéttámaszú tartóval dolgozunk. A reakcióerők értékei rendre:

$$A_y = \frac{12 \cdot 8 \cdot 4 - 35.57}{6} = 58.07\,\text{kN}\ [\uparrow]; \qquad B_1 = \frac{12 \cdot 8 \cdot 2 + 35.57}{6} = 37.93\,\text{kN}\ [\uparrow]$$

$$B_2 = \frac{3.86}{4} = 0.965\,\text{kN}\ [\leftarrow]; \qquad C_2 = 0.965\,\text{kN}\ [\rightarrow] \qquad B_{k2} = 2 \cdot 12 = 24\,\text{kN}\ [\uparrow]$$

$$B_3 = \frac{7.72}{4} = 1.93\,\text{kN}\ [\rightarrow]; \qquad D_x = 1.93\,\text{kN}\ [\leftarrow]$$

Az 1-es mezőben keletkező maximális nyomaték értékének meghatározásához szükségünk van az x_0 zérushely (7.2.6/b ábra) értékére. Az A_y = 58.07 kN nagyságú reakcióerő értékének ismeretében a

$$(2 + x_0)12 - 58.07 = 0$$

vetületi egyenletből

$$x_0 = 2.839\,\text{m}$$

Maximális mezőnyomaték így az 1-es mezőben:

$$M_1 = -12\frac{4.839^2}{2} + 58.07 \cdot 2.839 = 24.37\,\text{kNm}$$

Normálerő felvételére az *A* és a *D* fix csukló alkalmas:

$$A_x = -[-(B_3 - B_2)] = 1.93 - 0.965 = 0.965\,\text{kN}\ [\rightarrow]$$

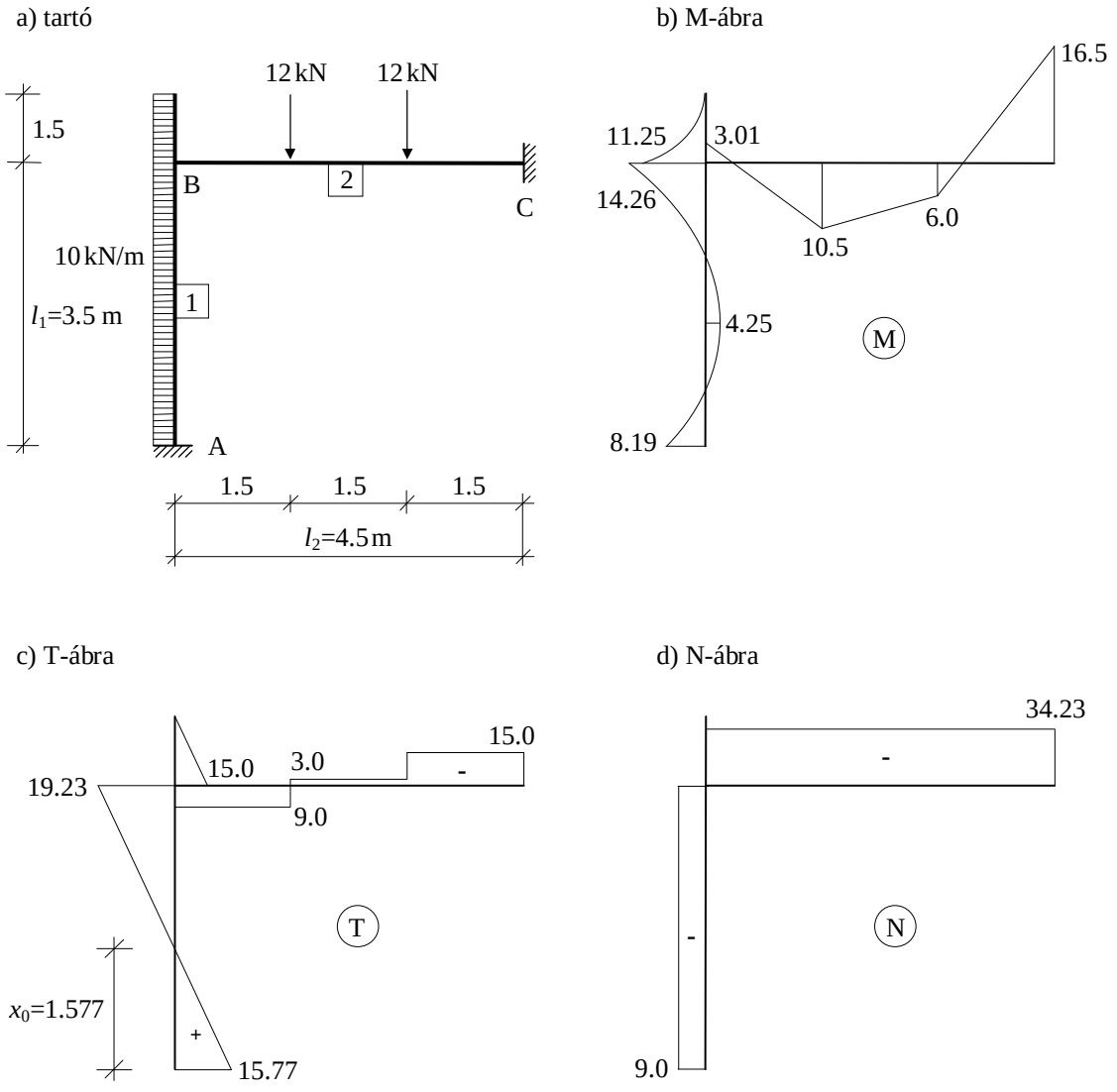
$$D_y = -[-(B_1 + B_{k2})] = 37.93 + 24 = 61.93\,\text{kN}\ [\uparrow]$$

A 2-es rúd és a konzol normálerő szempontjából terheletlen. A nyíróerő-ábra a 7.2.6/b, a normálerő-ábra a 7.2.6/c ábrán látható.

A következőkben – a részletes számítás mellőzésével – néhány gyakorló feladat adatait és eredményeit adjuk meg.

7.2.4 Rúdcsillag

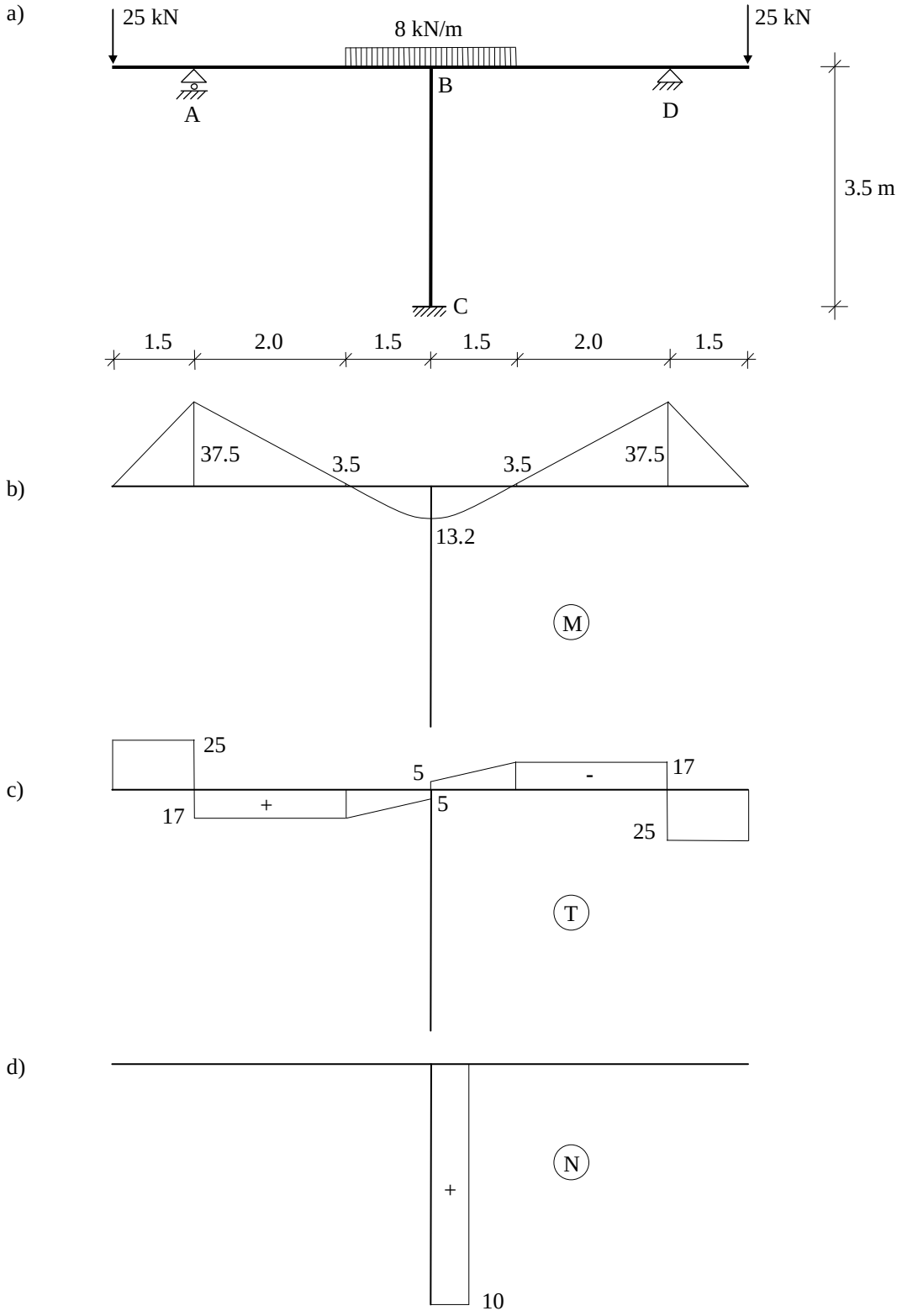
A 7.2.7/a ábrán vázolt rúdcsillag merevségi adatai a következők: $I_1 = 7\ \mathrm{m}^4$, $I_2 = 20\ \mathrm{m}^4$ és E = állandó. Az igénybevételi ábrákat a 7.2.7/b/c/d ábrákon találjuk.



7.2.7 ábra. Rúdcsillag.

7.2.5 Szimmetrikus rúdcsillag

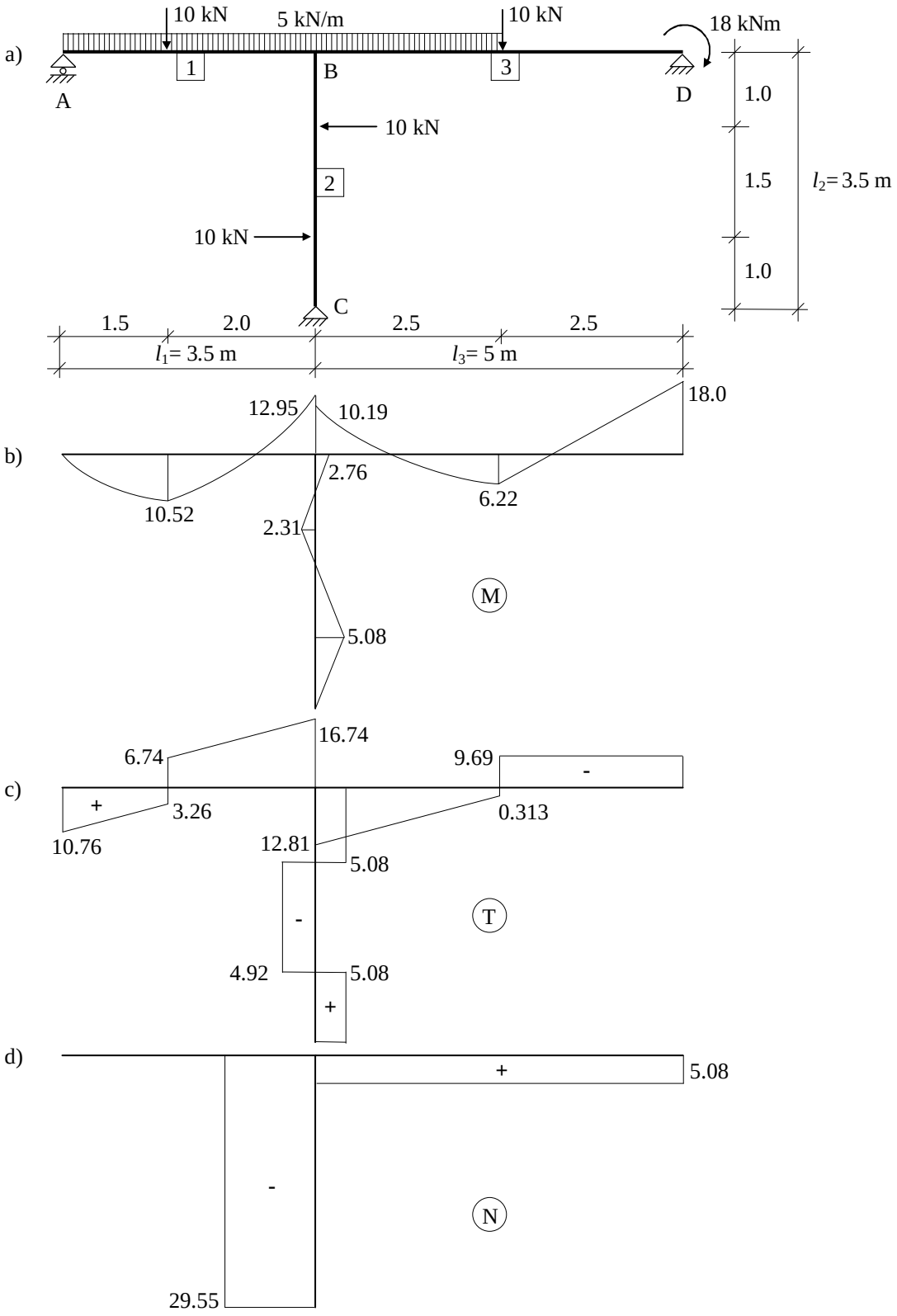
A 7.2.8/a ábrán vázolt szimmetrikus rúdcsillag merevségi adatai a következők: I = állandó és E = állandó. Az igénybevételi ábrákat a 7.2.8/b/c/d ábrákon találjuk.



7.2.8 ábra. Szimmetrikus rúdcsillag konzolokkal.

7.2.6 Rúdcsillag

A 7.2.9/a ábrán vázolt rúdcsillag merevségi adatai a következők: $I_1 = 14$ m^4, $I_2 = 21$ m^4, $I_3 = 25$ m^4 és E = állandó. Az igénybevételi ábrákat a 7.2.9/b/c/d ábrákon találjuk.



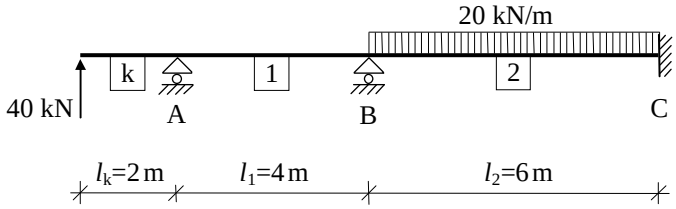
7.2.9 ábra. Rúdcsillag koncentrált nyomatékkal.

7.3 Többtámaszú tartók

7.3.1 Háromtámaszú tartó

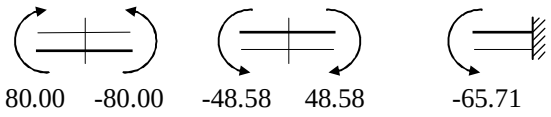
Határozzuk meg a 7.3.1/a ábrán vázolt háromtámaszú tartó igénybevételi ábráit. A tartó merevségi adatai a következők: $I_1 = 2\ \mathrm{m}^4$, $I_2 = 3\ \mathrm{m}^4$ és E = állandó.

a)

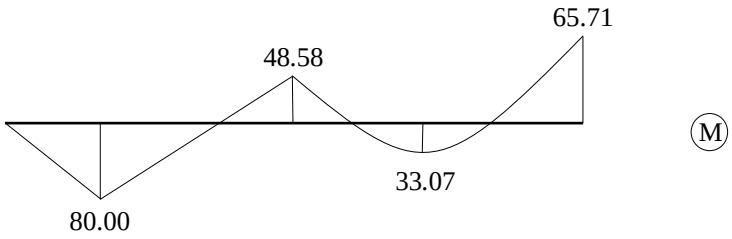


b)

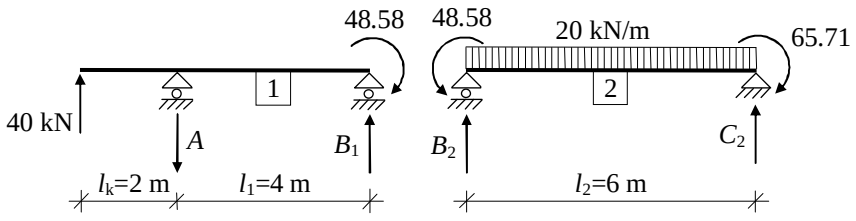
A		B		C
k	1	1	2	2
0	1	0.429	0.571	–
80.00			60.00	–60.00
	–80.00	–40.00		
		–8.58	–11.42	–5.71
80.00	–80.00	–48.58	48.58	–65.71



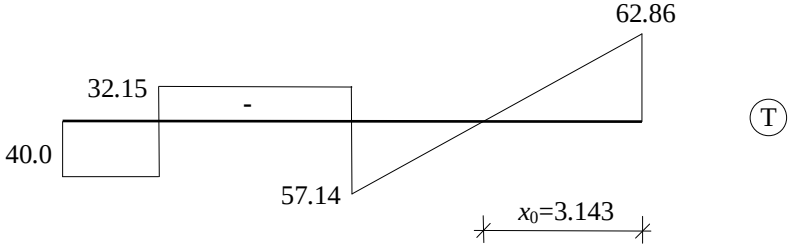
c)



d)



e)



7.3.1 ábra. Háromtámaszú tartó.

Merevségi számok:

$$k_{B1} = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{2}{4} = 0.375, \qquad k_{B2} = \frac{I_2}{l_2} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Összmerevség:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{Bi} = k_{B1} + k_{B2} = 0.375 + 0.5 = 0.875$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B1} = \frac{k_{B1}}{\Sigma k_{Bi}} = \frac{0.375}{0.875} = 0.429, \qquad \alpha_{B2} = \frac{k_{B2}}{\Sigma k_{Bi}} = \frac{0.5}{0.875} = 0.571$$

$$\alpha_{B1} + \alpha_{B2} = 0.429 + 0.571 = 1.0$$

Kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{A,k} = 40 \cdot 2 = 80.0\ \text{kNm}, \qquad M_{A,1} = 0$$

$$M_{B,2} = \frac{ql^2}{12} = \frac{20 \cdot 6^2}{12} = 60.0\ \text{kNm}, \qquad M_{C,2} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{20 \cdot 6^2}{12} = -60.0\ \text{kNm}$$

A nyomatékosztást (7.3.1/b ábra) az *A* konzolos támasznál kezdjük és utána a *B* belső támasznál folytatjuk, illetve fejezzük be. Az igénybevételi ábrákat a 7.3.1/c és 7.3.1/e ábrákon találjuk. A nyomatékok ismeretében, az elemi tartók segítségével (7.3.1/d ábra) sor kerülhet a reakcióerők meghatározására:

$$A = \frac{6 \cdot 40 + 48.58}{4} = 72.15\ \text{kN}\ [\downarrow]; \qquad B_1 = \frac{2 \cdot 40 + 48.58}{4} = 32.15\ \text{kN}\ [\uparrow]$$

$$B_2 = \frac{6 \cdot 20}{2} - \frac{65.71 - 48.58}{6} = 60 - 2.86 = 57.14\ \text{kN}\ [\uparrow]; \quad C_2 = 60 + 2.86 = 62.86\ \text{kN}\ [\uparrow]$$

A nyíróerő zérushelye a 2. mezőben:

$$x_0 = \frac{62.86}{20} = 3.143\,\text{m}$$

A nyomatéki maximum értéke a 2. mezőben:

$$M_{\max} = -(65.71 + 20 \cdot 3.143\frac{3.143}{2} - 62.86 \cdot 3.143) = 33.07\ \text{kNm}$$

7.3.2 Négytámaszú tartó

Határozzuk meg a 7.3.2/a ábrán vázolt négytámaszú tartó igénybevételi ábráit. Az összes rúd merevsége *EI* = állandó.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{4} = 0.188, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{3} = 0.333, \qquad k_3 = \frac{I_3}{l_3} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Összmerevségek:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_2 = 0.188 + 0.333 = 0.521, \qquad \sum_{i=2}^{3} k_{C,i} = k_2 + k_3 = 0.333 + 0.25 = 0.583$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B,1} = \frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.188}{0.521} = 0.361, \qquad \alpha_{B,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.333}{0.521} = 0.639$$

$$\alpha_{B,1} + \alpha_{B,2} = 0.361 + 0.639 = 1.0$$

$$\alpha_{C,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.333}{0.583} = 0.572, \qquad \alpha_{C,3} = \frac{k_3}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.25}{0.583} = 0.428$$

$$\alpha_{C,2} + \alpha_{C,3} = 0.572 + 0.428 = 1.0$$

Kezdeti befogási nyomatékok:

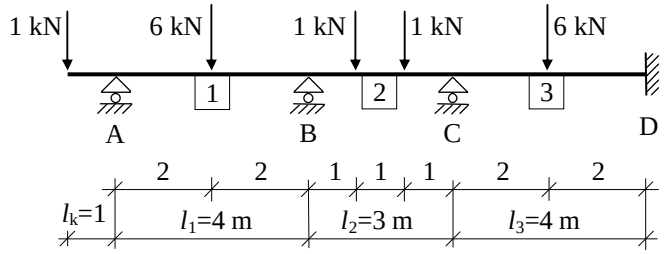
$$M_{A,k} = -1 \cdot 1 = -1.0\,\text{kNm}, \qquad M_{A,1} = 0$$

$$M_{B,1} = -\frac{3}{16} Fl = -\frac{3}{16} 6 \cdot 4 = -4.50\,\text{kNm}$$

$$M_{B,2} = \frac{2}{9} Fl = \frac{2}{9} 1 \cdot 3 = 0.667\,\text{kNm}, \qquad M_{C,2} = -\frac{2}{9} Fl = -\frac{2}{9} 1 \cdot 3 = -0.667\,\text{kNm}$$

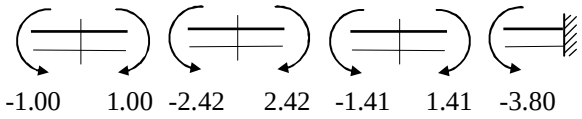
$$M_{C,3} = \frac{Fl}{8} = \frac{6 \cdot 4}{8} = 3.0\,\text{kNm}, \qquad M_{D,3} = -\frac{Fl}{8} = -\frac{6 \cdot 4}{8} = -3.0\,\text{kNm}$$

a)

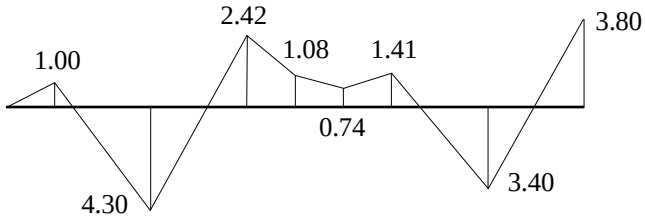


b)

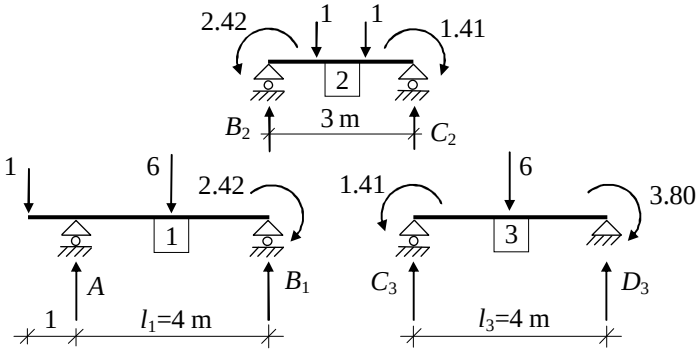
A		B		C		D
k	1	1	2	2	3	3
0	1	0.361	0.639	0.572	0.428	–
–1.00		–4.50	+0.667	–0.667	+3.00	–3.00
	+1.00	+0.50				
		+1.20	+2.13	+1.06		
			–0.97	–1.94	–1.45	–0.73
		+0.35	+0.62	+0.31		
			–0.09	–0.18	–0.13	–0.07
		+0.03	+0.06	+0.03		
				–0.02	–0.01	
–1.00	+1.00	–2.42	+2.42	–1.41	+1.41	–3.80



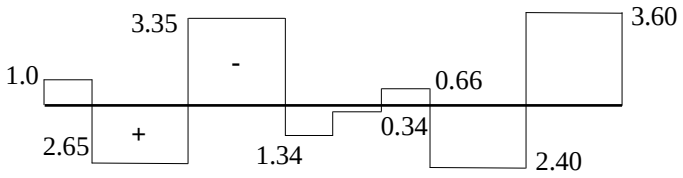
c)



d)



e)



7.3.2 ábra. Négytámaszú tartó.

A nyomatékosztást (7.3.2/b ábra) az *A* konzolos támasznál kezdjük és utána a *B* belső támasznál folytatjuk illetve fejezzük be. Az igénybevételi ábrákat a 7.3.2/c és 7.3.2/e ábrákon találjuk. A nyomatékok ismeretében kerülhet sor a reakcióerők meghatározására, amelyeket az elemi tartók (7.3.2/d ábra) segítségével számítunk ki:

$$A = \frac{6\cdot 2 + 1\cdot 5 - 2.42}{4} = 3.65\,\text{kN}\ \ [\uparrow]; \qquad B_1 = \frac{6\cdot 2 - 1\cdot 1 + 2.42}{4} = 3.35\,\text{kN}\ \ [\uparrow]$$

$$B_2 = \frac{1+1}{2} + \frac{2.42 - 1.41}{3} = 1 + 0.337 = 1.34\,\text{kN}\ \ [\uparrow]; \qquad C_2 = 1 - 0.337 = 0.66\,\text{kN}\ \ [\uparrow]$$

$$C_3 = \frac{6}{2} - \frac{3.80 - 1.41}{4} = 3 - 0.6 = 2.4\,\text{kN}\ \ [\uparrow]; \qquad D_3 = 3 + 0.6 = 3.6\,\text{kN}\ \ [\uparrow]$$

A mezőnyomatékok számítása:

$$M_1 = -1\cdot 3 + 3.65\cdot 2 = 4.30\,\text{kNm}$$

$$M_{2'} = -2.42 + 1.34\cdot 1 = -1.08\,\text{kNm}, \qquad M_{2''} = -2.42 - 1\cdot 1 + 1.34\cdot 2 = -0.74\,\text{kNm}$$

$$M_3 = -3.80 + 2\cdot 3.6 = 3.40\,\text{kNm}$$

7.3.3 Négytámaszú, belsőkonzolos tartó

Határozzuk meg a 7.3.3/a ábrán vázolt négytámaszú tartó igénybevételi ábráit. A 2. jelű rúdról függőlegesen egy egyméteres konzol ágazik el. Az összes rúd merevsége *EI* = állandó.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{3} = 0.25\,, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{5} = 0.20\,, \qquad k_3 = \frac{I_3}{l_3} = \frac{1}{6} = 0.167$$

Összmerevségek:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_2 = 0.25 + 0.20 = 0.45\,, \qquad \sum_{i=2}^{3} k_{C,i} = k_2 + k_3 = 0.20 + 0.167 = 0.367$$

Nyomatékosztók:

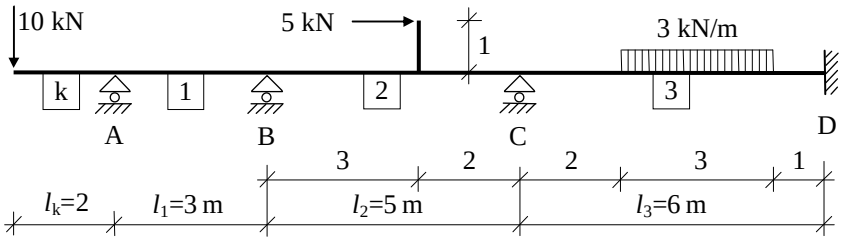
$$\alpha_{B,1} = \frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.25}{0.45} = 0.556\,, \qquad \alpha_{B,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.20}{0.45} = 0.444$$

$$\alpha_{B,1} + \alpha_{B,2} = 0.556 + 0.444 = 1.0$$

$$\alpha_{C,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.20}{0.367} = 0.545\,, \qquad \alpha_{C,3} = \frac{k_3}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.167}{0.367} = 0.455$$

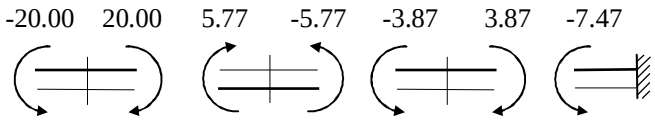
$$\alpha_{C,2} + \alpha_{C,3} = 0.545 + 0.455 = 1.0$$

a)

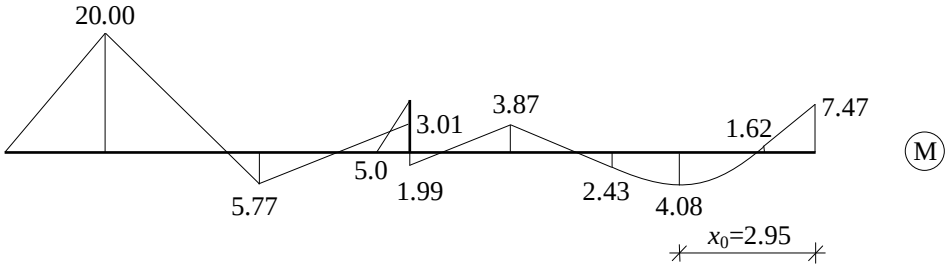


b)

A		B		C		D
k	1	1	2	2	3	3
0	1	0.556	0.444	0.545	0.455	–
–20.00			–1.60	–0.60	+5.19	–6.81
	+20.00	+10.00				
		–4.67	–3.73	–1.87		
			–0.74	–1.48	–1.24	–0.62
		+0.41	+0.33	+0.17		
			–0.05	–0.09	–0.08	–0.04
		+0.03	+0.02			
–20.00	+20.00	+5.77	–5.77	–3.87	+3.87	–7.47



c)



7.3.3 ábra. Négytámaszú belsőkonzolos tartó I.

Kezdeti befogási nyomatékok az *A* támasznál:

$$M_{A,k} = -10 \cdot 2 = -20.0\,\text{kNm}, \qquad M_{A,1} = 0$$

A belső konzol hatását a kezdeti befogási nyomatékoknál koncentrált nyomatékkal vesszük figyelembe:

$$M_{B,2} = -\frac{M}{l}(2b - \frac{3b^2}{l}) = -\frac{5 \cdot 1}{5}(2 \cdot 2 - \frac{3 \cdot 2^2}{5}) = -1.60\,\text{kNm}$$

$$M_{C,2} = -\frac{M}{l}(2a - \frac{3a^2}{l}) = -\frac{5 \cdot 1}{5}(2 \cdot 3 - \frac{3 \cdot 3^2}{5}) = -0.60\,\text{kNm}$$

A 3-as rúd kezdeti befogási nyomatékai:

$$M_{C,3}=\frac{qc}{12l^2}(12b^2a-3c^2b+c^2l)=\frac{3\cdot 3}{12\cdot 6^2}(12\cdot 2.5^2\cdot 3.5-3\cdot 3^2\cdot 2.5+3^2\cdot 6)=5.188\,\text{kNm}$$

$$M_{D,3}=-\frac{qc}{12l^2}(12ba^2-3c^2a+c^2l)=\frac{-3\cdot 3}{12\cdot 6^2}(12\cdot 2.5\cdot 3.5^2-3\cdot 3^2\cdot 3.5+3^2\cdot 6)=-6.813\,\text{kNm}$$

A nyomatékosztást és a nyomatékábrát a 7.3.3/b és 7.3.3/c ábra tartalmazza.

A reakcióerők számításához az elemi tartókat a 7.3.4/b ábra tartalmazza. A 2-es rúd törzstartóját a reakciók számításához célszerű az eredeti konzolos tartóként felrajzolni. A reakcióerők így:

$$A=\frac{10\cdot 5+5.77}{3}=18.59\,\text{kN}\ [\uparrow];\qquad B_1=\frac{10\cdot 2+5.77}{3}=8.59\,\text{kN}\ [\downarrow]$$

és

$$B_2=\frac{5\cdot 1+5.77+3.87}{5}=2.93\,\text{kN}\ [\downarrow];\qquad C_2=-B_2=2.93\,\text{kN}\ [\uparrow]$$

$$C_3=\frac{3\cdot 3\cdot 2.5+3.87-7.47}{6}=3.15\,\text{kN}\ [\uparrow];\quad D_3=\frac{3\cdot 3\cdot 3.5+7.47-3.87}{6}=5.85\ \text{kN}\ [\uparrow]$$

A nyíróerő-ábra a 7.3.4/c ábrán található. A nyíróerő zérushelye a 3. mezőben az

$$5.85-3(x_0-1)=0$$

vetületi egyenletből:

$$x_0=\frac{5.85}{3}+1=2.95\,\text{m}$$

A reakcióerők ismeretében meghatározhatók a mezőnyomatékok:

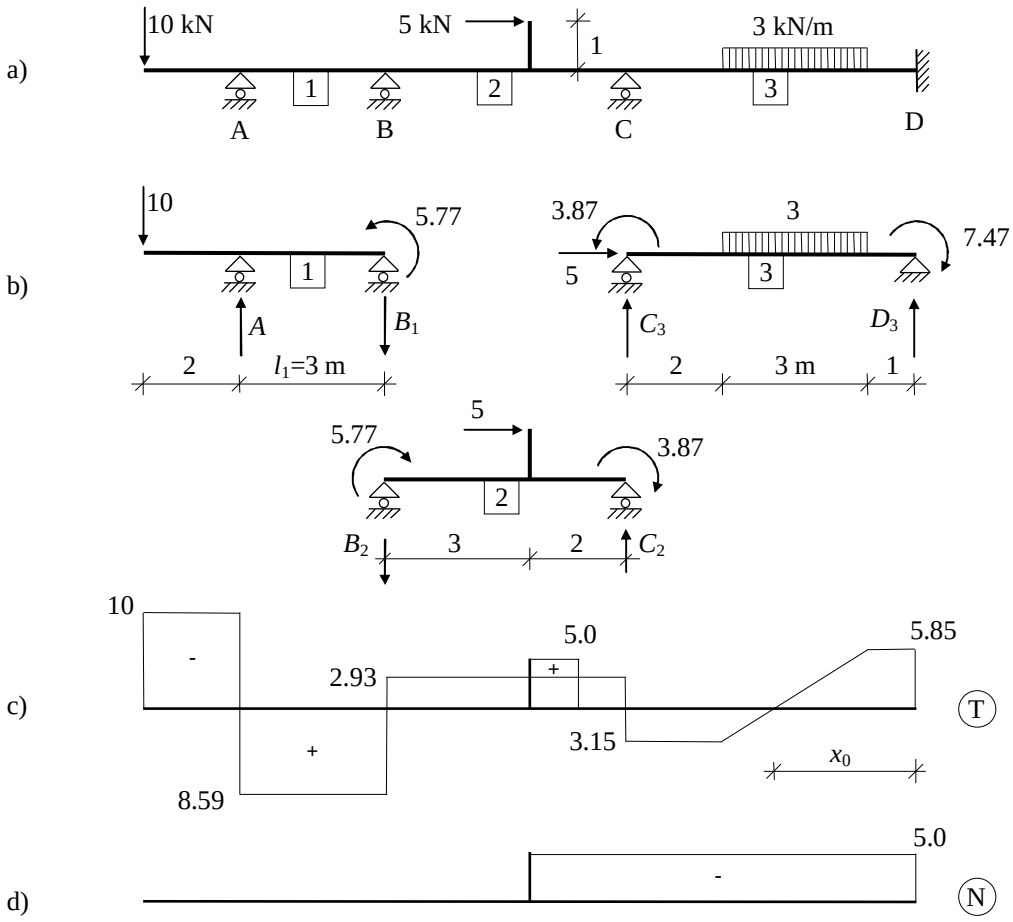
$$M_{2'}=5.77-2.93\cdot 3=-3.01\,\text{kNm},\qquad M_{2''}=-(3.87-2.93\cdot 2)=1.99\,\text{kNm}$$

$$M_{3'}=-3.87+3.15\cdot 2=2.43\,\text{kNm},\qquad M_{3''}=-(7.47-5.85\cdot 1)=-1.62\ \text{kNm}$$

A nyomatéki maximum értéke a 3. mezőben:

$$M_{3,\max}=-(7.47-5.85\cdot 2.95+3\frac{1.95^2}{2})=4.08\,\text{kNm}$$

A 2-es tartó konzolos végén lévő vízszintes koncentrált erő normálerőt okoz a vízszintes gerendában. A vízszintes erőt a *D* támasz veszi fel. A normálerő-ábra a 7.3.4/d ábrán található.



7.3.4 ábra. Négytámaszú belsőkonzolos tartó II.

7.3.4 Állandó és esetleges teherrel terhelt négytámaszú tartó

Határozzuk meg a 7.3.5 ábrán látható tartó igénybevételi ábráit. A tartó állandó terhe g = 1.0 kN/m, hasznos terhe p = 3.0 kN/m. Terheljük a tartót a p hasznos teherrel úgy, hogy a C támaszponti nyomaték maximum legyen. A tartó merevségi adatai a következők: I_1 = 1 m^4, I_2 = 3 m^4, I_3 = 3 m^4 és E = állandó.

A C támaszponti nyomaték akkor lesz maximum, ha a támasz melletti mezőket terheljük a hasznos teherrel és az utána következő mezőben csak az állandó teher működik.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{1}{3} = 0.333, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{3}{5} = 0.60, \qquad k_3 = \frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{5.5} = 0.545$$

Összmerevségek:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_2 = 0.333 + 0.60 = 0.933, \qquad \sum_{i=2}^{3} k_{C,i} = k_2 + k_3 = 0.60 + 0.545 = 1.145$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B,1}=\frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}}=\frac{0.333}{0.933}=0.357\,,\qquad \alpha_{B,2}=\frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}}=\frac{0.60}{0.933}=0.643$$

$$\alpha_{B,1}+\alpha_{B,2}=0.357+0.643=1.0$$

$$\alpha_{C,2}=\frac{k_2}{\Sigma k_{C,i}}=\frac{0.60}{1.145}=0.524\,,\qquad \alpha_{C,3}=\frac{k_3}{\Sigma k_{C,i}}=\frac{0.545}{1.145}=0.476$$

$$\alpha_{C,2}+\alpha_{C,3}=0.524+0.476=1.0$$

A kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{A,1}=\frac{gl^2}{12}=\frac{1\cdot 3^2}{12}=0.75\,\text{kNm},\qquad M_{B,1}=-\frac{gl^2}{12}=-\frac{1\cdot 3^2}{12}=-0.75\,\text{kNm}$$

$$M_{B,2}=\frac{(g+p)l^2}{12}=\frac{4\cdot 5^2}{12}=8.333\,\text{kNm},\qquad M_{C,2}=-\frac{(g+p)l^2}{12}=-\frac{4\cdot 5^2}{12}=-8.333\,\text{kNm}$$

$$M_{C,3}=\frac{(g+p)l^2}{12}=\frac{4\cdot 5.5^2}{12}=10.08\,\text{kNm},\quad M_{D,3}=-\frac{(g+p)l^2}{12}=-\frac{4\cdot 5.5^2}{12}=-10.08\,\text{kNm}$$

A nyomatékosztást és a nyomatékábrát a 7.3.5/b és 7.3.5/c ábrán találjuk. A reakcióerők számításához az elemi tartókat a 7.3.5/d ábra tartalmazza. A reakcióerők:

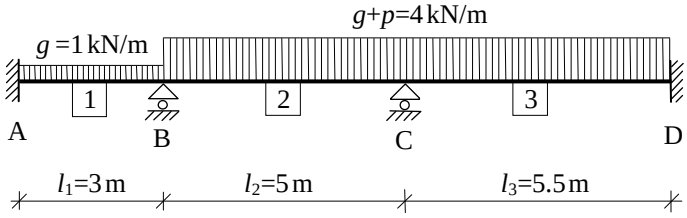
$$A=\frac{3\cdot 1}{2}-\frac{0.63+3.53}{3}=1.5-1.39=0.11\,\text{kN}\,[\uparrow];\quad B_1=1.5+1.39=2.89\,\text{kN}\,[\uparrow]$$

$$B_2=\frac{4\cdot 5}{2}-\frac{10.44-3.53}{5}=10-1.38=8.62\,\text{kN}\,[\uparrow];\quad C_2=10+1.38=11.38\,\text{kN}\,[\uparrow]$$

$$C_3=\frac{4\cdot 5.5}{2}+\frac{10.44-9.91}{5.5}=11+0.1=11.1\,\text{kN}\,[\uparrow];\quad D=11-0.1=10.9\,\text{kN}\,[\uparrow]$$

A nyíróerő-ábrát a 7.3.5/e ábrán adjuk meg.

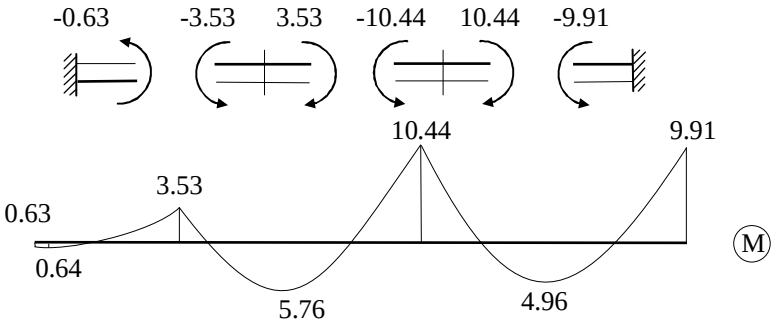
a)



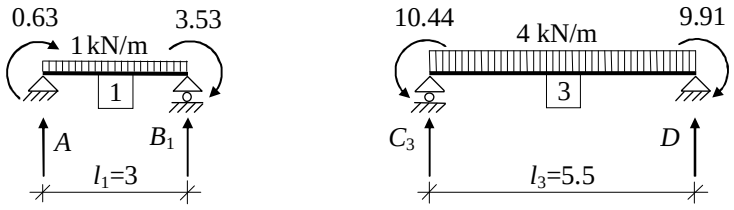
b)

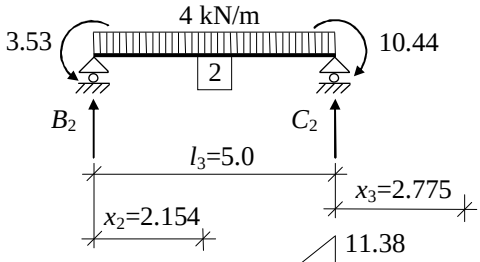
A	B		C		D
1	1	2	2	3	3
–	0.357	0.643	0.524	0.476	–
+0.75	–0.75	+8.33	–8.33	+10.08	–10.08
–1.35	–2.71	–4.87	–2.44		
		+0.18	+0.36	+0.33	+0.16
–0.03	–0.06	–0.12	–0.06		
		+0.02	+0.03	+0.03	+0.01
	–0.01	–0.01			
–0.63	–3.53	+3.53	–10.44	+10.44	–9.91

c)

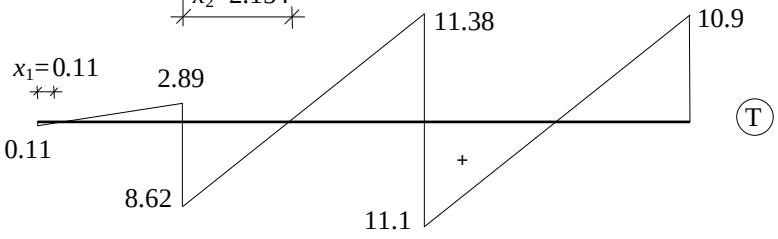


d)





e)



7.3.5 ábra. Állandó és esetleges teherrel terhelt négytámaszú tartó.

A nyíróerő-ábrák zérushelyei:

$$x_1 = \frac{0.11}{1} = 0.11\,\text{m}, \qquad x_2 = \frac{8.62}{4} = 2.155\,\text{m}, \qquad x_3 = \frac{11.1}{4} = 2.775\,\text{m}$$

A reakcióerők és nyíróerő zérushelyek segítségével már meghatározhatók a mezőnyomatékok:

$$M_1 = 0.63 - 1\frac{0.11^2}{2} + 0.11 \cdot 0.11 = 0.64\,\text{kNm}$$

$$M_2 = -3.53 - 4\frac{2.155^2}{2} + 8.62 \cdot 2.155 = 5.76\,\text{kNm}$$

$$M_3 = -10.44 - 4\frac{2.775^2}{2} + 11.1 \cdot 2.775 = 4.96\,\text{kNm}$$

7.3.5 Szimmetrikus tartó szimmetrikus és antimetrikus teherrel

Határozzuk meg a 7.3.6/a ábrán látható tartó igénybevételi ábráit szimmetrikus és antimetrikus terhekre bontás és szuperponálás segítségével. *EI* = állandó.

A 6.3.2 alfejezet képleteit felhasználva a terhelés szimmetrikus részének két erője:

$$T_{sz} = \frac{T_b + T_j}{2} = \frac{25 + 75}{2} = 50\,\text{kN}$$

és az antimetrikus terhelés bal és jobboldali erője:

$$T_{a,b} = \frac{T_b - T_j}{2} = \frac{25 - 75}{2} = -25\,\text{kN} \qquad \text{és} \qquad T_{a,j} = -\frac{T_b - T_j}{2} = -\frac{25 - 75}{2} = 25\,\text{kN}$$

Foglalkozzunk először a szimmetrikus teherrel (7.3.6/b ábra).

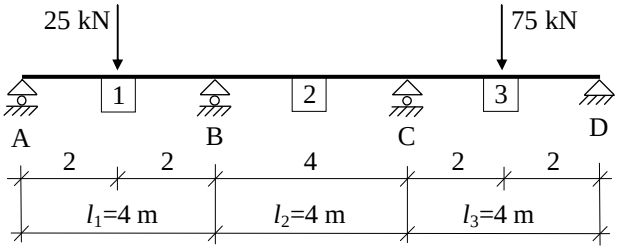
A merevségi számok szimmetria esetén:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{4} = 0.1875, \qquad k_{2,\text{sz}} = \frac{1}{2}\frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{2}\frac{1}{4} = 0.125$$

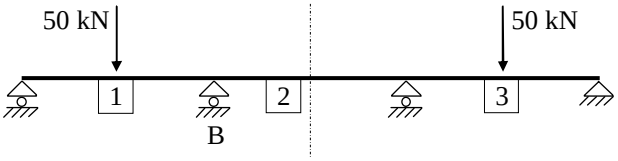
Összmerevség:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_{2,\text{sz}} = 0.1875 + 0.125 = 0.3125$$

a) tartó

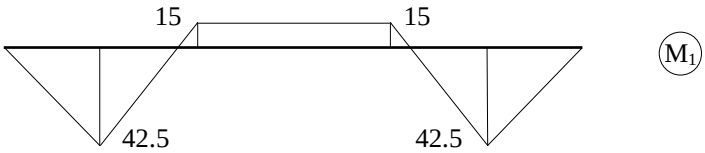


b) szimmetrikus teher

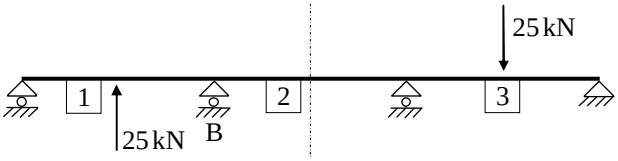


B	
1	2
0.6	0.4
–37.50	
+22.50	+15.00
–15.00	+15.00

c) szimmetrikus eset

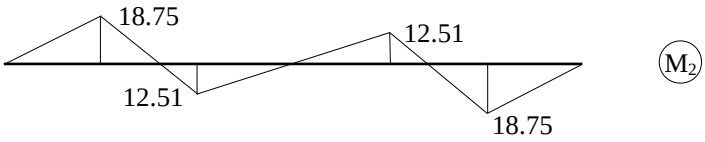


d) antimetrikus teher

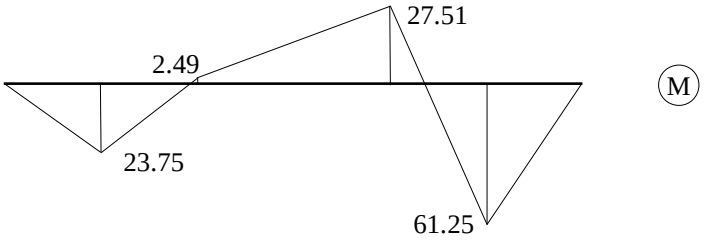


B	
1	2
0.333	0.667
+18.75	
– 6.24	–12.51
+12.51	–12.51

e) antimetrikus eset



f) a tartó M-ábrája



7.3.6 ábra. Szimmetrikus négytámaszú tartó szimmetrikus és antimetrikus teherrel.

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B,1}=\frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}}=\frac{0.1875}{0.3125}=0.60\,,\qquad \alpha_{B,2}=\frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}}=\frac{0.125}{0.3125}=0.40$$

$$\alpha_{B,1}+\alpha_{B,2}=0.60+0.40=1.0$$

A kezdeti befogási nyomaték:

$$M_{B,1}=-\frac{3}{16}Fl=-\frac{3}{16}50\cdot 4=-37.5\,\text{kNm}$$

Antimetrikus teher (7.3.6/d ábra).

A merevségi számok antimetria esetén:

$$k_1=\frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1}=\frac{3}{4}\frac{1}{4}=0.1875\,,\qquad k_{2,\text{a}}=\frac{3}{2}\frac{I_2}{l_2}=\frac{3}{2}\frac{1}{4}=0.375$$

Összmerevség:

$$\sum_{i=1}^{2}k_{B,i}=k_1+k_{2,\text{a}}=0.1875+0.375=0.5625$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B,1}=\frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}}=\frac{0.1875}{0.5625}=0.333\,,\qquad \alpha_{B,2}=\frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}}=\frac{0.375}{0.5625}=0.667$$

$$\alpha_{B,1}+\alpha_{B,2}=0.333+0.667=1.0$$

A kezdeti befogási nyomaték:

$$M_{B,1}=\frac{3}{16}Fl=\frac{3}{16}25\cdot 4=18.75\,\text{kNm}$$

A szimmetrikus teherből származó M_1-ábra a 7.3.6/c, az antimetrikus teherből származó M_2-ábra a 7.3.6/e ábrán látható. A végleges nyomatéki ábra az előző két ábra szuperponálásával nyerhető (7.3.6/f ábra).

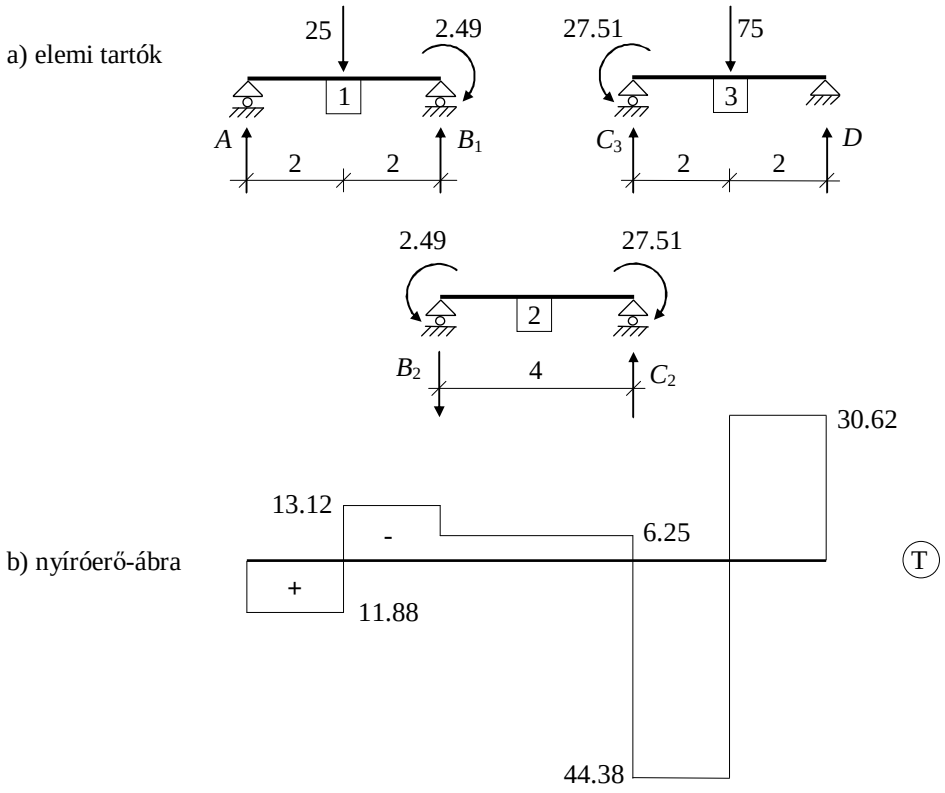
A 7.3.7/a ábrán vázolt elemi tartók segítségével a reakcióerők meghatározhatók:

$$A=\frac{25}{2}-\frac{2.494}{4}=12.5-0.6235=11.88\,\text{kN}\,[\uparrow];\qquad B_1=12.5+0.6235=13.12\,\text{kN}\,[\uparrow]$$

$$B_2=\frac{27.51-2.49}{4}=6.255\,\text{kN}\,[\downarrow];\qquad C_2=-B_2=6.255\,\text{kN}\,[\uparrow]$$

$$C_3 = \frac{75}{2} + \frac{27.51}{4} = 37.5 + 6.88 = 44.38\,\text{kN}\ [\uparrow]; \quad D = 37.5 - 6.88 = 30.62\,\text{kN}\ [\uparrow]$$

A nyíróerő-ábrát a 7.3.7/b ábra mutatja.



7.3.7 ábra. Szimmetrikus négytámaszú tartó nyíróerő-ábrája.

7.3.6 Öttámaszú szimmetrikus tartó megoszló teherrel

Határozzuk meg a 7.3.8/a ábrán látható tartó nyomatéki ábráját szimmetrikus és antimetrikus terhekre bontás és szuperponálás segítségével. *EI* = állandó.

A szimmetrikus és antimetrikus teher nagysága a következő egyenletrendszerből számítható:

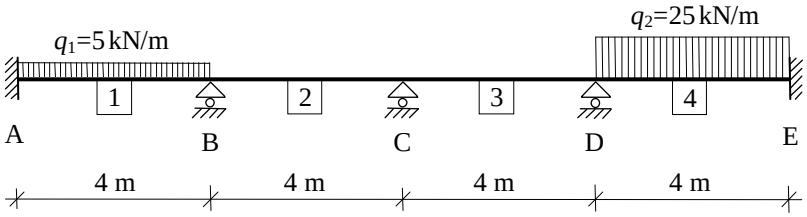
$$q_1 = 5 = q_{sz} - q_a$$

$$q_2 = 25 = q_{sz} + q_a$$

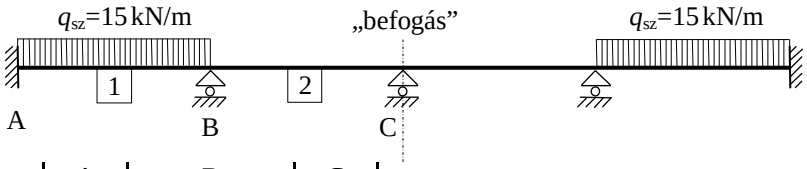
A kétismeretlenes egyenletrendszerből a szimmetrikus és antimetrikus teher nagysága:

$$q_{sz} = 15 \qquad \text{és} \qquad q_a = 10$$

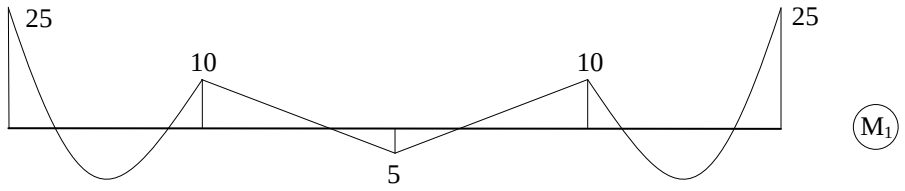
a) tartó teherrel



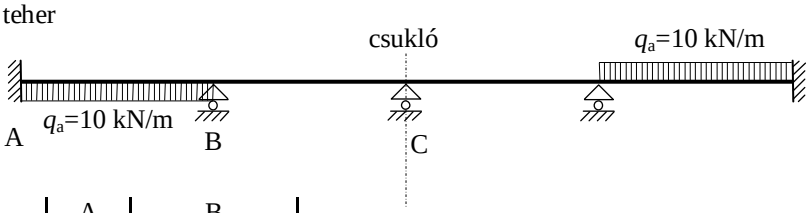
b) szimmetrikus teher



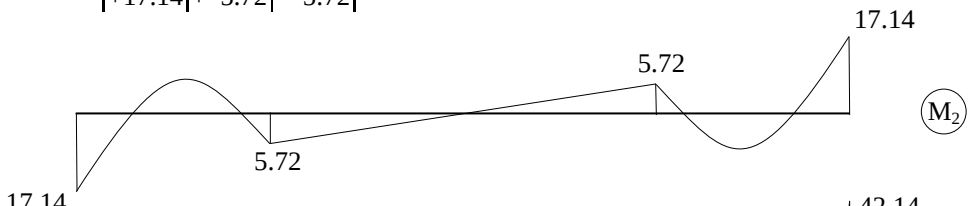
A	B		C
1	1	2	2
–	0.5	0.5	–
+20.00	–20.00		
+ 5.00	+10.00	+10.00	+ 5.00
+25.00	–10.00	+10.00	+ 5.00



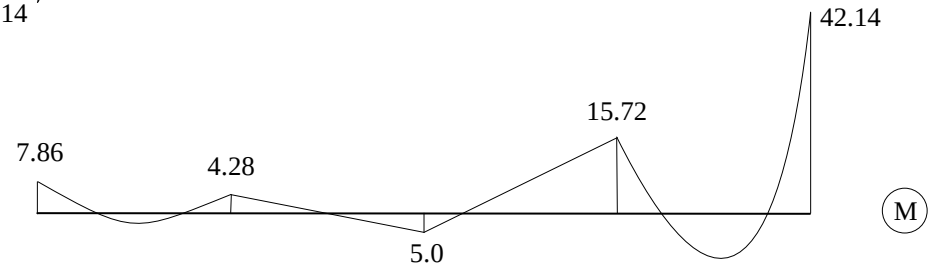
c) antimetrikus teher



A	B	
1	1	2
–	0.571	0.429
–13.33	+13.33	
– 3.81	– 7.61	– 5.72
+17.14	+ 5.72	– 5.72



d) M-ábra



7.3.8 ábra. Szimmetrikus öttámaszú tartó megoszló teherrel.

A merevségi számok szimmetria esetén:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{1}{4} = 0.25, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Összmerevség:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_2 = 0.25 + 0.25 = 0.50$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B,1} = \frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.25}{0.50} = 0.50, \qquad \alpha_{B,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.25}{0.50} = 0.50$$

$$\alpha_{B,1} + \alpha_{B,2} = 0.50 + 0.50 = 1.0$$

A kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{A,1} = \frac{ql^2}{12} = \frac{15 \cdot 4^2}{12} = 20.0\,\text{kNm}, \qquad M_{B,1} = -\frac{ql^2}{12} = \frac{15 \cdot 4^2}{12} = -20.0\,\text{kNm}$$

A feladat megoldása szimmetrikus teher esetén a 7.3.8/b ábrán látható.
A merevségi számok antimetria esetén:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{1}{4} = 0.25, \qquad k_2 = \frac{3}{4}\frac{I_2}{l_2} = \frac{3}{4}\frac{1}{4} = 0.188$$

Összmerevség:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_2 = 0.25 + 0.188 = 0.438$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B,1} = \frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.25}{0.438} = 0.571, \qquad \alpha_{B,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.188}{0.438} = 0.429$$

$$\alpha_{B,1} + \alpha_{B,2} = 0.571 + 0.429 = 1.0$$

A kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{A,1} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{10 \cdot 4^2}{12} = -13.33\,\text{kNm}, \qquad M_{B,1} = \frac{ql^2}{12} = \frac{10 \cdot 4^2}{12} = 13.33\ \text{kNm}$$

A feladatrész megoldása antimetrikus terhelés esetén a 7.3.8/c ábrán található.

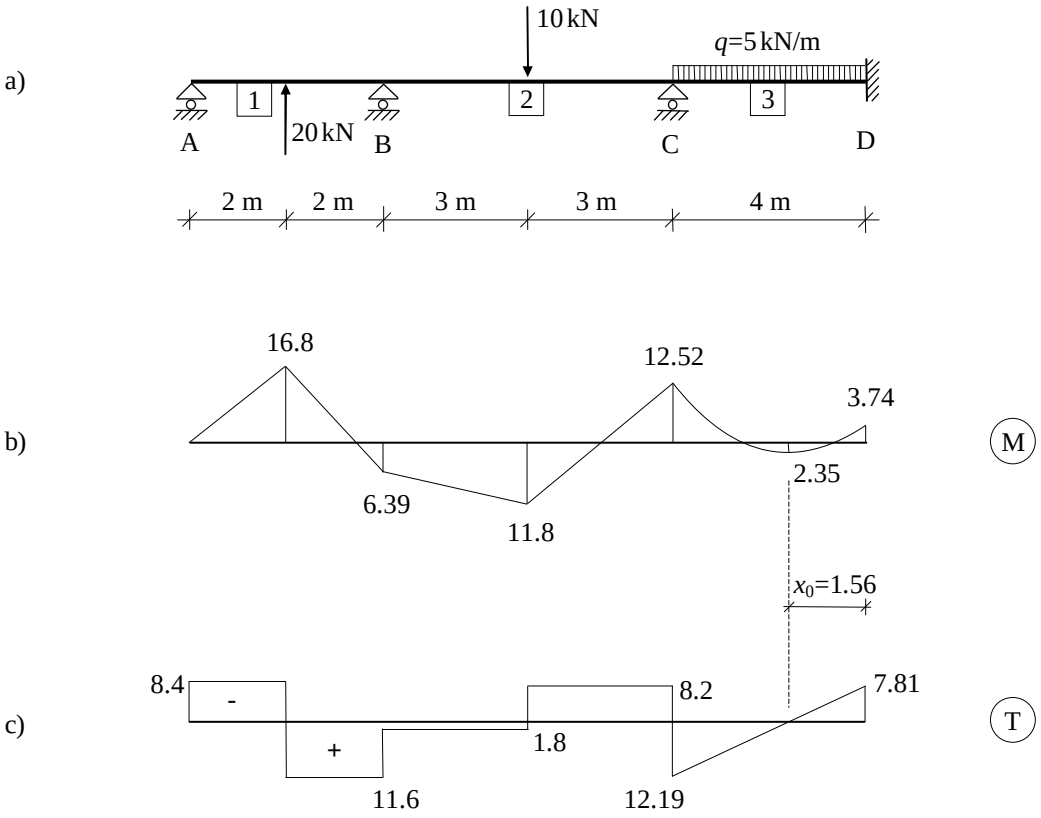
A végleges nyomatéki ábra az M_1 és M_2 nyomatékábrák szuperponálásával nyerhető (7.3.8/d ábra).

A következőkben a további gyakorláshoz megadjuk még két feladat adatait és a végeredményeket.

7.3.7 Négytámaszú tartó

Meghatározandók a 7.3.9/a ábrán vázolt tartó igénybevételi ábrái. A tartó merevségi adatai a következők: $I_1 = 1\ m^4$, $I_2 = 2\ m^4$, $I_3 = 3\ m^4$ és E = állandó.

Az igénybevételi ábrákat a 7.3.9/b és 7.3.9/c ábra mutatja.

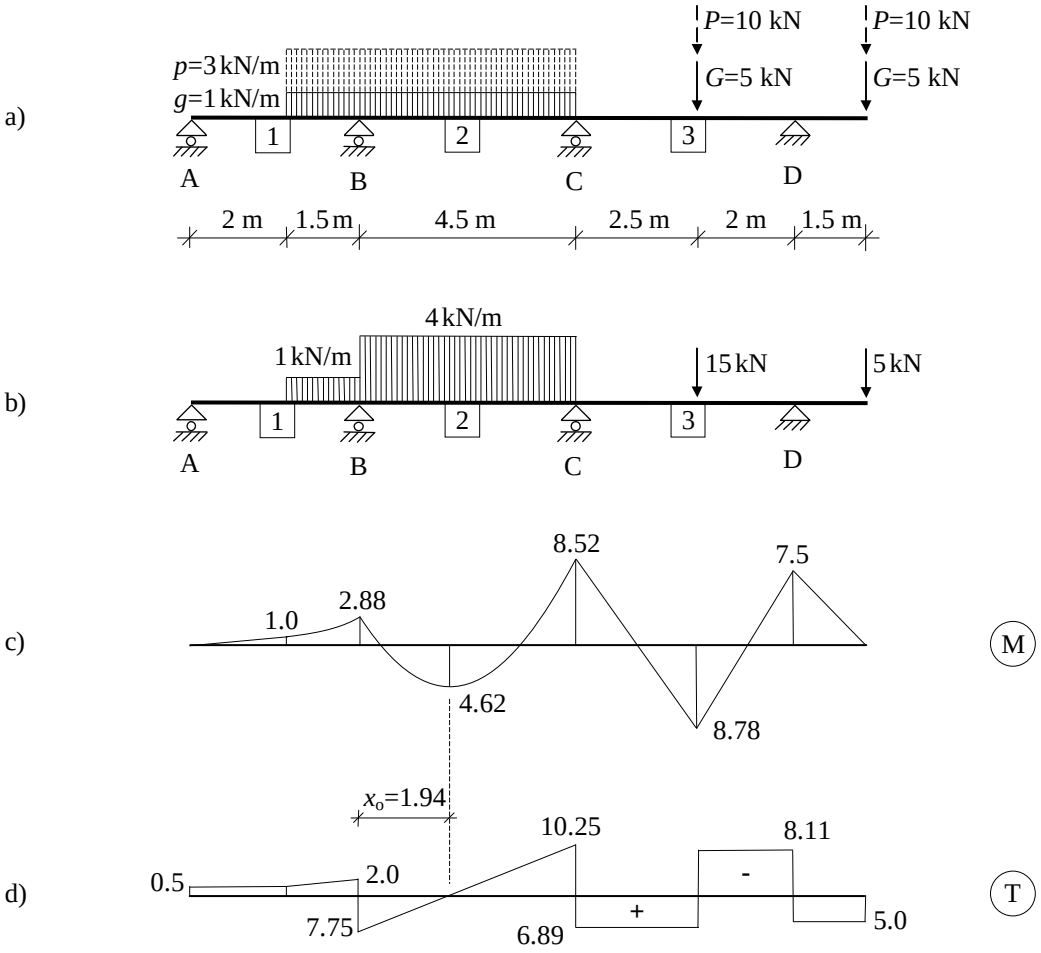


7.3.9 ábra. Négytámaszú tartó.

7.3.8 Négytámaszú konzolos tartó

A 7.3.10/a ábrán vázolt tartón helyezzük el a szaggatott vonallal jelölt p és P hasznos terheket úgy, hogy a C támaszerő és az M_C támasznyomaték maximum legyen. Készítsük el az ehhez a teherálláshoz tartozó igénybevételi ábrákat. A tartó merevségi adatai a következők: $I_1 = 2\ \mathrm{m}^4$, $I_2 = 3.5\ \mathrm{m}^4$, $I_3 = 5\ \mathrm{m}^4$ és E = állandó.

A maximális igénybevételekhez szükséges teherelrendezést a 7.3.10/b ábra, az igénybevételi ábrákat pedig a 7.3.10/c és 7.3.10/d ábra mutatja.



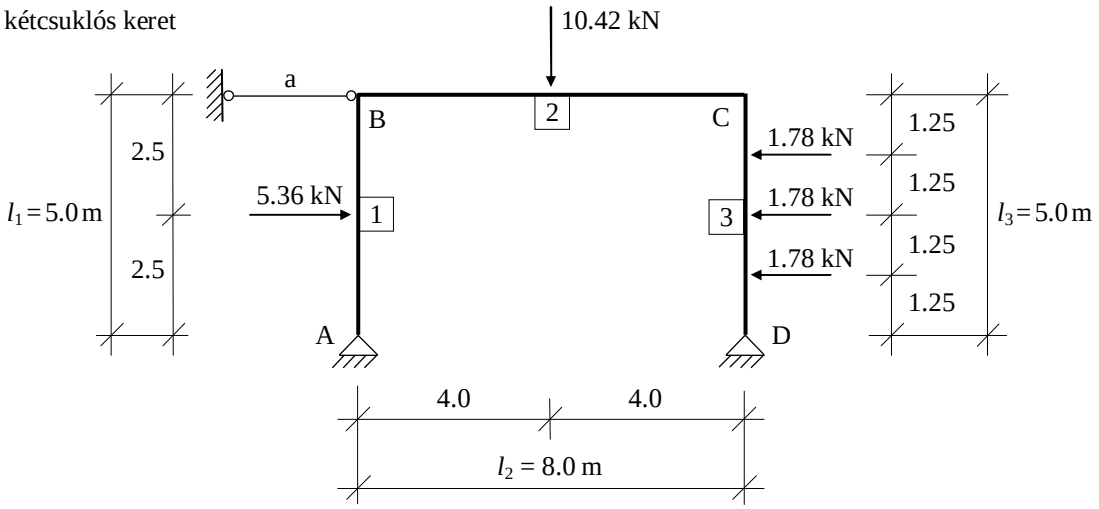
7.3.10 ábra. Négytámaszú tartó állandó és esetleges teherrel.

7.4 Fix csomópontú keretek

7.4.1 Csuklós megtámasztású keret

Határozzuk meg a 7.4.1/a ábrán vázolt kétcsuklós keret igénybevételi ábráit és az “a” megtámasztó rúdban keletkező erőt. A keret merevségi adatai a következők: $I_1 = 1\ \text{m}^4$, $I_2 = 1\ \text{m}^4$, $I_3 = 2\ \text{m}^4$ és E = állandó.

a) kétcsuklós keret

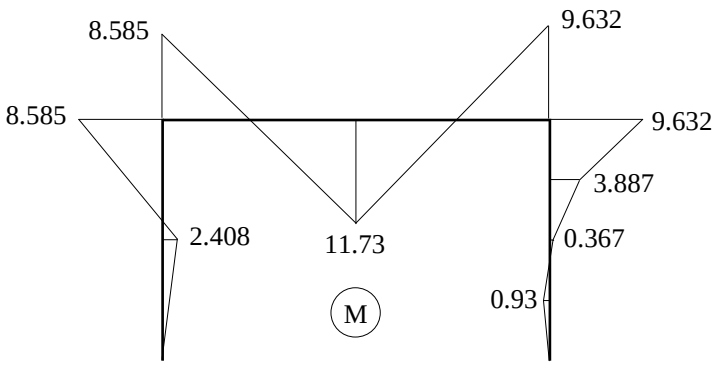


b) nyomatékosztás

B		C	
1	2	2	3
0.545	0.455	0.294	0.706
–5.025	+10.42	–10.42	+4.172
	+0.918	+1.836	+4.111
–3.441	–2.873	–1.436	
	+0.211	+0.422	+1.014
–0.115	–0.096	–0.048	
	+0.007	+0.014	+0.034
–0.004	–0.003		
–8.585	+8.585	–9.632	+9.631



c) M-ábra



7.4.1 ábra. Rúddal megtámasztott kétcsuklós keret.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{5} = 0.15\,, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{8} = 0.125\,, \qquad k_3 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{4}\frac{2}{5} = 0.30$$

Összmerevségek:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_2 = 0.15 + 0.125 = 0.275\,, \qquad \sum_{i=2}^{3} k_{C,i} = k_2 + k_3 = 0.125 + 0.30 = 0.425$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B,1} = \frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.15}{0.275} = 0.545\,, \qquad \alpha_{B,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.125}{0.275} = 0.455$$

$$\alpha_{B,1} + \alpha_{B,2} = 0.545 + 0.455 = 1.0$$

$$\alpha_{C,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.125}{0.425} = 0.294\,, \qquad \alpha_{C,3} = \frac{k_3}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.30}{0.425} = 0.706$$

$$\alpha_{C,2} + \alpha_{C,3} = 0.294 + 0.706 = 1.0$$

A kezdeti befogási nyomaték:

$$M_{B,1} = -\frac{3}{16} Fl = -\frac{3}{16} 5.36 \cdot 5 = -5.025\,\text{kNm}$$

$$M_{B,2} = \frac{Fl}{8} = \frac{10.42 \cdot 8}{8} = 10.42\,\text{kNm}, \qquad M_{C,2} = -\frac{Fl}{8} = -\frac{10.42 \cdot 8}{8} = -10.42\,\text{kNm}$$

$$M_{C,3} = \frac{15}{32} Fl = \frac{15}{32} 1.78 \cdot 5 = 4.172\,\text{kNm}$$

A nyomatékosztás a 7.4.1/b ábrán, a nyomatéki ábra pedig a 7.4.1/c ábrán látható.

Az elemi tartók (7.4.2/a ábra) és a csomóponti nyomatékok ellentettjei segítségével most már kiszámíthatók a reakcióerők is:

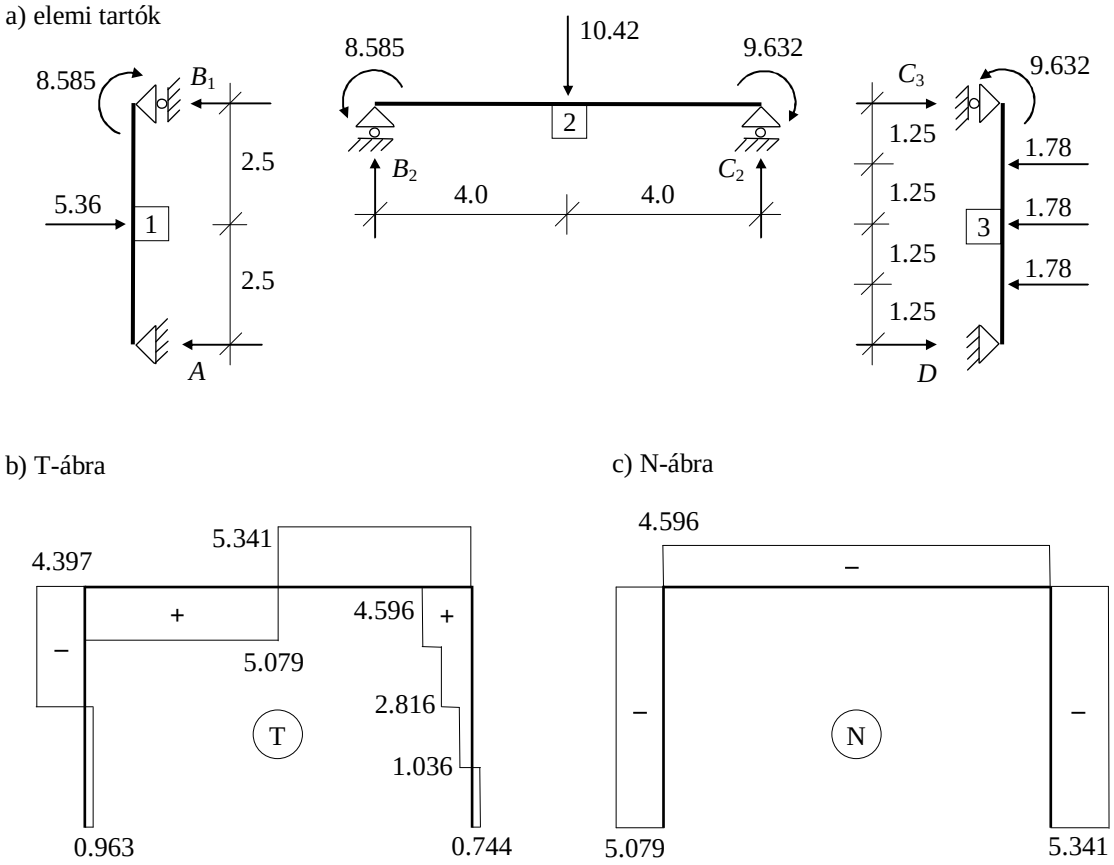
$$A = \frac{5.36}{2} - \frac{8.585}{5} = 2.68 - 1.717 = 0.963\,\text{kN}\ [\leftarrow]; \qquad B_1 = 2.68 + 1.717 = 4.397\,\text{kN}\ [\leftarrow]$$

$$B_2 = \frac{10.42}{2} - \frac{9.632 - 8.585}{8} = 5.21 - 0.131 = 5.079\,\text{kN}\ [\uparrow]; \quad C_2 = 5.21 + 0.131 = 5.341\,\text{kN}\ [\uparrow]$$

$$C_3 = \frac{3 \cdot 1.78}{2} + \frac{9.632}{5} = 2.67 + 1.926 = 4.596\,\text{kN}\ [\rightarrow]; \qquad D = 2.67 - 1.926 = 0.744\,\text{kN}\ [\rightarrow]$$

Az “*a*” megtámasztó rúdban keletkező erő:

$$S_a = C_3 - B_1 = 4.596 - 4.397 = 0.199\,\text{kN [nyomott]}$$



7.4.2 ábra. Fix csomópontú keret elemi tartói. T- és N-ábra.

A mezőnyomatékok számítása a nyomatéki ábra kiegészítéséhez:

$$M_1 = 0.963 \cdot 2.5 = 2.408\,\text{kNm}$$

$$M_2 = 5.079 \cdot 4 - 8.585 = 11.73\,\text{kNm}$$

$$M_{3'} = 4.596 \cdot 1.25 - 9.632 = -3.887\,\text{kNm}$$

$$M_{3''} = 4.596 \cdot 2.5 - 1.78 \cdot 1.25 - 9.632 = -0.367\,\text{kNm}$$

$$M_{3'''} = -(-0.744 \cdot 1.25) = 0.93\,\text{kNm}$$

A nyíróerő-ábra a 7.4.2/b, a normálerő-ábra a 7.4.2/c ábrán látható.

7.4.2 Törttengelyű keret konzollal

Határozzuk meg a 7.4.3/a ábrán vázolt keret igénybevételi ábráit és a C megtámasztásban keletkező erőt. A tartó merevségi adatai a következők: $I_1 = 6.8\ \mathrm{m}^4$, $I_2 = 2.1\ \mathrm{m}^4$, $I_3 = 7.8\ \mathrm{m}^4$ és E = állandó.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{6.8}{4} = 1.7\,, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{2.1}{5} = 0.42\,, \qquad k_3 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{4}\frac{7.8}{4} = 1.463$$

Összmerevségek:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_2 = 1.7 + 0.42 = 2.12\,, \qquad \sum_{i=2}^{3} k_{C,i} = k_2 + k_3 = 0.42 + 1.463 = 1.883$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B,1} = \frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{1.7}{2.12} = 0.802\,, \qquad \alpha_{B,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.42}{2.12} = 0.198$$

$$\alpha_{B,1} + \alpha_{B,2} = 0.802 + 0.198 = 1.0$$

$$\alpha_{C,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.42}{1.883} = 0.223\,, \qquad \alpha_{C,3} = \frac{k_3}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{1.463}{1.883} = 0.777$$

$$\alpha_{C,2} + \alpha_{C,3} = 0.223 + 0.777 = 1.0$$

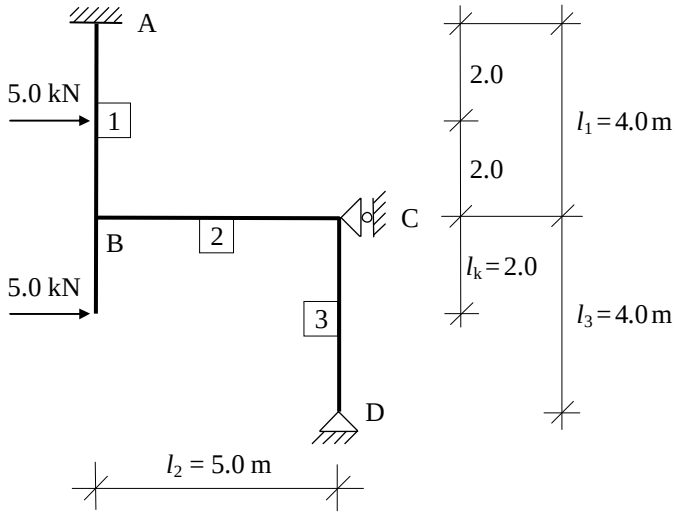
A kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{A,1} = -\frac{1}{8}Fl = -\frac{1}{8}5 \cdot 4 = -2.5\ \mathrm{kNm}, \qquad M_{B,1} = \frac{1}{8}Fl = \frac{1}{8}5 \cdot 4 = 2.5\ \mathrm{kNm}$$

$$M_{B,k} = -Fl = -5.0 \cdot 2 = -10.0\ \mathrm{kNm}$$

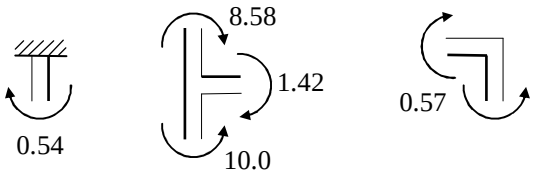
A nyomatékosztás a 7.4.3/b ábrán, a nyomatéki ábra pedig a 7.4.3/c ábrán látható.

a) törttengelyű keret

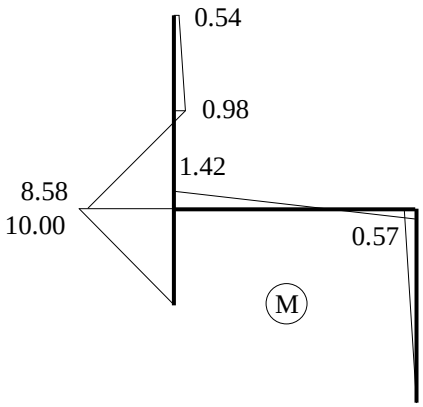


b) nyomatékosztás

A	B			C	
1	1	2	k	2	3
–	0.802	0.198	0.0	0.223	0.777
–2.50	+2.50		–10.00		
+3.01	+6.02	+1.48		+0.74	
		–0.08		–0.17	–0.57
+0.03	+0.06	+0.02			
+0.54	+8.58	+1.42	–10.00	+0.57	–0.57



c) M-ábra



7.4.3 ábra. Törttengelyű keret konzollal. Nyomatékosztás és M-ábra

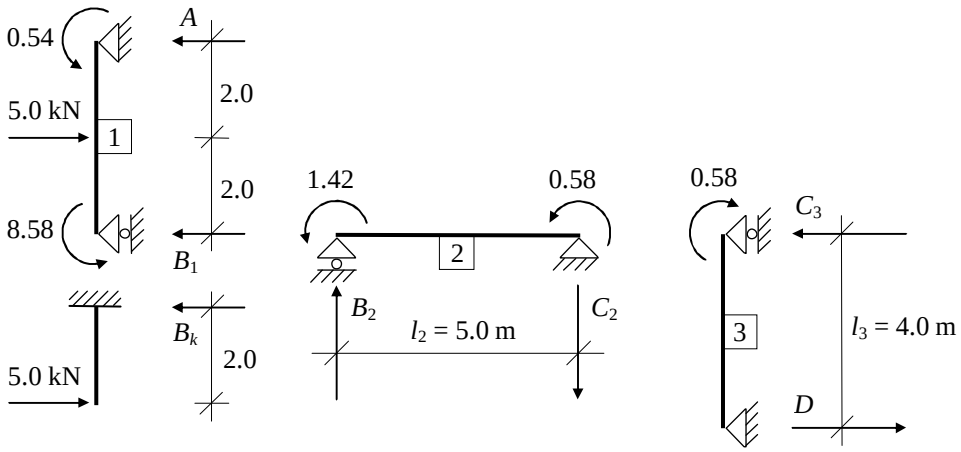
Az elemi tartók (7.4.4/a ábra) és a csomóponti nyomatékok ellentettjei segítségével most már kiszámíthatók a reakcióerők is:

$$A = \frac{5}{2} - \frac{8.58 + 0.54}{4} = 2.5 - 2.28 = 0.22\,\text{kN}\ [\leftarrow]; \quad B_1 = 2.5 + 2.28 = 4.78\,\text{kN}\ [\leftarrow]$$

$$B_k = -5.0\ \text{kN}\ [\leftarrow]; \qquad B_2 = \frac{1.42 + 0.58}{5} = 0.4\,\text{kN}\ [\uparrow]; \qquad C_2 = 0.4\,\text{kN}\ [\downarrow]$$

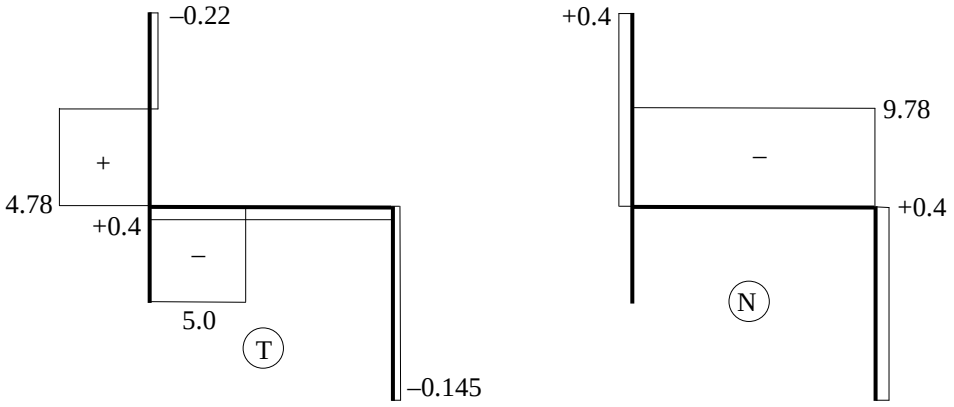
$$C_3 = \frac{0.58}{4} = 0.145\,\text{kN}\ [\leftarrow]; \qquad D = 0.145\,\text{kN}\ [\rightarrow]$$

a) elemi tartók



b) T-ábra

c) N-ábra



7.4.4 ábra. Törttengelyű keret konzollal. Elemi tartók; T- és N-ábra.

A mezőnyomaték az 1. jelű tartón:

$$M_1 = -0.54 - 0.22 \cdot 2 = -0.98\,\text{kNm}$$

A vízszintes megtámasztásban keletkező erő:

$$C = B_1 + B_k + C_3 = 4.78 + 5 + 0.145 = 9.925\,\text{kN} \quad [\leftarrow]$$

7.4.3 Törttengelyű keret két belső csomóponttal

Határozzuk meg a 7.4.5/a ábrán vázolt keret igénybevételi ábráit. *EI* = állandó.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{4} = 0.188, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{3} = 0.333$$

$$k_3 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{4}\frac{1}{4} = 0.188, \qquad k_4 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{4}\frac{1}{3} = 0.25$$

Összmerevségek:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_2 = 0.188 + 0.333 = 0.521$$

$$\sum_{i=2}^{4} k_{C,i} = k_2 + k_3 + k_4 = 0.333 + 0.188 + 0.25 = 0.771$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B,1} = \frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.188}{0.521} = 0.36, \qquad \alpha_{B,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.333}{0.521} = 0.64$$

$$\alpha_{B,1} + \alpha_{B,2} = 0.36 + 0.64 = 1.0$$

$$\alpha_{C,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.333}{0.771} = 0.432, \qquad \alpha_{C,3} = \frac{k_3}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.188}{0.771} = 0.244$$

$$\alpha_{C,4} = \frac{k_4}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.25}{0.771} = 0.324$$

$$\alpha_{C,2} + \alpha_{C,3} + \alpha_{C,4} = 0.432 + 0.244 + 0.324 = 1.0$$

A kezdeti befogási nyomatékok:

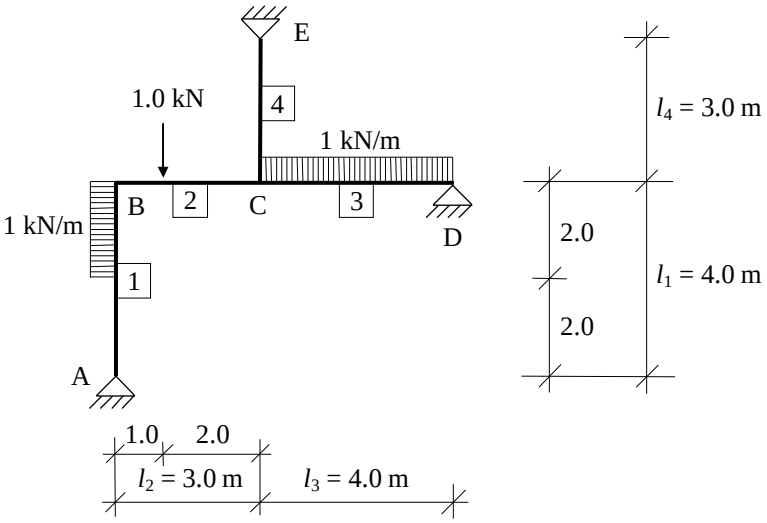
$$M_{B,1} = -\frac{1}{2}\frac{qac}{l^2}\left(l^2 - a^2 - \frac{c^2}{4}\right) = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 4^2}\left(4^2 - 3^2 - \frac{2^2}{4}\right) = -1.125\,\text{kNm}$$

$$M_{B,2} = \frac{Fab^2}{l^2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2^2}{3^2} = 0.444\,\text{kNm}, \qquad M_{C,2} = -\frac{Fa^2b}{l^2} = -\frac{1 \cdot 1^2 \cdot 2}{3^2} = -0.222\,\text{kNm}$$

$$M_{C,3} = \frac{ql^2}{8} = \frac{1 \cdot 4^2}{8} = 2.0 \text{ kNm}$$

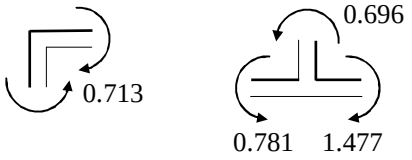
A nyomatékosztás a 7.4.5/b ábrán, a nyomatéki ábra pedig a 7.4.5/c ábrán látható.

a) törttengelyű tartó

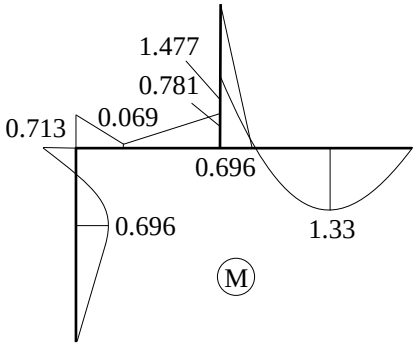


b) nyomatékosztás

B		C		
1	2	2	3	4
0.36	0.64	0.432	0.244	0.324
–1.125	+0.444	–0.222	+2.000	
	–0.384	–0.768	–0.434	–0.576
+0.383	+0.682	+0.341		
	–0.074	–0.147	–0.083	–0.111
+0.027	+0.047	+0.024		
	–0.005	–0.010	–0.006	–0.008
+0.002	+0.003	+0.002		
		–0.001	0.000	–0.001
–0.713	+0.713	–0.781	+1.477	–0.696



c) M-ábra



7.4.5 ábra. Törttengelyű keret két belső csomóponttal.

A reakcióerők kiszámításához szükséges elemi tartók a 7.4.6/a ábrán találhatók. A reakcióerők értékei rendre:

$$A = \frac{1\cdot 2\cdot 1 - 0.713}{4} = 0.322\,\text{kN}\ [\leftarrow]; \quad B_1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3 + 0.713}{4} = 1.678\,\text{kN}\ [\leftarrow]$$

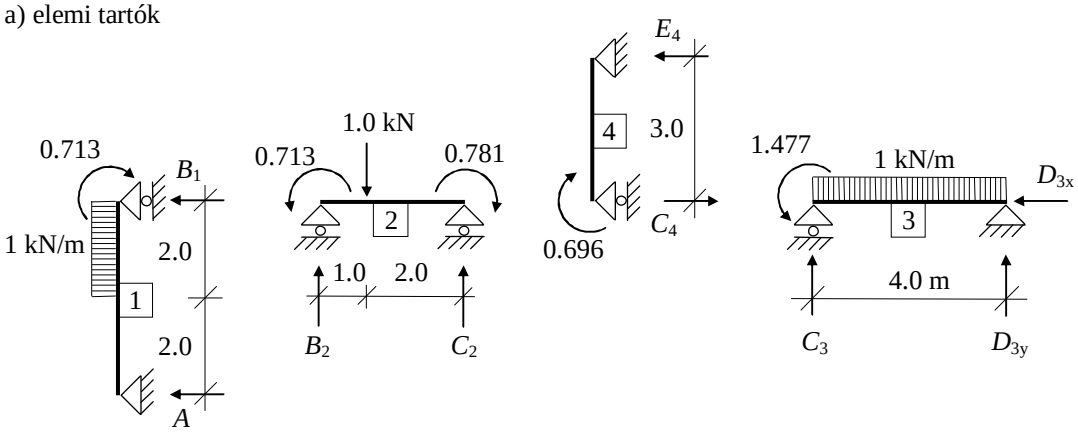
$$B_2 = \frac{1\cdot 2 + 0.713 - 0.781}{3} = 0.644\,\text{kN}\ [\uparrow]; \quad C_2 = \frac{1\cdot 1 + 0.781 - 0.713}{3} = 0.356\,\text{kN}\ [\uparrow]$$

$$C_3 = \frac{1\cdot 4}{2} + \frac{1.477}{4} = 2.369\,\text{kN}\ [\uparrow]; \qquad D_{3y} = 2 - 0.369 = 1.631\text{kN}\ [\uparrow]$$

$$C_4 = \frac{0.696}{3} = 0.232\,\text{kN}\ [\rightarrow]; \qquad E_4 = 0.232\,\text{kN}\ [\leftarrow]$$

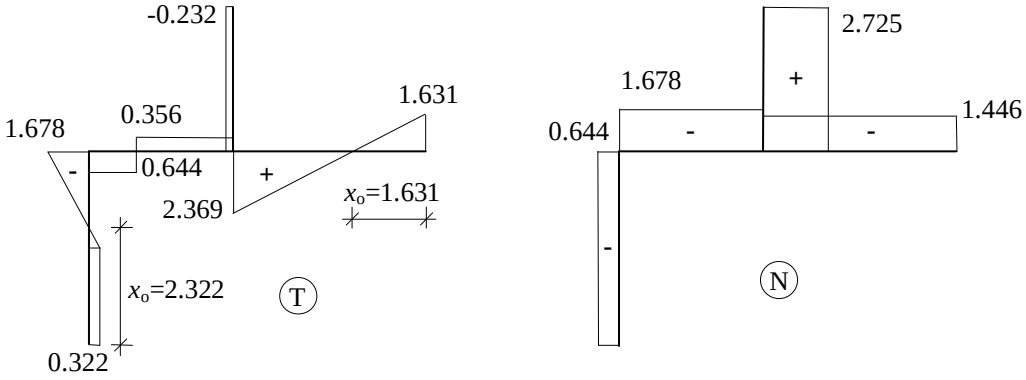
$$D_{3x} = B_1 + C_4 = 1.678 - 0.232 = 1.446\ \text{kN}\ [\leftarrow]$$

a) elemi tartók



b) T-ábra

c) N-ábra



7.4.6 ábra. Törttengelyű keret két belső csomóponttal. Elemi tartók, T- és N-ábra.

A nyíróerő-ábrát a 7.4.6/b a normálerő-ábrát a 7.4.6/c ábra tartalmazza.

A nyomatéki maximumok helye az 1. és 3. tartón:

1: $0.322-(x_0-2)1=0 \quad \rightarrow \quad x_0 = 2.322$ m

3: $1.631-x_0=0 \quad \rightarrow \quad x_0 = 1.631$ m

Most már meghatározhatók a mezőnyomatékok:

$$M_1 = 0.322 \cdot 2.322 - 1 \cdot \frac{0.322^2}{2} = 0.696\,\text{kNm}$$

$$M_2 = -0.713 + 0.644 \cdot 1 = -0.069\,\text{kNm}$$

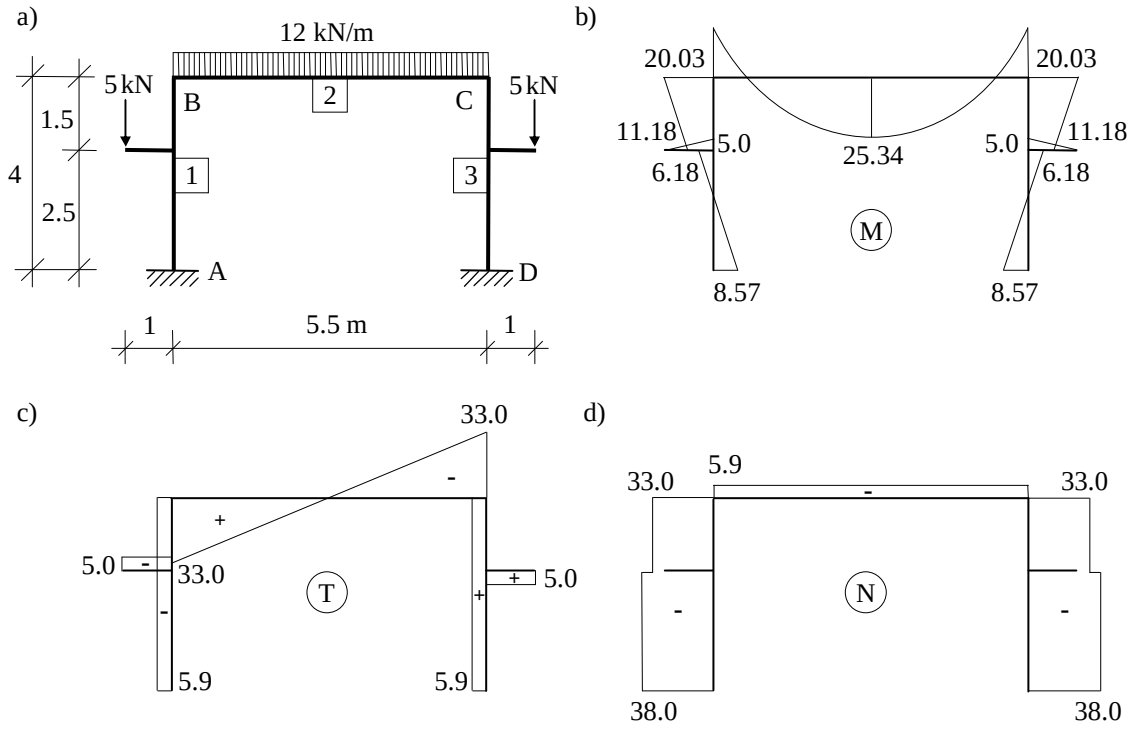
$$M_3 = -(-1.631 \cdot 1.631 + 1 \cdot \frac{1.631^2}{2}) = 1.33\,\text{kNm}$$

A következőkben a további gyakorláshoz megadjuk két feladat adatait és a végeredményeket.

7.4.4 Keret két konzollal

A 7.4.7/a ábrán vázolt szimmetrikus keret kilendülő szerkezet, de az adott szimmetrikus teher hatására nem lendül ki. A tartó merevségi adatai a következők: $I_1 = 4$ m^4, $I_2 = 5.5$ m^4, $I_3 = 4$ m^4 és E = állandó.

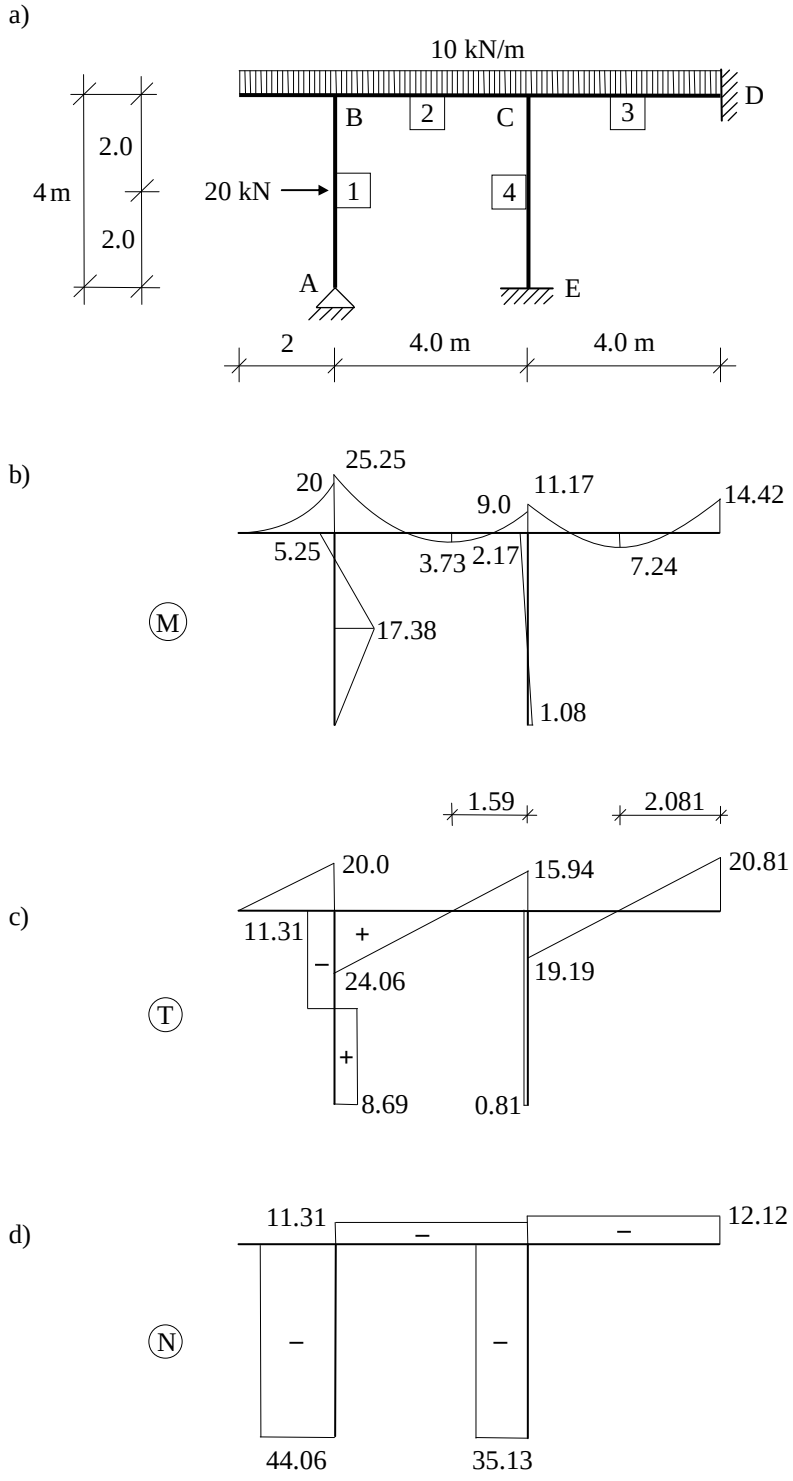
Az M-ábrát, T-ábrát és N-ábrát a 7.4.7/b, 7.4.7/c és 7.4.7/d ábrák mutatják.



7.4.7 ábra. Keret két konzollal.

7.4.5 Konzolos keret két belső csomóponttal

A 7.4.8/a ábrán vázolt konzolos keret igénybevételi ábráit a 7.4.8/b, 7.4.8/c és 7.4.8/d ábrákon adjuk meg. *EI* = állandó.



7.4.8 ábra. Konzolos keret két belső csomóponttal.

7.5 Süllyedő alátámasztású tartók

7.5.1 Négytámaszú süllyedő alátámasztású tartó

Határozzuk meg a 7.5.1/a ábrán vázolt tartó süllyedések hatására keletkező igénybevételeit. A rugalmassági tényező $E = 2.5 \cdot 10^7$ kN/m^2.

A téglalap keresztmetszetű gerenda tehetetlenségi nyomatéka:

$$I = \frac{200 \cdot 400^3}{12} = 1.067 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 = 1.067 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{4} = 0.188, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{6} = 0.167, \qquad k_3 = \frac{I_3}{l_3} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Összmerevségek:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_2 = 0.18 + 0.167 = 0.355, \qquad \sum_{i=2}^{3} k_{C,i} = k_2 + k_3 = 0.167 + 0.2 = 0.367$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B,1} = \frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.188}{0.355} = 0.53, \qquad \alpha_{B,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.167}{0.355} = 0.47$$

$$\alpha_{B,1} + \alpha_{B,2} = 0.53 + 0.47 = 1.0$$

$$\alpha_{C,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.167}{0.367} = 0.455, \qquad \alpha_{C,3} = \frac{k_3}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.2}{0.367} = 0.545$$

$$\alpha_{C,2} + \alpha_{C,3} = 0.455 + 0.545 = 1.0$$

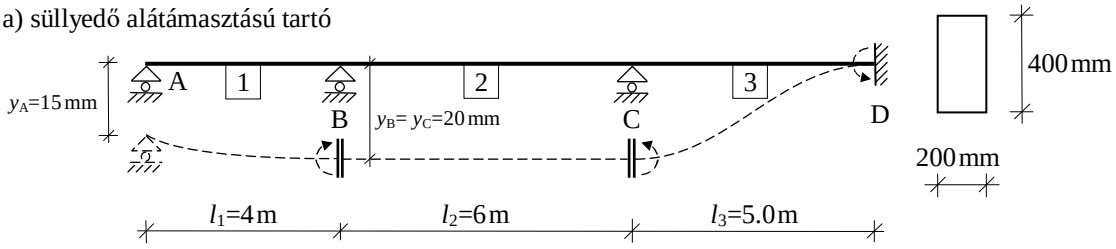
A kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{B,1} = 3\frac{EI}{l_1^2}\Delta y = 3\frac{2.5 \cdot 10^7 \cdot 1.067 \cdot 10^{-3}}{4^2}(0.02 - 0.015) = 25 \text{ kNm}$$

$$M_{C,3} = -6\frac{EI}{l_3^2}\Delta y = -6\frac{2.5 \cdot 10^7 \cdot 1.067 \cdot 10^{-3}}{5^2}(0.02 - 0.0) = -128.04 \text{ kNm}$$

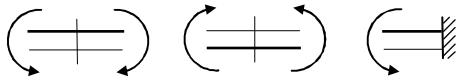
$$M_{D,3} = -6\frac{EI}{l_3^2}\Delta y = -6\frac{2.5 \cdot 10^7 \cdot 1.067 \cdot 10^{-3}}{5^2}(0.02 - 0.0) = -128.04 \text{ kNm}$$

a) süllyedő alátámasztású tartó

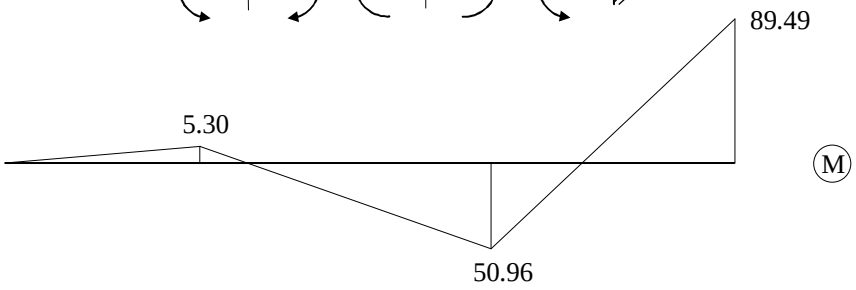


b) nyomatékosztás

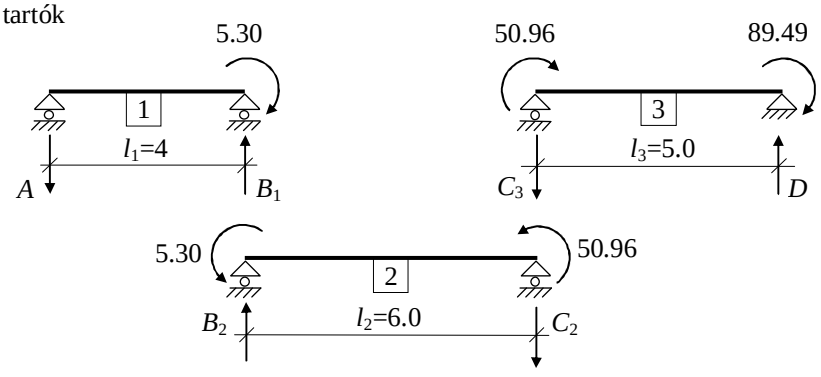
B		C		D
1	2	2	3	3
0.53	0.47	0.455	0.545	–
+25.00			–128.04	–128.04
	+29.13	+58.26	+69.78	+34.89
–28.69	–25.44	–12.72		
	+2.89	+5.79	+6.93	+3.47
–1.53	–1.36	–0.68		
	+0.16	+0.31	+0.37	+0.19
–0.08	–0.08			
–5.30	+5.30	–50.96	–50.96	–89.49



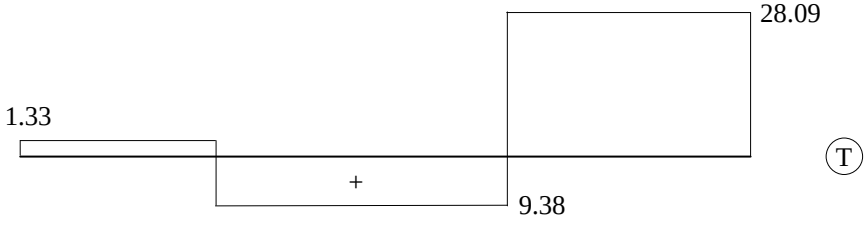
c) M-ábra



d) elemi tartók



e) T-ábra



7.5.1 ábra. Süllyedő alátámasztású négytámaszú tartó.

A kezdeti befogási nyomatékok előjelét a meggörbült elemi tartók segítségével állapítottuk meg (szaggatott nyomatékok a 7.5.1/a ábrán). A *B* és *C* támasz süllyedése azonos, így meggörbülés hiányában kezdeti befogási nyomaték nem keletkezik a 2. rúdon.

A nyomatékosztás a 7.5.1/b, a nyomatéki ábra a 7.5.1/c ábrán látható.

A reakcióerők kiszámításához szükséges elemi tartók a 7.5.1/d ábrán találhatók. A reakcióerők ezek segítségével:

$$A = \frac{5.305}{4} = 1.325\ \text{kN}\ [\downarrow]; \qquad B_1 = \frac{5.305}{4} = 1.325\ \text{kN}\ [\uparrow]$$

$$B_2 = \frac{5.30 + 50.96}{6} = 9.377\ \text{kN}\ [\uparrow]; \quad C_2 = \frac{5.30 + 50.96}{6} = 9.377\ \text{kN}\ [\downarrow]$$

$$C_3 = \frac{50.96 + 89.49}{5} = 28.09\ \text{kN}\ [\downarrow]; \quad D_3 = \frac{50.96 + 89.49}{5} = 28.09\ \text{kN}\ [\uparrow]$$

A nyíróerő-ábrát a 7.5.1/e ábra tartalmazza.

7.5.2 Négytámaszú süllyedő alátámasztású tartó II.

Határozzuk meg a 7.5.2/a ábrán vázolt tartó külső terhek és süllyedések hatására keletkező igénybevételi ábráit.

A tartó merevsége $EI = 2.75 \cdot 10^7 \cdot 0.1067 \cdot 10^{-2} = 2.934 \cdot 10^4\ \text{kNm}^2$.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{6} = 0.125, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{5} = 0.2, \qquad k_3 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{4}\frac{1}{5} = 0.15$$

Összmerevségek:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_2 = 0.125 + 0.2 = 0.325, \qquad \sum_{i=2}^{3} k_{C,i} = k_2 + k_3 = 0.2 + 0.15 = 0.35$$

Nyomatékosztók:

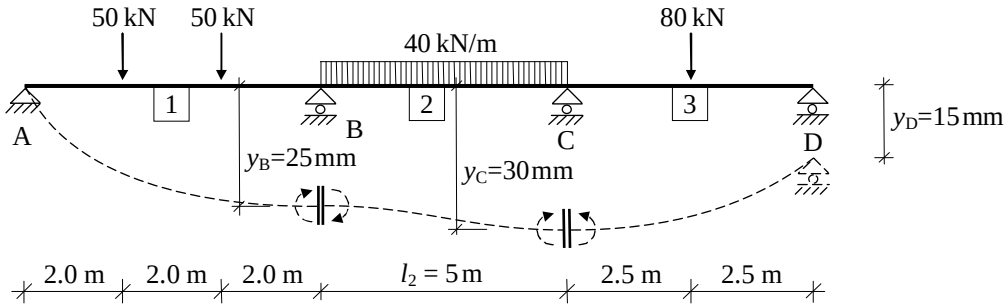
$$\alpha_{B,1} = \frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.125}{0.325} = 0.385, \qquad \alpha_{B,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.2}{0.325} = 0.615$$

$$\alpha_{B,1} + \alpha_{B,2} = 0.385 + 0.615 = 1.0$$

$$\alpha_{C,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.2}{0.35} = 0.572, \qquad \alpha_{C,3} = \frac{k_3}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.15}{0.35} = 0.428$$

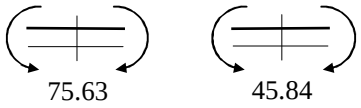
$$\alpha_{C,2} + \alpha_{C,3} = 0.572 + 0.428 = 1.0$$

a)

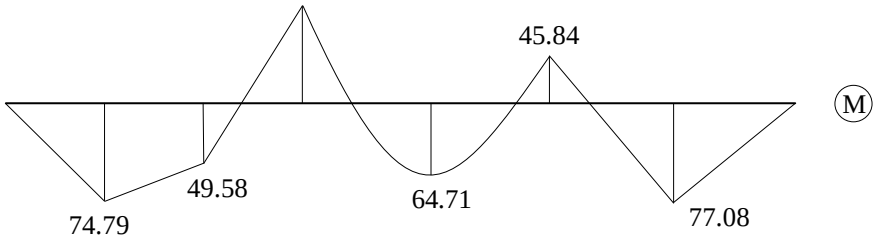


b)

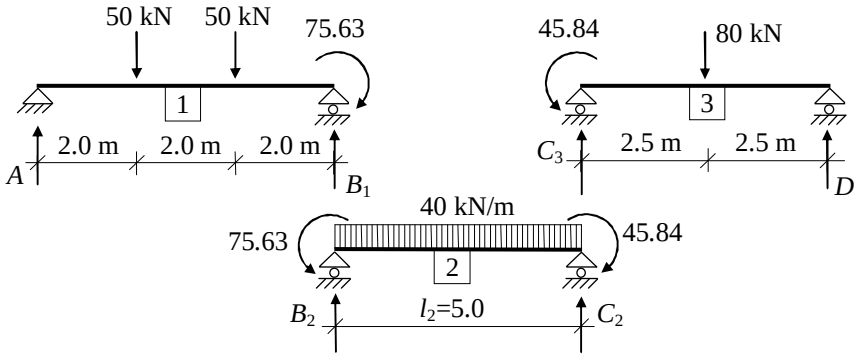
B		C	
1	2	2	3
0.385	0.615	0.572	0.428
–38.87	+118.54	–48.12	+22.18
–30.67	–49.00	–24.50	
	+14.43	+28.85	+21.59
–5.55	–8.87	–4.44	
	+1.27	+2.54	+1.90
–0.49	–0.78	–0.39	
	+0.11	+0.22	+0.17
–0.04	–0.07		
–75.62	+75.63	–45.84	+45.84



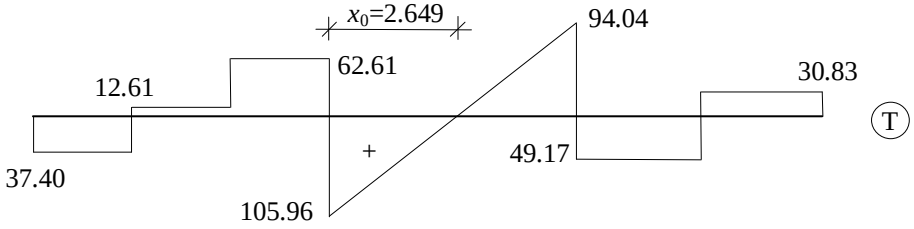
c)



d)



e)



7.5.2 ábra. Süllyedő alátámasztású négytámaszú tartó II.

A kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{B,1} = -\frac{1}{3}Fl + 3\frac{EI}{l_1^2}\Delta y = -\frac{1}{3}50\cdot 6 + 3\frac{2.934\cdot 10^4}{6^2}0.025 = -100 + 61.13 = -38.87\,\text{kNm}$$

$$M_{B,2} = \frac{ql^2}{12} + 6\frac{EI}{l_2^2}\Delta y = \frac{40\cdot 5^2}{12} + 6\frac{2.934\cdot 10^4}{5^2}(0.03 - 0.025) = 83.33 + 35.21 = 118.54\,\text{kNm}$$

$$M_{C,2} = -\frac{ql^2}{12} + 6\frac{EI}{l_2^2}\Delta y = -83.33 + 35.21 = -48.12\,\text{kNm}$$

$$M_{C,3} = \frac{3}{16}Fl - 3\frac{EI}{l_3^2}\Delta y = \frac{3}{16}80\cdot 5 - 3\frac{2.934\cdot 10^4}{5^2}(0.03 - 0.015) = 75 - 52.82 = 22.18\,\text{kNm}$$

A nyomatékosztás a 7.5.2/b, a nyomatéki ábra a 7.5.2/c ábrán látható.

A reakcióerők kiszámításához szükséges elemi tartók a 7.5.2/d ábrán találhatók. A reakcióerők ezek segítségével:

$$A = 50 - \frac{75.63}{6} = 37.4\,\text{kN}\ [\uparrow]; \quad B_1 = 50 + 12.6 = 62.6\,\text{kN}\ [\uparrow]$$

$$B_2 = \frac{5\cdot 40}{2} + \frac{75.63 - 45.84}{5} = 100 + 5.96 = 105.96\,\text{kN}\ [\uparrow];\ C_2 = 100 - 5.96 = 94.04\,\text{kN}\ [\uparrow]$$

$$C_3 = \frac{80}{2} + \frac{45.84}{5} = 40 + 9.17 = 49.17\,\text{kN}\ [\uparrow]; \quad D = 40 - 9.17 = 30.83\,\text{kN}\ [\uparrow]$$

A nyíróerő-ábrát a 7.5.2/e ábra tartalmazza.

A nyomatéki maximum helye a 2. tartón:

$$105.96 - 40x_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_0 = 2.649\ \text{m}$$

Most már meghatározhatók a mezőnyomatékok:

$$M_1' = 37.4\cdot 2 = 74.8\,\text{kNm}$$

$$M_1'' = 37.4\cdot 4 - 50\cdot 2 = 49.6\,\text{kNm}$$

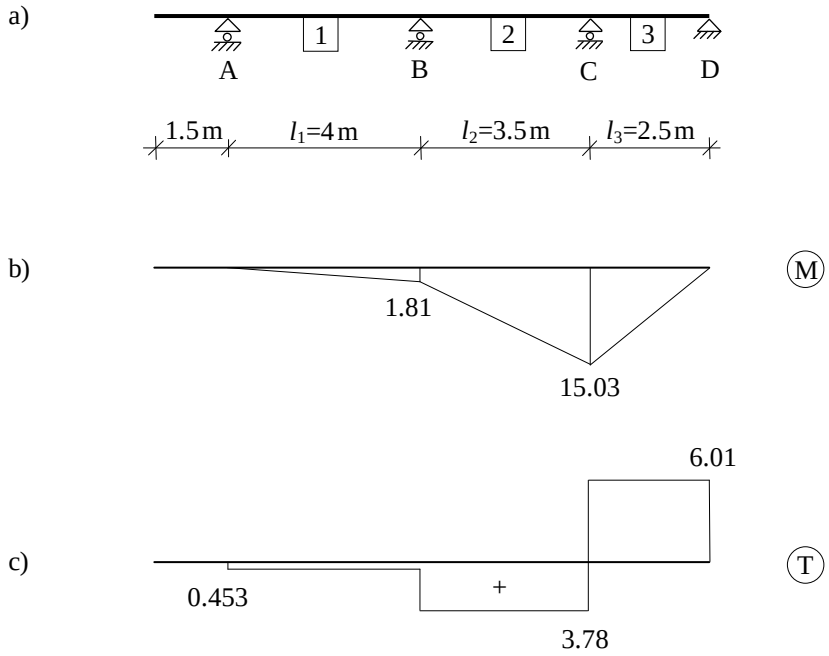
$$M_2 = -75.63 + 105.96\cdot 2.649 - 40\cdot\frac{2.649^2}{2} = 64.71\,\text{kNm}$$

$$M_3 = -(-30.83\cdot 2.5) = 77.08\,\text{kNm}$$

A következőkben a további gyakorláshoz megadjuk két feladat adatait és a végeredményeket.

7.5.3 Süllyedő alátámasztású négytámaszú konzolos tartó (7.5.3 ábra)

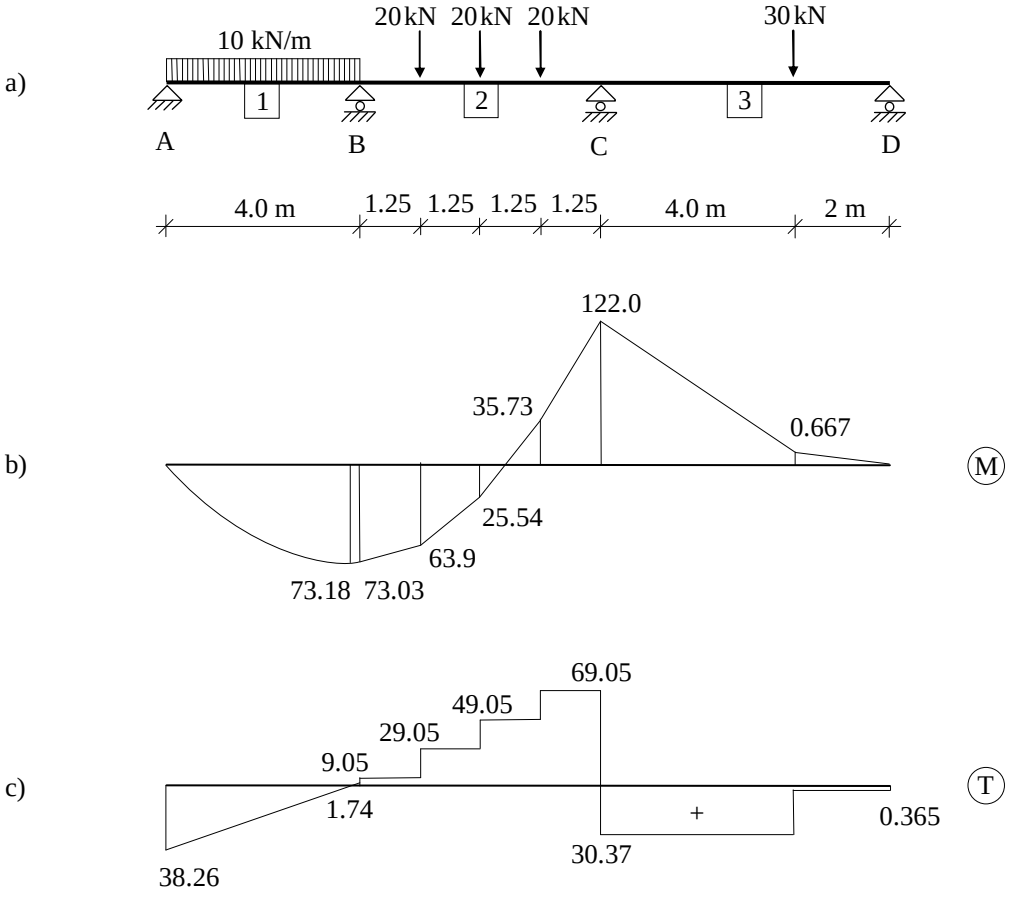
A 7.5.3/a ábrán vázolt tartó merevségi adatai a következők: $I_1 = 22 \cdot 10^8$ mm^4, $I_2 = 18 \cdot 10^8$ mm^4, $I_3 = 10 \cdot 10^8$ mm^4 és $E = 2 \cdot 10^4$ N/mm^2. A süllyedések $y_A = 30$ mm, $y_B = 20$ mm és $y_C = 10$ mm. Az igénybevételi ábrákat a 7.5.3/b és 7.5.3/c ábrán adjuk meg.



7.5.3 ábra. Süllyedő alátámasztású négytámaszú konzolos tartó.

7.5.4 Süllyedő alátámasztású négytámaszú tartó (7.5.4 ábra)

Feladatunk a 7.5.4/a ábrán vázolt I-300-as acél anyagú tartó igénybevételi ábráinak meghatározása. Az ábrán adott terhelésen kívül a tartó négy támasza süllyed. A süllyedés mértéke: y_A = 20 mm, y_B = 40 mm, y_C = 10 mm és y_D = 50 mm. Az igénybevételi ábrák a 7.5.4/b és 7.5.4/c ábrán találhatók.



7.5.4 ábra. Süllyedő alátámasztású négytámaszú tartó.

7.6 Elmozduló csomópontú keretek

7.6.1 Keret süllyedő támasszal

Határozzuk meg a 7.6.1/a ábrán vázolt keret igénybevételi ábráit. A rudak merevsége $EI = 4 \cdot 10^4$ kNm^2 állandó. A D támasz süllyedése $y_D = 20$ mm.

Első lépésben a keretet képzeletben vízszintesen megtámasztottnak tekintjük (→ fix-keret) és ennek a fix keretnek állítjuk elő a nyomatéki ábráját.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{1}{3} = 0.333, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{4} = 0.25, \qquad k_3 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{4}\frac{1}{4} = 0.188$$

$$k_4 = \frac{I_4}{l_4} = \frac{1}{4.5} = 0.222, \qquad k_5 = \frac{3}{4}\frac{I_5}{l_5} = \frac{3}{4}\frac{1}{3} = 0.25$$

Összmerevségek:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_2 = 0.333 + 0.25 = 0.583$$

$$\sum_{i=2}^{4} k_{C,i} = k_2 + k_3 + k_4 = 0.25 + 0.188 + 0.222 = 0.66$$

$$\sum_{i=4}^{5} k_{E,i} = k_4 + k_5 = 0.222 + 0.25 = 0.472$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B,1} = \frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.333}{0.583} = 0.571, \qquad \alpha_{B,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.25}{0.583} = 0.429$$

$$\alpha_{B,1} + \alpha_{B,2} = 0.571 + 0.429 = 1.0$$

$$\alpha_{C,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.25}{0.66} = 0.379, \qquad \alpha_{C,3} = \frac{k_3}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.188}{0.66} = 0.285$$

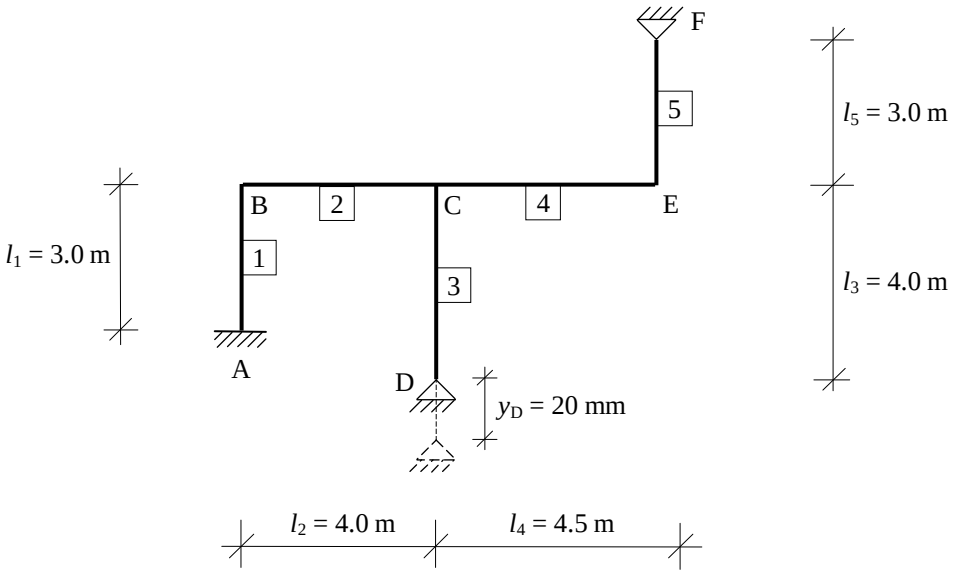
$$\alpha_{C,4} = \frac{k_4}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.222}{0.66} = 0.336$$

$$\alpha_{C,2} + \alpha_{C,3} + \alpha_{C,4} = 0.379 + 0.285 + 0.336 = 1.0$$

$$\alpha_{E,4} = \frac{k_4}{\Sigma k_{E,i}} = \frac{0.222}{0.472} = 0.47, \qquad \alpha_{E,5} = \frac{k_2}{\Sigma k_{E,i}} = \frac{0.25}{0.472} = 0.53$$

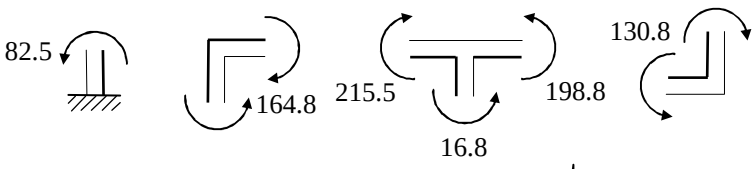
$$\alpha_{E,4} + \alpha_{E,5} = 0.47 + 0.53 = 1.0$$

a) keret

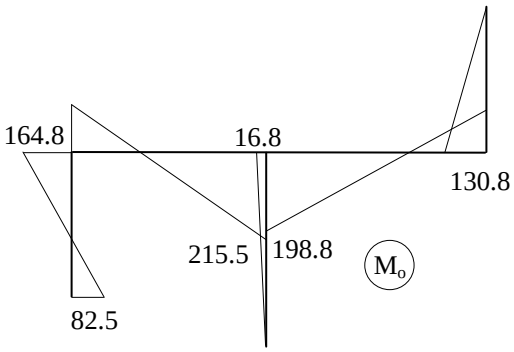


b) nyomatékosztás

A	B		C			E	
1	1	2	2	3	4	4	5
–	0.571	0.429	0.379	0.285	0.336	0.47	0.53
		+300.0	+300.0		–237.0	–237.0	
–85.7	–171.3	–128.7	–64.4				
			+0.5	+0.4	+0.5	+0.2	
					+55.6	+111.3	+125.5
		–10.5	–21.1	–15.8	–18.7	–9.3	
+3.0	+6.0	+4.5	+2.2		+2.2	+4.4	+4.9
		–0.9	–1.7	–1.2	–1.5	–0.8	
+0.2	+0.5	+0.4	+0.2		+0.2	+0.4	+0.4
			–0.2	–0.1	–0.1		
–82.5	–164.8	+164.8	+215.5	–16.8	–198.8	–130.8	+130.8



c) M_o ábra



7.6.1 ábra. Süllyedő alátámasztású keret M_o ábrával.

Kezdeti befogási nyomaték csak a *D* támasz süllyedéséből keletkezik:

$$M_{B,2} = M_{C,2} = 6\frac{EI}{l_2^2}\Delta y = 6\frac{4\cdot 10^4}{4^2}(0.02-0.0) = 300\,\text{kNm}$$

$$M_{C,4} = M_{E,4} = -6\frac{EI}{l_4^2}\Delta y = -6\frac{4\cdot 10^4}{4.5^2}(0.02-0.0) = -237\,\text{kNm}$$

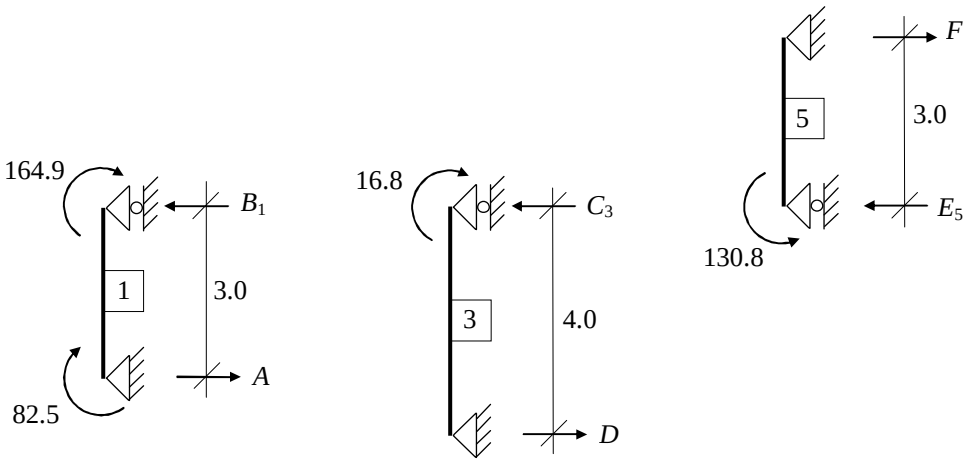
A nyomatékosztás a 7.6.1/b, a fix csomópontú keret nyomatéki ábrája (M_o) a 7.6.1/c ábrán látható.

Második lépésként megnézzük, hogy a vízszintes rúd képzelt megtámasztására mekkora erő hat. Mivel a támasz csak képzeletben létezik, a valóságban ez az erő eltolja a keretet, és ebből az eltolódásból is származnak nyomatékok. A képzelt támaszban keletkező „megtámasztó” erő számítása az 1., 3. és 5. oszlop 2-4 gerendaszinten keletkező reakcióerőinek segítségével történik (7.6.2 ábra):

$$B_1 = \frac{164.8+82.5}{3} = 82.43\,\text{kN}\ [\leftarrow]$$

$$C_3 = \frac{16.8}{4} = 4.20\,\text{kN}\ [\leftarrow]$$

$$E_5 = \frac{130.8}{3} = 43.6\,\text{kN}\ [\leftarrow]$$

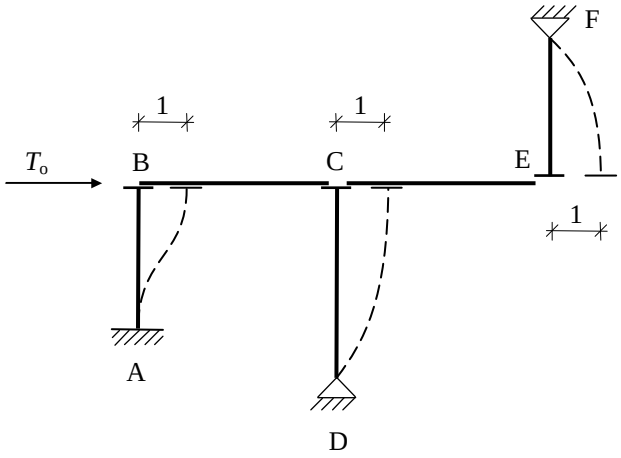


7.6.2 ábra. „Megtámasztó” erő számítása a gerendaszinten.

A keretet kilendítő erő (7.6.3/a ábra) a reakcióerők ellentettje:

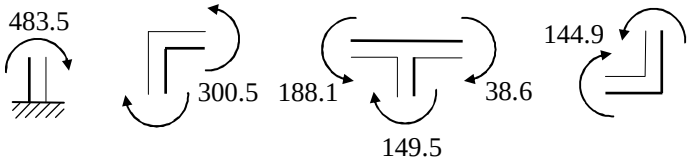
$$T_0 = -(B_1 + C_3 + E_5) = -(-82.43 - 4.2 - 43.6) = 130.23\,\text{kN}\ [\rightarrow]$$

a) kilendítés

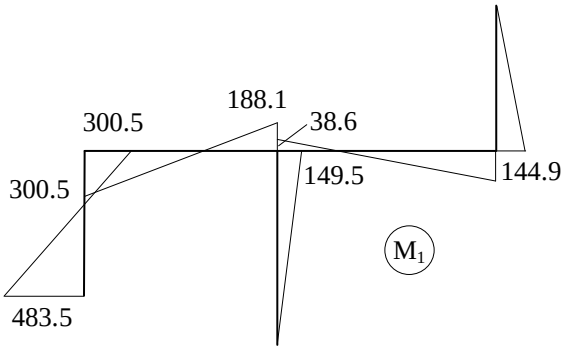


b) nyomatékosztás

A	B		C			E	
1	1	2	2	3	4	4	5
–	0.571	0.429	0.379	0.285	0.336	0.47	0.53
+666.7	+666.7			+187.5			–333.3
–190.4	–380.7	–286.0	–143.0		+78.3	+156.7	+176.6
		–23.3	–46.5	–35.0	–41.3	–20.6	
+6.7	+13.3	+10.0	+5.0		+4.8	+9.7	+10.9
		–1.9	–3.7	–2.8	–3.3	–1.6	
+0.5	+1.1	+0.8	+0.4		+0.4	+0.8	+0.8
		–0.1	–0.3	–0.2	–0.3	–0.2	
	+0.1					+0.1	+0.1
+483.5	+300.5	–300.5	–188.1	+149.5	+38.6	+144.9	–144.9



c) M_1 ábra



7.6.3 ábra. A kilendülés hatása.

Mivel nem tudjuk hogy ez az erő a keretet mennyire lendíti ki, a keretet egységgel lendítjük ki. Az egységnyi kilendüléshez tartozó kezdeti befogási nyomatékokat *EI* = konstans esetben általában *EI* = 1 merevséggel határozzuk meg, de ha így túl kis

(vagy túl nagy) számok jönnének ki, akkor a könnyebb kezelhetőség érdekében 10-, 100- vagy akár 1000-szeres (illetve 0.1-, 0.01- vagy 0.001-szeres) merevséggel is dolgozhatunk. Számítsuk most ki a kezdeti befogási nyomatékokat EI = 1000 merevség értékkel:

$$M_{A,1} = M_{B,1} = 6\frac{EI}{l_1^2}\Delta y = 6\frac{1000}{3^2}1 = 666.7\,\text{kNm}$$

$$M_{C,3} = 3\frac{EI}{l_3^2}\Delta y = 3\frac{1000}{4^2}1 = 187.5\,\text{kNm}$$

$$M_{E,5} = -3\frac{EI}{l_5^2}\Delta y = -3\frac{1000}{3^2}1 = -333.3\,\text{kNm}$$

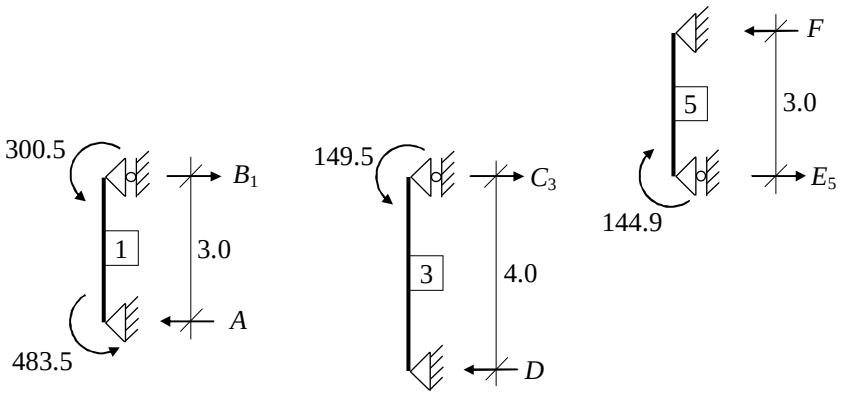
A kilendítéshez tartozó nyomatékok meghatározása a 7.6.3/b ábrán található, az M_1 nyomatékábrát pedig a 7.6.3/c ábrán adjuk meg.

A következőkben megnézzük, hogy az egységnyi kilendülésből mekkora „visszatérítő” erő keletkezik. Ez az 1., 3. és 5. oszlop 2-4 gerendaszinten keletkező reakcióerőinek segítségével történik (7.6.4 ábra):

$$B_1 = \frac{483.5 + 300.5}{3} = 261.33\,\text{kN}\ [\rightarrow]$$

$$C_3 = \frac{149.5}{4} = 37.38\,\text{kN}\ [\rightarrow]$$

$$E_5 = \frac{144.9}{3} = 48.30\,\text{kN}\ [\rightarrow]$$



7.6.4 ábra. „Visszatérítő” erő számítása a gerendaszinten.

A visszatérítő erő a reakcióerők összegének ellentettje:

$$T_1 = -(B_1 + C_3 + E_5) = -(261.33 + 37.38 + 48.30) = -347.01\text{kN}\ [\leftarrow]$$

A gerendaszintre vonatkozó és a vízszintes erők egyensúlyát kifejező vetületi egyenlet segítségével meghatározzuk, hogy mennyivel kellett volna a keretet kilendíteni:

$$T_0 + T_1 x_1 = 130.23 - 347.01 x_1 = 0$$

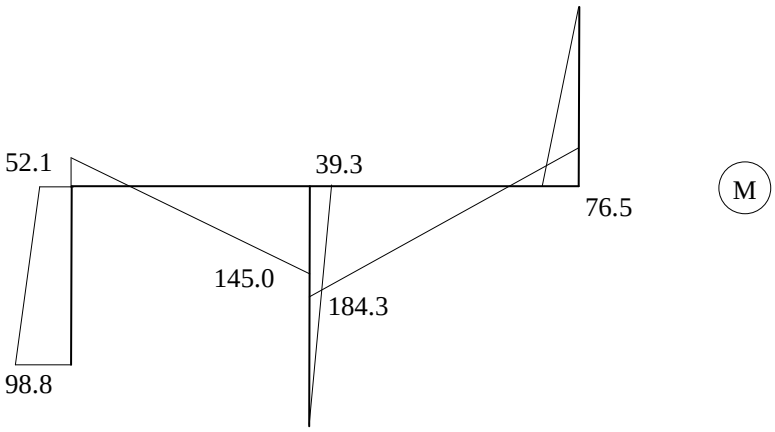
Innen

$$x_1 = 0.375$$

A végleges nyomatékábrát az

$$M = M_0 + M_1 x_1$$

összefüggés segítségével állítjuk elő (7.6.5 ábra).



7.6.5 ábra. A keret nyomatékábrája.

A nyomatékábra jellemző értékei:

$$M_A = 82.5 - 483.5 \cdot 0.375 = -98.8\,\text{kNm}$$

$$M_{B,1} = -164.8 + 300.5 \cdot 0.375 = -52.1\,\text{kNm}$$

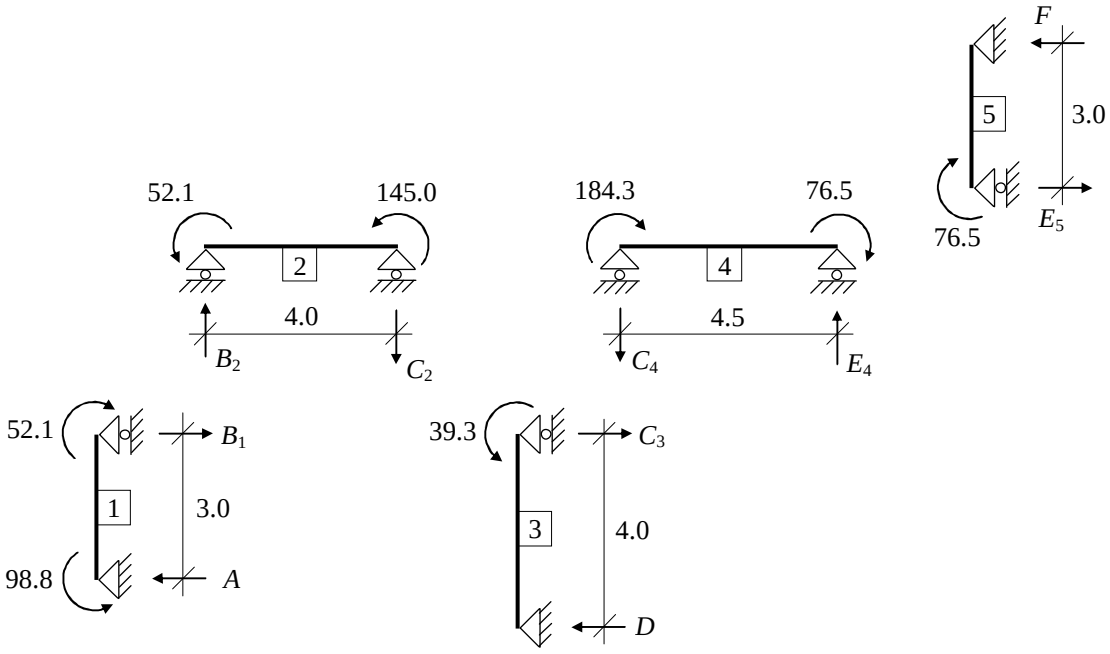
$$M_{C,2} = 215.5 - 188.1 \cdot 0.375 = 145.0\,\text{kNm}$$

$$M_{C3} = -16.8 + 149.5 \cdot 0.375 = 39.3\,\text{kNm}$$

$$M_{C,4} = -198.8 + 38.6 \cdot 0.375 = -184.3\,\text{kNm}$$

$$M_{E,4} = -130.8 + 144.9 \cdot 0.375 = -76.5\,\text{kNm}$$

A nyomatékok ismeretében előállíthatók az elemi tartók (7.6.6 ábra).



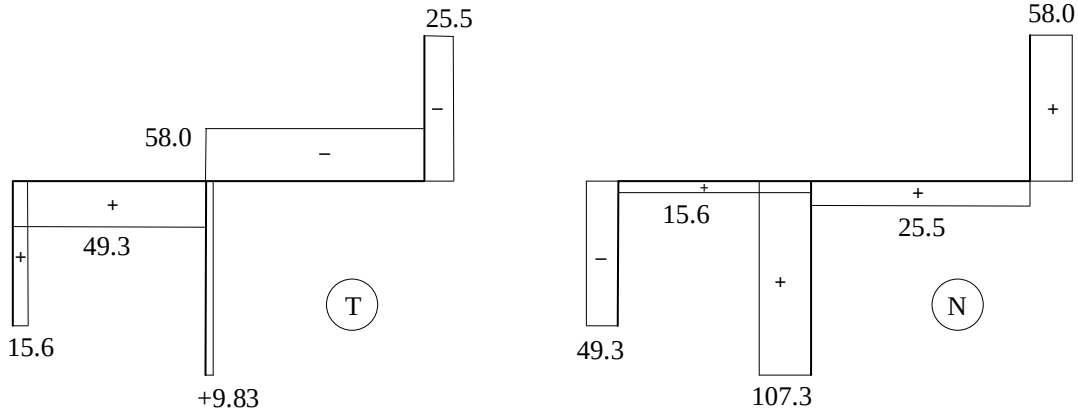
7.6.6 ábra. Elemi tartók.

Az elemi tartók segítségével meghatározhatók a (7.6.6 ábrán látható irányú) reakcióerők:

$$A = B_1 = \frac{98.8 - 52.1}{3} = 15.6\,\text{kN}, \qquad C_3 = D = \frac{39.3}{4} = 9.83\,\text{kN}, \qquad E_5 = F = \frac{76.5}{3} = 25.5\,\text{kN}$$

$$B_2 = C_2 = \frac{52.1 + 145.0}{4} = 49.3\,\text{kN}, \qquad C_4 = E_4 = \frac{184.3 + 76.5}{4.5} = 58.0\,\text{kN}$$

A keret nyíróerő- és normálerő-ábráját a 7.6.7 ábrán találjuk.

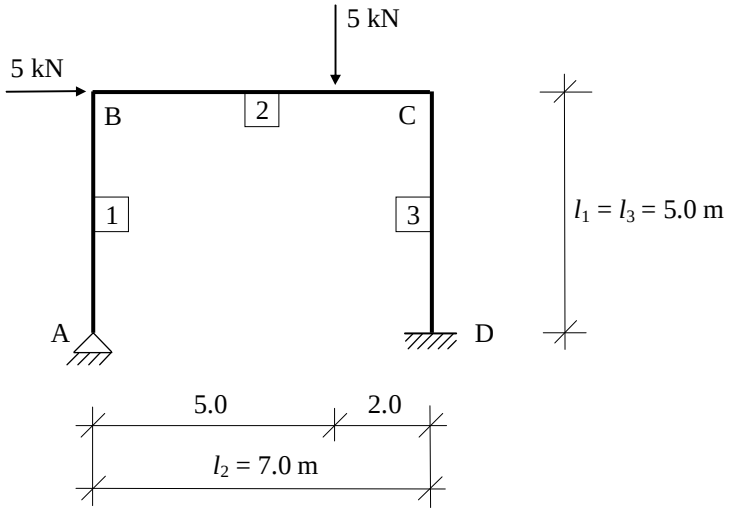


7.6.7 ábra. Nyíróerő- és normálerő-ábra.

7.6.2 Kilendülő keret

Határozzuk meg a 7.6.8 ábrán vázolt kilendülő keret igénybevételi ábráit.

A keret merevségi adatai a következők: $I_1 = 1$ m^4, $I_2 = 3$ m^4, $I_3 = 2$ m^4 és E = állandó.



7.6.8 ábra. Kilendülő keret.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{5} = 0.15\,, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{3}{7} = 0.429\,, \qquad k_3 = \frac{I_3}{l_3} = \frac{2}{5} = 0.40$$

Összmerevségek:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_2 = 0.15 + 0.429 = 0.579\,, \qquad \sum_{i=2}^{3} k_{C,i} = k_2 + k_3 = 0.429 + 0.40 = 0.829$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B,1} = \frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.15}{0.579} = 0.259\,, \qquad \alpha_{B,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.429}{0.579} = 0.741$$

$$\alpha_{B,1} + \alpha_{B,2} = 0.259 + 0.741 = 1.0$$

$$\alpha_{C,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.429}{0.829} = 0.517\,, \qquad \alpha_{C,3} = \frac{k_3}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{0.40}{0.829} = 0.483$$

$$\alpha_{C,2} + \alpha_{C,3} = 0.517 + 0.483 = 1.0$$

A kezdeti befogási nyomatékok:

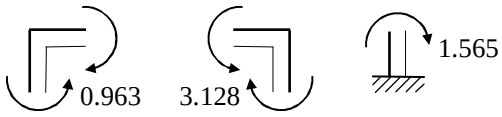
$$M_{B,2} = \frac{Fab^2}{l^2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 2^2}{7^2} = 2.041 \text{kNm}$$

$$M_{C,2} = -\frac{Fa^2 b}{l^2} = -\frac{5 \cdot 5^2 \cdot 2}{7^2} = -5.102 \,\text{kNm}$$

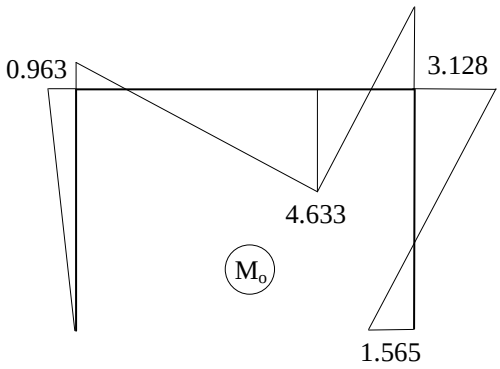
A fix csomópontú keret nyomatékosztását a 7.6.9/a ábrán részletezzük.

a) nyomatékosztás

B		C		D
1	2	2	3	3
0.259	0.741	0.517	0.483	–
	+2.041	–5.102		
	+1.319	+2.638	+2.464	+1.232
–0.870	–2.490	–1.245		
	+0.322	+0.644	+0.601	+0.301
–0.083	–0.238	–0.119		
	+0.031	+0.062	+0.058	+0.029
–0.008	–0.023	–0.011		
	+0.003	+0.006	+0.005	+0.003
–0.001	–0.002			
–0.962	+0.963	–3.127	+3.128	+1.565



b) M_o-ábra



7.6.9 ábra. A fix csomópontú keret megoldása.

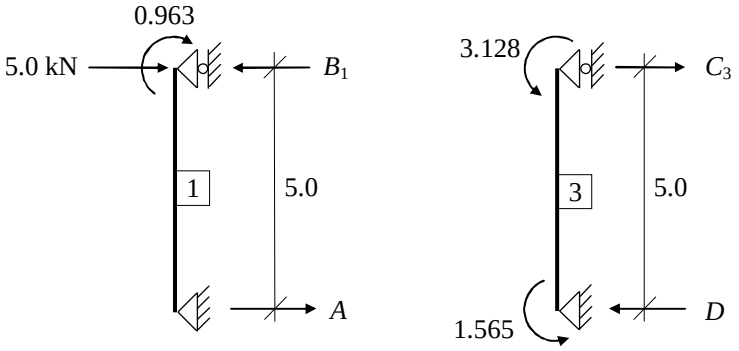
A fix csomópontú keret M_o nyomatékábrája a 7.6.9/b ábrán található. A vízszintes eltolóerő számítása az 1. és 3. jelű oszlop 7.6.10 ábrán látható elemi tartóinak segítségével történik. A reakcióerők értéke a gerenda-szinten:

$$B_1 = 5 + \frac{0.963}{5} = 5.193 \,\text{kN} \quad [\leftarrow]$$

$$C_3 = \frac{3.128 + 1.565}{5} = 0.939\,\text{kN} \;\; [\rightarrow]$$

A keretet kilendítő erő a reakcióerők ellentettje (7.6.10 ábra):

$$T_0 = -(B_1 + C_3) = -(-5.193 + 0.939) = 4.254\,\text{kN} \;\; [\rightarrow]$$



7.6.10 ábra. Elemi tartók a kilendítő erő meghatározásához.

Mivel nem tudjuk, hogy a T_o erő a keretet mennyire lendíti ki, a keretet egységgel lendítjük ki (7.6.11/a ábra). Az egységnyi kilendüléshez tartozó kezdeti befogási nyomatékok (E = 100 kN/m^2 rugalmassági tényezővel számolva) a következők:

$$M_{B,1} = 3\frac{EI}{l_1^2}\Delta y = 3\frac{100}{5^2}1 = 12.0\,\text{kNm}$$

$$M_{C,3} = M_D = 6\frac{EI}{l_3^2}\Delta y = 6\frac{200}{5^2}1 = 48.0\,\text{kNm}$$

Az egységnyi kilendítéshez tartozó M_1 nyomatékábra (7.6.11/c ábra) értékeinek meghatározása a 7.6.11/b táblázatban található. A vízszintes megtámasztó erő számítása az 1. és 3. j. oszlop 7.6.11/d ábrán látható elemi tartóinak reakcióerői segítségével történik:

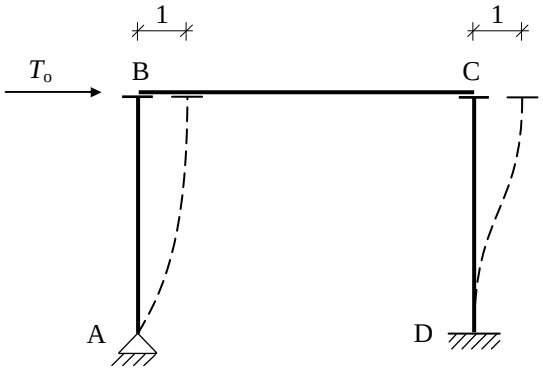
$$B_1 = \frac{12.1}{5} = 2.42\,\text{kN}\;[\rightarrow]$$

$$C_3 = \frac{24.7 + 36.4}{5} = 12.22\,\text{kN}\;[\rightarrow]$$

A keretet megtámasztó erő a reakcióerők (7.6.11/d ábra) ellentettje:

$$T_1 = -(B_1 + C_3) = -(2.42 + 12.22) = -14.64\,\text{kN}\;[\leftarrow]$$

a)

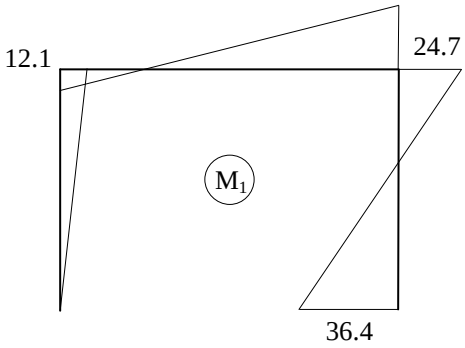


b)

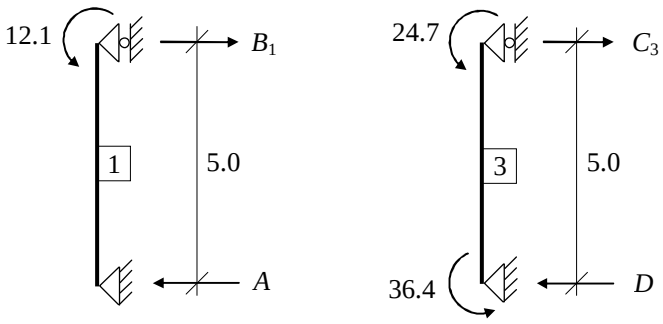
B		C		D
1	2	2	3	3
0.259	0.741	0.517	0.483	–
+12.0			+48.0	+48.0
–3.1	–8.9	–4.4		
	–11.3	–22.5	–21.0	–10.5
+2.9	+ 8.4	+4.2		
	–1.1	–2.2	–2.0	–1.0
+0.3	+0.8	+0.4		
		–0.2	–0.2	–0.1
+12.1	–12.1	–24.7	+24.7	+36.4



c)



d)



7.6.11 ábra. Keret egységnyi kilendüléssel.

A gerendaszintre vonatkozó és a vízszintes erők egyensúlyát kifejező vetületi egyenlet segítségével meghatározzuk, hogy mennyivel kellett volna a keretet kilendíteni:

$$T_0 + T_1 x_1 = 4.254 - 14.64 x_1 = 0$$

Innen

$$x_1 = 0.291$$

A végleges nyomatékábrát az

$$M = M_0 + M_1 x_1$$

összefüggés segítségével állítjuk elő. A jellemző értékek rendre:

$$M_{B,1} = -0.963 + 12.1 \cdot 0.291 = 2.56\,\text{kNm}$$

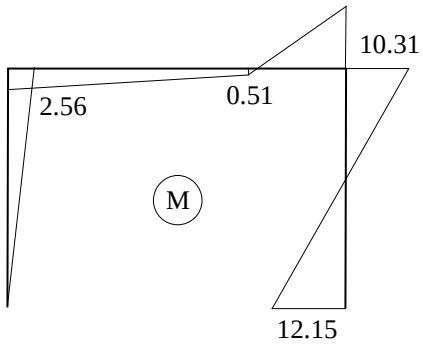
$$M_{B,2} = 0.963 - 12.1 \cdot 0.291 = -2.56\,\text{kNm}$$

$$M_{C,2} = -3.128 - 24.7 \cdot 0.291 = -10.31\,\text{kNm}$$

$$M_{C,3} = 3.128 + 24.7 \cdot 0.291 = 10.31\,\text{kNm}$$

$$M_{D,3} = 1.565 + 36.4 \cdot 0.291 = 12.15\,\text{kNm}$$

A keret nyomatékábráját a 7.6.12 ábrán tüntetjük fel.



7.6.12 ábra. A keret nyomatékábrája.

A nyomatékok ismeretében előállíthatók az elemi tartók (7.6.13 ábra). Az elemi tartók segítségével kiszámíthatók a reakcióerők:

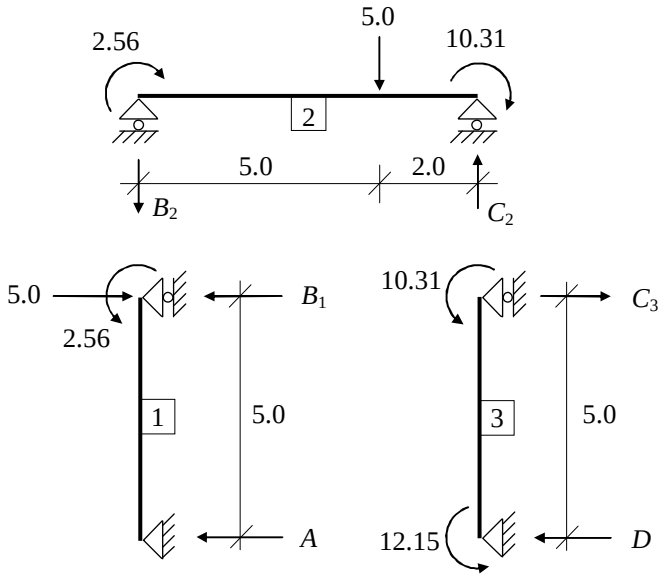
$$A = \frac{2.56}{5} = 0.51\,\text{kN}\ [\leftarrow], \qquad B_1 = 5 - \frac{2.56}{5} = 4.49\ \text{kN}\ [\leftarrow]$$

$$B_2 = \frac{2.56 + 10.31 - 5 \cdot 2}{7} = 0.41\,\text{kN}\ [\downarrow], \qquad C_2 = \frac{2.56 + 10.31 + 5 \cdot 5}{7} = 5.41\ \text{kN}\ [\uparrow]$$

$$C_3 = \frac{10.31 + 12.15}{5} = 4.49\ \text{kN}\ [\rightarrow], \qquad D = \frac{10.31 + 12.15}{5} = 4.49\ \text{kN}\ [\leftarrow]$$

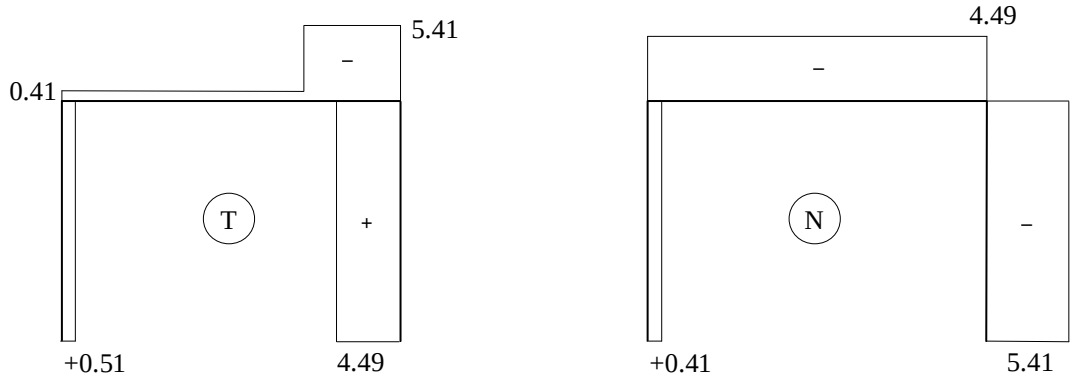
A nyomaték értéke a 2. tartón a koncentrált erő alatt:

$$M_2 = 2.56 - 0.41 \cdot 5 = 0.51\,\text{kNm}$$



7.6.13 ábra. Elemi tartók.

A reakcióerők segítségével előállítható a keret nyíróerő- és normálerő-ábrája (7.6.14 ábra).

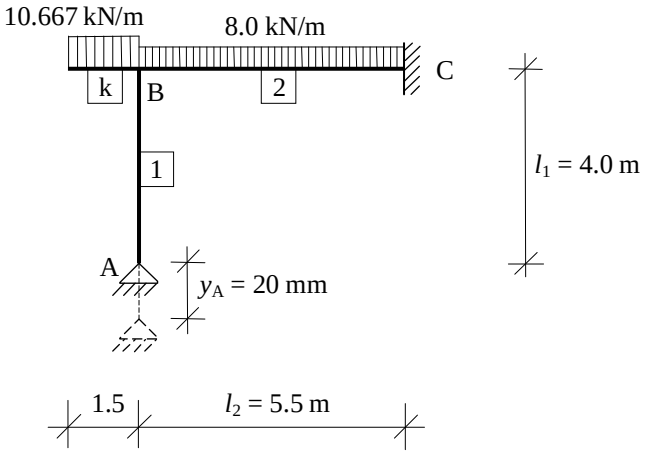


7.6.14 ábra. Nyíróerő- és normálerő-ábra.

7.6.3 Süllyedő alátámasztású rúdcsillag

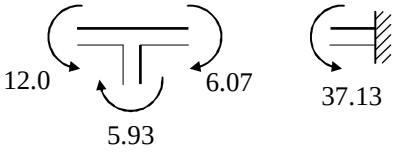
A 7.6.15/a ábrán vázolt rúdcsillag *A* támasza y_A = 20 mm-t süllyed. Feladatunk a tartó igénybevételi ábráinak előállítása. A tartó merevsége $EI = 5 \cdot 10^3$ kNm^2.

a)

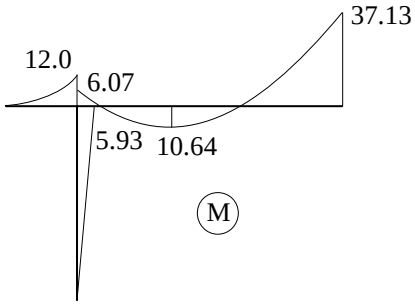


b)

	B		C
k	1	2	2
0.0	0.508	0.492	–
–12.00		+0.33	–40.00
	+5.93	+5.74	+2.87
–12.00	+5.93	+6.07	–37.13



c)



7.6.15 ábra. Rúdcsillag süllyedő támasszal.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{4} = 0.188, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{5.5} = 0.182$$

Összmerevség:

$$\sum_{i=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_2 = 0.188 + 0.182 = 0.37$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B,1} = \frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.188}{0.37} = 0.508, \qquad \alpha_{B,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{0.182}{0.37} = 0.492$$

$$\alpha_{B,1} + \alpha_{B,2} = 0.508 + 0.492 = 1.0$$

A kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{B,k} = -10.667 \frac{1.5^2}{2} = -12.0\,\text{kNm}$$

$$M_{B,2} = \frac{8 \cdot 5.5^2}{12} - 6\frac{5 \cdot 10^3}{5.5^2} 0.02 = 20.167 - 19.835 = 0.332\,\text{kNm}$$

$$M_{C,2} = -\frac{8 \cdot 5.5^2}{12} - 6\frac{5 \cdot 10^3}{5.5^2} 0.02 = -20.167 - 19.835 = -40.00\,\text{kNm}$$

A nyomatékosztás a 7.6.15/b ábrán, a nyomatéki ábra a 7.6.15/c ábrán látható. Az elemi tartók (7.6.16/a ábra) segítségével meghatározhatók a reakcióerők:

$$A_1 = \frac{5.93}{4} = 1.482\,\text{kN}\,[\leftarrow], \qquad B_1 = \frac{5.93}{4} = 1.482\,\text{kN}\,[\rightarrow]$$

$$B_2 = \frac{8 \cdot 5.5}{2} - \frac{37.13 - 6.07}{5.5} = 22 - 5.65 = 16.35\,\text{kN}\,[\uparrow], \qquad C_2 = 22 + 5.65 = 27.65\,\text{kN}\,[\uparrow]$$

$$B_k = 10.667 \cdot 1.5 = 16.0\,\text{kN}\,[\uparrow]$$

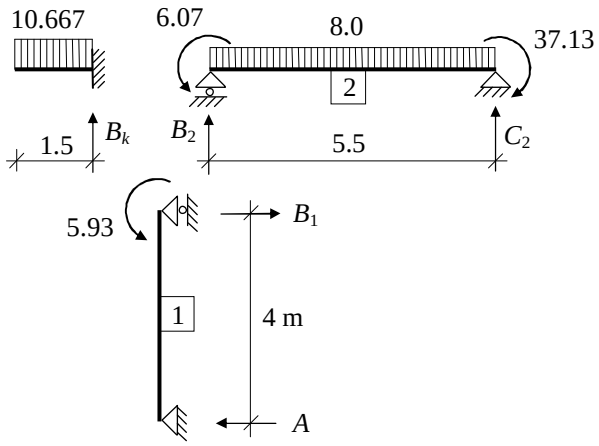
A reakcióerők ismeretében már előállítható a nyíróerő ábra (7.6.16/b ábra) és a normálerő ábra (7.6.16/c ábra). A 2. jelű gerenda esetében a nyíróerő zérus értékének helye:

$$x_0 = \frac{27.65}{8} = 3.456\,\text{m}$$

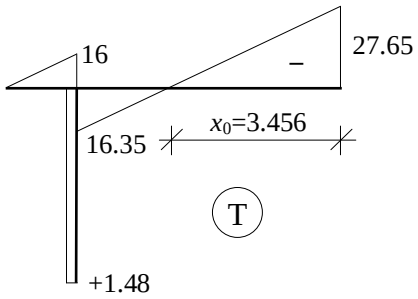
A mezőnyomatéki maximum értéke így

$$M_{\max} = -(37.13 - 27.65 \cdot 3.456 + 8\frac{3.456^2}{2}) = 10.64\,\text{kNm}$$

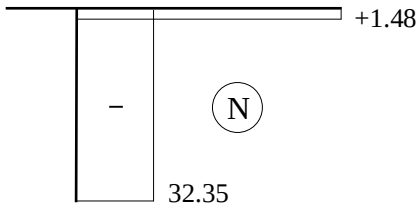
a) elemi tartók



b) T-ábra



c) N-ábra



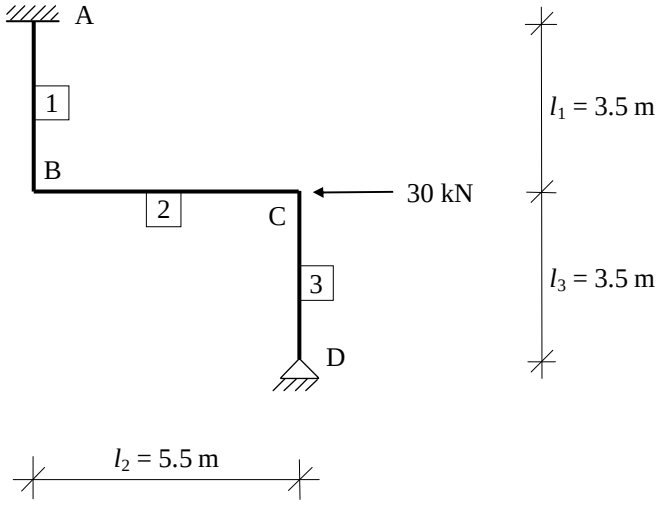
7.6.16 ábra. Rúdcsillag elemi tartói; T-ábra és N-ábra.

7.6.4 Kilendülő keret

Határozzuk meg a 7.6.17 ábrán vázolt kilendülő keret igénybevételi ábráit.
A keret merevségi adatai a következők: $I_1 = 7$ m^4, $I_2 = 5.5$ m^4, $I_3 = 14$ m^4 és $E = 1$ kN/m^2 állandó.

Merevségi számok:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{7}{3.5} = 2.0\,, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{5.5}{5.5} = 1.0\,, \qquad k_3 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{4}\frac{14}{3.5} = 3.0$$



7.6.17 ábra. Kilendülő keret.

Összmerevségek:

$$\sum_{k=1}^{2} k_{B,i} = k_1 + k_2 = 2.0 + 1.0 = 3.0\,, \qquad \sum_{i=2}^{3} k_{C,i} = k_2 + k_3 = 1.0 + 3.0 = 4.0$$

Nyomatékosztók:

$$\alpha_{B,1} = \frac{k_1}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{2.0}{3.0} = 0.667\,, \qquad \alpha_{B,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{B,i}} = \frac{1.0}{3.0} = 0.333$$

$$\alpha_{B,1} + \alpha_{B,2} = 0.667 + 0.333 = 1.0$$

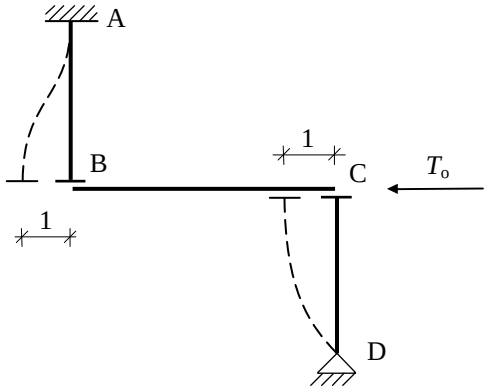
$$\alpha_{C,2} = \frac{k_2}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{1.0}{4.0} = 0.25\,, \qquad \alpha_{C,3} = \frac{k_3}{\Sigma k_{C,i}} = \frac{3.0}{4.0} = 0.75$$

$$\alpha_{C,2} + \alpha_{C,3} = 0.25 + 0.75 = 1.0$$

A külső terhek most a rudakat közvetlenül nem támadják és a kilendítő erő azonos a *C* csomópontnál ható külső teher értékével:

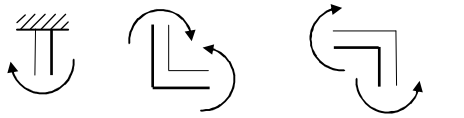
$$T_0 = 30 \text{ kN } [\leftarrow]$$

a) egységnyi kilendítés

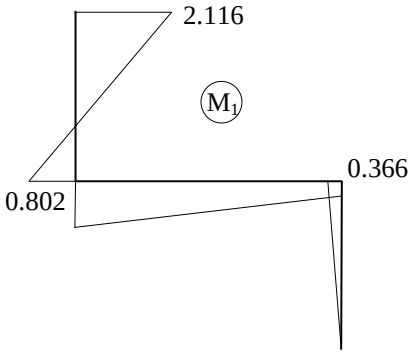


b) nyomatékosztás

A	B		C	
1	1	2	2	3
–	0.667	0.333	0.25	0.75
+3.429	+3.429			–3.429
–1.144	–2.287	–1.142	–0.571	
		+0.500	+1.000	+3.000
–0.166	–0.333	–0.167	–0.084	
		+0.010	+0.021	+0.062
–0.003	–0.007	–0.003	–0.001	
				+0.001
+2.116	+0.802	–0.802	+0.366	–0.366



c) M_1 ábra



7.6.18 ábra. Egységnyi kilendülés.

A balra történő egységnyi kilendítés (7.6.18/a ábra) a következő kezdeti befogási nyomatékokat okozza:

$$M_A = M_{B,1} = 6\frac{EI}{l_1^2}1 = 6\frac{7}{3.5^2}1 = 3.429\,\text{kNm}$$

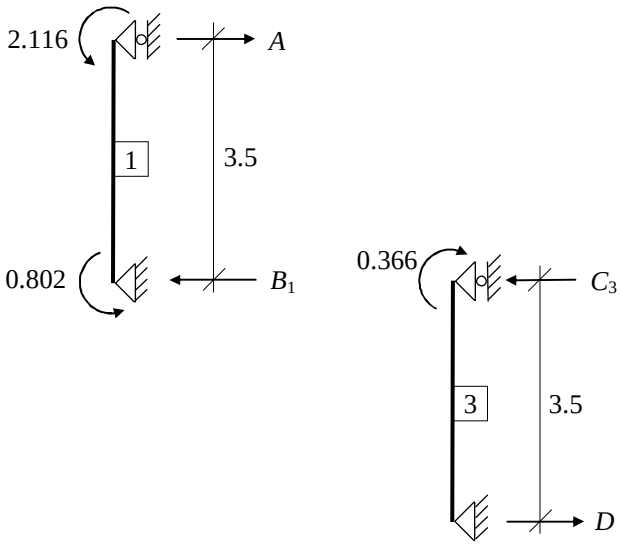
$$M_{C,3} = 3\frac{EI}{l_3^2}1 = -3\frac{14}{3.5^2}1 = -3.429\,\text{kNm}$$

Az egységnyi kilendítéshez tartozó M_1 nyomatékábra értékeinek meghatározása a 7.6.18/b ábrán található. Az M_1 nyomatékábra a 7.6.18/c ábrán látható.

A vízszintes megtámasztó erő számítása az 1. és 3. jelű oszlop 7.6.19 ábrán látható elemi tartóinak segítségével történik:

$$B_1 = \frac{2.116 + 0.802}{3.5} = 0.834\,\text{kN}\ [\leftarrow]$$

$$C_3 = \frac{0.366}{3.5} = 0.105\,\text{kN}\ [\leftarrow]$$



7.6.19 ábra. Vízszintes erők a megtámasztó erő számításához.

A keretet megtámasztó erő a reakcióerők (7.6.19 ábra) ellentettje:

$$T_1 = -(B_1 + C_3) = -(-0.834 - 0.105) = 0.939\,\text{kN}\ [\rightarrow]$$

A gerendaszintre vonatkozó és a vízszintes erők egyensúlyát kifejező vetületi egyenlet segítségével meghatározzuk, hogy mennyivel kellett volna a keretet kilendíteni:

$$T_0 + T_1 x_1 = 30 - 0.939 x_1 = 0$$

Innen

$$x_1 = 31.95$$

A végleges nyomatékábrát az

$$M = M_0 + M_1 x_1$$

összefüggés segítségével állíthatjuk elő, ahol az M_0 most zérus értékeket jelent. A nyomatékábra jellemző értékei így:

$$M_A = 2.116 \cdot 31.95 = 67.6\,\text{kNm}$$

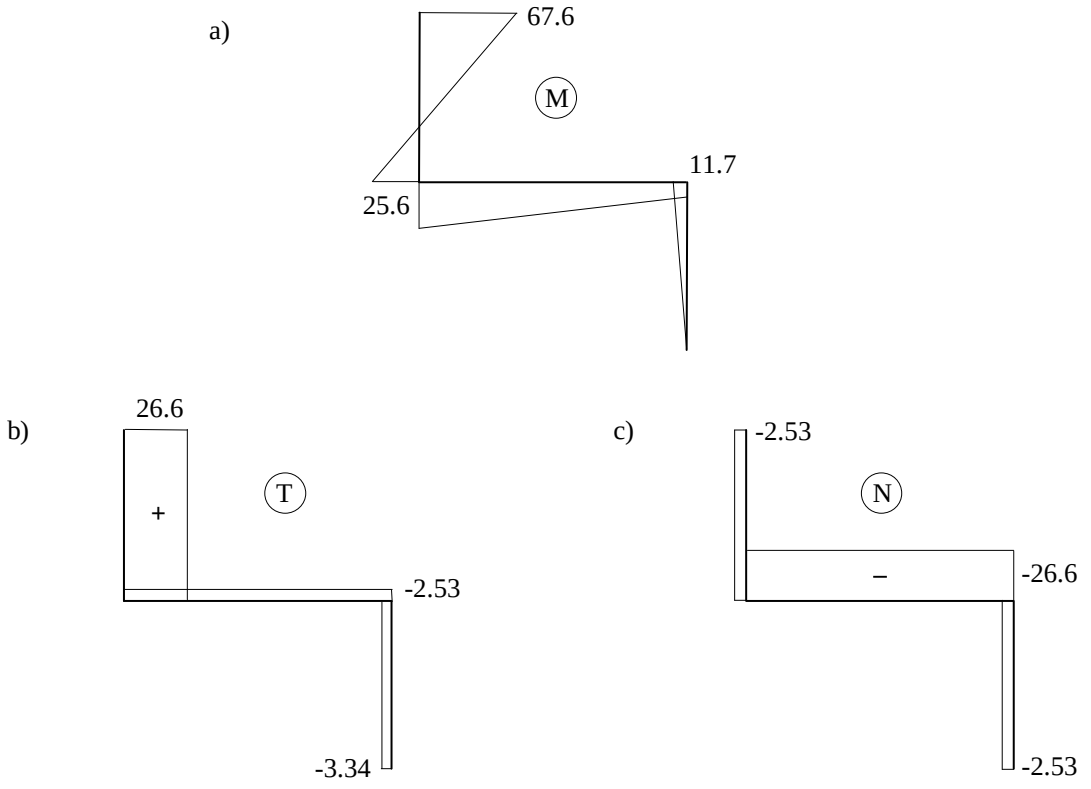
$$M_{B,1} = 0.802 \cdot 31.95 = 25.6\,\text{kNm}$$

$$M_{B,2} = (-0.802) \cdot 31.95 = -25.6\,\text{kNm}$$

$$M_{C,2} = 0.366 \cdot 31.95 = 11.7\,\text{kNm}$$

$$M_{C,3} = (-0.366) \cdot 31.95 = -11.7\,\text{kNm}$$

A kilendülő keret nyomatékábrája a 7.6.20/a ábrán látható. A nyíróerő- és normálerő-ábrát a 7.6.20/b és 7.6.20/c ábrán találjuk.



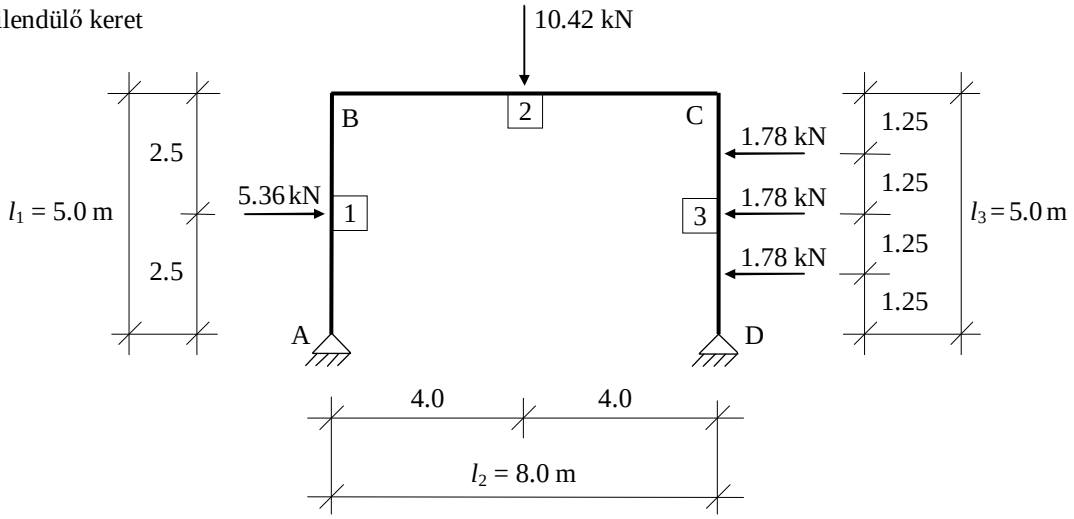
7.6.20 ábra. Kilendülő keret igénybevételi ábrái.

Végül megadjuk két gyakorló feladat adatait és megoldását.

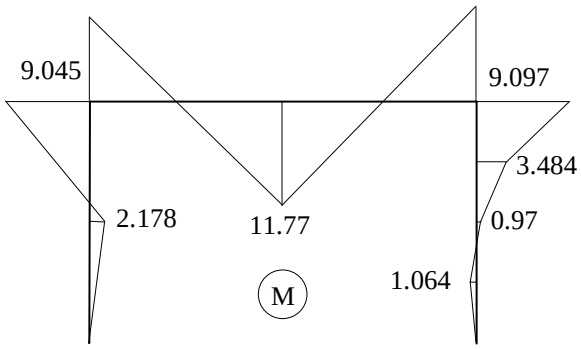
7.6.5 Kilendülő keret

Oldjuk meg a 7.4.1 példát úgy, hogy elvesszük a megtámasztó rudat (7.6.21/a ábra). A keret így kilendülő keretté válik. A keret merevségi adatai a következők: $I_1 = 1\ \text{m}^4$, $I_2 = 1\ \text{m}^4$, $I_3 = 2\ \text{m}^4$ és $E = 1\ \text{kN/m}^2$ állandó. Az igénybevételi ábrák a 7.6.21/b-c-d ábrán találhatók.

a) kilendülő keret

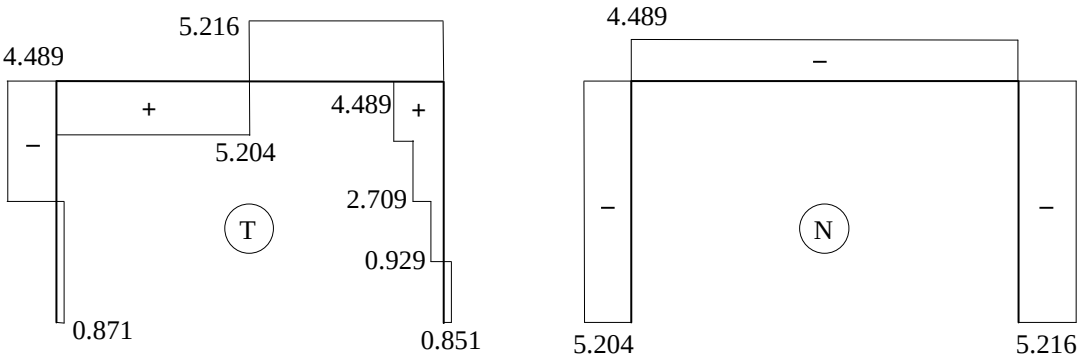


b) M-ábra



c) T-ábra

d) N-ábra

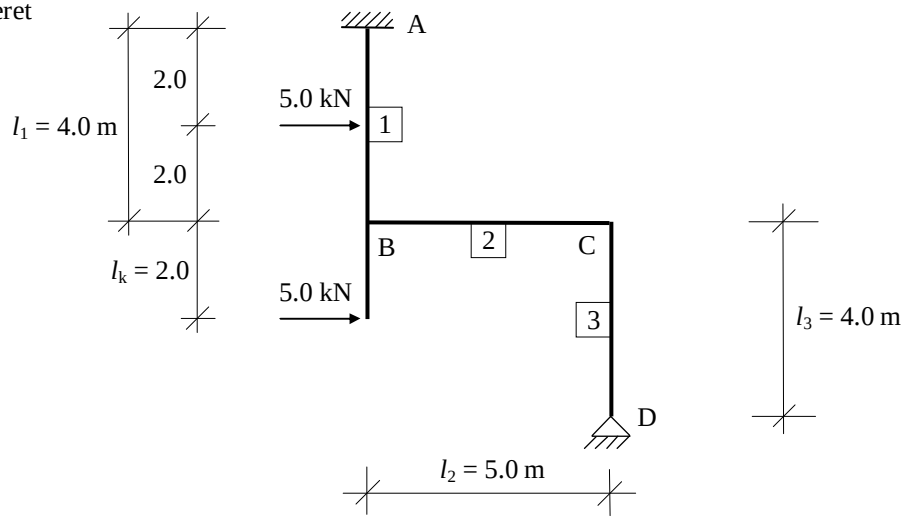


7.6.21 ábra. Kilendülő keret és igénybevételi ábrái.

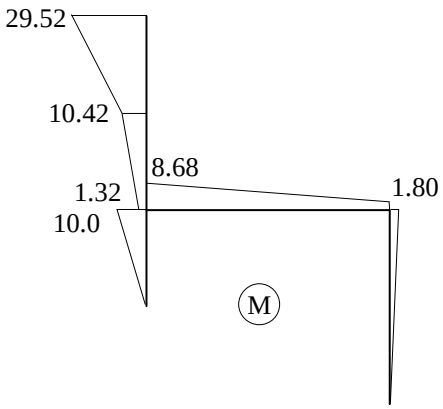
7.6.6 Kilendülő keret

Oldjuk meg a 7.4.2 példát úgy, hogy elvesszük a *C* csomóponttól a csuklós megtámasztást (7.6.22/a ábra). Az így kilendülő keretté váló szerkezet igénybevételi ábráit a 7.6.22/b-c-d ábrán adjuk meg. A tartó merevségi adatai a következők: $I_1 = 6.8\ \text{m}^4$, $I_2 = 2.1\ \text{m}^4$, $I_3 = 7.8\ \text{m}^4$ és $E = 1\ \text{kN/m}^2$ állandó.

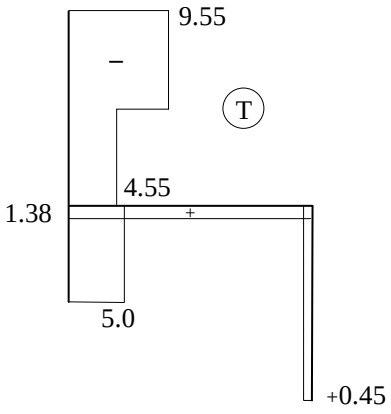
a) kilendülő keret



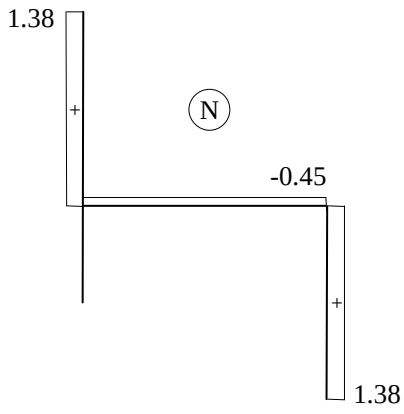
b) M-ábra



c) T-ábra



d) N-ábra



7.6.22 ábra. Kilendülő keret igénybevételi ábrái.

8

Alakhelyes igénybevételi ábrák szerkesztése

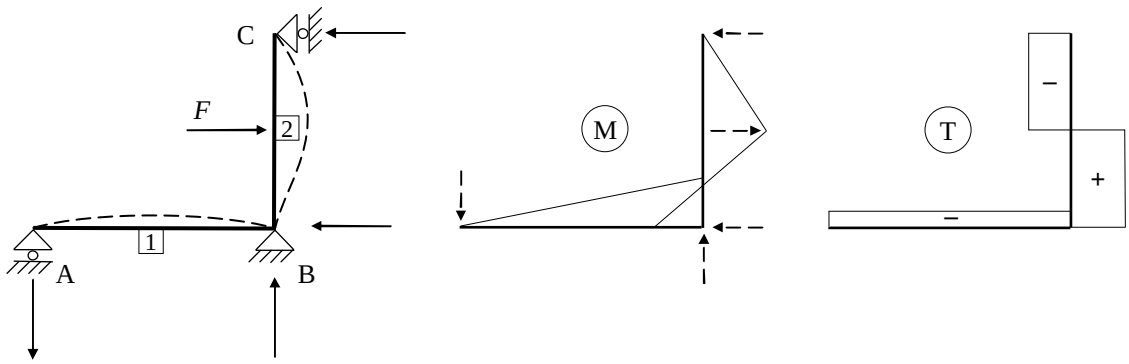
Tartószerkezetek vizsgálata során előfordul hogy a szerkezet erőjátéka megismerésének céljából – esetleg a rendelkezésre álló adatok hiányában – szükség van az igénybevételi ábrák alakjának előzetes megbecslésére. Az is gyakori – és fontos – eset, amikor egy bonyolultabb szerkezet „pontos”, számítógépes megoldását akarjuk ellenőrizni, például azért, mert az eredmény „gyanús” és esetleg téves adatbevitelre vagy más hibára gyanakszunk. Ilyen esetekben a szerkezet alakhelyes igénybevételi ábráinak megszerkesztéséhez több eszköz áll rendelkezésünkre. Ezeket rendszerint egymással kombinálva célszerű alkalmazni. Először felsoroljuk a rendelékezésre álló módszereket, majd néhány példán bemutatjuk az alakhelyes ábraszerkesztés néhány fontosabb fogását illetve az eljárás menetét. Minden esetre jellemző, hogy először az M-ábrát állítjuk elő, majd annak ismeretében készítjük el a T-ábrát és az N-ábrát.

1) Rugalmas vonal

Talán a legfontosabb rendelkezésünkre álló eszköz. Ha ismerjük – vagy meg tudjuk becsülni – a szerkezetnek a teher hatására kialakuló alakváltozását, akkor a nyomatékábra általában könnyen megrajzolható. Ehhez azt a fontos szabályt tartjuk szem előtt, hogy a nyomatékábra mindig a húzott oldalon kell hogy legyen. Az ábraszerkesztés folyamata alatt figyeljük a teher típusát, ami segít egyes ábraszakaszok pontosabb megrajzolásánál – például a koncentrált erő esetében olyan az M-ábra törése, hogy az erő nyila „passzol” az ábrába; az egyenletesen megoszló teher homorú másodfokú parabolába „simul”, stb. Törttengelyű tartók, rúdcsillagok és keretek esetében az is igen fontos szabály, hogy az eredetileg adott szögben (rendszerint 90 fokban) csatlakozó rudak egymással bezárt szöge az alakváltozás után ugyanannyi, mint amennyi az alakváltozás előtt volt!

Fentieket a 8.1/a ábrán vázolt törttengelyű tartó alakhelyes ábráinak megszerkesztésével mutatjuk be. Az egy vízszintes koncentrált erővel terhelt tartó esetében könnyen elképzelhetjük a tartó alakváltozását. Az erő minden bizonnyal úgy görbíti meg a 2. rudat, hogy a rúd középső szakasza az erő irányában, jobbra mozdul el. Mivel a támaszok a helyükön maradnak és a *B* támasznál csatlakozó 1. és 2. rúd által bezárt 90 fokos szög az alakváltozás után is 90 fok marad, automatikusan adódik az 1. rúd meggörbülése is (szaggatottan a 8.1/a ábrán). Mielőtt a nyomatékábrát felrajzoljuk a húzott oldalra, megállapítjuk a reakcióerők irányát, hogy a nyiluk segítséget nyújthasson az ábrarajzoláshoz. Az *F* erő hatására a *C* és B_x reakcióerők minden bizonnyal balra mutatnak. Az *A* reakcióerő biztosan lefelé mutat, hogy a felfelé görbülő 1. rúd bal végét „vissza kényszeríthesse” a támaszhoz. Ebből az következik, hogy (egy képzelt függőleges vetületi egyenletből) a B_y reakcióerő fölfelé mutat. A reakcióerők irányának ismeretében a nyomatékábra egyértelműen megrajzolható (8.1/b ábra). Az

ábrán szaggatottan feltüntettük a reakcióerőket is, amelyek nyila „belepasszol” az M-ábrába. Végül a reakcióerők ismeretében az alakhelyes T-ábra is egyértelműen előállítható (8.1/c ábra). A tartó két rúdján normálerő nem keletkezik.



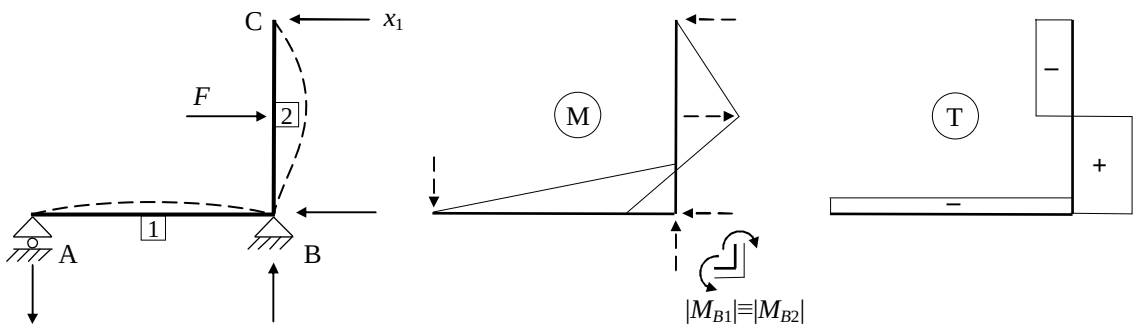
a) alakváltozás b) M-ábra c) T-ábra

8.1 Alakhelyes igénybevételi ábrák a rugalmas vonal felhasználásával.

2) Erőmódszer

Ha lehetséges, megbecsüljük a fölös kényszererő(k) irányát és utána az erőmódszer lépéseit képzeletben követve a már határozott tartón rajzolunk igénybevételi ábrákat.

Az erőmódszer alkalmazását alakhelyes ábrák szerkesztésére az előző pontban bemutatott tartón mutatjuk be (8.2 ábra). Ha a *C* támasz eltávolításával alakítjuk ki a törzstartót, akkor biztosak lehetünk abban, hogy az eltávolított kényszer helyén egy olyan vízszintes erőt (x_1) kell működtetnünk, ami balra mutat, hiszen csak ez az erő tudja a törzstartó szabad végét a *C* pontnál „vissza mozdítani” az eredeti helyére. Ebből az következik, hogy a nyomatékábra a *C* ponttól jobbra fog indulni, majd – hogy az *F* erő nyila passzoljon az ábrába – az ábra megtörik az erő alatt, és visszafordul (8.2/b ábra). Azt, hogy átmegy-e a másik oldalra, az *A* támaszerő irányának ismeretében tudjuk eldönteni. Azt érezzük, hogy az *F* erő hatására a 2. tartó középső része jobbra mozdul el, és ezért (valamint a 90-fokos csatlakozás miatt a *B* pontnál), az 1. rúd fel szeretne emelkedni az *AB* szakaszon. Ebből az következik, hogy az *A* támaszerő lefelé mutat. A lefelé mutató *A* támaszerő miatt az 1. rúdon felül lesz a nyomatékábra, tehát a 2. rúdon a jobb oldalról át fog menni az ábra a baloldalra, hogy a *B* pontban nyomatéki egyensúly legyen ($|M_{B1}|\equiv|M_{B2}|$).



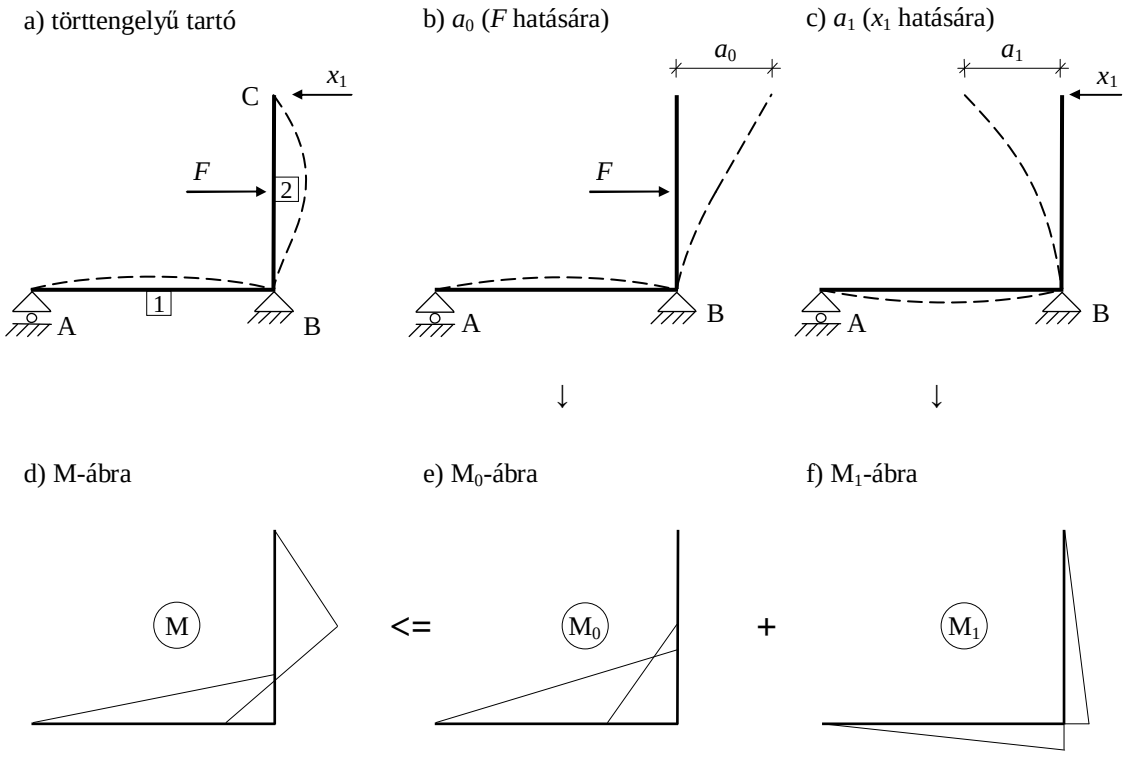
a) törzstartó erőmódszerhez b) M-ábra c) T-ábra

8.2 Alakhelyes M-ábra és T-ábra az erőmódszer alkalmazásával I.

A másik lehetőség az erőmódszer alkalmazására, hogy követjük a feltételi egyenlet felírásának és megoldásának menetét és az

$$M = M_0 + M_1 x_1$$

egyenlet segítségével állítjuk elő a végleges M-ábrát (8.3 ábra). Először megrajzoljuk a külső teherhez tartozó alakváltozást (8.3/b ábra) és az M_0 nyomatékábrát (8.3/e ábra), majd az x_1-hez tartozó alakváltozást (8.3/c ábra) és az M_1 nyomatékábrát (8.3/f ábra), végül összegezzük az M_0 és M_1x_1 ábrákat (8.3/d ábra). Nehézségbe akkor ütközünk, amikor az ábrák ordinátái nem azonos oldalon vannak. Ilyenkor az eredeti szerkezet alakváltozásainak (8.3/a ábra) vizsgálata vezethet el a helyes végeredményhez (8.3/d ábra).



8.3 Alakhelyes M-ábra az erőmódszer alkalmazásával II.

3) Mozgásmódszer

Az elemi tartók nyomatékábrájával (M_0) kezdünk, majd az a_0 terhelési tényező segítségével megbecsüljük a belső csomópont(ok) egyensúlyához szükséges mozgás(oka)t és előállítjuk az egységnyi mozgás(ok)hoz tartozó M_1 ábrát. A végleges M-ábrát az

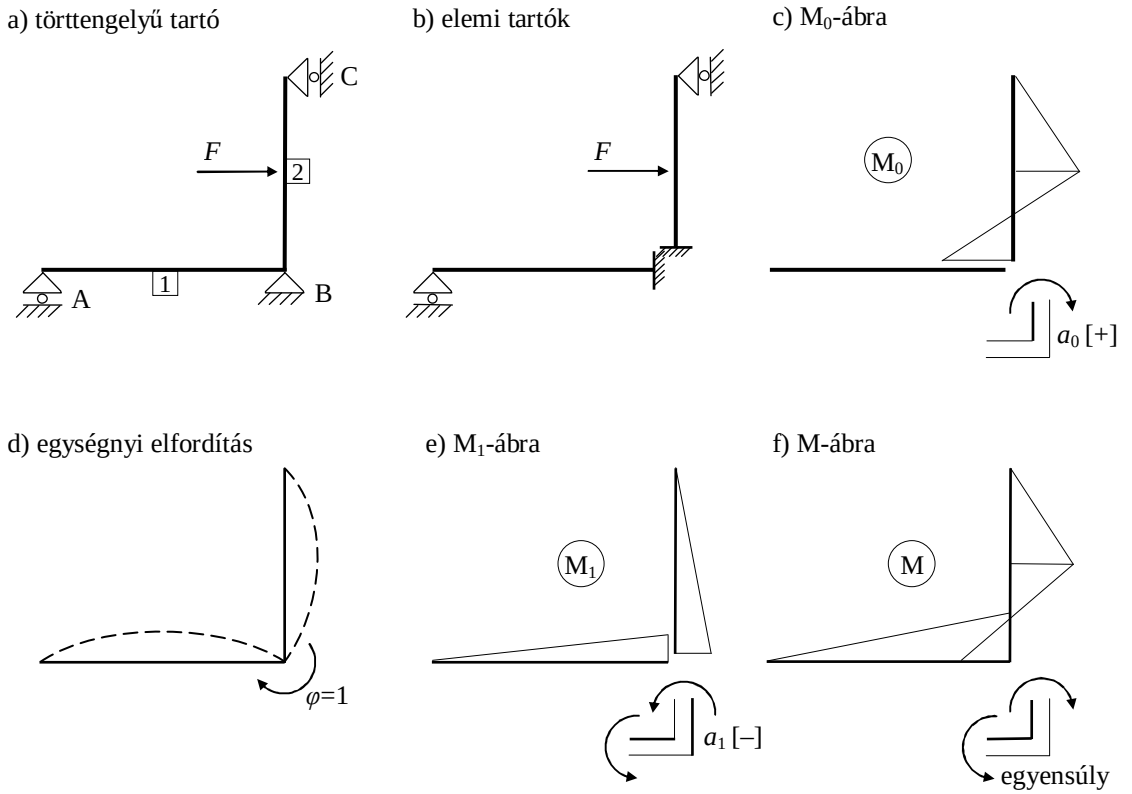
$$M = M_0 + M_1 x_1$$

összefüggés segítségével állítjuk elő.

A már ismert törttengelyű tartónk esetében tehát a következők szerint járunk el (8.4 ábra). Az elemi tartók (8.4/b ábra) segítségével első lépésben előállítjuk az M_0 ábrát (8.4/c ábra). Innen azt látjuk, hogy az a_0 terhelési tényező pozitív. Ennek megfelelően az egységnyi elfordítást pozitív forgatóértelemmel, az óramutató járásával egyezően hajtjuk végre (8.4/d ábra). A meggörbült vonalaknak megfelelően megrajzoljuk az M_1 ábrát (8.4/e ábra). Innen azt látjuk, hogy az a_1 egységtényező negatív. Ez azt jelenti, hogy az

$$a_0 + a_1 x_1 = 0$$

feltételi egyenletbe behelyettesítve az x_1 értékét pozitív előjellel kapjuk meg, tehát az egységnyi elfordítást „jó” irányban tettük meg és az M_0 és M_1 ábrákat az ábrán látható előjelekkel összeadhatjuk – az M_1 ábrát természetesen x_1-el szorozva.



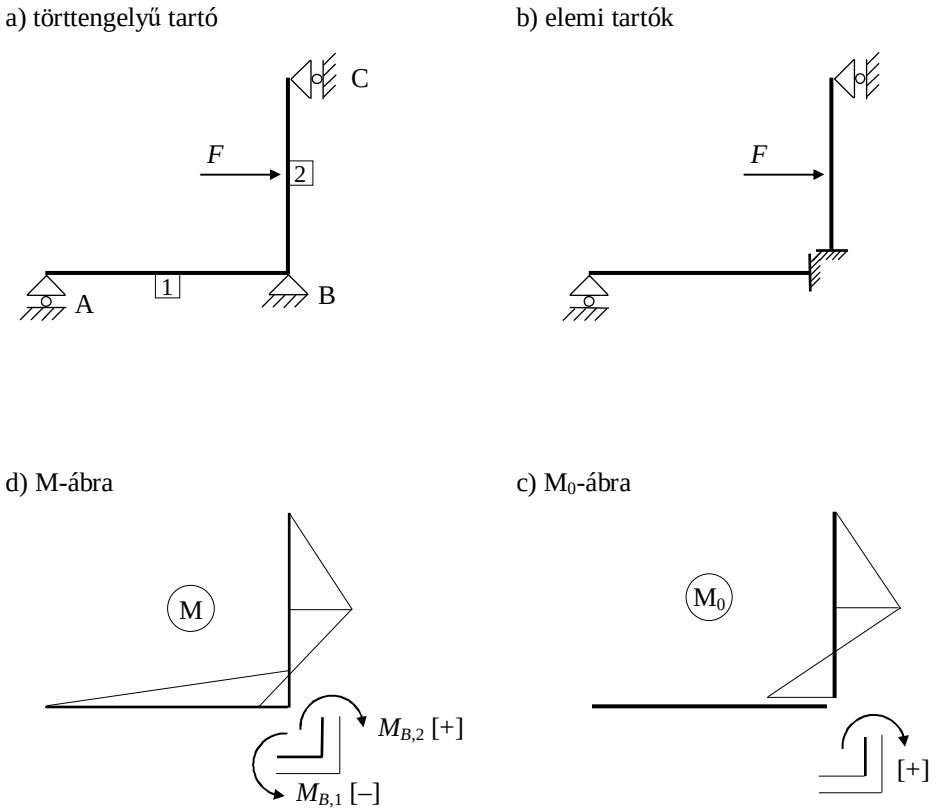
8.4 Alakhelyes M-ábra a mozgásmódszer alkalmazásával.

Az összegzést az 1. rúdon kell kezdeni, mert itt csak az M_1 esetében van nyomaték és így a végeredmény egyértelmű: az ábra fölül van. Ebből viszont az következik, hogy a 2. rúd alján a nyomatékábra a belső oldalról kell hogy induljon, mert a csomóponti nyomatéki egyensúly csak így teljesülhet (8.4/f ábra).

4) Cross-módszer

Itt is az elemi tartók M-ábrájával (M_0) kezdünk, majd képzeletben elvégezzük a nyomatékosztást (a Cross-táblázat első sora). Rendszerint már az első nyomatékosztás meghatározza a rudak végein a „domináns” nyomatékokat, melyek alapján megrajzoljuk az M-ábrát.

A már ismerős törttengelyű feladatunk esetében a következők szerint járunk el (8.5 ábra). Első lépésben vázoljuk az elemi tartókat (8.5/b ábra) és (alakhelyesen) megállapítjuk a rajtuk a külső teherből keletkező nyomatékot (8.5/c ábra). Csak a 2. rúdon van kezdeti befogási nyomaték, amelynek előjele pozitív. Ezután elképzeljük, hogy mi történne a nyomatékosztás során. Mivel az 1. rúdon nincs nyomaték, a *B* csomópont egyensúlyozásakor az egyensúlyozó nyomaték az előbb említett nyomaték ellentettje lesz. Ezt kell kétfelé osztani, a *B* csomópontba becsatlakozó merevségek arányában. Ebből az következik, hogy az előbb említett nyomaték a 2. rúdon *csökkenni* fog (M_{B2}), az 1. rúdon lévő nyomaték (esetünkben zérus) pedig nőni fog (M_{B1}). Az 1. rúdon így keletkező nyomaték *csak* felülre kerülhet, mert csomóponti egyensúly csak így jöhet létre. Mivel a görgős támasznál a nyomaték zérus, a nyomatékábra így már megrajzolható (8.5/d ábra).



8.5 Alakhelyes M-ábra a Cross-módszer alkalmazásával.

A továbbiakban a fentiek illusztrálására néhány példát mutatunk be.

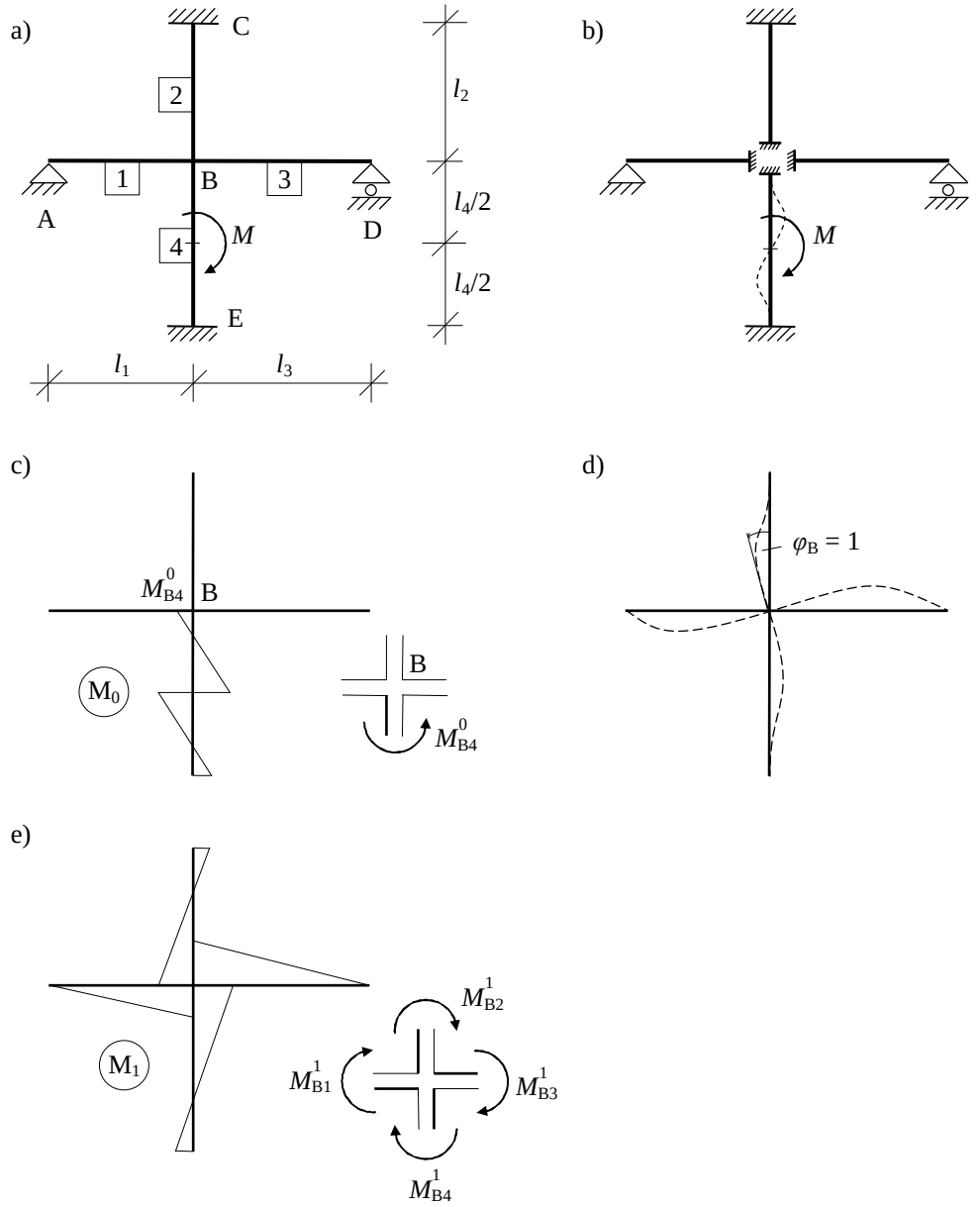
8.1 Rúdcsillag koncentrált nyomatékkal

Határozzuk meg a 8.6/a ábrán vázolt rúdcsillag alakhelyes igénybevételi ábráit. Az egyetlen koncentrált nyomatékkal terhelt tartó alakhelyes ábráit a mozgásmódszer elveire támaszkodva állítjuk elő.

A tartó egyetlen belső csomóponti elmozdulás-komponenssel rendelkezik: a *B* csomópont elfordulhat. Ebből az következik, hogy az egyensúly feltételi egyenletrendszere egyetlen egyenletből áll:

$$a_1 x_1 + a_0 = 0$$

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a *B* csomópontra a külső teherből és a csomópont elfordulásából jutó nyomatékok egyensúlyban vannak. A feltételi egyenletben x_1 a csomópont ismeretlen elfordulása, az a_1 egységtényező az $x_1 = 1$ elfordulásból a csomópontra jutó nyomatékok összege, az a_0 terhelési tényező pedig a külső teherből a csomópontra jutó nyomatékok összege.



8.6 ábra. Koncentrált nyomatékkal terhelt rúdcsillag I.

Az elemi tartókat a 8.6/b ábrán tüntettük fel.

Az elemi tartókon a külső teherből keletkező M_0 nyomatékábra a 8.6/c ábrán látható. Az a_0 terhelési tényező a külső teherből a B csomópontra jutó nyomatékok összege. Külső teher most csak egy – a 4. jelű – elemi tartón van, így

$$a_0 = M^0_{B4} \quad [-]$$

A szögletes zárójelben lévő negatív előjel azt jelzi, hogy a terhelési tényező az óramutatóval ellentétesen forgató nyomaték.

A zérustól különböző terhelési tényező egy pillanatnyilag kiegyensúlyozatlan nyomatékot jelent a B csomópontban. Ennek hatására a csomópont elfordul – így keletkeznek azok a nyomatékok, amelyek segítségével a B csomópont egyensúlya végül biztosítható.

Mivel nem tudjuk milyen mértékű elfordulásra van szükség az egyensúly biztosításához, a csomópontot egységgel fordítjuk el (8.6/d ábra). Az egységnyi elfordítás következtében fellépő nyomatékok az elfordulási merevségek. Összegük az a_1 egységtényező:

$$a_1 = M^1_{B1} + M^1_{B2} + M^1_{B3} + M^1_{B4} \quad [+]$$

A szögletes zárójelben feltüntetett pozitív előjel azt jelzi, hogy az egységtényező az óramutató járásával egyező forgatásértelmű nyomaték. Az egységnyi elforduláshoz tartozó M_1 nyomatékábrát a 8.6/e ábrán tüntettük fel.

A következő lépés az

$$a_0 + a_1 x_1 = 0$$

feltételi egyenlet képzeletbeli megoldása. Erre azért van szükség, hogy megállapíthassuk a B csomópont egyensúlyát biztosító x_1 elfordulás előjelét. A feltételi egyenletben az egység- és terhelési tényezőket a korábban megállapított forgatásértelmüknek megfelelően tüntettük fel. A csomópont elfordulására így az

$$x_1 = -\frac{a_0\,[-]}{a_1\,[+]} \quad [+]$$

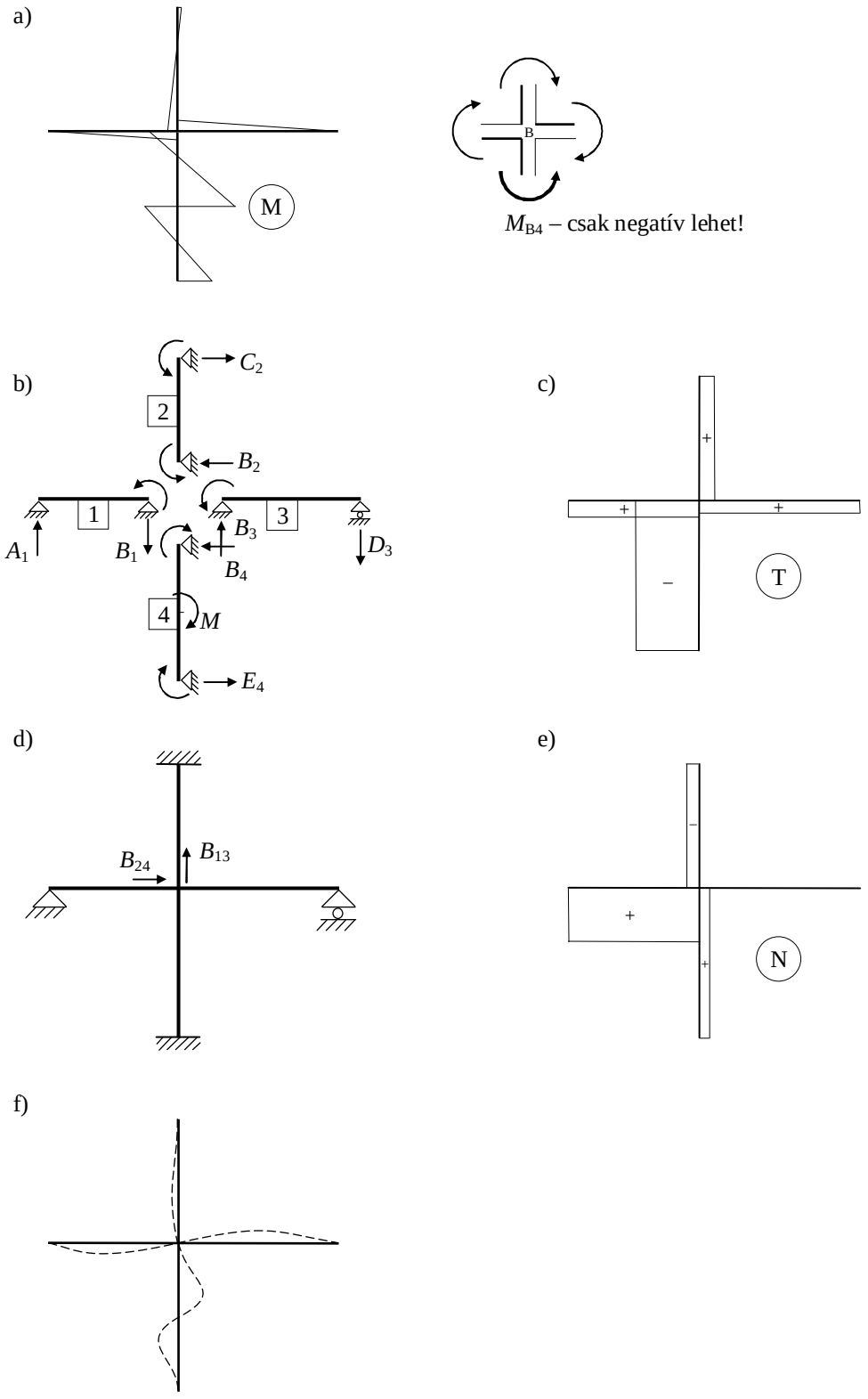
összefüggést kapjuk, melynek pozitív előjele azt mutatja, hogy az x_1 elfordulás valóban olyan forgatóértelmű, amilyennek az egységnyi elfordításnál feltételeztük, vagyis negatív.

Az M_0 és M_1 nyomatékábrák, valamint az x_1 előjelének ismeretében nem maradt más hátra, mint az

$$M = M_0 + M_1 x_1$$

összefüggés segítségével előállítani az alakhelyes nyomatékábrát. A nyomatékábrát a 8.7/a ábrán vázoltuk. A nyomatékábra előállítása során egy érték meghatározása érdemel különösebb figyelmet: a 8.7/a ábrán feltüntetett B csomóponti vázlat tanúsága szerint a csomóponti egyensúly csak akkor valósulhat meg, ha a M_{B4} csomóponti nyomaték negatív.

Az elemi tartók (8.7/b ábra) megoldása közvetlenül eredményezi a nyíróerő-ábrát (8.7/c ábra).



8.7 ábra. Koncentrált nyomatékkal terhelt rúdcsillag II.

A normálerő-ábra meghatározásához a B csomópontban átadódó függőleges és vízszintes reakcióerők ellentettjeire van szükség (8.7/d ábra):

$$B_{13} = -(B_1 - B_3) \quad [\uparrow]$$

$$B_{24} = -(B_2 + B_4) \quad [\rightarrow]$$

Felhasználásukkal az alakhelyes normálerő-ábra egyértelműen megszerkeszthető (8.7/e ábra).

A tartó alakváltozását a 8.7/f ábrán mutatjuk be.

8.2 Kilendülő törttengelyű tartó

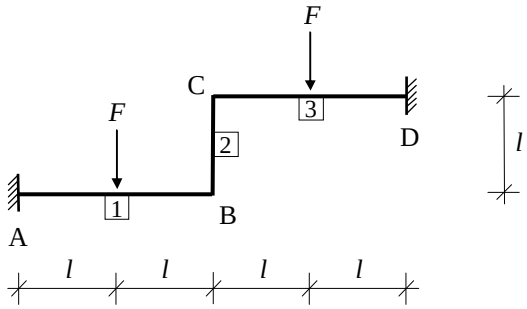
Határozzuk meg a 8.8/a ábrán vázolt szerkezet alakhelyes igénybevételi ábráit. A nyomatékábrát a Cross-módszernél alkalmazott

$$M = M_{\text{fix}} + M_{\text{kilendülő}}$$

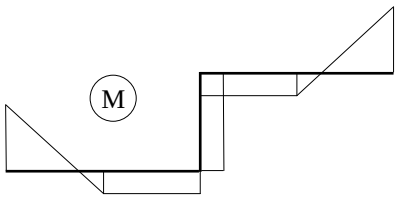
összefüggés segítségével állítjuk elő, úgy, hogy a megtámasztottnak feltételezett és a csak kilendülési hatást figyelembe vevő szerkezetnél is a meggörbült tartóalak segítségével rajzoljuk meg a vonatkozó M_{fix} és $M_{\text{kilendülő}}$ nyomatékábrákat. Az első lépés tehát a megtámasztottnak feltételezett szerkezet (8.8/c ábra) M_{fix} nyomatékábrájának előállítása (8.8/d ábra). Ez nem nehéz feladat, ha figyelembe vesszük, hogy a B képzelt megtámasztás következtében a B és C pont helyben marad és a BC rúd meggörbülése a bal oldalon okoz húzást. A kilendülés hatása (8.8/e ábra) viszont a BC rúd jobboldali meggörbülését eredményezi, amire az AB és DC vízszintes gerendaszakaszok „konzoltartó-szerű” alakváltozásából következtethetünk. A húzott oldalak figyelembevételével megkapjuk az $M_{\text{kilendülő}}$ ábrát (8.8/f ábra). A két ábra összeadása során az A és D rúdvégek esetében egyértelmű a helyzet (az ábra felülre kerül). Nehezebb helyzetbe kerülünk a BC rúdszakasz esetében, mert az ábra a „fix” esetben a baloldalon, a „kilendülő” esetben pedig a jobboldalon van. Közvetlen kilendítő erővel terhelt szerkezetek esetében a kilendülés hatása szokott a domináló hatás lenni; ebből arra következtetünk, hogy az ábra jobboldalon lesz. Ezt az elképzelést alátámasztja a 8.8/g ábrán vázolt szerkezet vizsgálata, amelynek a nyomatékábráját a 8.8/h ábra mutatja. Ez a szerkezet úgy származtatható az általunk vizsgált szerkezetből, hogy a BC szakasz igen rövidnek (végül zérus hosszúságúnak) tételezzük fel. Ebben az esetben azt látjuk, hogy a két végén befogott tartó esetében a középső szakaszon a nyomatékábra a terhelő erőkkel szemben lévő oldalon van. Ebből arra következtethetünk, hogy a mi esetünkben is át kell mennie az ábrának az AB és CD gerendaszakaszok másik oldalára. Ez csak úgy lehetséges, ha a BC szakaszon a végleges nyomatékábra a jobboldalon van (8.8/b ábra).

A nyomatékábra felhasználásával elő kell állítani az elemi tartókat (8.8/i), amelyek segítségével megrajzolhatjuk a nyíró- és normálerő-ábrákat. Az elemi tartók vizsgálata a következőket mutatja. A szerkezet szimmetriája (illetve a nyomatékábra középső konstans alakja) miatt a vízszintes rudakon a B_1 és C_3 reakcióerők csak zérus nagyságúak lehetnek. A függőleges rudat csak két ellentétes forgatóértelmű és azonos nagyságú nyomaték terheli, így a B_2 és C_2 reakcióerők is zérus nagyságúak. A nyíróerő-ábrát a 8.8/j ábra mutatja. Normálerő a szerkezetben nem ébred (8.8/k ábra).

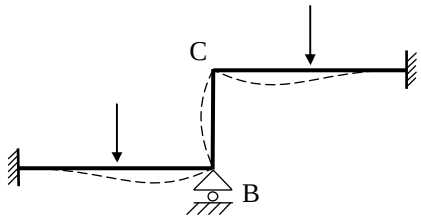
a) törttengelyű tartó



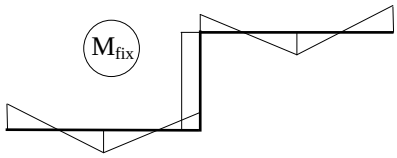
b) M-ábra



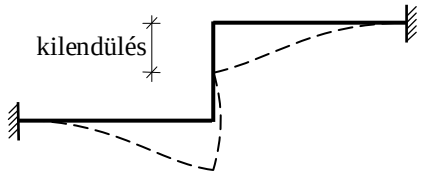
c) fix megtámasztásúnak tekintett tartó



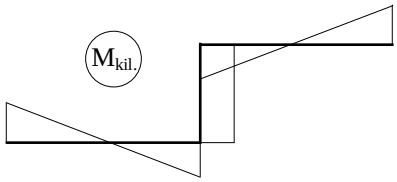
d) fix tartó M-ábrája



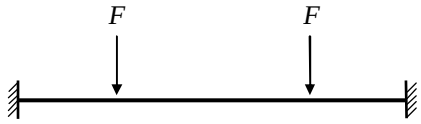
e) kilendülés



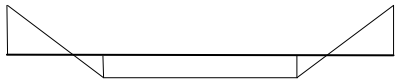
f) kilendülés hatása



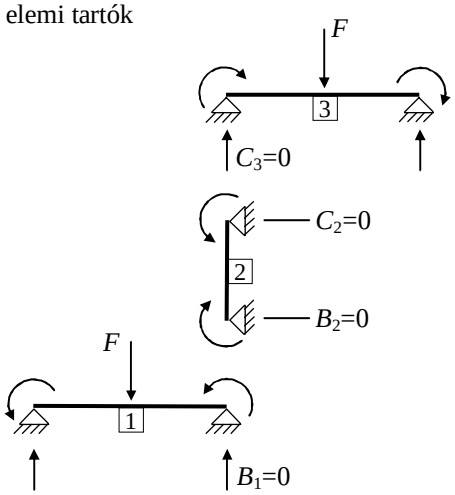
g) egyszerűsített model



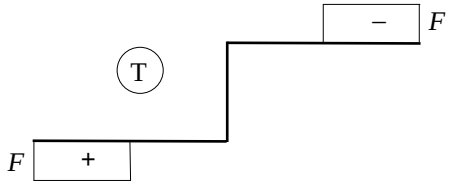
h) egyszerűsített model M-ábrája



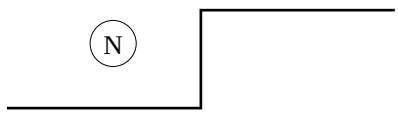
i) elemi tartók



j) T-ábra



k) N-ábra

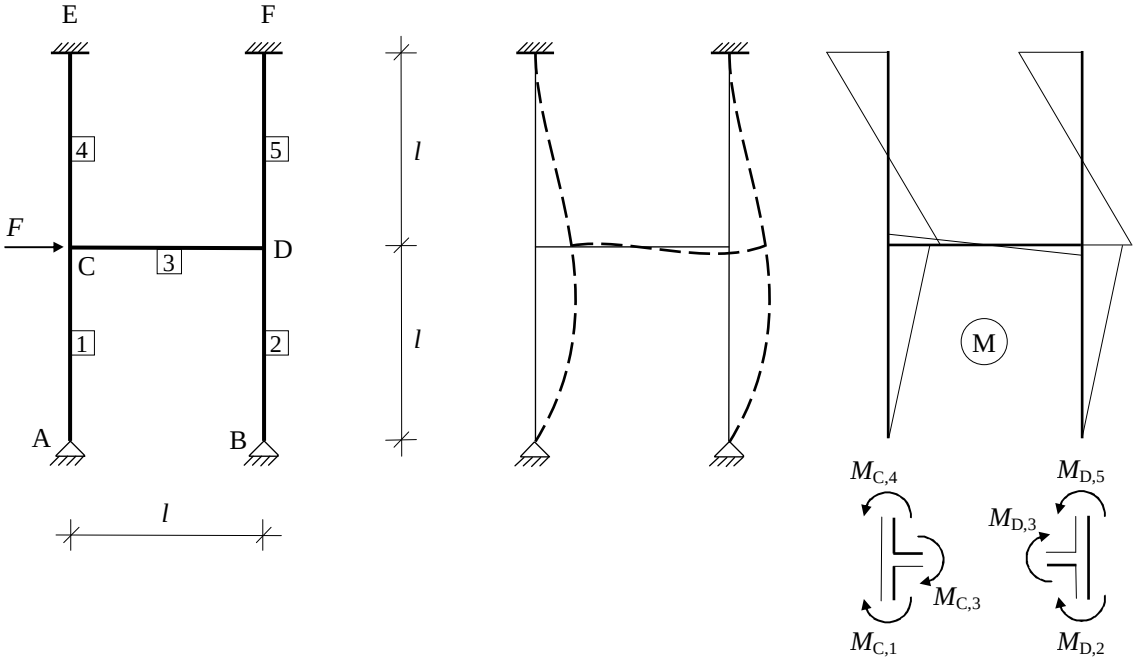


8.8 ábra. Törttengelyű tartó.

8.3 Kilendülő keret

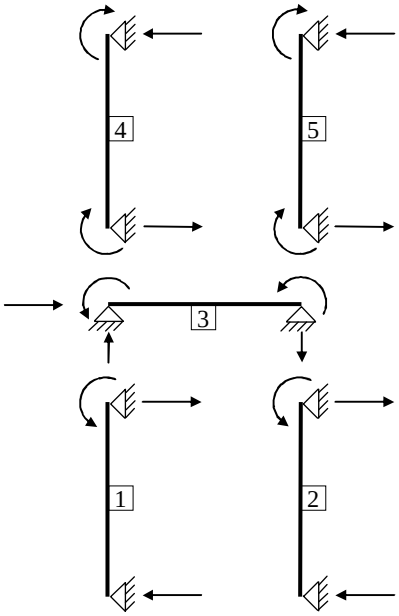
Állítsuk elő a 8.9/a ábrán vázolt keret alakhelyes igénybevételi ábráit, ha a merevség EI = állandó. A külső teher közvetlenül nem görbíti a rudakat, de hatására a keret jobbra kilendül. A szerkezet alsó része „lágyabb”: az alsó csuklós megtámasztás az A és B pontnál azonnal engedi a szerkezet elfordulását, szemben az E és F pontban lévő befogással, amelyek függőleges érintőt követelnek meg. Ebből az következik, hogy a 3. rúd alakváltozása olyan, hogy a baloldala fölfelé, a jobb oldala pedig lefelé görbül. A kilendülés utáni tartóalak (8.9/b ábra) figyelembevételével azonnal megrajzolhatjuk a nyomatékábrát (8.9/c ábra). A C és D csomópontok nyomatéki egyensúlyának vizsgálatával a nyomatékok arányát is meg tudjuk becsülni: a C csomópont esetében például a két óramutatóval egyező forgatóértelmű $M_{C,3}$ és $M_{C,1}$ együttes nagysága azonos kell hogy legyen az ellenkező forgatóértelmű $M_{C,4}$ nagyságával. Hasonló a helyzet a D csomópontban.

A nyomatékábra ismeretében előállítható az öt rúd elemi tartója (8.10/a ábra). Az elemi tartók reakcióerői segítségével a nyíróerő-ábra egyértelműen meghatározható (8.10/b ábra). A normálerő-ábra meghatározásához az elemi tartók reakcióerőinek ellentettjeire (és az egyetlen külső erő hatásának figyelembevételére) van szükség (8.10/c ábra). A 3. rúd baloldali reakcióerejének ellentettje lefelé mutat. Ebből – az A és E támaszok figyelembevételével – az következik, hogy az 1. rúd nyomott, a 4. rúd pedig húzott lesz. Hasonló megfontolás alapján a 2. rúd húzott, az 5. rúd pedig nyomott lesz (8.10/d ábra).

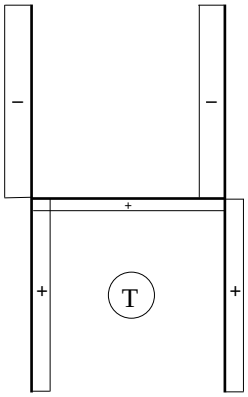


a) kilendülő keret b) kilendült alak c) M-ábra

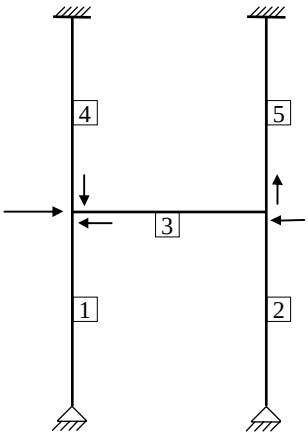
8.9 ábra. Kilendülő keret I.



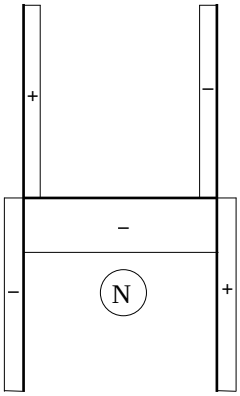
a) elemi tartók



b) T-ábra



c) erők az N-ábrához



d) N-ábra

8.10 ábra. Kilendülő keret II.

8.4 Kilendülő rúdcsillag

Határozzuk meg a 8.11/a ábrán vázolt tartó alakhelyes igénybevételi ábráit. EI = állandó. Bár a tartón nincsen közvetlen kilendítő erő, észre kell venni hogy a tartó ki fog lendülni. (Ha az elején nem vennénk észre, a kilendülés ténye akkor is kiderül később, amikor az esetleg fixnek gondolt szerkezet esetében az 1. oszlopról vízszintes reakcióerő adódik át a 2. gerendára. Ez a vízszintes erő a C görgős megtámasztásnál természetesen nem tud a talajra átadódni, így a szerkezet kilendül.)

Az alakhelyes nyomatéki ábrát az

$$M = M_0 + M_1 x_1$$

összefüggés segítségével fogjuk előállítani, ahol M_0 a fix szerkezet nyomatékábrája, M_1 pedig az egységnyi kilendítéshez tartózó nyomatékábra.

A fix szerkezet (8.11/b ábra) nyomatékábráját a 8.11/c ábra tartalmazza. Az 1. elemi tartó vizsgálata (8.11/d ábra) azt mutatja, hogy a B pontban keletkezik (vízszintes) reakcióerő B_1. A reakcióerő ellentettje (a jobbra mutató T_0) átadódik a 2. rúdra (8.11/e ábra). Mivel a 2. rúdnak nincs fix támasza ahol az erő átadódhatna a megtámasztó szerkezetre (a földre), a szerkezet (jobbra) kilendül.

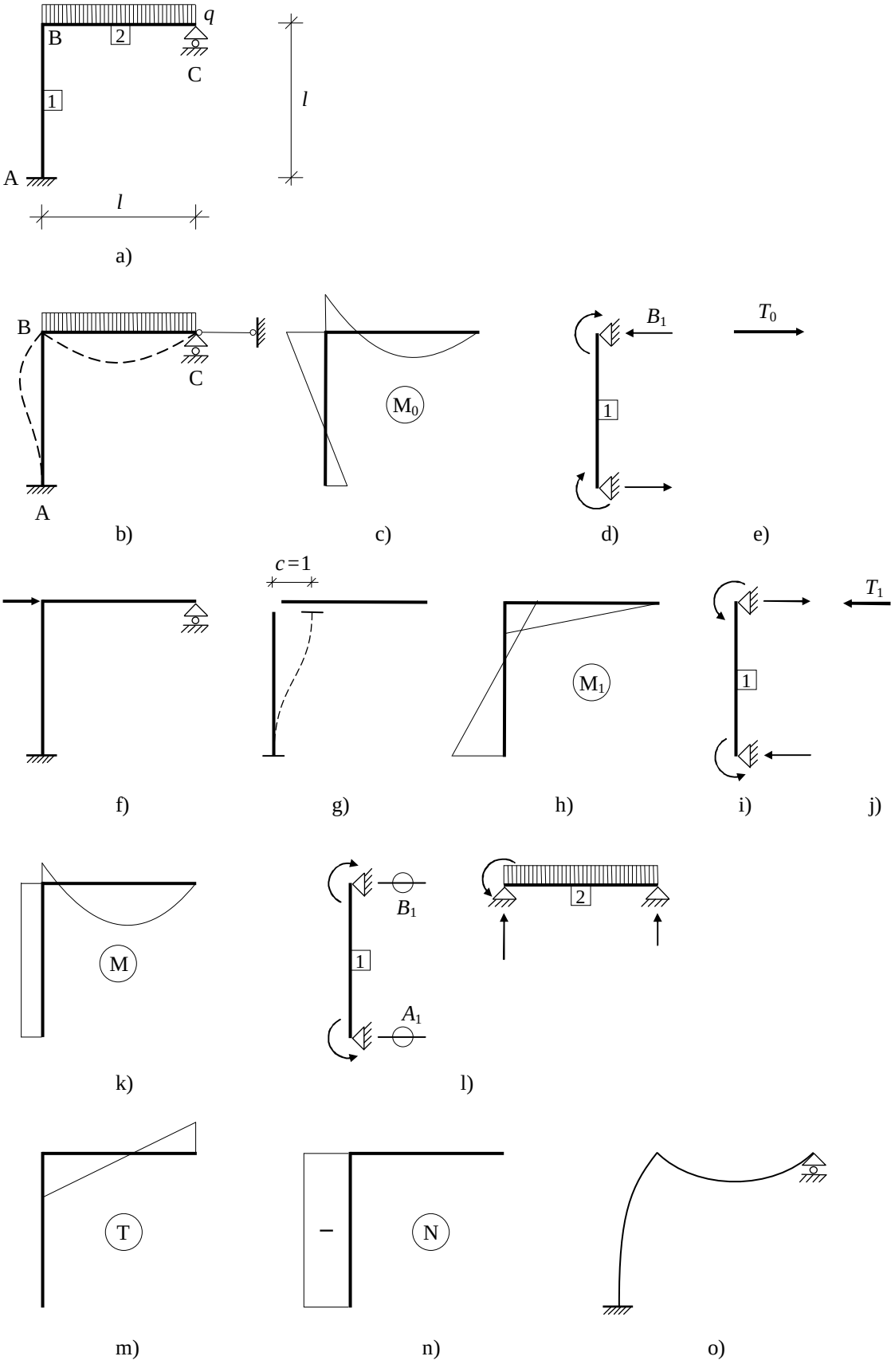
A következő lépésben jobbra kilendítjük a szerkezetet (8.11/f és 8.11/g ábra). A kilendítéshez tartozó nyomatékábrát a 8.11/h ábrán láthatjuk. Az 1. elemi tartó reakcióerejének (8.11/i ábra) ellentettje a T_1 „megtámasztó” erő (8.11/j ábra). A 2. gerenda egyensúlyát kifejező

$$T_0 + T_1 x_1 = 0$$

vízszintes vetületi egyenletből meghatározható a kilendülés tényleges mértéke (x_1). Erre az alakhelyes ábraszerkesztéshez nincs szükségünk, de arra az információra igen, hogy az x_1 az egyenletből pozitív előjellel adódna, mert ez igazolja, hogy a szerkezetünket valóban jobbra kellett kilendíteni.

A végleges nyomatékábrát az M_0 és az $M_1 x_1$ ábrák „összeadásával” kapjuk meg (ahol x_1 pozitív). Mind a három jellemző érték-pár az érintett rúd különböző oldalán van, így első ránézésre nem tudjuk, hogy az ábrát melyik oldalra rajzoljuk. Mivel a szerkezet jobbra lendül ki, az A befogott támasznál a húzott oldal biztosan a baloldalon lesz. Az elemi tartók vizsgálata segít eldönteni, hogy utána az ábra hogyan megy tovább. Mivel a C támasz görgős megtámasztás, a 2. gerendára az 1. rúdról nem adódhat át vízszintes erő (mert a C támasz nem tudná felvenni). Ez csak úgy lehetséges, hogy a baloldalon induló nyomatékábra értékének változása nélkül megy tovább a B pontig. Ekkor az 1. tartót terhelő két rúdvégi nyomaték azonos nagyságú és ellentétes értelmű lesz (8.11/l ábra), így a B_1 reakcióerő (és a másik is) zérus lesz. A B csomópont egyensúlya miatt a nyomaték a 2. tartó bal oldalán fent kell hogy legyen. A nyomatékábrát a 8.11/k ábra mutatja.

Az elemi tartók (8.11/l ábra) ismeretében végül megrajzolhatjuk a nyíróerő- és normálerő ábrákat is (8.11/m és 8.11/n ábra). A tartó alakváltozását a 8.11/o ábrán vázoltuk.



8.11 ábra. Kilendülő rúdcsillag.

9

Többtámaszú tartók igénybevételeinek szélső értékei

9.1 Bevezetés

A méretezési szabályzatok azt írják elő, hogy az erőtani számításban a terheket a legkedvezőtlenebb, ún. mértékadó elrendezéssel kell figyelembe venni. Ezt az előírást az indokolja, hogy pl. többtámaszú tartók egyes keresztmetszeteiben nem akkor keletkeznek a legnagyobb igénybevételek, amikor az esetleges teher a tartó teljes hosszában működik, hanem akkor, amikor a vizsgált keresztmetszet szempontjából legkedvezőtlenebb elrendezésű teherrendszer fejti ki hatását.

9.2 Terhelési sémák támaszközönként szakaszosan történő terhelés esetén

A következőkben az egyes támasznyomatékok, "mezőnyomatékok", valamint támaszerők szempontjából legkedvezőtlenebb terhelési esetek előállítását tűzzük ki célul, ha a terhek támaszközönként szakaszosan működhetnek. Az állandó terhek jellegükből következően állandóan terhelik a szerkezetet, így azokat minden esetben működtetjük a szerkezetre. Az esetleges terheket azonban a valóságos helyzetnek megfelelően egyes támaszközökben működőnek, más támaszközökben pedig eltávolítottnak tekinthetjük. Ha ez utóbbiakat a tartó valamely támaszközében figyelembe vesszük, akkor a támaszköz teljes hosszában számolunk vele.

Bevezetésként vizsgáljuk meg a 9.1 ábra nézetrajzán feltüntetett héttámaszú tartó támasznyomatékait abban az esetben, amikor a tartónak csupán egy – a *CD* – támaszköze terhelt. Az egyszerűbb számolás érdekében legyen a terhelés q = 100 kN/m, a támaszköz l = 1 m és I = állandó. (I = 1-el számolhatunk, mert a tényleges érték kiesik a számítás során.)

A merevségi számok:

$$k_1 = k_6 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{1} = 0.75\,, \qquad k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{1} = 1$$

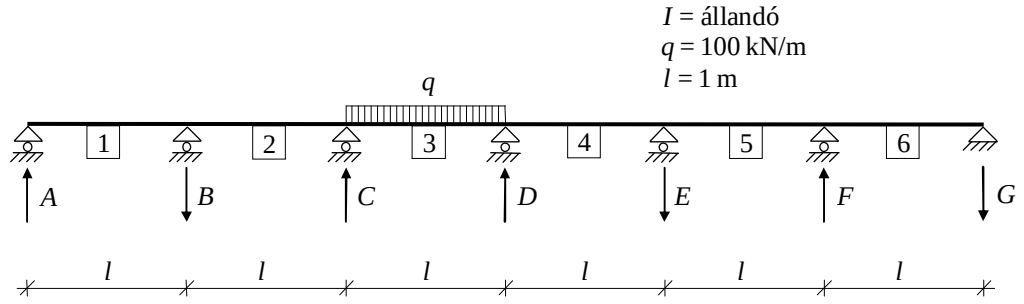
A nyomatékosztási tényezők:

$$\alpha_{B1} = \alpha_{F6} = \frac{0.75}{1.75} = 0.428\,, \qquad \alpha_{B2} = \alpha_{F5} = \frac{1}{1.75} = 0.572$$

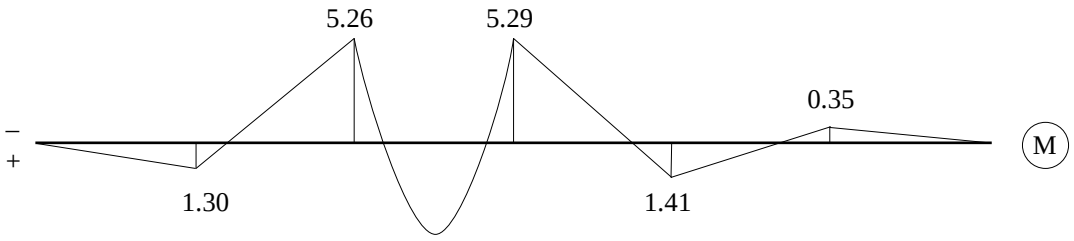
$$\alpha_{C2} = \alpha_{C3} = \alpha_{D3} = \alpha_{D4} = \alpha_{E4} = \alpha_{E5} = \frac{1}{2} = 0.5$$

A kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{C,3}^{0} = -M_{D,3}^{0} = \frac{ql^2}{12} = \frac{100 \cdot 1^2}{12} = 8.33\,\text{kNm}$$



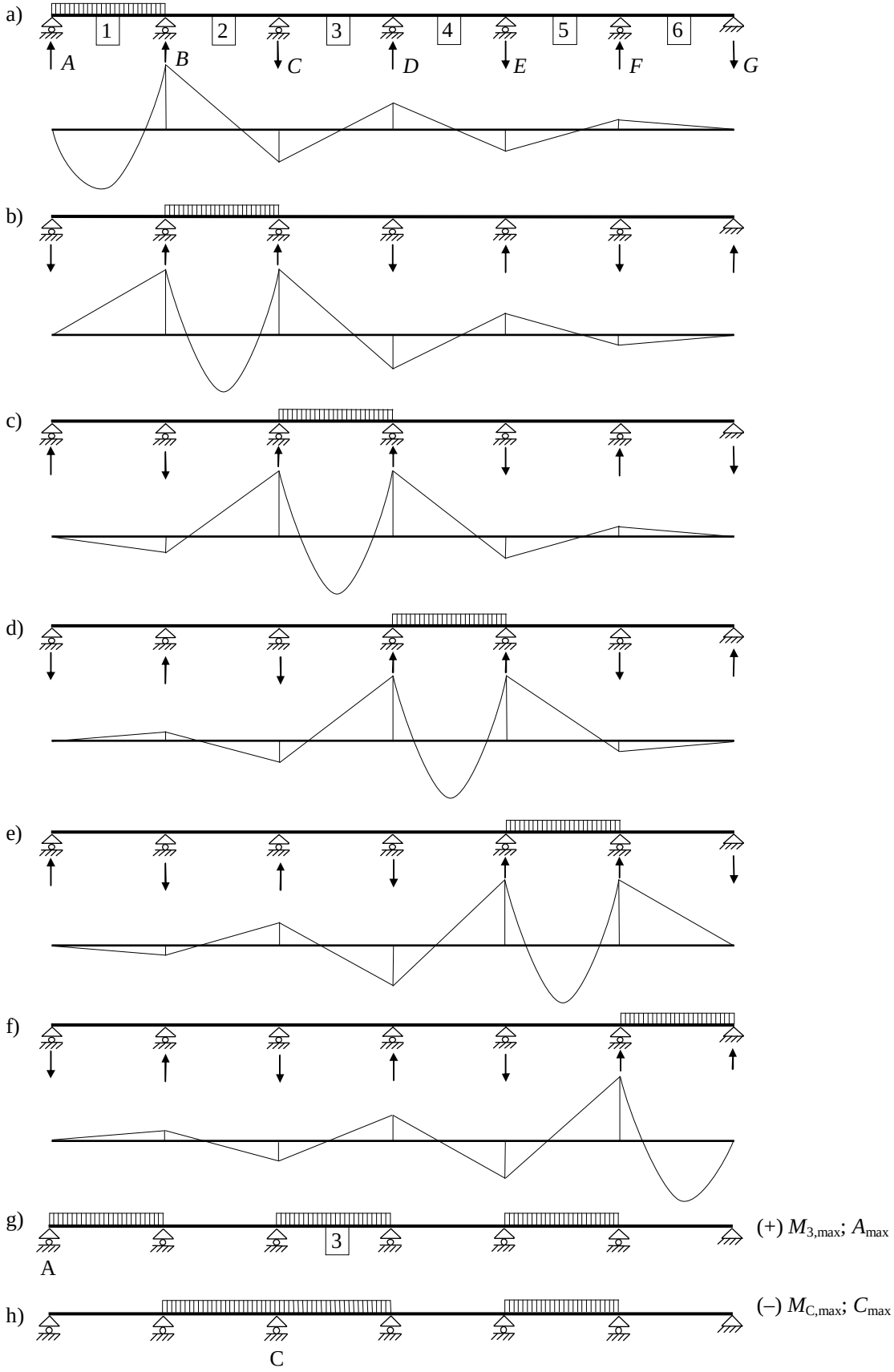
B		C		D		E		F	
1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
0.428	0.572	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.572	0.428
			+8.33	–8.33					
	–2.08	–4.17	–4.16	–2.08					
+0.89	+1.19	+0.60	+2.60	+5.21	+5.20	+2.60			
	–0.80	–1.60	–1.60	–0.80	–0.65	–1.30	–1.30	–0.65	
+0.34	+0.46	+0.23	+0.36	+0.72	+0.73	+0.36	+0.19	+0.37	+0.28
	–0.15	–0.30	–0.29	–0.15	–0.13	–0.27	–0.28	–0.14	
+0.06	+0.09	+0.04	+0.07	+0.14	+0.14	+0.07	+0.04	+0.08	+0.06
	–0.03	–0.06	–0.05	–0.02	–0.03	–0.05	–0.06	–0.03	
+0.01	+0.02			+0.02	+0.03			+0.02	+0.01
+1.30	–1.30	–5.26	+5.26	–5.29	+5.29	+1.41	–1.41	–0.35	+0.35



9.1 ábra. Héttámaszú tartó CD szakasz-teherrel.

A 9.1 ábrán a nyomatékosztást és a tartó nyomatékábráját is feltüntettük. Megállapíthatjuk, hogy a terhelt mezőt határoló támaszok keresztmetszetében keletkezik a legnagyobb negatív hajlító nyomaték. Innen távolodva a támasznyomatékok értéke rohamosan csökken, előjele pedig váltakozva pozitív és negatív. A nézetrajzba berajzoltuk a támaszerők irányát is.

A 9.2/a-f ábrákon ugyanezen héttámaszú tartó minden támaszközének külön-külön való megterhelése útján előállítottuk az ezekhez tartozó nyomatékábrák alakhelyes diagramját és bejelöltük a támaszerők irányát.



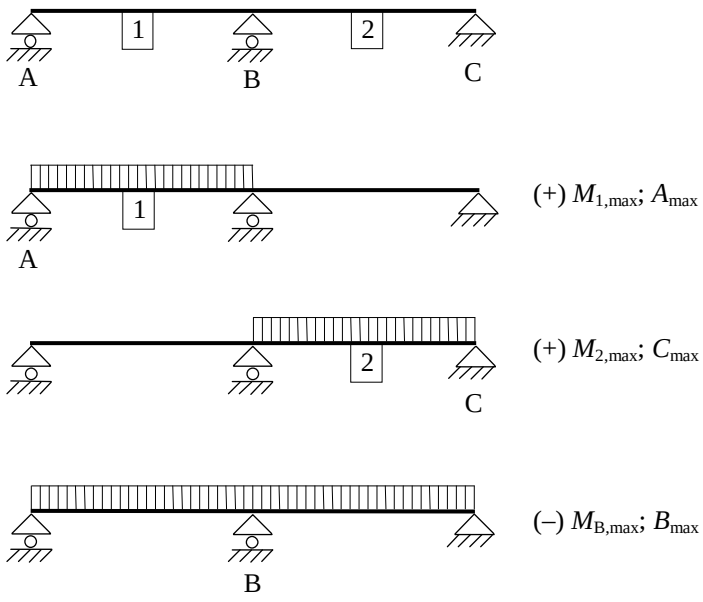
9.2 ábra. Héttámaszú tartó. Jellemző terhelési esetek.

Határozzuk meg azt a terhelési esetet, amely a 3. támaszközben a pozitív nyomatéki maximumot ($M^{+}_{3,\max}$), amely a *C* támasz feletti keresztmetszetben a negatív nyomatéki maximumot ($M^{-}_{C,\max}$), továbbá amely a *C* támaszerő maximumát ($C_{\max}$) szolgáltatja.

Megállapíthatjuk, hogy a 3. támaszközben az „a”, a „c” és az „e” jelű terhelést eset okoz pozitív nyomatékot. Valamely támaszközben tehát a pozitív nyomatéki maximumot úgy kapjuk, hogy a szóban forgó támaszközt, valamint – a szomszédos támaszközöket kihagyva – minden második támaszközt megterheljük (9.2/g ábra). Megjegyezzük, hogy ugyanez a teherelrendezés az 1. és az 5. mezőben is pozitív nyomatéki maximumot okoz.

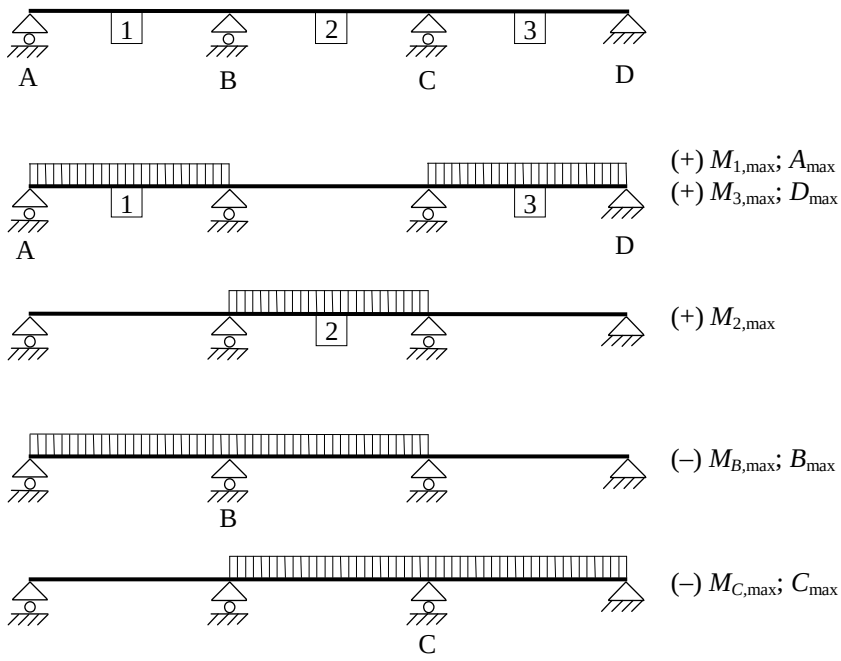
Megállapíthatjuk azt is, hogy a *C* támasz feletti keresztmetszetben a „b”, a „c” és az „e” jelű terhelési eset okoz negatív nyomatéki maximumot. Valamely támasz feletti keresztmetszetben a negatív nyomatéki maximumot tehát úgy kapjuk, hogy a szóban forgó támasztól balra és jobbra eső támaszközt, valamint – a szomszédos támaszközöket kihagyva – minden második támaszközt megterheljük (9.2/h ábra).

Végül megállapíthatjuk, hogy a *C* támaszban a „b”, a „c” és az „e” jelű terhelési eset eredményez felfelé irányuló támaszerőt. Ebből az következik, hogy valamely támaszerő maximumát ugyanazon terhelési eset adja, amely ugyanazon támasz feletti keresztmetszetben a támasznyomaték maximumát is szolgáltatja (9.2/h ábra). A szélső támaszokban fellépő támaszerő maximumát (pl. $A_{\max}$-ot) abból a terhelési esetből kapjuk, amely a szélső támaszközben a pozitív nyomatéki maximumot eredményezi (9.2/g ábra).



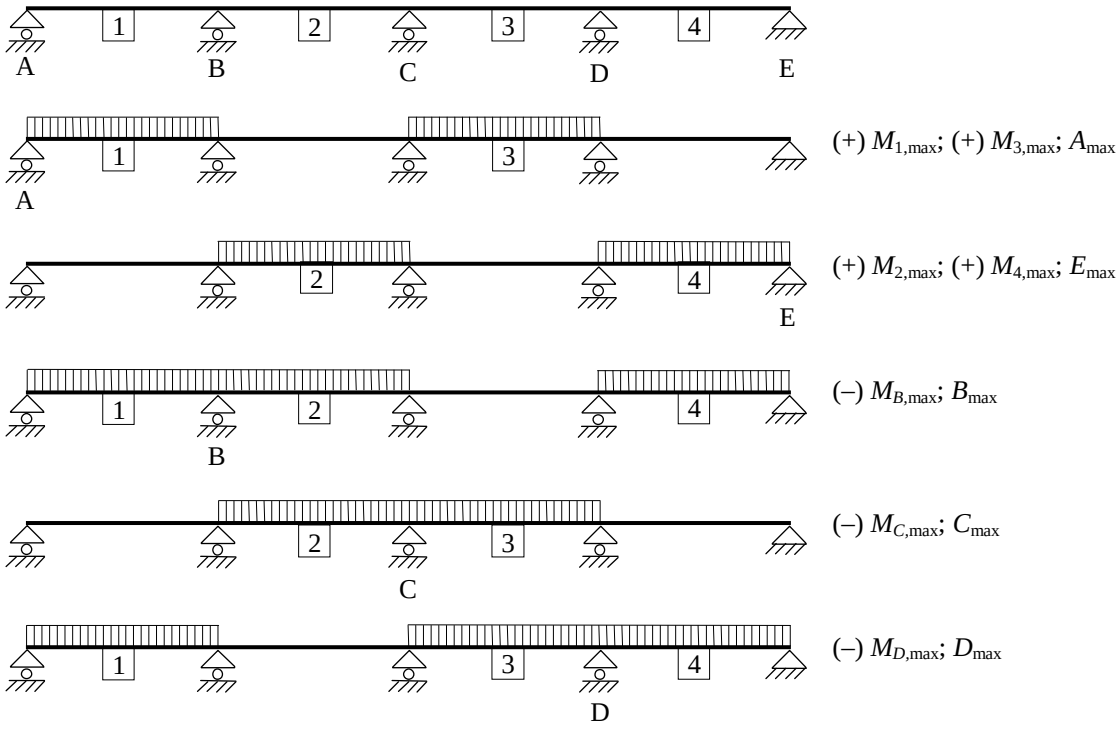
9.3 ábra. Háromtámaszú tartó.

Az összes jellemző igénybevételi érték megállapításához annyi terhelést eset (séma) előállítása szükséges, ahány támaszú a tartó. A szélső igénybevételi ábrákat az összes terhelési sémából meghatározott igénybevételi ábrák azonos léptékben való egymásra rajzolása és a határoló vonalak hangsúlyos megrajzolása útján kapjuk. (Erre mutat példát a 9.7 ábra.)



9.4 ábra. Négytámaszú tartó.

A 9.3, 9.4 és 9.5 ábrán példaként a három, négy és öttámaszú tartó terhelési sémáit rajzoltuk meg. Minden terhelési eset vázlata mellé odaírtuk azoknak az igénybevételeknek a jelölését, melyek szélső értéke az illető terhelési sémából meghatározható.

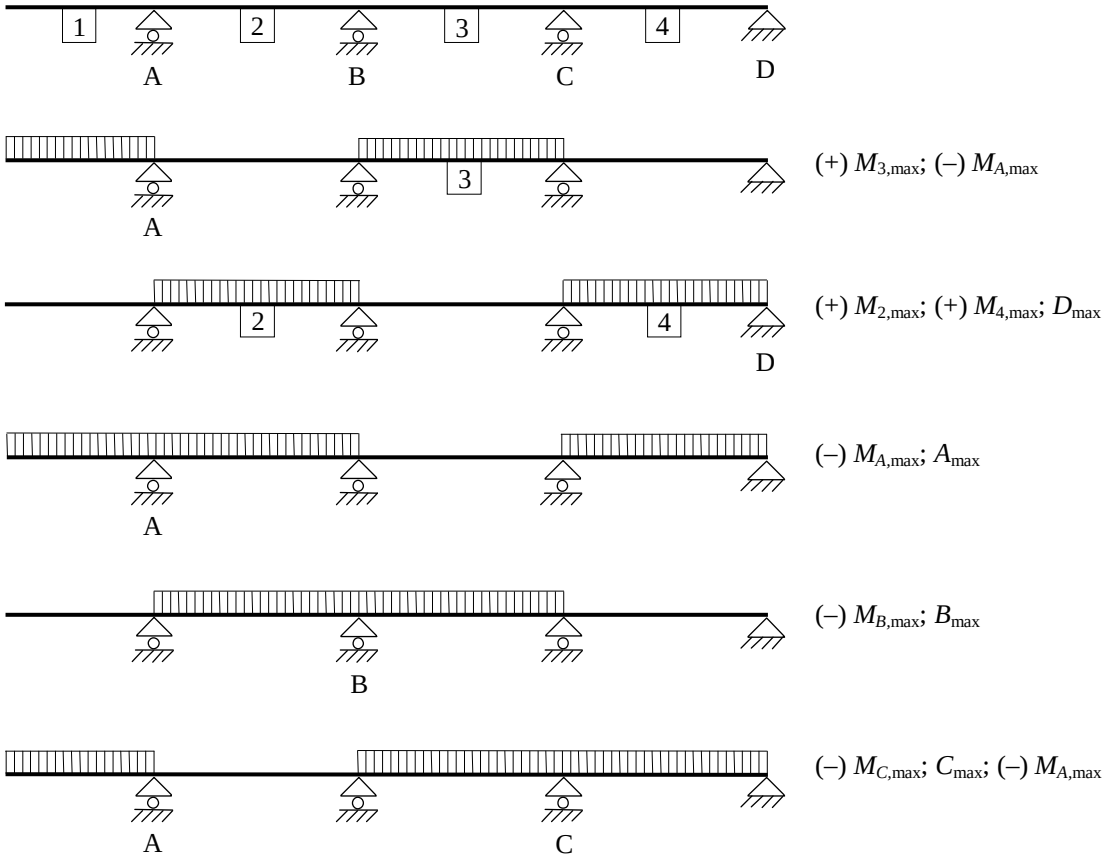


9.5 ábra. Öttámaszú tartó.

Könnyű belátni, hogy a maximális támasz- és mezőnyomatékra valamint támaszerőkre fent megállapított törvényszerűségek konzolos többtámaszú tartók esetében is érvényesek, azzal a kiegészítéssel, hogy egy konzol

a) a terhelési esetek számát eggyel növeli,
b) a konzol külön mezőnek számít.

A mértékadó igénybevételek előállításához szükséges terhelési sémákat a 9.6 ábrán foglaljuk össze egy négytámaszú konzolos tartó esetében.



9.6 ábra. Konzolos négytámaszú tartó.

9.3 Számpélda

Határozzuk meg a 9.7/a ábra nézetrajzán feltüntetett, végig állandó keresztmetszetű négytámaszú tartó szélső igénybevételeit és rajzoljuk meg a nyíróerők és a nyomatékok burkoló ábráját.

G-vel ill. *P*-vel és *g*-vel ill. *p*-vel a biztonsági tényezővel szorzott állandó ill. esetleges terhet jelöltük.

Minthogy az igénybevételek mind koncentrált, mind megoszló terhelés esetén a terhelő erővel egyenesen arányosak, a jelentős mennyiségű számolási munkát csökkenthetjük, ha először külön-külön csupán egységnyi teherrel terheljük az egyes támaszközöket és a végleges igénybevételeket ezekből, a terhek tényleges értékével való szorzása és a szuperpozíció elvének alkalmazása útján határozzuk meg.

Határozzuk meg először az egységnyi terhek által előidézett támasznyomatékokat és támaszerőket. Három ilyen esetünk lesz (9.8 ábra):

I-es eset: 2 db 1 kN nagyságú koncentrált erő az 1-es mező harmadaiban,
II-es eset: p = 1 kN/m megoszló teher a 2-es mezőben,
III-as eset: p = 1 kN/m megoszló teher a 3-as mezőben.

A merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{6} = 0.125\,, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{5} = 0.2\,, \qquad k_3 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{4}\frac{1}{5} = 0.15$$

A nyomatékosztási tényezők:

$$\alpha_{B1} = \frac{0.125}{0.325} = 0.385\,, \qquad \alpha_{B2} = \frac{0.2}{0.325} = 0.615$$

$$\alpha_{C2} = \frac{0.2}{0.35} = 0.572\,, \qquad \alpha_{C3} = \frac{0.15}{0.35} = 0.428$$

I-es jelű eset (két 1 kN nagyságú koncentrált erő az 1. rúdon – 9.8/a ábra):

Kezdeti befogási nyomaték:

$$M_{B,1}^{0} = -\frac{1}{3}Fl = -\frac{1}{3}1\cdot 6 = -2.0 \text{ kNm}$$

A nyomatékosztás eredményeként nyert támasznyomatékok:

$$M_{B,1} = -1.156 \text{ kNm}\,, \qquad M_{C,2} = 0.288 \text{ kNm}$$

A támaszerők:

$$A = 1 - \frac{1.156}{6} = 0.807 \text{ kN}\,, \qquad B_1 = 1 + \frac{1.156}{6} = 1.193 \text{ kN}$$

$$B_2 = \frac{1.156 + 0.288}{5} = 0.289\ \text{kN}, \qquad C_2 = -\frac{1.156 + 0.288}{5} = -0.289\ \text{kN}$$

$$C_3 = -\frac{0.288}{5} = -0.0578\ \text{kN}, \qquad D = \frac{0.288}{5} = 0.0578\ \text{kN}$$

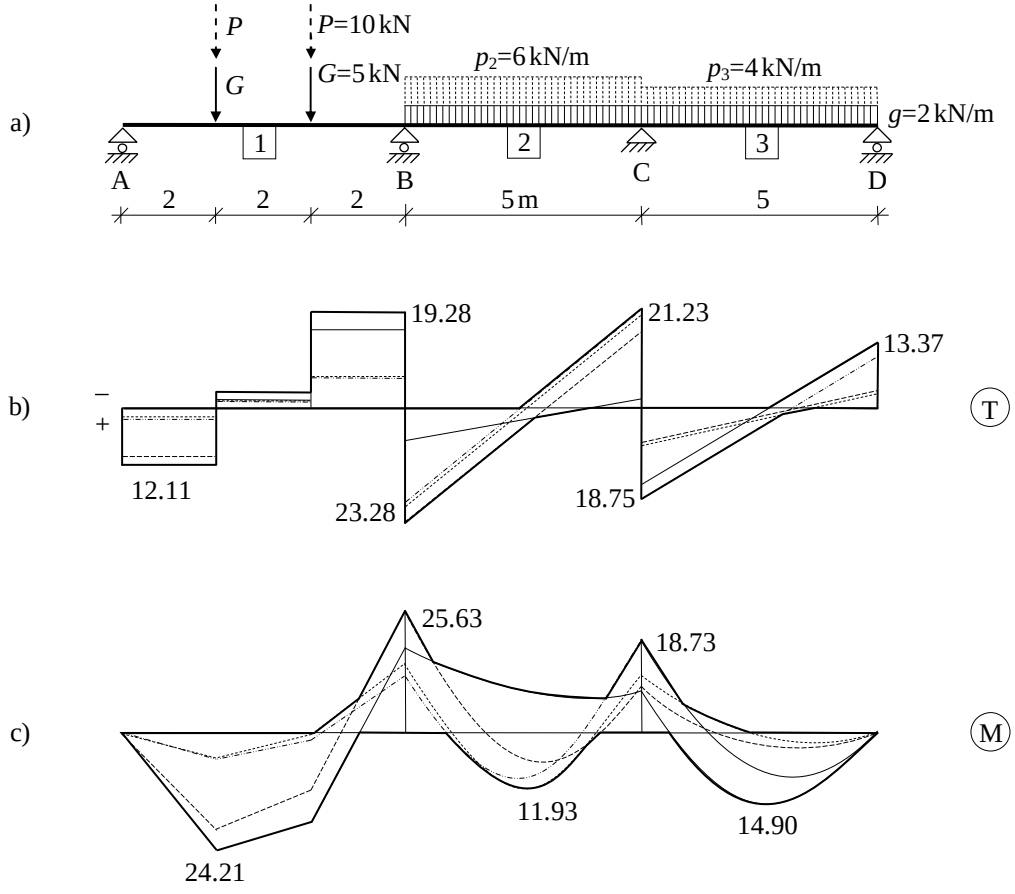
II-es jelű eset (p = 1 kN/m a 2. rúdon – 9.8/b ábra):

Kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{B,2}^0 = -M_{C,2}^0 = \frac{ql^2}{12} = 2.08\ \text{kNm}$$

A nyomatékosztás eredményeként nyert támasznyomatékok:

$$M_{B,1} = -1.128\ \text{kNm}, \qquad M_{C,2} = -1.277\ \text{kNm}$$



9.7 ábra. Négytámaszú tartó szélső igénybevételei.

A támaszerők:

$$A = \frac{1.128}{6} = 0.188 \text{ kN}, \qquad B_1 = -\frac{1.128}{6} = -0.188 \text{ kN}$$

$$B_2 = \frac{1 \cdot 5}{2} - \frac{1.227 - 1.128}{5} = 2.47 \text{ kN}, \qquad C_2 = 2.5 + 0.03 = 2.53 \text{ kN}$$

$$C_3 = \frac{1.277}{5} = 0.255 \text{ kN}, \qquad D = -\frac{1.277}{5} = -0.255 \text{ kN}$$

III-as jelű eset (p = 1 kN/m a 3. rúdon – 9.8/c ábra):

Kezdeti befogási nyomaték:

$$M_{C,3}^{0} = \frac{ql^2}{8} = 3.125 \text{ kNm}$$

A nyomatékosztás eredményeként nyert támasznyomatékok:

$$M_{B,1} = 0.376 \text{ kNm}, \qquad M_{C,2} = -1.656 \text{ kNm}$$

A támaszerők:

$$A = \frac{0.376}{6} = 0.0627 \text{ kN}, \qquad B_1 = -\frac{0.376}{6} = 0.0627 \text{ kN}$$

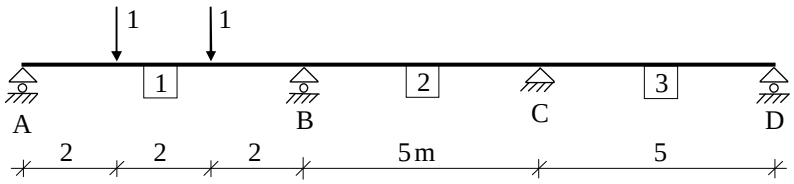
$$B_2 = \frac{-0.376 - 1.656}{5} = -0.406 \text{ kN}, \qquad C_2 = \frac{0.376 + 1.656}{5} = 0.406 \text{ kN}$$

$$C_3 = 2.5 + \frac{1.656}{5} = 2.831 \text{ kN}, \qquad D = 2.5 - \frac{1.656}{5} = 2.169 \text{ kN}$$

A számítás eredményeit a jobb áttekinthetőség érdekében a 9.1 táblázat felső részében foglaltuk össze.

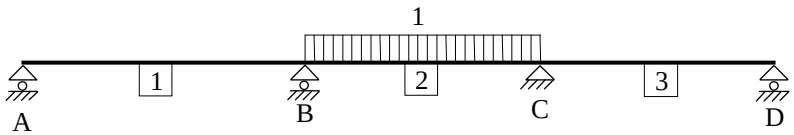
Az egységterhek hatására keletkező igénybevételek ismeretében most már könnyen meghatározhatjuk a tényleges terhekhez tartozó igénybevételek értékeit. A négytámaszú tartó esetében ezeket négy terhelési eset (séma) figyelembevételével kapjuk meg. A négy terhelési eset a 9.4 ábrán látható.

a) I-es eset



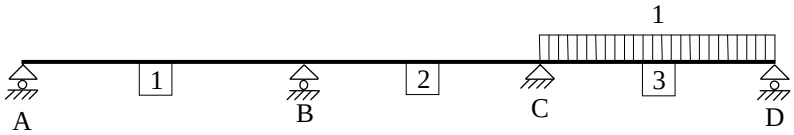
0.385	0.615	0.572	0.428
–2.000			
+0.770	+1.230	+0.615	
	–0.176	–0.352	–0.263
+0.068	+0.108	+0.054	
	–0.015	–0.031	–0.023
+0.006	+0.009	+0.005	
		–0.003	–0.002
–1.156	+1.156	+0.288	–0.288

b) II-es eset



0.385	0.615	0.572	0.428
	+2.080	–2.080	
–0.800	–1.280	–0.640	
	+0.778	+1.556	+1.164
–0.299	–0.479	–0.240	
	+0.069	+0.137	+0.103
–0.027	–0.042	–0.021	
	+0.006	+0.012	+0.009
–0.002	–0.004	–0.002	
		+0.001	+0.001
–1.128	+1.128	–1.277	+1.277

c) III-as eset



0.385	0.615	0.572	0.428
			3.125
	–0.892	–1.785	–1.340
0.343	0.549	0.274	
	–0.078	–0.156	–0.118
0.030	0.048	0.024	
	–0.007	–0.014	–0.010
0.003	0.004	0.002	
		–0.001	–0.001
0.376	–0.376	–1.656	1.656

9.8 ábra. Az egységterhek I., II. és III. esetének számítása.

Az 1. terhelési eset (lásd a 9.1 táblázat alulról negyedik sorát):

$$M_B = -1.156\cdot 15 \; -1.128\cdot 2 \; +0.376\cdot 6 = -17.314 \text{ kNm}$$

$$M_C = 0.288\cdot 15 \; -1.277\cdot 2 \; -1.656\cdot 6 = -8.161 \text{ kNm}$$

$$A = 0.807\cdot 15 \; -0.1883\cdot 2 \; +0.0627\cdot 6 = 12.105 \text{ kN}$$

$$B_1 = 1.193\cdot 15 \; -0.1883\cdot 2 \; -0.0627\cdot 6 = 17.895 \text{ kN}$$

$$B_2 = 0.289\cdot 15 \; +2.470\cdot 2 \; -0.406\cdot 6 = 6.839 \text{ kN}$$

$$C_2 = -0.289\cdot 15 \; +2.530\cdot 2 \; +0.406\cdot 6 = 3.161 \text{ kN}$$

$$C_3 = -0.0587\cdot 15 \; +0.256\cdot 2 \; +2.831\cdot 6 = 16.631 \text{ kN}$$

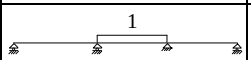
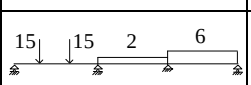
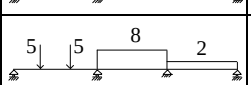
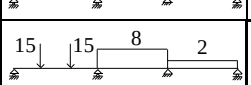
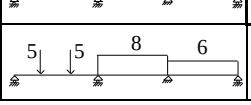
$$D = 0.0587\cdot 15 \; +0.256\cdot 2 \; +2.169\cdot 6 = 13.369 \text{ kN}$$

$$(+)M_{1\max} = 2\cdot 12.105 = 24.21 \text{ kNm}$$

$$(+)M_{3\max} = \frac{13.369^2}{2\cdot 6} = 14.90 \text{ kNm}$$

Értelemszerűen, és ezzel teljesen azonos módon számíthatjuk a 2., 3. és 4. terhelési eset szerinti terhelés hatására fellépő igénybevételeket is. A számítás eredményeit a 9.1 táblázat alsó részében foglaltuk össze. Most már minden adat rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy a tartó szélső nyíróerő- és nyomatékábráját megrajzoljuk (9.7/b és 9.7/c ábra).

9.1 táblázat. A számítási eredmények összefoglalása.

Terhelési esetek			Támasz-nyomatékok		Támaszerők						Maximális mezőnyomatékok		
			M_B	M_C	A	B_1	B_2	C_2	C_3	D	M_1	M_2	M_3
			kNm		kN						kNm		
Egységnyi terhek	I.		-1.156	0.288	0.807	1.193	0.289	-0.289	-0.0578	0.0578	–	–	–
	II.		-1.128	-1.277	-0.188	0.188	2.470	2.530	0.256	-0.256	–	–	–
	III		0.376	-1.656	0.0627	-0.0627	-0.406	0.406	2.831	2.169	–	–	–
Tényleges terhek	1.		-17.31	-8.161	12.11	17.90	6.839	3.161	16.63	13.37	24.21	–	14.90
	2.		-14.07	-12.11	2.654	7.346	20.39	19.61	7.421	2.579	–	11.93	–
	3.		-25.63	-9.217	10.72	19.28	23.28	16.72	6.843	3.157	–	–	–
	4.		12.56	-18.73	2.905	7.095	18.77	21.23	18.75	11.26	–	–	–

10

Irodalom

Bárczi István – Zalka Károly: Mechanika III. Kézirat. 235-YMÉMF. Budapest, 1990

Freund Péter: Segédletek a Mechanika és Tartószerkezetek c. tárgyhoz. Budapest, 2015

Holzmann Ildikó – Szűcs Sándor – Szabó Lászlóné – Zalka Károly: Mechanika példatár III. kötet. Statikailag határozatlan tartók. Kézirat. Tankönyvkiadó, J 15-564. Budapest, 1990

Korda János – Ruzicska Béla – Zentai Zoltán: Gyűjtemény tartószerkezetek tervezéséhez. I-II-II kötet. Iparterv, Budapest, 1964

Muttnyánszky Ádám: Szilárdságtan. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984

Palotás László (szerk.): Mérnöki Kézikönyv. II. kötet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984

Szabó János – Árvai Kálmán: Tartók elmélete. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988

Szabó János – Fáber Miklós – Visontai József: Tartók sztatikája II. Kézirat. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967

Szabó János – Roller Béla: Rúdszerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971

Szabó János – Roller Béla: Cross eljárása keretszerkezetek számítására. Kézirat. Tankönyvkiadó, Budapest, 1975

Zalka Károly: Mechanika III, Határozatlan tartók. Előadásvázlatok. Kézirat, Budapest, 1983-2010