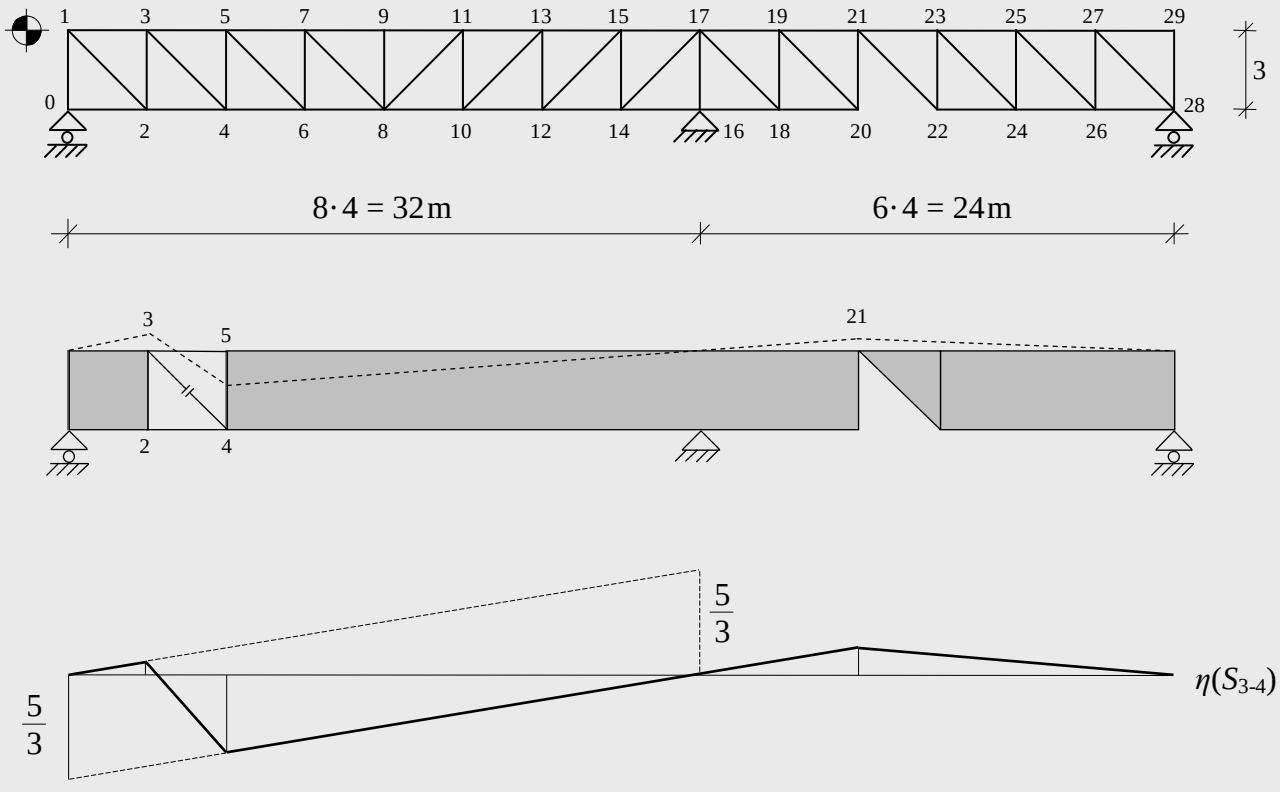
Tartók statikája II

Zalka Károly



Budapest, e-kiadás

© Zalka Károly, 1984; 2009 – 2024, e-kiadás

Szabad ezt a kiadványt sokszorosítani, terjeszteni és elektronikus
vagy bármely formában tárolni.
Tilos viszont a kiadványt bármely formában megváltoztatni és bármely formában értékesíteni.

Lektorok:

Horváth Lászlóné Fazakas Margit
okl. építőmérnök

Lőrincz György PhD
okl. építőmérnök

v4.15, 2024 november 30

Tartalomjegyzék

Bevezetés **1**

1. Tartók igénybevételeinek szélső értékei **2**
1.1 Bevezetés 2
1.2 Terhelési sémák többtámaszú tartók szakaszosan történő terhelése esetén 2
1.3 Számpélda 8
1.4 Mozgó erőkkel terhelt tartók vizsgálata hatásábrák segítségével 13
1.4.1 A hatásábrák tulajdonságai és előállítása határozott tartók esetében 14
1.4.2 Kéttámaszú tartók hatásábrái 15
1.4.3 Csuklós többtámaszú tartók (Gerber-tartók) hatásábrái 18
1.4.4 Görbe tengelyű tartók hatásábrái 19
1.4.5 Átviteles tartók hatásábrái 21
1.4.6 Párhuzamos övű rácsos tartók hatásábrái 24
1.4.7 Háromcsuklós tartók hatásábrái 28
1.4.8 Mértékadó teherhelyzet megállapítása. A viszonyított terhek szabálya 31
1.4.9 Határozatlan tartók hatásábrái 36
1.4.10 Elmozdulási hatásábrák 38

2. Gyakorló feladatok mozgó erőkkel terhelt tartók vizsgálatához **40**
2.1 Kéttámaszú tartó hatásábrái 40
2.2 Törtvonalú kéttámaszú tartó hatásábrái 42
2.3 Konzoltartó hatásábrái 46
2.4 Két oldalon konzolos kéttámaszú tartó hatásábrái 47
2.5 Csuklós többtámaszú tartó (Gerber-tartó) hatásábrái 49
2.6 Háromcsuklós tartó hatásábrái 51
2.7 Párhuzamos övű rácsos tartó hatásábrái 54
2.8 Két végén befogott tartó alakhelyes hatásábrái 58
2.9 Háromtámaszú tartó alakhelyes hatásábrái 60
2.10 Négynyílású folytatólagos tartó alakhelyes hatásábrái 61
2.11 Erőrendszerrel terhelt kéttámaszú tartó: mértékadó teherhelyzet 62
2.12 Kéttámaszú tartó eltolódási hatásábrája 64
2.13 Kéttámaszú tartó elfordulási hatásábrája 67

3. Felületszerkezetek **71**
3.1 Bevezetés 71
3.2 Számítási elvek 72
3.3 Tárcsák 74
3.3.1 A tárcsafeladat megoldása 75
3.3.2 A tárcsaegyenlet 75
3.3.3 Faltartók 78
3.3.4 Közelítő eljárások 80
3.4 Lemezek 80
3.4.1 A rugalmas lemezelmélet alapjai 81
3.4.2 A lemezegyenlet megoldásáról 84

3.4.3 A lemezegyenlet megoldása differenciaegyenletekkel 85
3.4.4 A Marcus-féle eljárás 91
3.4.5 Lemezegyüttes 95
3.5 Lemezművek 95
3.6 Héjszerkezetek 98
3.6.1 Bevezetés 98
3.6.2 A héjszerkezetek erőtani számításáról 101
3.6.3 Néhány egyszerű héjszerkezet vizsgálata 103
3.6.3.1 Dongahéj 103
3.6.3.2 Magasfalú körhengertartály közelítő vizsgálata 106
3.6.3.3 Körszimmetrikus medence közelítő vizsgálata 107

4. Épületek merevítőrendszerének szilárdsági vizsgálata vízszintes terhek hatására 110
4.1 Vízszintes terhek 111
4.1.1 Szél 111
4.1.2 Földrengés 114
4.1.3 Építési pontatlanság 117
4.1.4 Összehasonlítás 118
4.2 Merevítés keretekkel 119
4.2.1 Szimmetrikus elrendezés 119
4.2.2 Aszimmetrikus elrendezés 119
4.2.3 Maximális tetőponti eltolódás 121
4.2.4 Maximális oszlop- és gerendanyomatékok 123
4.3 Harántvázas épületek merevítése egyirányú falrendszerrel 133
4.3.1 Alapfogalmak 133
4.3.1.1 Eltolódási merevség 133
4.3.1.2 Nyírásközéppont 134
4.3.2 A falakra jutó erők meghatározása 135
4.3.3 Az elmozdulások meghatározása 138
4.4 Kétirányú falrendszerrel merevített épületek 139
4.4.1 A falakra jutó erők meghatározása 139
4.4.2 Az elmozdulások meghatározása 143
4.5 Kiegészítő megjegyzések 144

5. Gyakorló feladatok vízszintes erőkkel terhelt épületek vizsgálatához 146
5.1 Merevítés keretekkel 146
5.2 Keret maximális tetőponti eltolódása 147
5.3 Merevítés párhuzamos falakkal 149
5.4 Merevítés kétirányú falakkal 151
5.5 Kétirányú falakkal merevített 15-szintes épület *x* és *y* irányú vízszintes teherrel 154

6. Többtámaszú tartók számítása a képlékenységtan elvei alapján 157

7. Rugalmas alátámasztású tartószerkezetek 162
7.1 Rugalmas alátámasztású befogott kéttámaszú tartó 163
7.2 Rugalmas közegbe ágyazott körtartó 166
7.3 Rugalmas ágyazású egyenes tengelyű tartó 170

8. Irodalomjegyzék 175

Bevezetés

Korábbi tanulmányaink során megismerkedhettünk a statika alapfogalmaival. A Mechanika I (Statika), Mechanika II (Szilárdságtan) és Mechanika III (Tartók statikája I: Határozatlan tartók) tárgyak után a Tartók statikája II vegyes témákkal foglalkozik és a statika néhány „válogatott” fejezetét ismerteti.

Tanulmányaink során először figyelembe fogjuk venni, hogy az esetleges terhek nem szükségszerűen a tartó teljes hossza mentén működnek, hanem esetleg szakaszonként és a helyüket is változtathatják. Elrendezésük és helyzetük jelentősen befolyásolhatja az igénybevételek alakulását. A teherrendszer legkedvezőtlenebb (legnagyobb igénybevételeket okozó) elrendezését csak egyes speciális esetekben tudjuk ránézéssel megállapítani, bonyolultabb esetekben szükség van törvényszerűségek megállapítására és felhasználására. Erre adnak lehetőséget a hatásábrák.

Korábbi tanulmányaink rúdszerkezetek vizsgálatára korlátozódtak. Tartószerkezeteink jelentős része viszont felületszerkezeteket is tartalmaz és ezek a felületszerkezetek – tárcsák, lemezek, héjak – a szerkezetek viselkedése során jelentős szerephez juthatnak. A felületszerkezetek erőjátéka rendszerint igen bonyolult, és a gyakorlati számítás általában számítógéppel történik, így a harmadik fejezet csak egy bevezetőt ad e szerkezettípusokhoz. Ismerteti a főbb felülettípusokat és összefoglalja a számítási elveket. Bemutat néhány közelítő eljárást is egyes típusok legnagyobb igénybevételeinek gyors – bár közelítő – meghatározásához.

Többszintes épületek vizsgálata általában már néhány szint esetén is gépi számítást igényel. Bizonyos – és a gyakorlatban is sokszor előforduló – esetekben, amikor az épület viselkedésében meghatározó szerepet játszó szerkezeti elemek merevsége és elrendezése nem változik a magasság mentén, elemi statikai megfontolások segítségével is egyszerű megoldáshoz juthatunk. Ilyen egyszerű módszert mutatunk be a negyedik fejezetben, ahol zárt képleteket vezetünk le az épület maximális alakváltozásaira és meghatározzuk, hogy a külső (vízszintes) teherből mennyi jut az épület kulcsfontosságú szerkezeti elemeire.

Végül – igen vázlatosan – foglalkozunk többtámaszú tartók képlékeny viselkedésével és rugalmas alátámasztású tartók igénybevételeinek meghatározásával.

Budapest, 2009 december

Zalka Károly

A 2015-ös (v4) e-kiadás új 4.1.1 pontot és néhány kisebb kiegészítést tartalmaz.

A korábbi kéziratokat Farkas Dániel és Rákóczy Katalin nézte át, majd a jegyzetet Horváth Lászlóné Fazakas Margit és Lőrincz György lektorálta. Gondos munkájukat ezúton is szeretném megköszönni.

Budapest, 2015 március

Z. K.

Jelen v4.15 e-kiadás néhány kisebb módosítást tartalmaz.

Budapest, 2024 november

Z. K.

1

Tartók igénybevételeinek szélső értékei

1.1 Bevezetés

A méretezési szabályzatok azt írják elő, hogy az erőtani számításban a terheket a legkedvezőtlenebb, ún. mértékadó elrendezéssel kell figyelembe venni. Ezt az előírást az indokolja, hogy pl. többtámaszú tartók egyes keresztmetszeteiben nem akkor keletkeznek a legnagyobb igénybevételek, amikor az esetleges teher a tartó teljes hosszában működik, hanem akkor, amikor a vizsgált keresztmetszet szempontjából legkedvezőtlenebb elrendezésű teherrendszer fejti ki hatását.

1.2 Terhelési sémák többtámaszú tartók szakaszosan történő terhelése esetén

A következőkben az egyes támasznyomatékok, "mezőnyomatékok", valamint támaszerők szempontjából legkedvezőtlenebb terhelési esetek előállítását tűzzük ki célul, ha a terhek támaszközönként szakaszosan működnek. Az állandó terhek jellegükből következően állandóan terhelik a szerkezetet, így azokat minden esetben működtetjük a szerkezetre. Az esetleges terheket azonban a valóságos helyzetnek megfelelően egyes támaszközökben működőnek, más támaszközökben pedig eltávolítottnak tekinthetjük. Ha ez utóbbiakat a tartó valamely támaszközében figyelembe vesszük, akkor a támaszköz teljes hosszában számolunk vele.

Bevezetésként vizsgáljuk meg az 1.1 ábra nézetrajzán feltüntetett héttámaszú tartó támasznyomatékait abban az esetben, amikor a tartónak csupán egy – a *CD* – támaszköze terhelt. Az egyszerűbb számolás érdekében legyen a terhelés q = 100 kN/m, a támaszköz l = 1 m és I = állandó. (I = 1-el számolhatunk, mert a tényleges érték kiesik a számítás során.)

A merevségi számok:

$$k_1 = k_6 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{1} = 0.75\,, \qquad k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{1} = 1$$

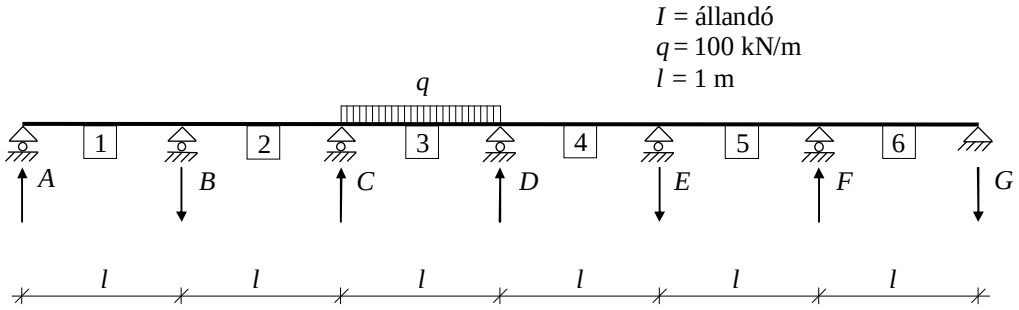
A nyomatékosztási tényezők:

$$\alpha_{B1} = \alpha_{F6} = \frac{0.75}{1.75} = 0.428\,, \qquad \alpha_{B2} = \alpha_{F5} = \frac{1}{1.75} = 0.572$$

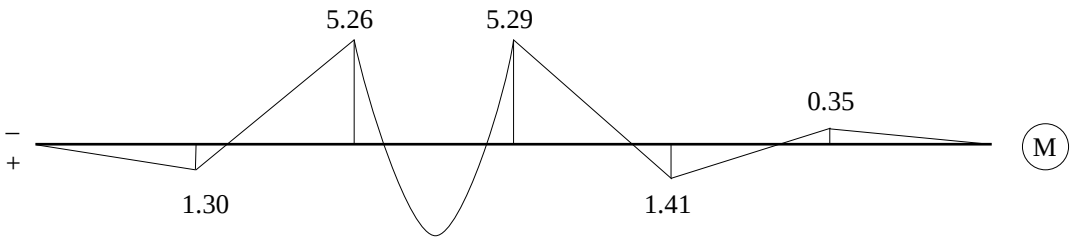
$$\alpha_{C2} = \alpha_{C3} = \alpha_{D3} = \alpha_{D4} = \alpha_{E4} = \alpha_{E5} = \frac{1}{2} = 0.5$$

A kezdeti befogási nyomatékok:

$$M_{C,3}^{0} = -M_{D,3}^{0} = \frac{ql^2}{12} = \frac{100 \cdot 1^2}{12} = 8.33\,\text{kNm}$$



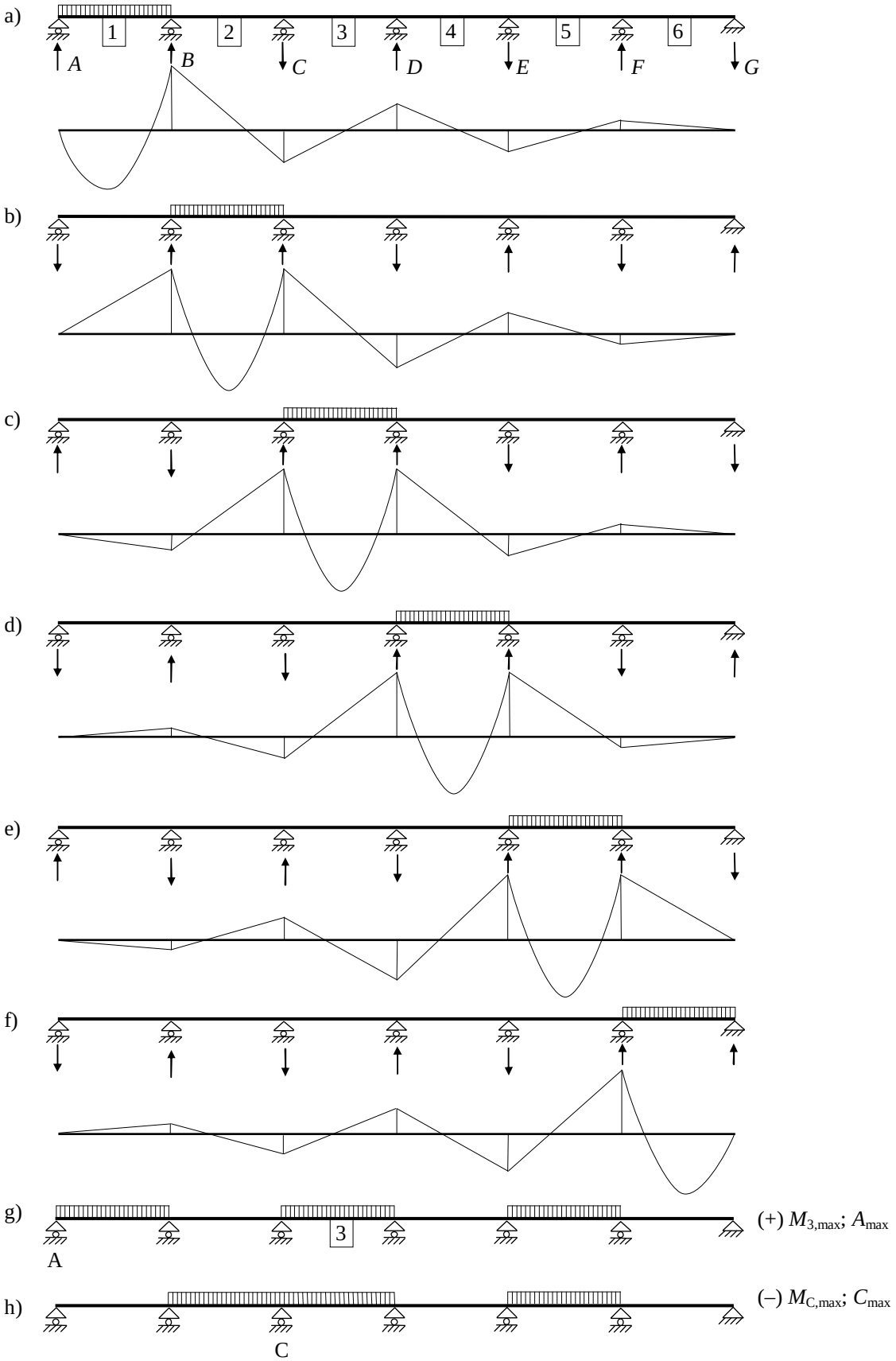
B		C		D		E		F	
1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
0.428	0.572	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.572	0.428
			+8.33	–8.33					
	–2.08	–4.17	–4.16	–2.08					
+0.89	+1.19	+0.60	+2.60	+5.21	+5.20	+2.60			
	–0.80	–1.60	–1.60	–0.80	–0.65	–1.30	–1.30	–0.65	
+0.34	+0.46	+0.23	+0.36	+0.72	+0.73	+0.36	+0.19	+0.37	+0.28
	–0.15	–0.30	–0.29	–0.15	–0.13	–0.27	–0.28	–0.14	
+0.06	+0.09	+0.04	+0.07	+0.14	+0.14	+0.07	+0.04	+0.08	+0.06
	–0.03	–0.06	–0.05	–0.02	–0.03	–0.05	–0.06	–0.03	
+0.01	+0.02			+0.02	+0.03			+0.02	+0.01
+1.30	–1.30	–5.26	+5.26	–5.29	+5.29	+1.41	–1.41	–0.35	+0.35



1.1 ábra. Héttámaszú tartó *CD* szakasz-teherrel.

Az 1.1 ábrán a nyomatékosztást és a tartó nyomatékábráját is feltüntettük. Megállapíthatjuk, hogy a terhelt mezőt határoló támaszok keresztmetszetében keletkezik a legnagyobb negatív hajlító nyomaték, innen távolodva a támasznyomatékok értéke rohamosan csökken, előjele pedig váltakozva pozitív és negatív. A nézetrajzba berajzoltuk a támaszerők irányát is.

Az 1.2/a-f ábrákon ugyanezen héttámaszú tartó minden támaszközének külön-külön való megterhelése útján előállítottuk az ezekhez tartozó nyomatékábrák alakhelyes diagramját és bejelöltük a támaszerők irányát.



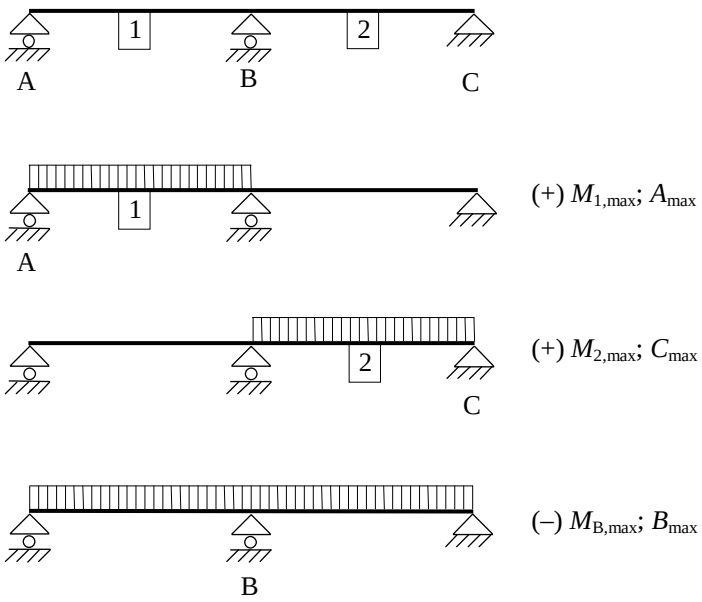
1.2 ábra. Héttámaszú tartó. Jellemző terhelési esetek.

Határozzuk meg azt a terhelési esetet, amely a 3. támaszközben a pozitív nyomatéki maximumot ($M^{+}_{3,\max}$), amely a *C* támasz feletti keresztmetszetben a negatív nyomatéki maximumot ($M^{-}_{C,\max}$), továbbá amely a *C* támaszerő maximumát ($C_{\max}$) szolgáltatja.

Megállapíthatjuk, hogy a 3. támaszközben az „a”, a „c” és az „e” jelű terhelést eset okoz pozitív nyomatékot. Valamely támaszközben tehát a pozitív nyomatéki maximumot úgy kapjuk, ha a szóban forgó támaszközt, valamint – a szomszédos támaszközöket kihagyva – minden második támaszközt megterheljük (1.2/g ábra). Megjegyezzük, hogy ugyanez a teherelrendezés az 1. és az 5. mezőben is pozitív nyomatéki maximumot okoz.

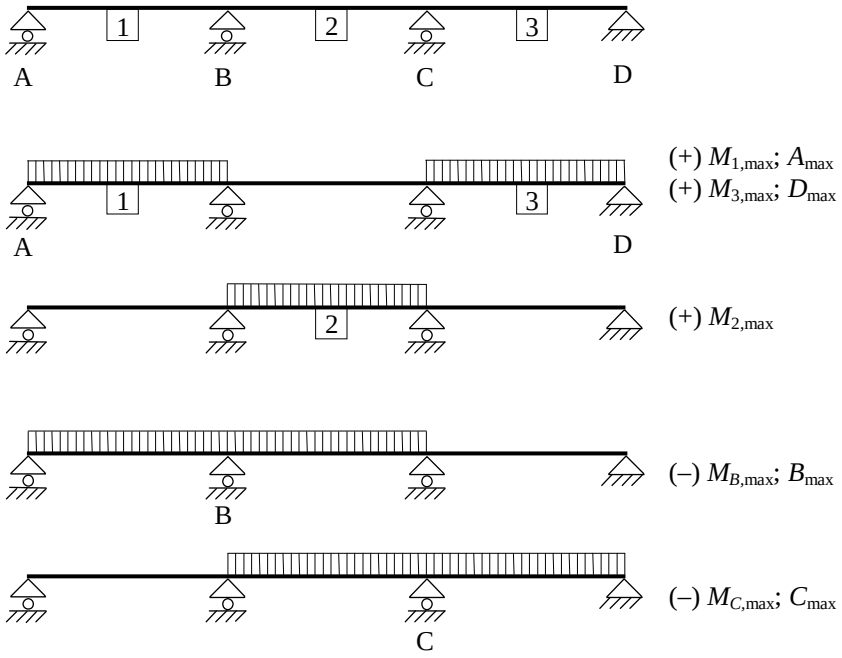
Megállapíthatjuk azt is, hogy a *C* támasz feletti keresztmetszetben a „b”, a „c” és az „e” jelű terhelési eset okoz negatív nyomatéki maximumot. Valamely támasz feletti keresztmetszetben a negatív nyomatéki maximumot tehát úgy kapjuk, ha a szóban forgó támasztól balra és jobbra eső támaszközt, valamint – a szomszédos támaszközöket kihagyva – minden második támaszközt megterheljük (1.2/h ábra).

Végül megállapíthatjuk, hogy a *C* támaszban a „b”, a „c” és az „e” jelű terhelési eset eredményez felfelé irányuló támaszerőt. Ebből az következik, hogy valamely támaszerő maximumát ugyanazon terhelési eset adja, amely ugyanazon támasz feletti keresztmetszetben a támasznyomaték maximumát is szolgáltatja (1.2/h ábra). A szélső támaszokban fellépő támaszerő maximumát (pl. $A_{\max}$-ot) abból a terhelési esetből kapjuk, amely a szélső támaszközben a pozitív nyomatéki maximumot eredményezi (1.2/g ábra).



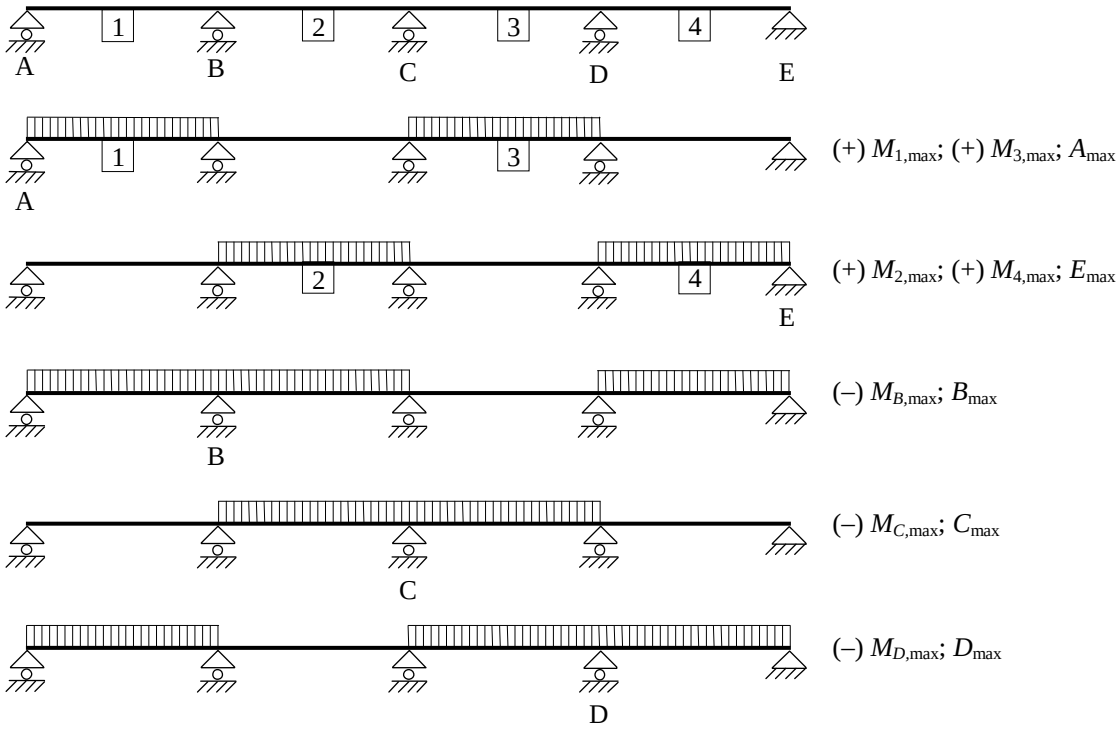
1.3 ábra. Háromtámaszú tartó.

Az összes jellemző igénybevételi érték megállapításához annyi terhelést eset (séma) előállítása szükséges, ahány támaszú a tartó. A szélső igénybevételi ábrákat az összes terhelési sémából meghatározott igénybevételi ábrák azonos léptékben való egymásra rajzolása és a határoló vonalak hangsúlyos megrajzolása útján kapjuk. (Erre mutat példát az 1.7 ábra.)



1.4 ábra. Négytámaszú tartó.

Az 1.3, 1.4 és 1.5 ábrán példaként a három, négy és öttámaszú tartó terhelési sémáit rajzoltuk meg. Minden terhelési eset vázlata mellé odaírtuk azoknak az igénybevételeknek a jelölését, melyek szélső értéke az illető terhelési sémából meghatározható.

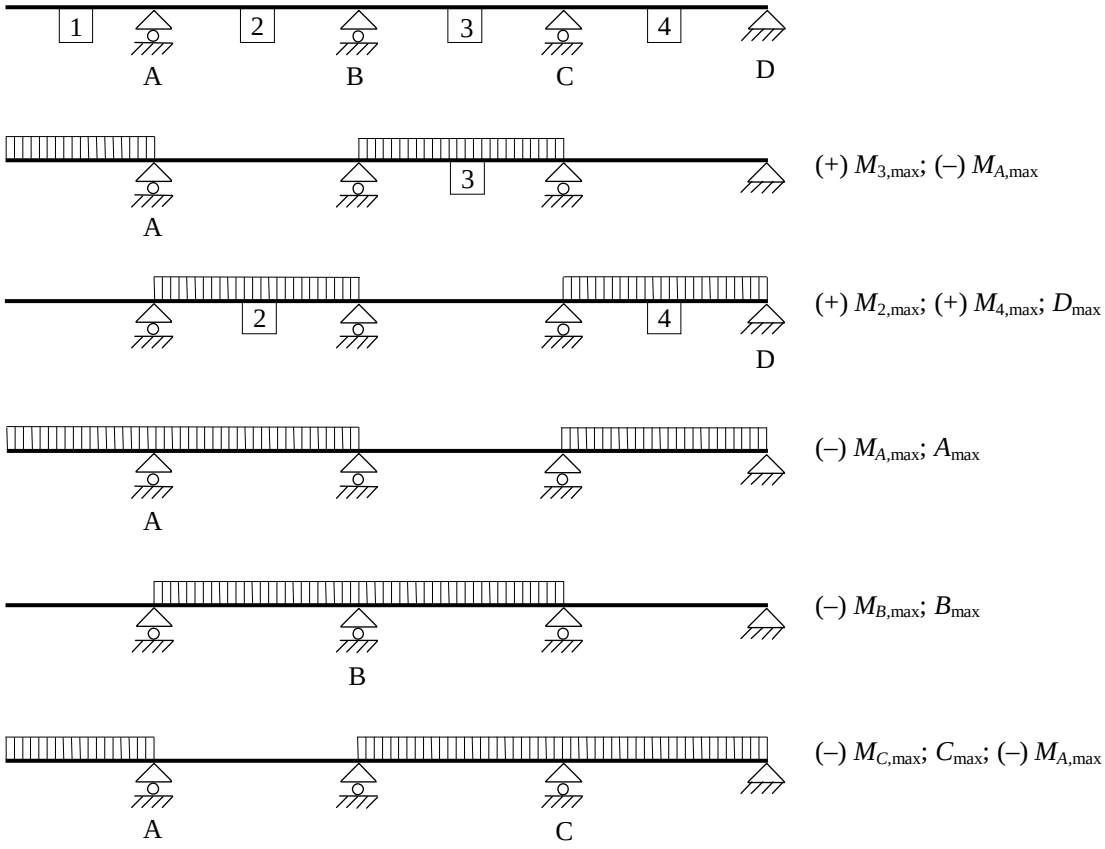


1.5 ábra. Öttámaszú tartó.

Könnyű belátni, hogy a maximális támasz- és mezőnyomatékra, valamint támaszerőkre fent megállapított törvényszerűségek konzolos többtámaszú tartók esetében is érvényesek, azzal a kiegészítéssel, hogy egy konzol

a) a terhelési esetek számát eggyel növeli,
b) a konzol külön mezőnek számít.

A mértékadó igénybevételek előállításához szükséges terhelési sémákat az 1.6 ábrán foglaljuk össze egy négytámaszú konzolos tartó esetében.



1.6 ábra. Konzolos négytámaszú tartó.

1.3 Számpélda

Határozzuk meg az 1.7 ábra nézetrajzán feltüntetett, végig állandó keresztmetszetű négytámaszú tartó szélső igénybevételeit és rajzoljuk meg a nyíróerők és a nyomatékok burkoló ábráját.

G-vel ill. *P*-vel és *g*-vel ill. *p*-vel a biztonsági tényezővel szorzott állandó ill. esetleges terhet jelöltük.

Minthogy az igénybevételek mind koncentrált, mind megoszló terhelés esetén a terhelő erővel egyenesen arányosak, a jelentős mennyiségű számolási munkát csökkenthetjük, ha először külön-külön csupán az egyes támaszközöket egységnyi teherrel terheljük és a végleges igénybevételeket ezekből, a terhek tényleges értékével való szorzása, ill. a szuperpozíció elvének alkalmazása útján határozzuk meg.

Határozzuk meg először az egységnyi terhek által előidézett támasznyomatékokat és támaszerőket. Három ilyen esetünk lesz (1.8 ábra):

I-es eset: 2 db 1 kN nagyságú koncentrált erő az 1-es mező harmadaiban,
II-es eset: p = 1 kN/m megoszló teher a 2-es mezőben,
III-as eset: p = 1 kN/m megoszló teher a 3-as mezőben.

A merevségi számok:

$$k_1 = \frac{3}{4}\frac{I_1}{l_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{6} = 0.125\,, \qquad k_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{1}{5} = 0.2\,, \qquad k_3 = \frac{3}{4}\frac{I_3}{l_3} = \frac{3}{4}\frac{1}{5} = 0.15$$

A nyomatékosztási tényezők:

$$\alpha_{B1} = \frac{0.125}{0.325} = 0.385\,, \qquad \alpha_{B2} = \frac{0.2}{0.325} = 0.615$$

$$\alpha_{C2} = \frac{0.2}{0.35} = 0.572\,, \qquad \alpha_{C3} = \frac{0.15}{0.35} = 0.428$$

<u>I-es jelű eset</u> (két 1 kN nagyságú koncentrált erő az 1. rúdon – 1.8/a ábra):

Kezdeti befogási nyomaték:

$$M_{B,1}^{0} = -\frac{1}{3}Fl = -\frac{1}{3}1\cdot 6 = -2.0 \text{ kNm}$$

A nyomatékosztás eredményeként nyert támasznyomatékok:

$$M_{B,1} = -1.156 \text{ kNm}\,, \qquad M_{C,2} = 0.288 \text{ kNm}$$

A támaszerők:

$$A = 1 - \frac{1.156}{6} = 0.807 \text{ kN}\,, \qquad B_1 = 1 + \frac{1.156}{6} = 1.193 \text{ kN}$$

$$B_2 = \frac{1.156 + 0.288}{5} = 0.289\ \text{kN}, \qquad C_2 = -\frac{1.156 + 0.288}{5} = -0.289\ \text{kN}$$

$$C_3 = -\frac{0.288}{5} = -0.0578\ \text{kN}, \qquad D = \frac{0.288}{5} = 0.0578\ \text{kN}$$

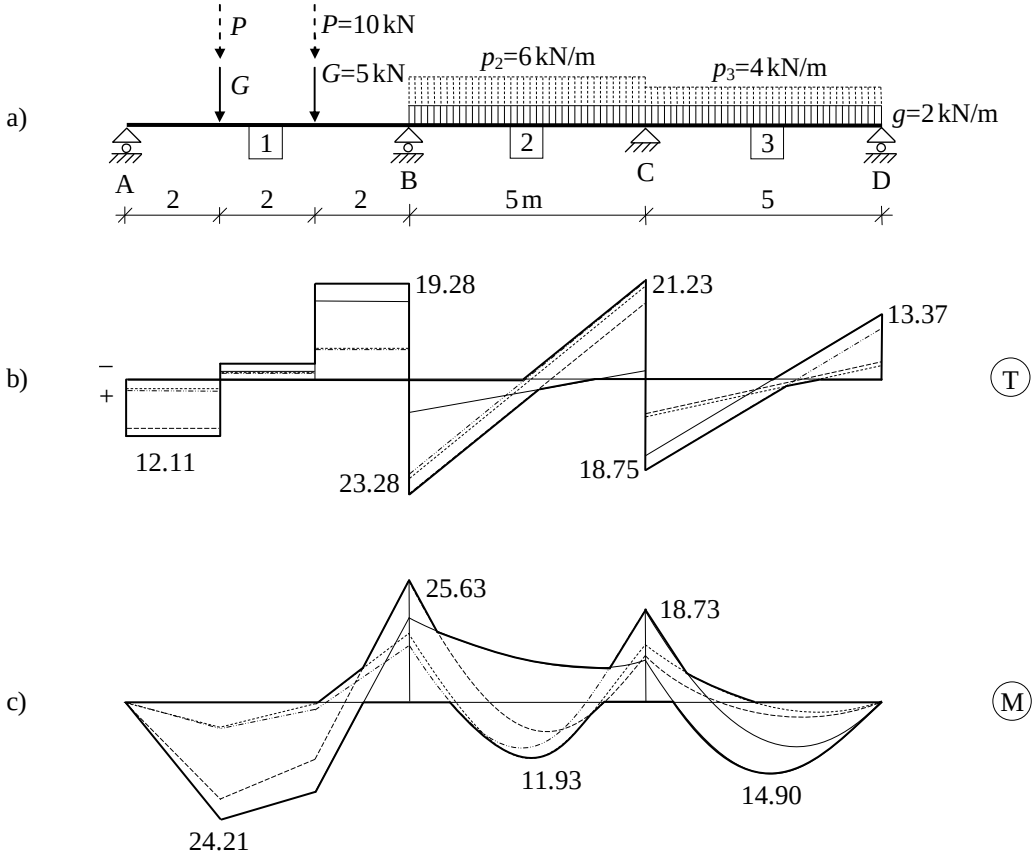
II-es jelű eset (p = 1 kN/m megoszló teher a 2. rúdon – 1.8/b ábra):

Kezdeti befogási nyomaték:

$$M_{B,2}^0 = -M_{C,2}^0 = \frac{ql^2}{12} = 2.08\ \text{kNm}$$

A nyomatékosztás eredményeként nyert támasznyomatékok:

$$M_{B,1} = -1.128\ \text{kNm}, \qquad M_{C,2} = -1.277\ \text{kNm}$$



1.7 ábra. Négytámaszú tartó szélső igénybevételei.

A támaszerők:

$$A = \frac{1.128}{6} = 0.188 \text{ kN}, \qquad B_1 = -\frac{1.128}{6} = -0.188 \text{ kN}$$

$$B_2 = \frac{1 \cdot 5}{2} - \frac{1.227 - 1.128}{5} = 2.47 \text{ kN}, \qquad C_2 = 2.5 + 0.03 = 2.53 \text{ kN}$$

$$C_3 = \frac{1.277}{5} = 0.255 \text{ kN}, \qquad D = -\frac{1.277}{5} = -0.255 \text{ kN}$$

III-as jelű eset (p = 1 kN/m megoszló teher a 3. rúdon – 1.8/c ábra):

Kezdeti befogási nyomaték:

$$M_{C,3}^{0} = \frac{ql^2}{8} = 3.125 \text{ kNm}$$

A nyomatékosztás eredményeként nyert támasznyomatékok:

$$M_{B,1} = 0.376 \text{ kNm}, \qquad M_{C,2} = -1.656 \text{ kNm}$$

A támaszerők:

$$A = \frac{0.376}{6} = 0.0627 \text{ kN}, \qquad B_1 = -\frac{0.376}{6} = 0.0627 \text{ kN}$$

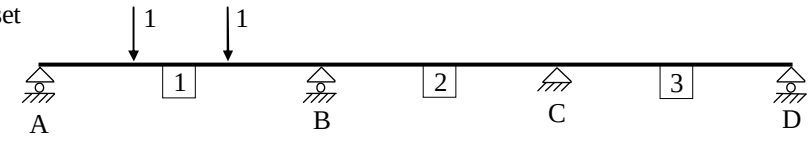
$$B_2 = \frac{-0.376 - 1.656}{5} = -0.406 \text{ kN}, \qquad C_2 = \frac{0.376 + 1.656}{5} = 0.406 \text{ kN}$$

$$C_3 = 2.5 + \frac{1.656}{5} = 2.831 \text{ kN}, \qquad D = 2.5 - \frac{1.656}{5} = 2.169 \text{ kN}$$

A számítás eredményeit a jobb áttekinthetőség érdekében az 1.1 táblázat felső részében foglaltuk össze.

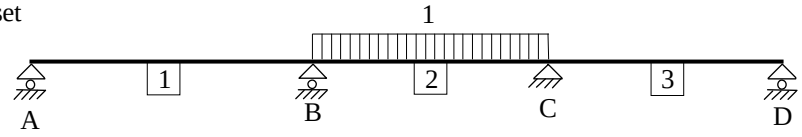
Az egységterhek hatására keletkező igénybevételek ismeretében most már könnyen meghatározhatjuk a tényleges terhekhez tartozó igénybevételek értékeit. A négytámaszú tartó esetében ezeket négy terhelési eset (séma) figyelembevételével kapjuk meg. A négy terhelési esetet az 1.4 ábrán vázoltuk.

a) I-es eset



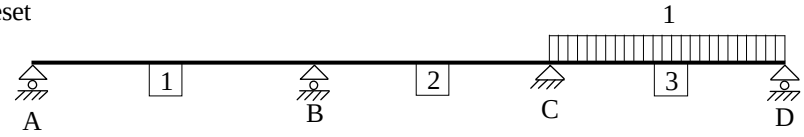
0.385	0.615	0.572	0.428
–2.000			
+0.770	+1.230	+0.615	
	–0.176	–0.352	–0.263
+0.068	+0.108	+0.054	
	–0.015	–0.031	–0.023
+0.006	+0.009	+0.005	
		–0.003	–0.002
–1.156	+1.156	+0.288	–0.288

b) II-es eset



0.385	0.615	0.572	0.428
	+2.080	–2.080	
–0.800	–1.280	–0.640	
	+0.778	+1.556	+1.164
–0.299	–0.479	–0.240	
	+0.069	+0.137	+0.103
–0.027	–0.042	–0.021	
	+0.006	+0.012	+0.009
–0.002	–0.004	–0.002	
		+0.001	+0.001
–1.128	+1.128	–1.277	+1.277

c) III-as eset



0.385	0.615	0.572	0.428
			3.125
	–0.892	–1.785	–1.340
0.343	0.549	0.274	
	–0.078	–0.156	–0.118
0.030	0.048	0.024	
	–0.007	–0.014	–0.010
0.003	0.004	0.002	
		–0.001	–0.001
0.376	–0.376	–1.656	1.656

1.8 ábra. Az egységterhek I., II. és III. esetének számítása.

Az 1. terhelési eset (lásd az 1.1 táblázat alulról negyedik sorát):

$$M_B = -1.156\cdot 15 \; -1.128\cdot 2 \; +0.376\cdot 6 = -17.314 \text{ kNm}$$

$$M_C = 0.288\cdot 15 \; -1.277\cdot 2 \; -1.656\cdot 6 = -8.161 \text{ kNm}$$

$$A = 0.807\cdot 15 \; -0.1883\cdot 2 \; +0.0627\cdot 6 = 12.105 \text{ kN}$$

$$B_1 = 1.193\cdot 15 \; -0.1883\cdot 2 \; -0.0627\cdot 6 = 17.895 \text{ kN}$$

$$B_2 = 0.289\cdot 15 \; +2.470\cdot 2 \; -0.406\cdot 6 = 6.839 \text{ kN}$$

$$C_2 = -0.289\cdot 15 \; +2.530\cdot 2 \; +0.406\cdot 6 = 3.161 \text{ kN}$$

$$C_3 = -0.0587\cdot 15 \; +0.256\cdot 2 \; +2.831\cdot 6 = 16.631 \text{ kN}$$

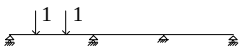
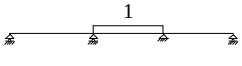
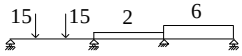
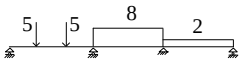
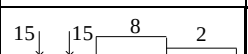
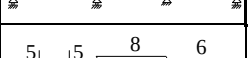
$$D = 0.0587\cdot 15 \; +0.256\cdot 2 \; +2.169\cdot 6 = 13.369 \text{ kN}$$

$$(+)M_{1\max} = 2\cdot 12.105 = 24.21 \text{ kNm}$$

$$(+)M_{3\max} = \frac{13.369^2}{2\cdot 6} = 14.90 \text{ kNm}$$

Értelemszerűen, és ezzel teljesen azonos módon számíthatjuk a 2., 3. és 4. terhelési eset szerinti terhelés hatására fellépő igénybevételeket is. A számítás eredményeit az 1.1 táblázat alsó részében foglaltuk össze. Most már minden adat rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy a tartó szélső nyíróerő- és nyomatékábráját megrajzoljuk (1.7/b és 1.7/c ábra).

1.1 táblázat. A számítási eredmények összefoglalása.

Terhelési sémák			Támasz-nyomatékok		Támaszerők						Maximális mezőnyomatékok		
			M_B	M_C	A	B_1	B_2	C_2	C_3	D	M_1	M_2	M_3
			kNm		kN						kNm		
Egységnyi terhek	I.		-1.156	0.288	0.807	1.193	0.289	-0.289	-0.0578	0.0578	–	–	–
	II.		-1.128	-1.277	-0.188	0.188	2.470	2.530	0.256	-0.256	–	–	–
	III		0.376	-1.656	0.0627	-0.0627	-0.406	0.406	2.831	2.169	–	–	–
Tényleges terhek	1.		-17.31	-8.161	12.11	17.90	6.839	3.161	16.63	13.37	24.21	–	14.90
	2.		-14.07	-12.11	2.654	7.346	20.39	19.61	7.421	2.579	–	11.93	–
	3.		-25.63	-9.217	10.72	19.28	23.28	16.72	6.843	3.157	–	–	–
	4.		12.56	-18.73	2.905	7.095	18.77	21.23	18.75	11.26	–	–	–

1.4 Mozgó erőkkel terhelt tartók vizsgálata hatásábrák segítségével

A gyakorlatban sűrűn előfordul, hogy a tartón a terhek folyamatosan változtatják helyzetüket. A mozgó járművek és daruk terhéből az azokat hordó tartók valamely keresztmetszetében változó nagyságú igénybevételek és alakváltozások keletkeznek. Új probléma jelentkezik: hová helyezzük a terheket, hogy bizonyos keresztmetszetekben szélső hatásokat – igénybevételeket és alakváltozásokat – kapjunk. Erre a kérdésre a hatásábrák felhasználásával adhatunk általános érvényű választ.

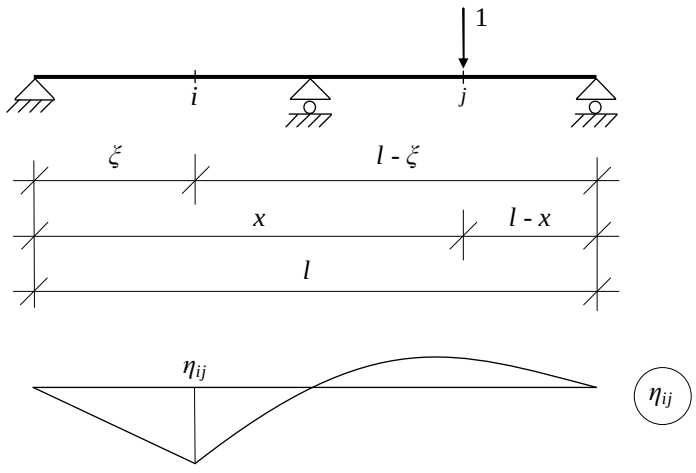
A hatásábra olyan ábra, amelynek minden egyes ordinátája megmutatja, hogy a tartón mozgó és éppen az ordináta felett lévő egységnyi nagyságú teherből mekkora hatás keletkezik a vizsgált keresztmetszetben. A hatásábrákat célszerűen függvényekkel, a hatásfüggvényekkel adhatjuk meg. A következőkben a hatásfüggvények tulajdonságait foglaljuk össze.

Az η_{ij} hatásfüggvény megadja a j keresztmetszetnél lévő egységteher hatásának változását az i helyen. (Az 1.9 ábrán például a hatásfüggvény az i helyen keletkező nyomatékok változását adja meg.) A mozgó egységteher változó helyét x, a vizsgált keresztmetszet fix helyét pedig ξ határozza meg.

A hatásfüggvények segítségével mozgó koncentrált erő, koncentrált erőrendszer és egyenletesen megoszló teher hatása egyszerűen vizsgálható.

A j helyen lévő P koncentrált erő F hatását az i helyen úgy kapjuk meg, hogy a P erő értékét megszorozzuk a megfelelő $\eta_{F,ij}$ hatásfüggvény-ordinátával. Maximális F hatást úgy kapunk, hogy a terhet a maximális hatáshoz tartozó teherállásba – ahol a hatásábra ordinátája a legnagyobb – állítjuk.

A $P_1, P_2, \ldots, P_n$ koncentrált erőrendszer F hatását az i helyen úgy kapjuk meg, hogy minden erő értékét megszorozzuk a megfelelő hatásfüggvény-ordinátával és az értékeket előjelhelyesen összegezzük. Maximális F hatást úgy kapunk, hogy az erőket olyan teherállásba helyezzük, hogy a szorzatösszeg maximum legyen.



1.9 ábra. Az i keresztmetszet (nyomatéki) hatásábrája.

A q intenzitású d hosszúságú egyenletesen megoszló teher F hatását az i helyen úgy kapjuk meg, hogy a teher q intenzitását megszorozzuk a d távolság alatti hatásfüggvény-területtel. Maximális F hatást úgy kapunk, hogy a megoszló terhelést olyan teherállásba helyezzük, hogy a hatásfüggvény területe maximum legyen.

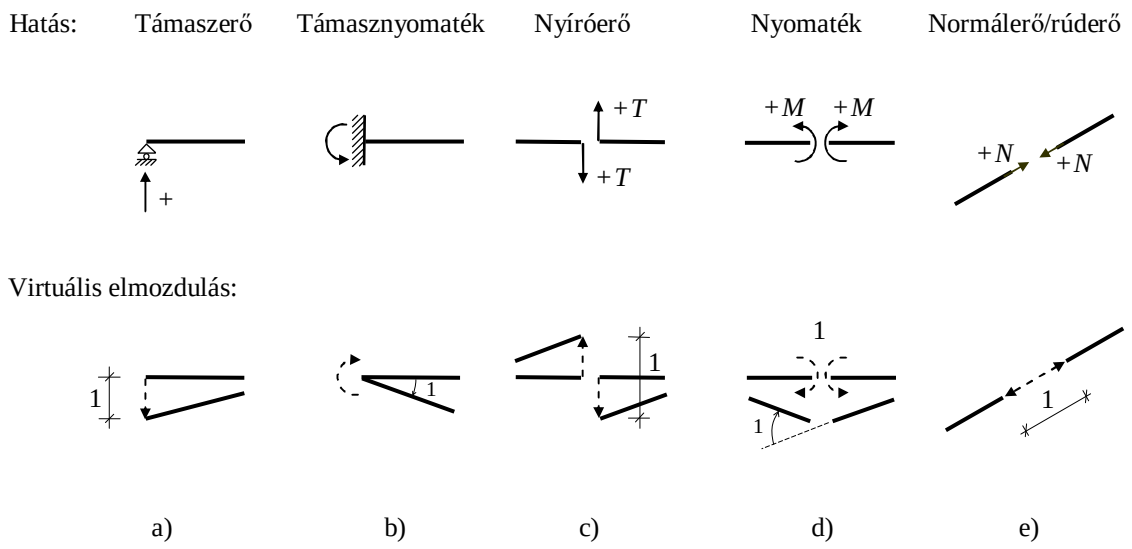
A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy hogyan állítható elő a hatásábra határozott tartók esetében.

1.4.1 A hatásábrák tulajdonságai és előállításuk határozott tartók esetében

A hatásábrákat általában két módon állíthatjuk elő: a) statikai megfontolások segítségével, analitikus úton, illetve b) szerkesztéssel, kinematikai úton. A gyakorlatban legtöbbször úgy járunk el, hogy a két módszert párhuzamosan alkalmazzuk. A hatásábra alakját gyakran szerkesztéssel tudjuk a legegyszerűbben megállapítani. Erre határozott tartók esetében a „virtuális elmozdulás-mechanizmus" tétele nyújt lehetőséget. A tétel értelmében a keresendő hatás helyén *i*-nél megszüntetjük a statikailag határozott tartó folytonosságát (átvágjuk a tartót) és a keresett hatásnak megfelelő egységnyi virtuális elmozdulást iktatunk be. Az így keletkezett egy szabadságfokú láncolat (mechanizmus) alakja megadja a keresett hatásfüggvényt, ha a beiktatott virtuális elmozdulás kompatibilis (összeférhető) a maradék kényszerekkel.

A virtuális elmozdulás lehet abszolút elfordulás és eltolódás, valamint relatív elfordulás és eltolódás. Az abszolút elfordulás (φ) órairányban pozitív, az abszolút eltolódás (e) lefelé pozitív. Két abszolút elfordulás különbséget relatív elfordulásnak ($\upsilon = \varphi_2 - \varphi_1$) vagy elfordulás-párnak, két abszolút eltolódás különbségét relatív eltolódásnak ($u = e_2 - e_1$) vagy eltolódás-párnak nevezzük.

A keresett hatásoknak megfelelő virtuális elmozdulásokat az 1.10 ábrán foglaljuk össze. Ezek a következők: támaszerő hatásfüggvény esetén egységnyi abszolút eltolódás ($e = 1,\downarrow$), befogott támasznyomaték hatásfüggvénye esetén egységnyi abszolút elfordulás ($\varphi = 1, \circlearrowleft$), nyíróerő hatásfüggvény esetén egységnyi relatív eltolódás ($u = 1,\uparrow\downarrow$), nyomaték hatásfüggvény esetén pedig egységnyi relatív elfordulás ($\upsilon = 1, \supset\subset$). Normálerő-hatásfüggvény és rácsos tartók rúderő-hatásfüggvényeinek meghatározásához egységnyi relatív eltolódást ($u = 1,\leftarrow\rightarrow$) kell beiktatni. Az ábrán látható, hogy a beiktatandó virtuális elmozdulás előjele mindig ellentétes a megfelelő hatás előjelével.



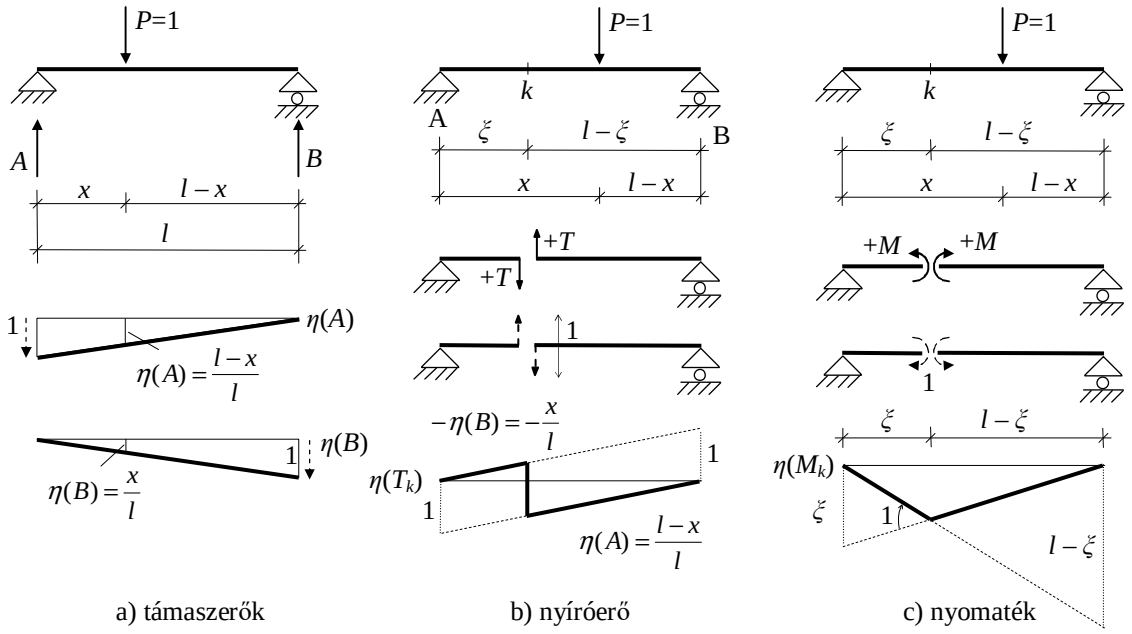
1.10 ábra. A hatásoknak megfelelő virtuális elmozdulások.

1.4.2 Kéttámaszú tartók hatásábrái

A tartón végigvonuló koncentrált teher ($P = 1$) A és B reakcióerőket, valamint egy tetszőlegesen kijelölt k keresztmetszetben nyíróerőt és nyomatékot ébreszt. A hatásábrák előállítását célszerű a reakcióerők hatásábráinak előállításával kezdeni, mert ezeket azután felhasználhatjuk a nyíróerő-, illetve nyomatéki hatásábrák előállításához is.

Ha a mozgó egységerő az A támasz felett áll, akkor az A támasznál $A = 1$ nagyságú reakcióerő ébred. Ha az egységterhet a B támasz fölé állítjuk, akkor az A támaszerő értéke $A = 0$. Ezt a két értéket felmérjük az A illetve a B támaszok alá és ezzel az A támaszerő-hatásábra két jellemző értékét meghatároztuk. Könnyű belátni, hogy a két szélső pont között a hatásábra lineárisan változik [$\eta(A)$ az 1.11/a ábrán]. Ha például a mozgó egységerő a tartó közepén áll, akkor az A támaszerő értéke 0.5. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a hatásábrát kinematikai úton állítjuk elő. A virtuális elmozdulás-mechanizmus tétele értelmében a keresett hatás helyén (az eltávolított A támasznál) az 1.10/a ábrán látható egységnyi virtuális elmozdulást kell beiktatni. Ennek hatására a tartó baloldali vége (az A támasznál) egységnyi eltolódást szenved. Ez az eltolódás úgy következik be az A támasznál, hogy közben a tartó vonala egyenes marad és az egységnyi eltolódást a B támasznál bekövetkező elfordulás teszi lehetővé. A beiktatott virtuális eltolódás így „összeférhető a maradék kényszerekkel”, vagyis a B támasz függőlegesen nem mozdul el és ott csak elfordulás jön létre.

Hasonló módon eljárva megkapjuk a B támaszerő hatásábráját is [$\eta(B)$ az 1.11/a ábrán].



1.11 ábra. Kéttámaszú tartó hatásábrái.

A k keresztmetszet nyíróerő-hatásábrájának előállításához felhasználjuk az A és B támaszerők hatásábráit (1.11/a). A nyíróerő-hatásábra két szakaszból áll (1.11/b). Amíg a mozgó egységerő a k keresztmetszettől jobbra jár, addig a nyíróerő értékét a k keresztmetszetben a balra lévő erők eredőjeként az egyetlen A támaszerő adja. Felmérhetjük tehát az $\eta(A)$ hatásábrát, de a függvény csak a B-k szakaszon érvényes. Amikor az erő balra haladva elhagyja a k keresztmetszetet, akkor az A támaszerő mellett

– ellenkező előjellel – megjelenik az egységerő is, vagyis a nyíróerő-hatásábra egységnyi ugrást mutat. A hatásábra *k*-tól balra lévő *A*-*k* szakaszát előállíthatjuk úgy is, hogy a keresztmetszettől jobbra lévő erőket vesszük figyelembe. A *k* keresztmetszettől jobbra ez esetben csak a *B* reakcióerő van. Mivel a *B* reakcióerő a *k* keresztmetszetben negatív nyíróerőt okoz, az $\eta(B)$ hatásábrát negatív előjellel kell a nyíróerő-hatásábrába bemásolni. Természetesen az $\eta(B)$ hatásábrának csak a *k* keresztmetszettől balra lévő szakasza érvényes. Ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha az $\eta(T_k)$ hatásábrát kinematikai úton állítjuk elő. Ekkor a *k* keresztmetszetben megszüntetjük a tartó folytonosságát és beiktatjuk az 1.10/c ábrán vázolt egységnyi eltolódáskülönbséget.

A *k* keresztmetszet nyomaték-hatásábrájának előállításához – hasonlóan a nyíróerő-hatásábra előállításához – felhasználjuk az *A* és *B* támaszerők hatásábráit (1.11/a). A nyomaték-hatásábra két szakaszból áll (1.11/c). Amíg a mozgó egységerő a *k* keresztmetszettől jobbra jár, addig a nyomaték értékét a *k* keresztmetszetben a balra lévő *A* támaszerő és a ξ távolság szorzata adja:

$$M_k = A\xi \qquad \text{vagyis} \qquad \eta(M_k) = \xi\eta(A)$$

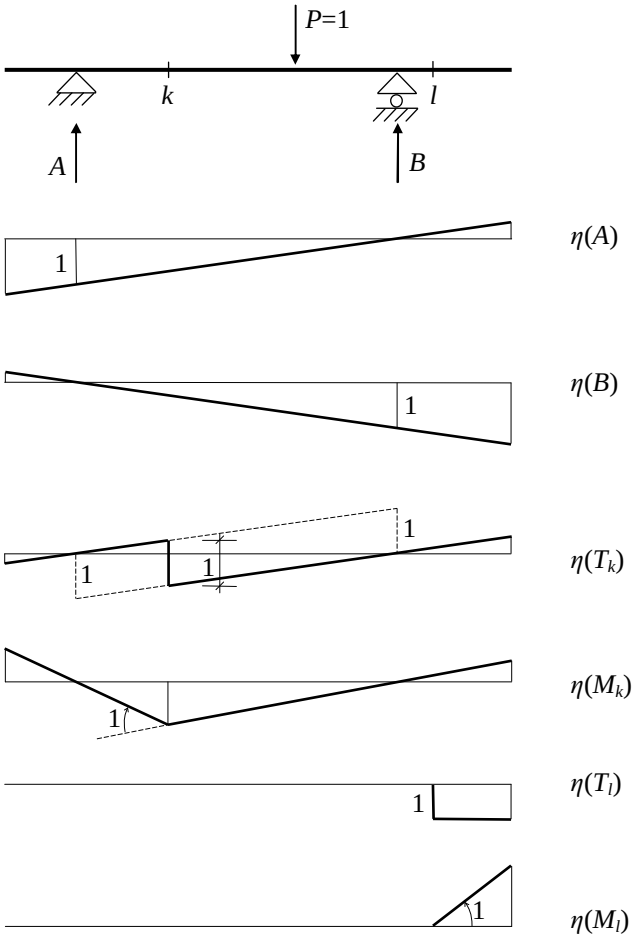
Ez az egyenes (amelyet a jobb- illetve balszélen a zérus illetve a ξ értékek jellemeznek) addig érvényes, ameddig az erő a keresztmetszettől jobbra jár. Amikor az erő balra mozogva elhagyja a *k* keresztmetszetet, a nyomaték értékét jobbról számíthatjuk a *B* reakcióerő és az $(l - \xi)$ távolság szorzata segítségével:

$$M_k = B(l-\xi) \qquad \text{vagyis} \qquad \eta(M_k) = (l-\xi)\eta(B)$$

Ez az egyenes (amelyet a jobb- illetve balszélen az l–ξ illetve zérus értékek jellemeznek) addig érvényes, ameddig az erő a keresztmetszettől balra jár. Megtartva a két egyenes érvényes szakaszát, az 1.11/c ábrán látható háromszög alakú $\eta(M_k)$ hatásábrához jutunk. Ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha az $\eta(M_k)$ hatásábrát kinematikai úton állítjuk elő. Ekkor a *k* keresztmetszetben megszüntetjük a tartó folytonosságát – ezzel a tartó láncolattá alakul át – és beiktatjuk az 1.11/c ábrán vázolt egységnyi elfordulászkülönbséget. A láncolat elmozdult alakja a hatásfüggvény alakját adja.

Egy hatásábrát akkor tekintünk előállítottnak, ha nemcsak az alakja, hanem a jellemző értékei – a hatásábra jellemző ordinátái – is rendelkezésre állnak. (Az 1.11 ábrán feltüntettük a jellemző értékeket is.) Ezen túlmenően, a gyakorlati számításokhoz általában szükség van a negatív és pozitív ábraszakaszok illetve a teljes ábra területére is. Az 1.11 ábra esetében ezeket a területek a jellemző ordináták segítségével könnyen kiszámíthatók. A teljes ábraterületet előjeles összegzéssel kapjuk meg.

A hatásábrák előállítása a fentiekkel hasonló módon történik akkor is, ha a kéttámaszú gerendának a támaszokon túlnyúló szakaszai is vannak (1.12 ábra). A támaszerők hatásábrái most is ferde egyenesek, amelyek a vonatkozó támasznál veszik fel az egységnyi értéket. A konzolos túlnyúlás miatt azonban az egyeneseket meg kell hosszabbítani a túlnyúló szakaszokra is. Ha a *k* keresztmetszet a támaszközben található, akkor a nyíróerő- és nyomatéki hatásábrát is a kéttámaszú (konzolnélküli) eset hatásábráival azonos módon kapjuk, a konzolos szakaszon való meghosszabbítással.



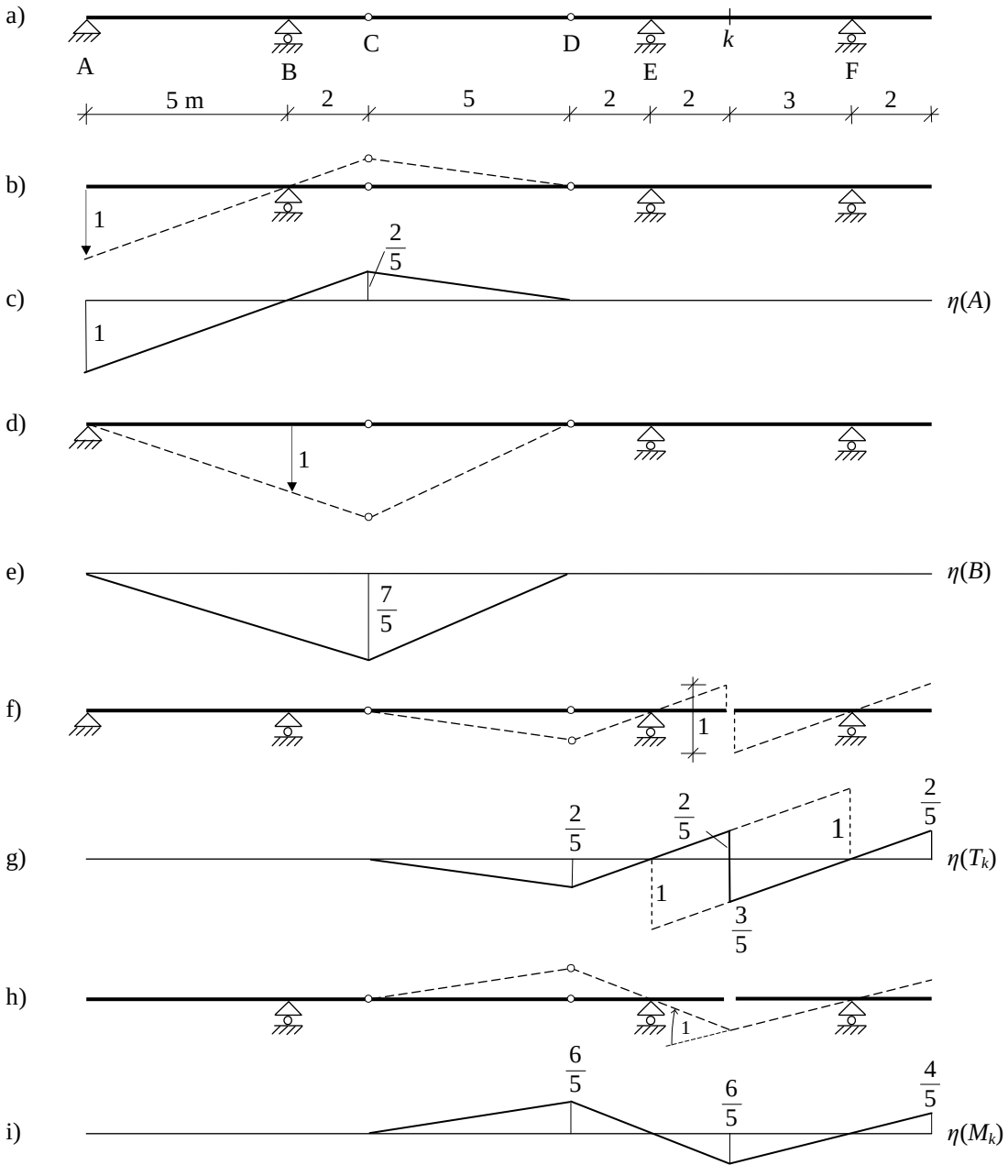
1.12 ábra. Konzolos kéttámaszú tartó hatásábrái.

Eltérő (és egyszerűbb) a helyzet, ha a vizsgált keresztmetszet (*l* keresztmetszet az 1.12 ábrán) a konzolos szakaszon található. A nyíróerő- és nyomatéki hatásábra előállítása mind az analitikus (számítási), mind pedig a kinematikai (szerkesztéssel történő) módszerrel igen egyszerű feladat. A nyíróerő-hatásábra szerkesztéssel történő meghatározása során az *l* keresztmetszetnél megszüntetjük a tartó folytonosságát és beiktatunk egy egységnyi eltolódást. Ez az 1.10/c ábrán vázolt eltolódás esetünkben csak úgy jöhet létre, hogy az átvágás jobboldalán található rúdszakasz önmagával párhuzamosan egységnyivel lejjebb kerül. (Az átvágástól balra lévő rúdszakasz eltolódása azért nem lehetséges, mert azt a rúdszakaszt az *A* és *B* támaszok a rúd meggörbülése nélkül nem tennék lehetővé.) Statikai megfontolások alapján ugyanerre az eredményre jutunk: amíg az egységerő az *l* keresztmetszettől balra jár, addig a keresztmetszetben nem keletkezik nyíróerő – ez nyilvánvaló, ha a nyíróerőt a keresztmetszettől jobbra keressük. Amint a mozgó egységerő a keresztmetszet jobb oldalára kerül, a keresztmetszetben keletkező nyíróerő megegyezik az egységerővel, ami pozitív nyíróerőt jelent. Az *l* keresztmetszet nyomatéki hatásábrájának szerkesztéssel történő előállításához az 1.10/d ábrán vázolt egységnyi elfordulást kell beiktatni az átvágás helyén. Ez csak úgy lehetséges, ha a jobboldali tartószakasz az *l* keresztmetszettől indulva ferdén felemelkedik, míg a baloldali tartószakasz (amelyet az

A és *B* támaszok rögzítenek) mozdulatlanul a helyén marad. A helyzetet statikailag vizsgálva ugyanehhez a hatásábrához jutunk: amíg az erő az *l* keresztmetszettől balra jár, a nyomaték az *l* keresztmetszetben zérus, amint az erő az *l* keresztmetszet jobboldalára kerül, a nyomaték az egységerő és az *l* keresztmetszettől mért távolság szorzata lesz. Ez akkor lesz a legnagyobb, amikor az erő a tartó jobbszélére kerül.

1.4.3 Csuklós többtámaszú tartók (Gerber-tartók) hatásábrái

Legyen feladatunk az 1.13/a ábrán vázolt négytámaszú, két belső csuklóval rendelkező gerendatartó *A* és *B* támaszerő, valamint a *k* keresztmetszet nyíróerő- és nyomaték-hatásábrájának előállítása.



1.13 ábra. Gerber-tartó hatásábrái.

Az ábrán vázolt ún. Gerber-tartó statikailag határozott, így a virtuális elmozdulás-mechanizmus tételét alkalmazhatjuk.

Az *A* támasz helyén beiktatott egységnyi, függőleges, lefelé mutató eltolódás hatására a tartó egy szabadságfokú láncolattá alakul át (1.13/b ábra). A láncolat alakja megadja az $\eta(A)$ hatásfüggvény alakját (1.13/c ábra).

Az $\eta(B)$ hatásfüggvény hasonló módon, az 1.13/d ábrán vázolt láncolat segítségével szerkeszthető meg (1.13/e ábra).

A *k* keresztmetszet nyíróerő-hatásábrájának előállításához a *k* keresztmetszetnél a tartót elvágjuk, majd beiktatunk egy egységnyi eltolódás-párt (1.13/f ábra). A tartó által felvett alak a keresett hatásfüggvényt szolgáltatja (1.13/g ábra).

A *k* keresztmetszet nyomatéki hatásábrája úgy határozható meg, hogy a *k* keresztmetszetnél átvágott tartót egy egységnyi elfordulás-párral alakváltozásra kényszerítjük (1.13/h ábra). Az így kapott láncolat alakja megadja a hatásfüggvényt (1.13/i ábra).

A hatásfüggvényeknek az ábrákon feltüntetett ordinátáit elemi úton, hasonló háromszögek segítségével határoztuk meg.

Az ábrák megszerkesztése során mindig figyelembe kell venni azt a szabályt, hogy az egy szabadságfokú, egyenes rudakból álló láncolat elmozdulásai összeférhetők legyenek a tartó kényszereivel!

1.4.4 Görbe tengelyű tartók hatásábrái

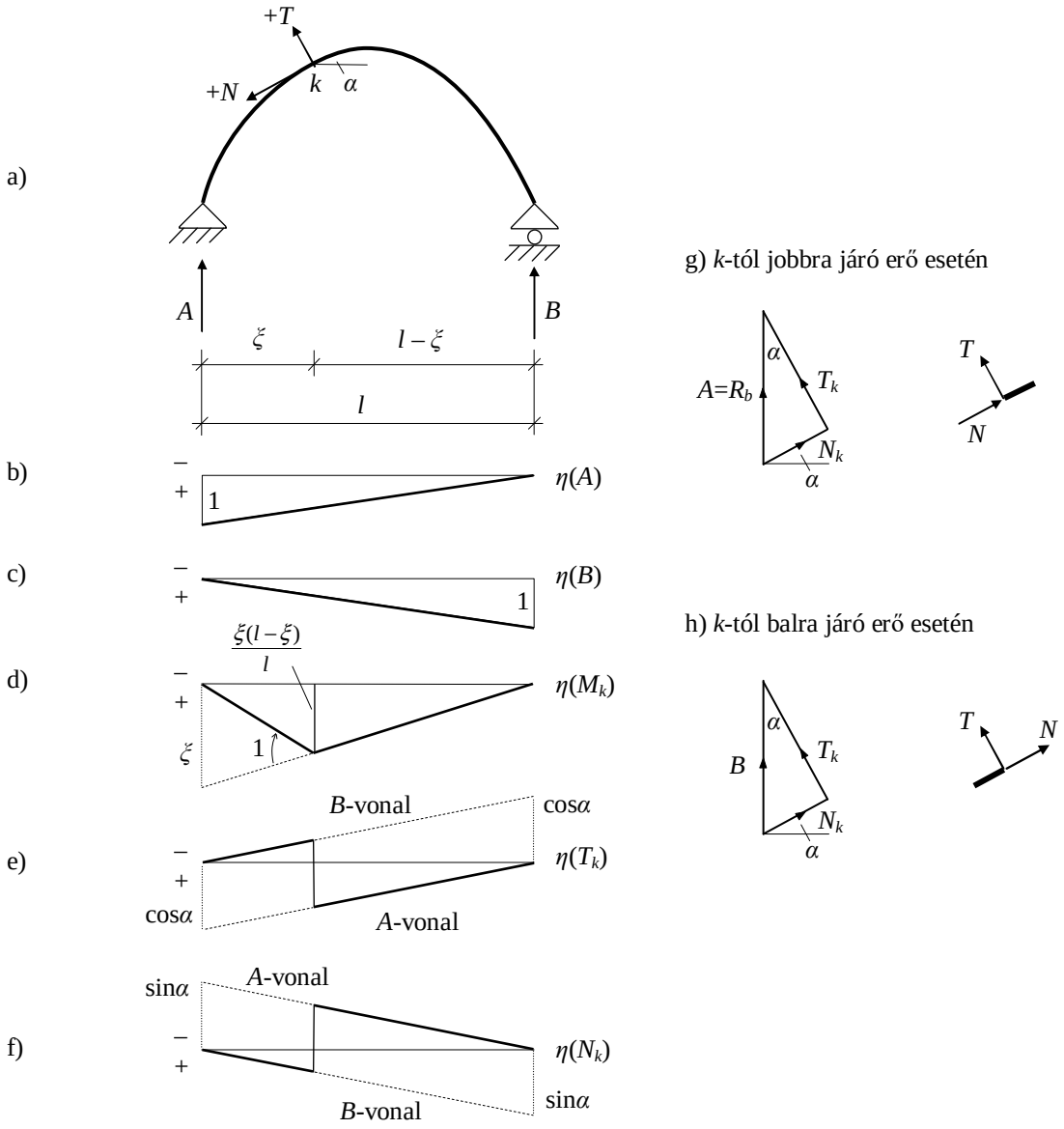
Állítsuk elő az 1.14/a ábrán vázolt törttengelyű kéttámaszú tartó *k* keresztmetszetének hatásábráit. A *k* keresztmetszet hatásábráihoz szükségünk van először a támaszerők hatásábráira. A mozgó egységteher hatására a *B* támasznál a megtámasztásra merőleges függőleges reakcióerő ébred. Mivel a mozgó egységteher is függőleges, az *A* támaszban keletkező erő is csak függőleges lehet. Az $\eta(A)$ és $\eta(B)$ támaszerő-hatásábrák így azonosak az *l* fesztávolságú egyenestengelyű kéttámaszú tartó $\eta(A)$ és $\eta(B)$ hatásábráival (1.14/b és 1.14/c ábrák).

Hasonló a helyzet a *k* keresztmetszet nyomatéki hatásábrájával (1.14/d ábra). A *k* keresztmetszettől jobbra járó egységerő esetében a *k* keresztmetszetben ébredő nyomaték célszerűen balról, az $\eta(A)$ támaszerő-hatásábra segítségével számítható az

$$\eta(M_k) = \xi\eta(A)$$

képletből. A hatásfüggvény jobbszélső ordinátája így zérus, a balszélső érték pedig ξ. A függvény természetesen csak a *k* keresztmetszettől jobbra érvényes. A *k* keresztmetszettől balra járó egységerő esetében a *k* keresztmetszetben ébredő nyomatékot jobbról, az $\eta(B)$ támaszerő segítségével lehet meghatározni:

$$\eta(M_k) = (l - \xi)\eta(B)$$



1.14 ábra. Görbe tengelyű tartó hatásábrái.

A függvény balszélső ordinátája így zérus, a jobbszélső érték pedig $l–\xi$. A függvény csak a k keresztmetszettől balra érvényes. A hatásábra k keresztmetszet alatti ordinátája legegyszerűbben aránypár segítségével határozható meg:

$$\frac{M_k(\xi)}{l-\xi}=\frac{\xi}{l} \qquad \text{innen:} \qquad M_k(\xi)=\frac{\xi(l-\xi)}{l}$$

A nyíróerő- és normálerő-hatásábra előállításához a k keresztmetszettől balra illetve jobbra lévő erők eredőjét nyíró- illetve normálerő irányú komponensre kell bontani. A k keresztmetszettől jobbra járó egységerő esetén a k keresztmetszettől balra csak az A támaszerő van, így az eredő megegyezik az A támaszerővel. A nyíró- és normálerő így:

$$T_k = R_b \cos\alpha = 1 \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$$

$$N_k = R_b \sin\alpha = -1 \cdot \sin\alpha = -\sin\alpha$$

ahol α a tartó k keresztmetszeténél lévő érintő és a vízszintes által bezárt szög (1.14/a ábra). A k keresztmetszettől balra járó egységerő esetén a k keresztmetszettől jobbra csak a B támaszerő van, így az eredő megegyezik a B támaszerővel. A nyíró- és normálerő így:

$$T_k = R_j \cos\alpha = -1 \cdot \cos\alpha = -\cos\alpha$$

$$N_k = R_j \sin\alpha = 1 \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$$

A nyíró- és normálerő előjelének megállapítása az 1.14/g és 1.14/h ábrán vázolt vektorháromszög segítségével történhet.

Az $\eta(T_k)$ nyíróerő-hatásábrát úgy kapjuk, hogy az A függőlegesében cosα, a B függőlegesében pedig –cosα értéket mérünk föl. Az így kapott A–vonal és B–vonal egymással párhuzamos és a k keresztmetszettől jobbra illetve balra érvényes (1.14/e ábra).

Az $\eta(N_k)$ normálerő-hatásábrát úgy kapjuk, hogy az A függőlegesében –sinα, a B függőlegesében pedig sinα értéket mérünk föl. Az így kapott A és B vonalak egymással párhuzamosak és a k keresztmetszettől jobbra illetve balra érvényesek (1.14/f ábra).

1.4.5 Átviteles tartók hatásábrái

Sok szerkezet a terhet nem közvetlenül, hanem valamely terhelosztó tartó közvetítésével kapja meg. Az ilyen szerkezeteket átviteles tartóknak nevezzük. Az átviteles tartók terhüket csak meghatározott pontokban, az úgynevezett átviteli függőlegesekben kaphatják meg. Az átvitel lehet kéttámaszú vagy többtámaszú, attól függően, hogy milyen az alacsonyabbrendű terhelosztó tartó.

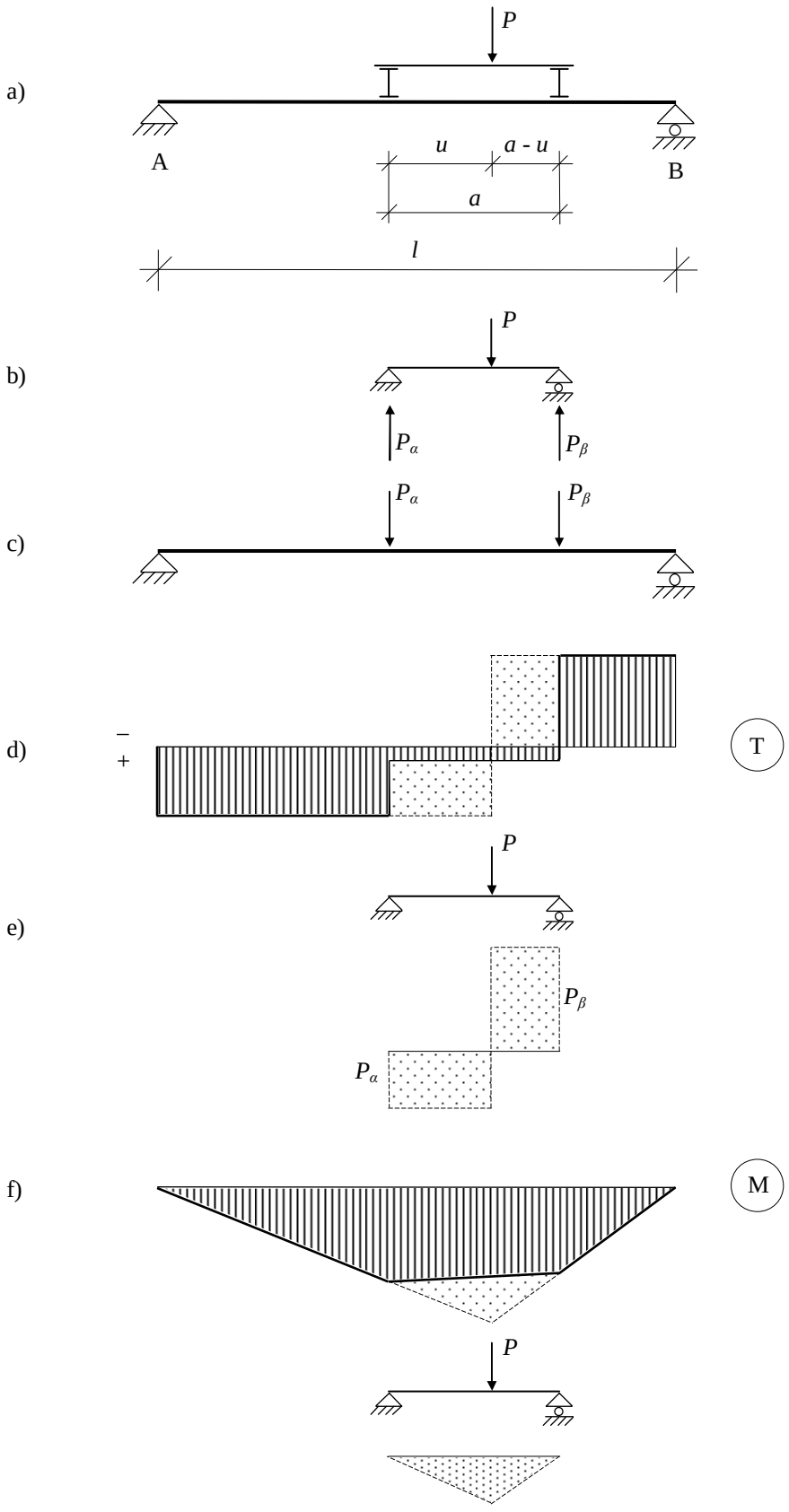
Az 1.15/a ábrán a terhelosztás kéttámaszú tartó segítségével történik. Vizsgáljuk meg először a tartó *igénybevételeit*.

Az átviteles tartó igénybevételi ábráit úgy kapjuk, mintha az egyetlen P külső teher helyett két egymástól a távolságban működő (P_α és P_β) erő hatna az l fesztávolságú gerendára. Ezek az alacsonyabbrendű a fesztávolságú átviteli kéttámaszú tartó (1.15/b)

$$P_\alpha = \frac{a-u}{a} P$$

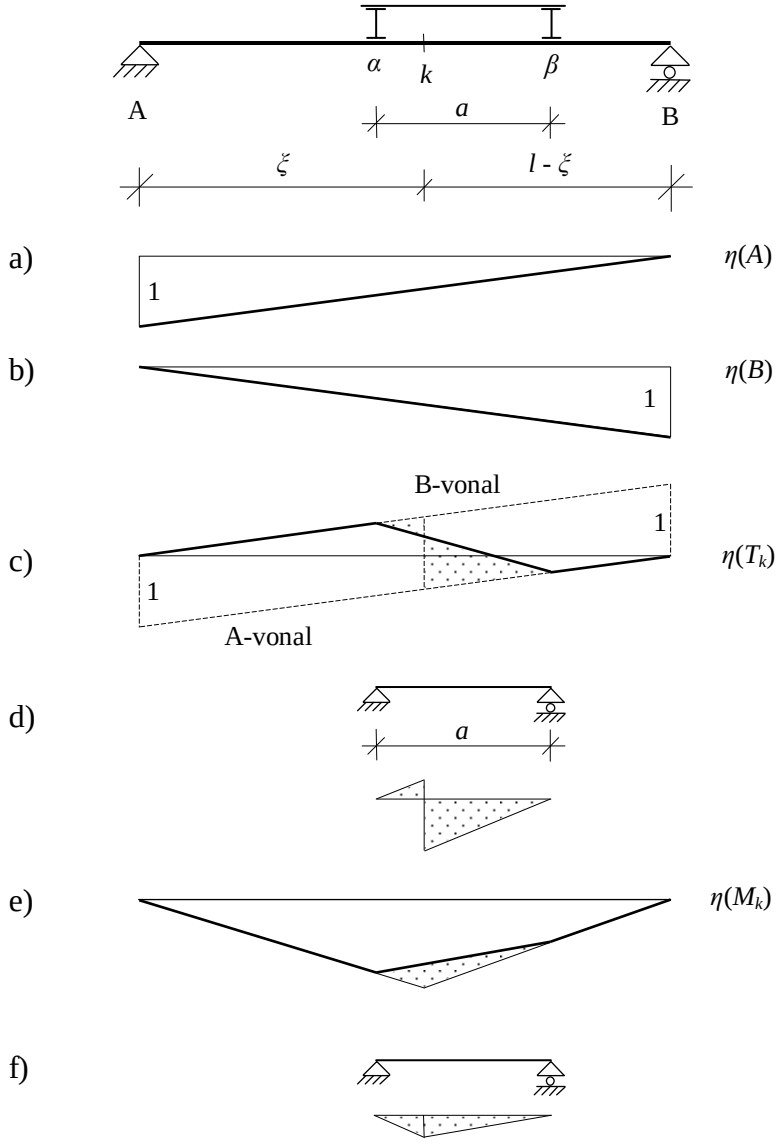
$$P_\beta = \frac{u}{a} P$$

reakcióerőinek az ellentettjei (1.15/c). A két koncentrált erővel terhelt l fesztávolságú gerenda nyíróerő- és nyomatéki ábrája az 1.15/d és 1.15/f ábrán látható. Szaggatott vonallal jelöltük a közvetlen teher hatására keletkező igénybevételeket és folytonos vonallal az átviteles tartó közvetítésével terhelt tartó igénybevételeit. Könnyen észrevehető, hogy az átvitel folytán beállt változás annyit jelent, mintha az eredeti ábrákból levontuk volna az a fesztávolságú átviteli kéttámaszú tartó azonos jellegű ábráit.



1.15 ábra. Átviteles tartó igénybevételi ábrái.

Mint a hatásábrák készítése során általában, az átviteles tartó *hatásábráinak* (1.16 ábra) előállítása során is a támaszerő-hatásábrák előállítása az első lépés. Az $\eta(A)$ és $\eta(B)$ támaszerő-hatásábra előállítása során „észre sem vesszük” hogy a tartó átviteles: a támaszok fölött álló egységteher hatására a vonatkozó támaszreakció egységnyi, míg a másik támasz reakcióereje zérus nagyságú (1.16/a és 1.16/b ábra). Az *A* és *B* támaszok között a változás lineáris.



1.16 ábra. Átviteles tartó hatásábrái.

Változik a helyzet azonban amikor a *k* keresztmetszethez tartozó nyíróerő- és nyomatéki hatásábrákat állítjuk elő. A nyíróerő (1.16/c ábra) változását figyelve azt tapasztaljuk, hogy a tartó jobb oldalán járó erő hatására a nyíróerő eleinte a baloldali *A* támaszerővel egyenlő – mint az átvitel nélküli kéttámaszú tartó esetében. Most azonban ez csak addig igaz, amíg a mozgó teher el nem éri az átviteli tartó jobboldali β támaszát. Hasonlóképpen, a tartó baloldalán járó erő esetében a *k* keresztmetszetben ébredő nyíróerő a jobboldali *B* reakcióerő segítségével határozható meg – annak ellentettje – de

csak addig, amíg a mozgó teher el nem éri az átviteli tartó baloldali α támaszát. Az *A*-vonal és *B*-vonal tehát csak a β illetve az α pontig érvényes. Az α és β pontok között mozgó egységerő esetében az átviteli tartó P_α és P_β reakciója már a *k* keresztmetszet elérése előtt elkezdi csökkenteni a *k* keresztmetszetre ható nyíróerőt. Ez a tény a nyíróerő-hatásábrában úgy jelentkezik, hogy az α és β pontokig már elkészített függvényt ferde egyenessel kell összekötni (1.16/c ábra). Máshogyan megfogalmazva: az *l* támaszközű kéttámaszú tartó hatásábrájából le kell vonni az *a* támaszközű átviteli tartó hatásábráját (1.16/d ábra).

Hasonló a helyzet a nyomatéki hatásábra esetében (1.16/e ábra). Az A–α szakaszon járó egységteher esetében a *k* keresztmetszetre ható nyomatékot a *B* reakcióerő segítségével kapjuk meg:

$$\eta(M_k) = (l - \xi)\eta(B)$$

A B–β szakaszon járó egységerő esetében a nyomatékot az

$$\eta(M_k) = \xi\eta(A)$$

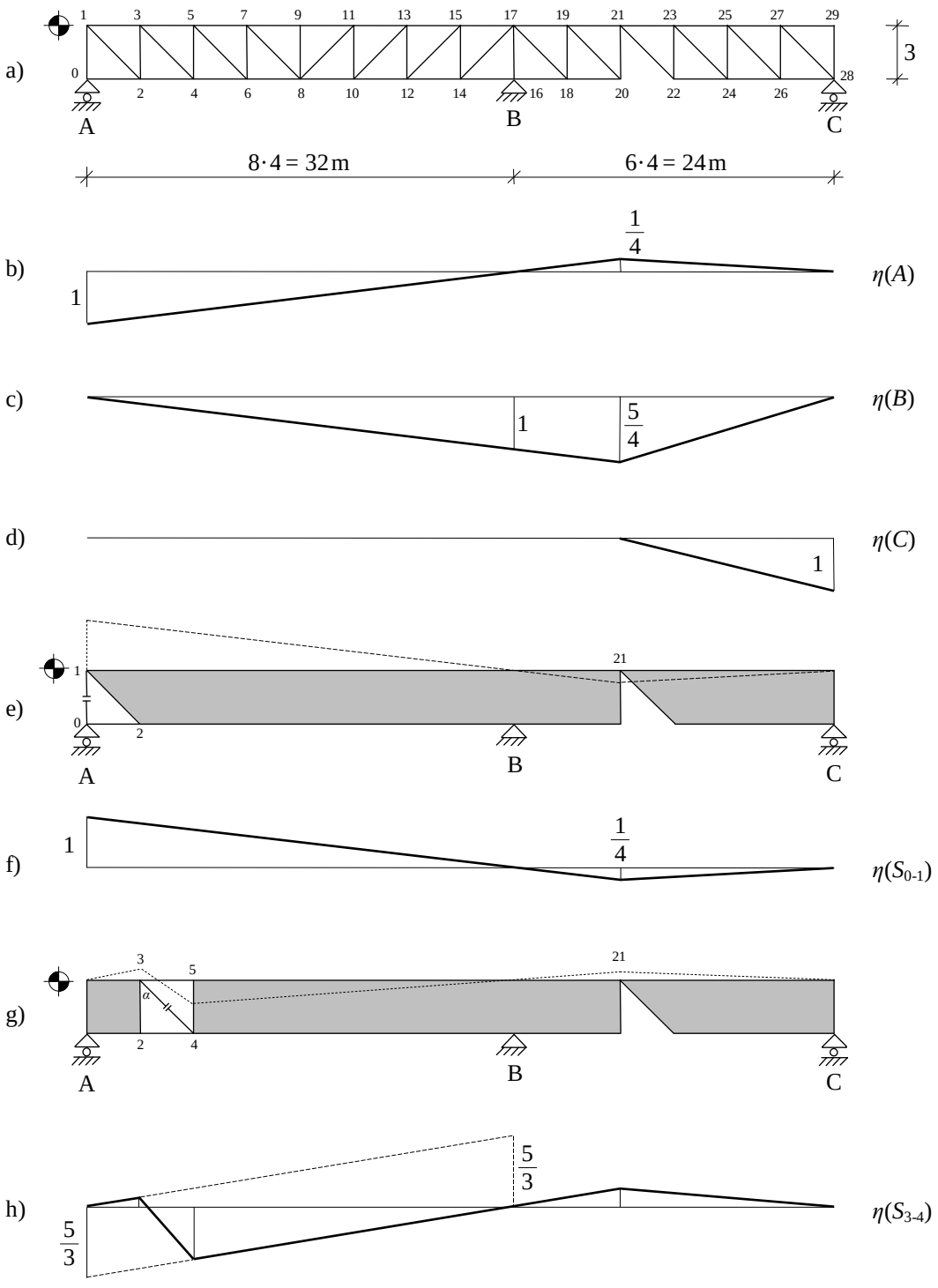
összefüggés adja meg. Az α–β szakaszon az átviteli tartó P_α és P_β reakciójának nyomatéka a *k* keresztmetszetre már a keresztmetszet elérése előtt elkezdi csökkenteni a *k* keresztmetszetben keletkező nyomatékot. Ez a tény a hatásábrában úgy jelentkezik, hogy α és β alatti pontokat egyenessel kell összekötni (1.16/e ábra). Az eredményt most is meg lehet úgy fogalmazni, hogy az *l* támaszközű kéttámaszú tartó hatásábrájából le kell vonni az *a* támaszközű átviteli tartó hatásábráját (1.16/f ábra).

1.4.6 Párhuzamos övű rácsos tartók hatásábrái

Meghatározandók az 1.17/a ábrán vázolt háromtámaszú, felsőpályás rácsos Gerber-tartó támaszerőinek, valamint az $S_{0\text{-}1}$, $S_{3\text{-}4}$, $S_{5\text{-}7}$, $S_{4\text{-}6}$, $S_{6\text{-}7}$ és $S_{8\text{-}9}$ rúderőinek hatásábrái. A rácsos Gerber-tartó statikailag határozott szerkezet, így a virtuális elmozdulás-mechanizmus tételt alkalmazhatjuk.

Rácsos tartók rúderő-hatásábráinak előállításához szükség van a támaszerő-hatásábrákra. Először tehát az $\eta(A)$, $\eta(B)$ és az $\eta(C)$ hatásfüggvényeket határozzuk meg. A támaszerő-hatásfüggvények szempontjából nincs jelentősége annak, hogy a vizsgált Gerber-tartó rácsos; ugyanúgy kell eljárni, mint a tömör Gerber-tartó esetében. Az *A* támasz helyén beiktatott egységnyi függőleges eltolódás következtében olyan láncolat jön létre, amelynek forgáspontja a Gerber-csukló (a 21. csomópont). A tartó felső pályája a maradék kényszerek (*B* és *C* támasz) elmozdulás-képességének megsértése nélkül az 1.17/b ábrán vázolt alakot veszi fel. Ez egyben a keresett $\eta(A)$ hatásfüggvény alakja. Ugyanilyen elven eljárva kapjuk meg az $\eta(B)$ és $\eta(C)$ hatásfüggvényeket (1.17/c és 1.17/d ábrák).

Az $\eta(S_{0\text{-}1})$ hatásfüggvény előállításához az $S_{0\text{-}1}$ jelű rudat vágjuk át. Az egységnyi relatív eltolódás beiktatása után (1.17/e ábra) a felső pálya vonala kijelöli a keresett hatásfüggvényt (1.17/f ábra). Az ábra ordinátáit – csakúgy, mint az $\eta(A)$, $\eta(B)$ és $\eta(C)$ függvények esetében – arányos háromszögek felhasználásával számíthatjuk ki.



1.17 ábra. Többtámaszú rácsos tartó hatásábrái I.

Az $S_{3\text{-}4}$ ferde rácsrúd átvágása a tartó 2-3-4-5 tartományát labilis rúdlánccá alakítja át. A beiktatott egységnyi relatív eltolódás hatására – a kényszerek megsértése nélkül – a tartó felső pályája az 1.17/g ábrán szaggatottan vázolt alakot veszi fel. Ez egyben a keresett $\eta(S_{3\text{-}4})$ hatásfüggvény alakja is (1.17/h ábra). A függvény számszerű meghatározásához szükséges ordinátákat statikai megfontolások alapján, függőleges

vetületi egyenletek segítségével számíthatjuk ki. Amíg a külső egységerő az $S_{3\text{-}4}$ jelű rúdtól balra jár, addig a függőleges vetületi egyenlet szerint

$$S_{3-4}\cos\alpha - B = 0$$

ahol α a rúd függőlegessel bezárt szöge (1.17/g ábra). Innen

$$S_{3-4} = \frac{5}{3}B$$

illetve

$$\eta(S_{3-4}) = \frac{5}{3}\eta(B)$$

Az $S_{3\text{-}4}$ jelű rúdtól jobbra levő erő esetén

$$S_{3-4}\cos\alpha - A = 0$$

Innen a fentiekhez hasonlóan eljárva az

$$\eta(S_{3-4}) = \frac{5}{3}\eta(A)$$

összefüggést kapjuk.

Az $S_{5\text{-}7}$ jelű rúd átvágása és az egységnyi relatív eltolódás beiktatása után a tartó felső pályája két töréspontal rendelkező, egyenes szakaszokból álló alakot vesz fel (1.18/a ábra). Ez az alak megadja az $\eta(S_{5\text{-}7})$ hatásfüggvény alakját is (1.18/b ábra). A függvény meghatározásához szükséges ordinátákat a nyomatéki főponti módszer alkalmazásával számíthatjuk ki. Amíg a külső erő a 6. csomóponttól jobbra jár, addig az $S_{5\text{-}7}$ rúderőt a 6. jelű nyomatéki főpontra felírt

$$12A - 3S_{5-7} = 0$$

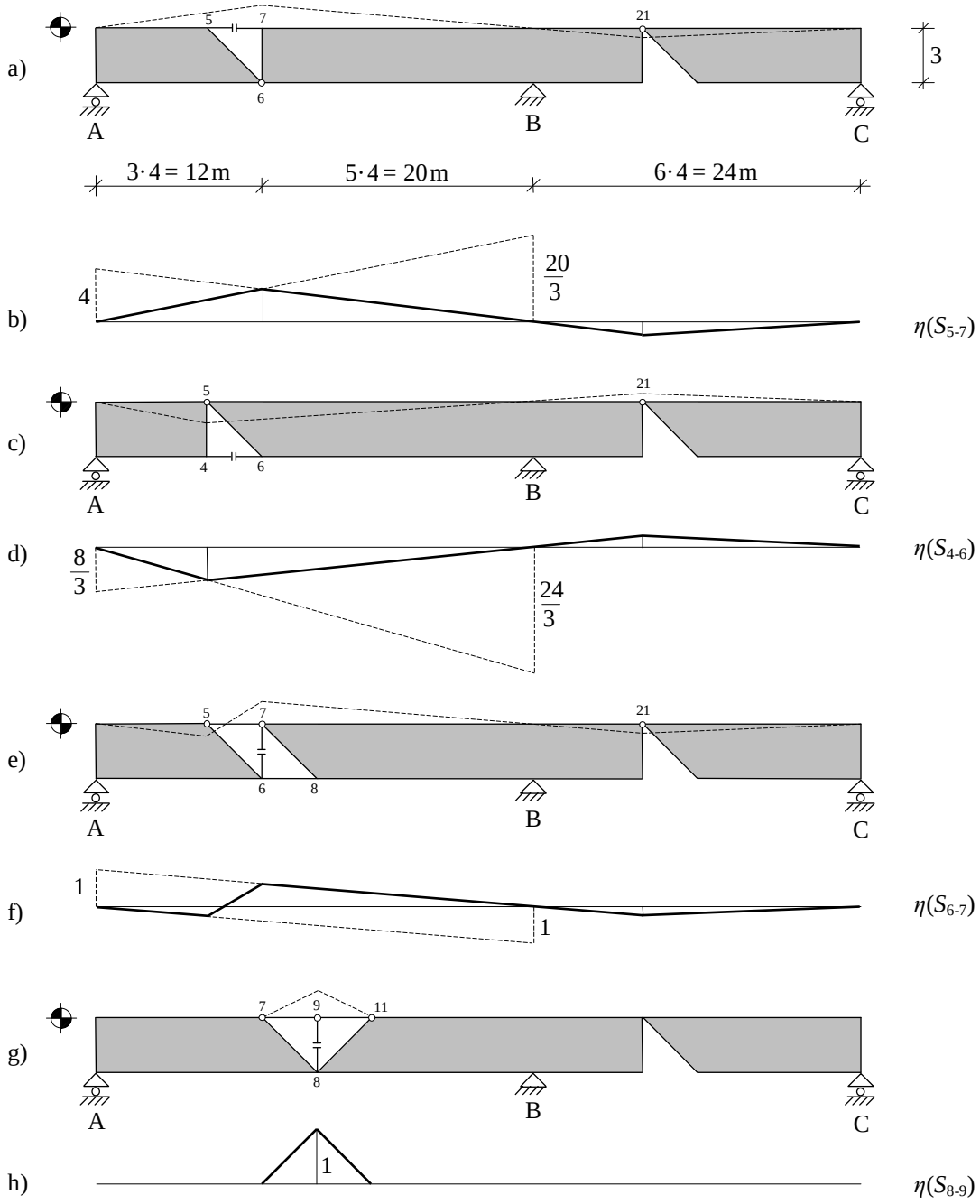
nyomatéki egyensúlyi egyenletből az

$$S_{5-7} = 4A$$

összefüggés szolgáltatja. Innen

$$\eta(S_{5-7}) = 4\eta(A)$$

Az $S_{4\text{-}6}$ jelű rúd hatásfüggvényét a fentiekkel azonos módon állíthatjuk elő. A 21. jelű csomópont (a tartó Gerber-csuklója) mellett most az 5. jelű csomópont (nyomatéki főpont) a másik forgáspont (1.18/c ábra). Az $\eta(S_{4\text{-}6})$ hatásfüggvényt az 1.18/d ábrán tüntettük fel.



1.18 ábra. Többtámaszú rácsos tartó hatásábrái II.

Az $\eta(S_{6\text{-}7})$ hatásfüggvény megszerkesztéséhez az $S_{6\text{-}7}$ rudat kell átvágni. Az átvágás helyén beiktatott egységnyi relatív elmozdulás az 5-6-7-8 csomópontok között kialakult labilis rúdláncot – és ezzel az egész tartót – mozgásra kényszeríti (1.18/e ábra). Három forgáspont alakul ki a tartó felső pályája mentén. A létrejött alak a keresett hatásfüggvény alakját is megadja. A hatásfüggvény jellemző ordinátáit ismét függőleges vetületi egyenlettel határozhatjuk meg. Az $S_{6\text{-}7}$ jelű rúdtól balra járó erő esetén a *B*, a rúdtól jobbra járó erő esetén pedig az *A* támaszerő értéke határozza meg az $S_{6\text{-}7}$ rúderő értékét. A hatásábrát az 1.18/f ábra mutatja.

Végül szerkesszük meg az $S_{8\text{-}9}$ jelű rúd hatásfüggvényét. Az átvágás helyén beiktatott egységnyi relatív eltolódás a 9. jelű csomópont függőleges eltolódását okozza (1.18/g ábra). A mozgás most a 7-8-9-11 pontok által határolt területre korlátozódik. Az $\eta(S_{8\text{-}9})$ hatásfüggvényt az 1.18/h ábrán találjuk meg.

1.4.7 Háromcsuklós tartók hatásábrái

Háromcsuklós tartók hatásábráit célszerű statikai úton előállítani. Az 1.19/a ábrán látható tartó esetében az első lépés a támaszerők hatásábráinak meghatározása. Az egész tartóra vonatkozó és a *B* támaszra felírt nyomatéki egyenlet szerint

$$\sum M_B = -1 \cdot (l - x) + A_y l = 0$$

ahonnan

$$A_y = \frac{l - x}{l}$$

és így az $\eta(A_y)$ támaszerő-hatásábrát az 1.19/b ábrán látható ferde egyenes adja meg. Hasonlóan eljárva, az *A* támaszra felírt

$$\sum M_A = 1 \cdot x - B_y l = 0$$

nyomatéki egyenletből megkapjuk a B_y támaszerőt:

$$B_y = \frac{x}{l}$$

Az $\eta(B_y)$ hatásfüggvényt az 1.19/c ábrán ábrázoltunk.

A támaszoknál keletkező vízszintes támaszerő-komponensek meghatározásához tekintsük először azt az esetet, amikor a mozgó egységteher a *C* csuklótól jobbra jár. Az *A*–*C* tartószakasz egyensúlya alapján ekkor a *C* pontra felírt nyomatéki egyenlet

$$\sum M_C = A_y l_1 - A_x h = 0$$

szolgáltatja a baloldali támaszerő vízszintes komponensét:

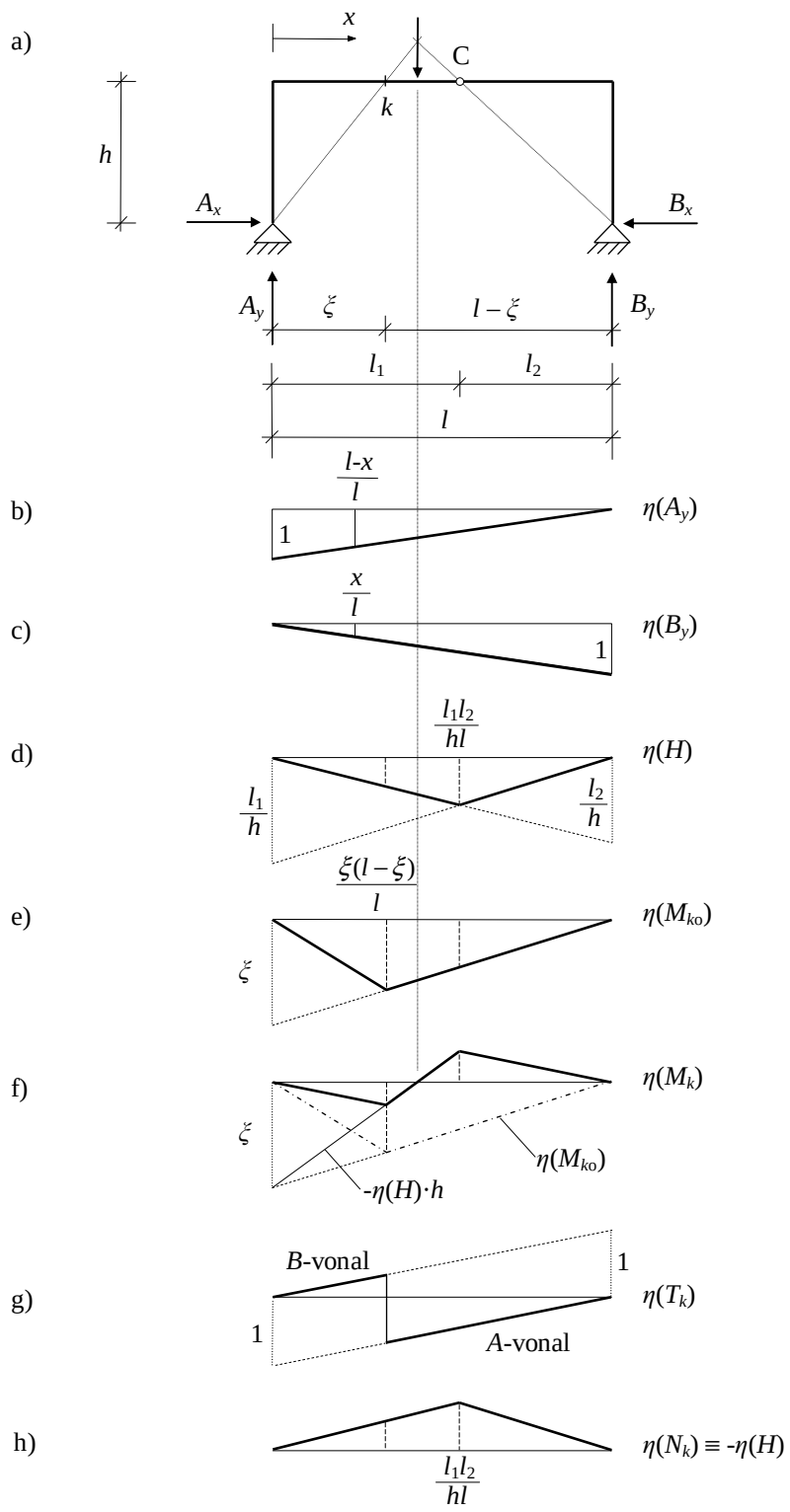
$$A_x = A_y \frac{l_1}{h}$$

Amikor a mozgó egységteher a *C* csuklótól balra jár, akkor a *C*–*B* tartószakasz egyensúlya alapján a *C* pontra felírt nyomatéki egyenlet

$$\sum M_C = B_y l_2 - B_x h = 0$$

szolgáltatja a jobboldali támaszerő vízszintes komponensét:

$$B_x = B_y \frac{l_2}{h}$$



1.19 ábra. Háromcsuklós tartó hatásábrái.

A teljes tartó egyensúlyára vonatkozó vízszintes vetületi egyenletből azt kapjuk, hogy a vízszintes támaszerő komponensek egymással egyenlők. Vezessük be a vízszintes erőkre vonatkozó

$$A_x = B_x = H$$

jelölést és tekintsük pozitívnak a befelé mutató vízszintes támaszerő-komponenst. A már rendelkezésre álló A_y és B_y segítségével a fenti egyenletek alapján már megszerkeszthető a vízszintes támaszerő-komponensek $\eta(H)$ hatásábrája (1.19/d).

A k keresztmetszet nyomatéki hatásábrája előállításához tekintsük először azt az esetet amikor a mozgó egységteher a k keresztmetszettől jobbra jár. A k keresztmetszetben ébredő nyomaték ekkor (balról számolva):

$$M_k = A_y\xi - A_x h$$

Amikor a mozgó egységteher a k keresztmetszettől balra jár, akkor a k keresztmetszetben ébredő nyomaték értéke (jobbról számolva):

$$M_k = B_y(l - \xi) - B_x h$$

Mivel $A_x = B_x = H$, a két egyenlet összevonható és a nyomatéki hatásábra az

$$\eta(M_k) = \eta(M_{ko}) - \eta(H)h$$

alakban írható, ahol $\eta(M_{ko})$ az A–B támaszú kéttámaszúnak képzelt tartó nyomatéki hatásábrája (1.19/e ábra), amelyet a már rendelkezésre álló $\eta(A_y)$ és $\eta(B_y)$ segítségével adhatunk meg.

A k keresztmetszet nyomatéki hatásábráját ezek után úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk az $\eta(M_{ko})$ és a $(-h)$-val szorzott $\eta(H)$ ábrákat (1.19/f ábra). A hatásábra zéruspontját szerkesztéssel is ellenőrizhetjük: három erő egyensúlyának alapján akkor zérus a k keresztmetszetben ébredő nyomaték, amikor a mozgó egységteher átmegy a B és C valamint az A és k pontok összekötésével kapott egyenesek metszéspontján. Ekkor ugyanis a balról vett erők eredője (az A támaszerő) átmegy a k ponton és így nyomatéka zérus.

A k keresztmetszetben keletkező nyíróerő meghatározása során azt tapasztaljuk, hogy a háromcsuklós tartó ugyanúgy viselkedik, mint egy AB támaszú kéttámaszú tartó (1.19/g ábra). Amíg a mozgó egységteher a k keresztmetszettől jobbra jár, a k keresztmetszetben keletkező nyíróerőt az A_y támaszerő adja (A-vonal), amikor pedig a mozgó egységteher a k keresztmetszet baloldalára kerül, a k keresztmetszetben keletkező nyíróerő azonos a B_y támaszerő ellentettjével (B-vonal).

Mint korábban már láttuk, a háromcsuklós tartó támaszainál vízszintes támaszerő-komponensek (A_x és B_x) is keletkeznek. Ennek az a következménye, hogy a k keresztmetszetben normálerő is ébred. Amíg a mozgó egységerő a k keresztmetszettől jobbra jár, addig a k keresztmetszetben keletkező normálerőt az A_x támaszerő-komponens adja, amikor pedig a mozgó egységteher a k keresztmetszet baloldalára kerül, a k keresztmetszetben keletkező normálerő azonos a B_x támaszerő-komponenssel. A normálerő mindkét esetben negatív, mert a vonatkozó A_x és B_x támaszerő-komponensek a k keresztmetszetre nyomóerőt gyakorolnak. A k keresztmetszet

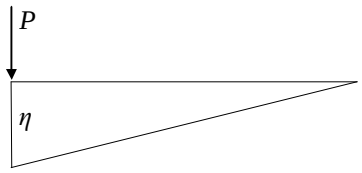
normálerő-hatásábráját így az $A_x = B_x = H$ alapján az $\eta(H)$ ellentettjeként kapjuk (1.19/h ábra).

1.4.8 Mértékadó teherhelyzet megállapítása. A viszonyított terhek szabálya

A méretezési eljárás során mindig felmerül az a kérdés, hogy melyik teherhelyzetben keletkezik az adott keresztmetszetre nézve legkedvezőtlenebb hatás. A mozgó tehernek azt a helyzetét, amely mellett az igénybevétel szélső értéke ébred, mértékadó teherhelyzetnek nevezzük. Sok esetben ránézéssel meg lehet állapítani hogy hova kell a terhet tenni hogy mértékadó helyzetet idézzen elő, máskor viszont külön megfontolásokra van szükség, hogy erre a fontos kérdésre választ kapjunk. A probléma súlyossága elsődlegesen a teher típusától és a hatásfüggvény alakjától függ.

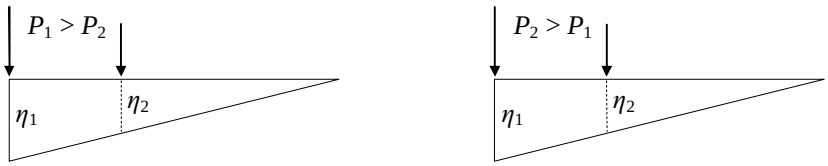
Foglalkozzunk először derékszögű háromszög alakú hatásábrákkal.

Egy koncentrált erő esetén az erőt a legnagyobb ordináta fölé kell helyezni (1.20 ábra).



1.20 ábra. Egy koncentrált erő esete.

Két koncentrált erő esetén, ha azok felcserélhetők (vagyis az erőkettős mindkét irányban és sorrendben mozoghat a tartón), a nagyobbik erőt kell a legnagyobb ordináta fölé tenni, míg a másik erő egy kisebb ordináta fölé kerül (1.21/a/b ábra).



a) $P_1 > P_2$ b) $P_2 > P_1$

1.21 ábra. Két felcserélhető erő.

A mértékadó hatás így

$$C = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 \qquad \text{vagy} \qquad C = P_2\eta_1 + P_1\eta_2$$

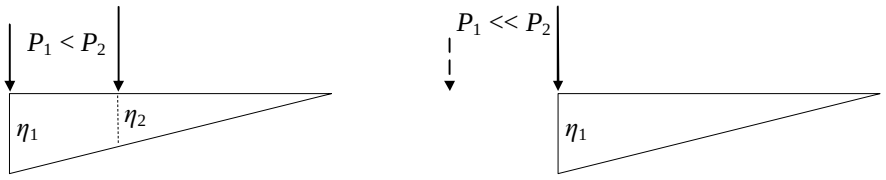
Ha a két erő nem cserélhető fel, akkor két lehetőség van. Az erők vagy „jó” sorrendben állnak, vagy nem. Ha „jó” sorrendben állnak (vagyis a nagyobbik úgy állítható a legnagyobb ordináta fölé, hogy a kisebbik is ordináta fölé esik), akkor az előző esethez jutunk. Ha nem állnak „jó” sorrendben, akkor ismét két lehetőség van.

Közel egyforma nagyságú erők esetében a kisebbik erőt kell a csúcs fölé állítani, a nagyobbik erőt pedig oda ahova esik (1.22/a ábra). Ha az egyik erő jóval nagyobb mint a másik – legyen például $P_2 >> P_1$ – akkor lehetséges, hogy

$$P_2\eta_1 > P_1\eta_1 + P_2\eta_2$$

és így P_1 lemarad a tartóról (1.22/b ábra). A mértékadó hatás ekkor

$$C = P_2\eta_1$$

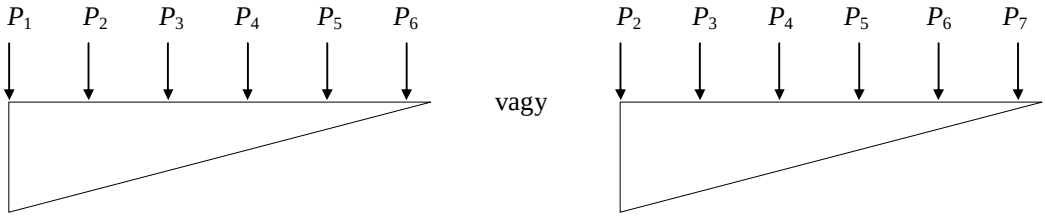


a) $P_1 < P_2$ b) $P_1 << P_2$

1.22 ábra. Két nem felcserélhető erő.

Több koncentrált erő esete

Ha az erők nagysága egyforma, akkor a csúcstól felmérve sorban kell őket elhelyezni. Ha az erők különböző nagyságúak, akkor arra kell törekedni, hogy a nagyobb erők kerüljenek a nagy ordináták fölé. Ilyenkor előfordulhat hogy egyes (kisebb) erők – például a „futókerekek" – „lemaradnak" a tartóról (1.23/a/b ábra).



a) P_7 erő lemarad a tartóról b) P_1 erő lemarad a tartóról

1.23 ábra. Több – pl. 7 darab – egymástól adott távolságban lévő koncentrált erő.

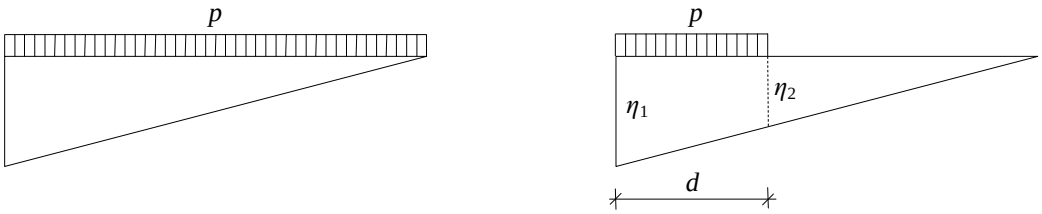
Megoszló teher

Egyenletesen megoszló p intenzitású totális teher esetében a tartót végig kell terhelni (1.24/a ábra).

Ha az egyenletesen megoszló teher csak d hosszúságban parciálisan terheli a tartót, akkor szemlélet alapján is nyilvánvaló, hogy a terhet a hatásábra csúcsánál kell kezdeni (1.24/b ábra).

A hatás ekkor

$$C = d\,\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\,p$$



a) totális b) parciális

1.24 ábra. Egyenletesen megoszló teher.

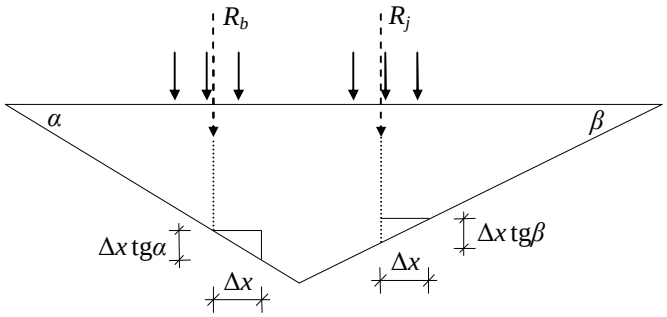
Általános háromszög alakú hatásábra

Általános szabályként lehet rögzíteni, hogy a csúcspont fölé kell erőnek kerülni.

Bizonyítás:
Tekintsük az 1.25 ábrán látható erőegyüttest, ahol az erőket két csoportba osztjuk. A baloldali csoport erőinek eredőjét R_b, a jobboldali csoport erőinek eredőjét pedig R_j jelöli. Tételezzük föl, hogy az erőket jobbra mozgatva nő a hatás. (A következő eszmefuttatás ellenkező esetben is érvényes.) Az erők mozgatása közben a növekmény

$$\Delta C = (R_b \operatorname{tg}\alpha - R_j \operatorname{tg}\beta)\Delta x$$

Ez az érték egészen addig nő, ameddig a baloldali csoport jobbszélső tagja rá nem kerül a csúcsra. Utána viszont előjelet válthat (vagy zérus értéket vehet fel), mert az erők száma mindkét oldalon változik (mégpedig előnytelenül, mert a baloldali erők száma eggyel csökken, a jobboldali erők száma eggyel nő). Ebből az következik, hogy a maximális hatáshoz erőnek kell lennie a csúcspont fölött.

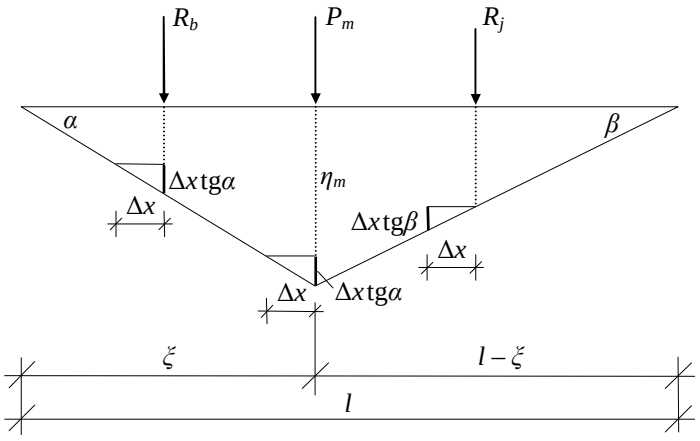


1.25 ábra. Mozgó erőcsoport általános háromszög alakú hatásábra fölött.

A kérdés az, hogy melyik erő kerüljön a csúcspont fölé. Gyakran magától értetődő, hogy melyik erőt állítsuk a csúcspont fölé. Lehet találgatni is és kipróbálni hogy jól gondoltuk-e. A következőben bemutatandó „viszonyított terhek szabálya” alkalmazásával viszont egy szükséges (de nem elégséges) feltételt tudunk megfogalmazni.

A viszonyított terhek szabálya

Tekintsünk egy több erőt tartalmazó erőcsoportot. A hatásábra csúcsára „tervezett” erőt P_m, a tőle balra lévő erők eredőjét R_b, a tőle jobbra lévő erők eredőjét pedig R_j jelöli (1.26 ábra).



1.26 ábra. A mozgó erőcsoport P_m tagja a hatásábra csúcsa fölött áll.

Annak az erőnek kell a csúcsra kerülni, amelyik esetében balra vagy jobbra mozgatva az erőket a hatás nem nő. Az erőket balra illetve jobbra mozgatva az alábbiakban megadott egyenlőtlenségek írhatók föl:

A hatás változása

balra mozgatva az erőket: $[-(R_b + P_m)\mathrm{tg}\alpha + R_j \mathrm{tg}\beta]\Delta x \le 0$

jobbra mozgatva az erőket: $[R_b \mathrm{tg}\alpha - (P_m + R_j)\mathrm{tg}\beta]\Delta x \le 0$

$$\text{ahol} \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\eta_m}{\xi} \quad \text{és} \quad \mathrm{tg}\beta = \frac{\eta_m}{l-\xi}$$

behelyettesítve és átrendezve:

$$-(R_b + P_m)(l-\xi) + R_j \xi \le 0 \qquad R_b(l-\xi) - (P_m + R_j)\xi \le 0$$

mivel $R_b + P_m + R_j = R$

$$-(R_b + P_m)l + R\xi \le 0 \qquad R_b l - R\xi \le 0$$

vagyis

$$R\frac{\xi}{l} \le R_b + P_m \qquad R_b \le R\frac{\xi}{l}$$

A két egyenlőtlenséget összevonva a viszonyított terhek szabályát kapjuk:

$$R_b \le R\frac{\xi}{l} \le R_b + P_m$$

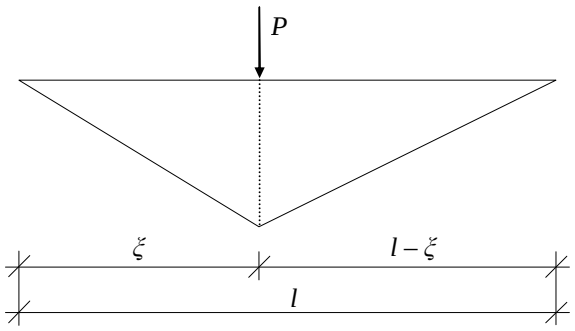
A viszonyított terhek szabálya a kettős egyenlőtlenség teljesülése esetén azt bizonyítja, hogy a csúcspont fölé állított P_m erő esetében az erőrendszer elhelyezése valóban mértékadó lehet. Megjegyezzük, hogy ez csak szükséges, de nem elégséges feltétel.

A fenti egyenlőtlenség helyességéről speciális esetek vizsgálatával könnyen meggyőződhetünk.

Egy koncentrált erő esete (1.27 ábra).
A viszonyított terhek szabálya a csúcs fölé állított erő esetében a

$$0 \le P\frac{\xi}{l} \le P$$

formában teljesül.



1.27 ábra. A viszonyított terhek szabálya egy erő esetén.

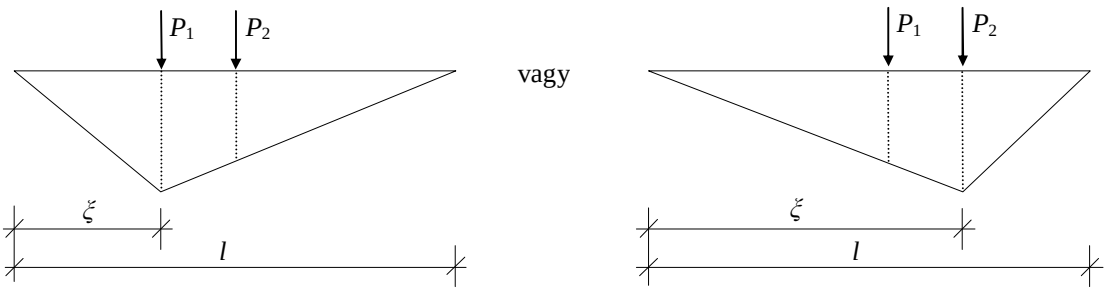
Két koncentrált erő esetében két lehetőség van.
A viszonyított terhek szabálya vagy a

$$0 \le (P_1 + P_2)\frac{\xi}{l} \le P_1$$

formában (1.28/a ábra), vagy pedig a

$$P_1 \le (P_1 + P_2)\frac{\xi}{l} \le P_1 + P_2$$

formában (1.28/b ábra) teljesül.

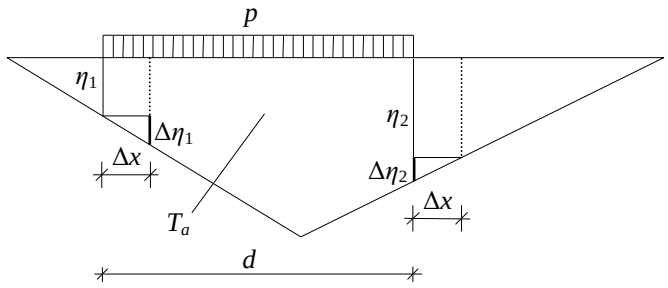


a) b)

1.28 ábra. A viszonyított terhek szabálya két erő esetén.

Egyenletesen megoszló totális teher esetében a legnagyobb igénybevétel nyilvánvalóan akkor adódik, ha a tartót a teljes hossza mentén terheljük.

Egyenletesen megoszló *d* hosszúságú parciális teher esetében azt a teherhelyzetet keressük, amely mellett a teher alatti T_a terület maximum (1.29 ábra). Ez matematikailag azt jelenti, hogy azt a helyzetet keressük, amikor az első derivált (a hatásváltozás) zérus.



1.29 ábra. Egyenletesen megoszló *d* hosszúságú parciális teher mértékadó elhelyezése.

Ha a *d* hosszúságú terhet *Δx* távolsággal eltoljuk jobb felé, akkor hatás megváltozása:

$$\Delta C = p\Delta T_a = p\left[\left(\eta_2\Delta x - \frac{\Delta\eta_2\Delta x}{2}\right) - \left(\eta_1\Delta x + \frac{\Delta\eta_1\Delta x}{2}\right)\right]$$

A másodrendűen kicsiny mennyiségek elhanyagolásával innen a

$$\Delta C = p(\eta_2 - \eta_1)\Delta x$$

összefüggésre jutunk. Ez az összefüggés akkor lehet zérussal egyenlő, ha

$$\eta_1 = \eta_2$$

Ebből az következik, hogy a teherhelyzet akkor mértékadó, ha a megoszló teher kezdő és végpontja alá eső hatásábra-ordináták egyenlők.

Görbe vonalú hatásábrák esetében a

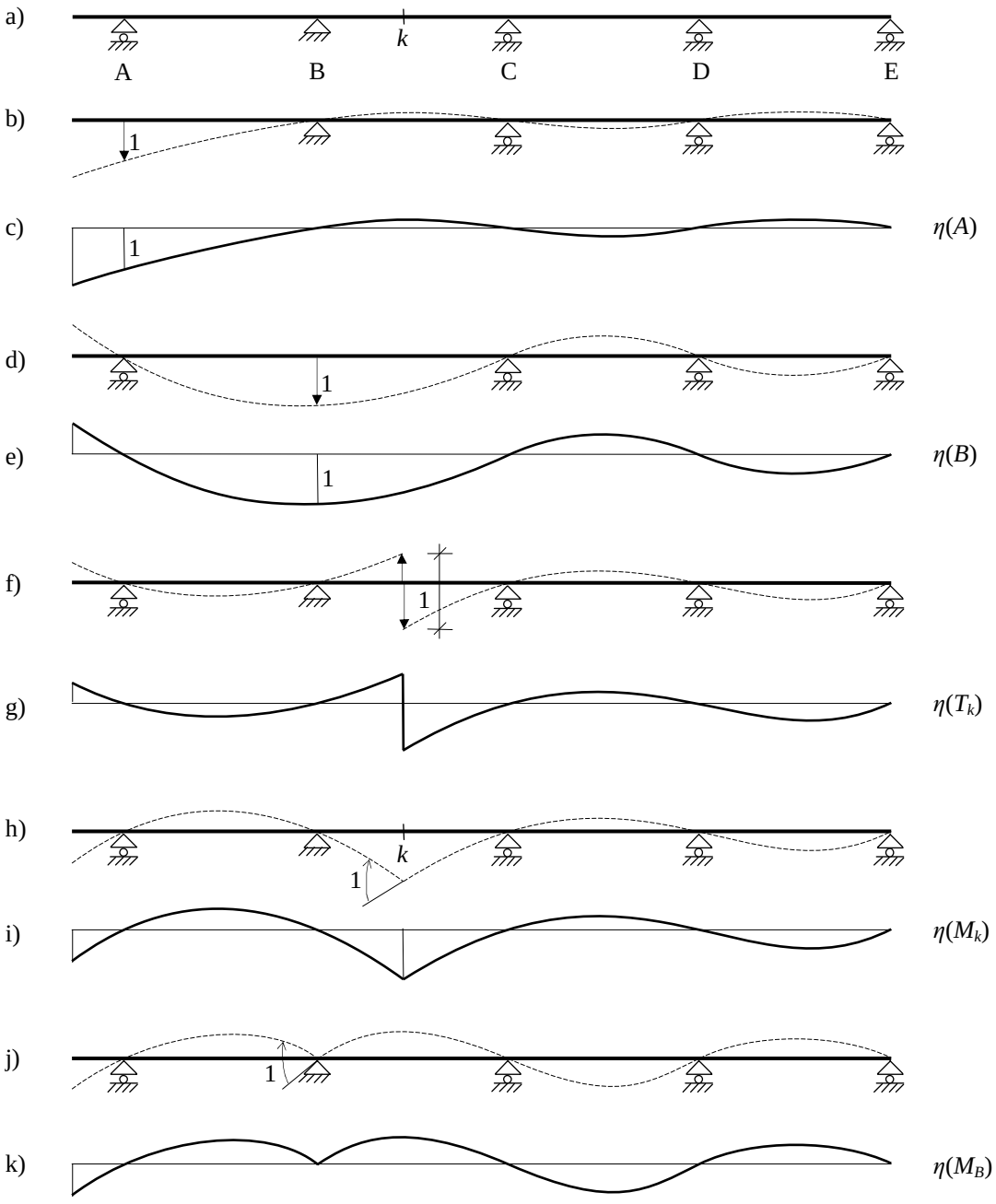
$$\Delta C = 0$$

feltétel teljesülését nem tudjuk a fenti egyszerű módon nyomon követni. Ilyenkor a teher helyzetét gyakran próbálgatással, közelítő módon állapítjuk meg.

1.4.9 Határozatlan tartók hatásábrái

Határozatlan tartók hatásfüggvényeit a Müller-Breslau elv segítségével határozhatjuk meg. A Müller-Breslau elv értelmében a statikailag határozatlan tartó *k* keresztmetszetéhez tartozó hatásábrát úgy kapjuk meg, hogy a keresett hatás helyén megszüntetjük a tartó folytonosságát és a keresett hatásnak megfelelő egységnyi

virtuális elmozdulást iktatunk be. Ha ez az elmozdulás összeférhető (kompatibilis) a tartó kényszereivel, akkor a tartó alakváltozási *görbéje* megadja az alakhelyes hatásfüggvényt. – A keresett hatásnak megfelelő elmozdulásokat a virtuális elmozdulás-mechanizmus tételénél már ismertettük (1.10 ábra).



1.30 ábra. Öttámaszú gerendatartó.

Határozzuk meg az 1.30/a ábrán vázolt öttámaszú tartó $\eta(A)$, $\eta(B)$, $\eta(T_k)$, $\eta(M_k)$ és $\eta(M_B)$ alakhelyes hatásfüggvényeit. A statikailag határozatlan tartó hatásfüggvényeit a Müller-Breslau elv segítségével szerkesztjük meg.

Az $\eta(A)$ támaszerő-hatásábra előállításához az A támasz függőleges eltolódását meggátló kényszert kell eltávolítani és helyére be kell iktatni egy egységnyi, függőleges, lefelé mutató eltolódást (1.30/b ábra). A meggörbült tartó alakja az alakhelyes $\eta(A)$ hatásfüggvényt adja (1.30/c ábra).

A B támasz helyén beiktatott egységnyi eltolódás (1.30/d ábra) segítségével megkapjuk az $\eta(B)$ alakhelyes támaszerő-hatásfüggvényt (1.30/e ábra).

A k keresztmetszet alakhelyes nyíróerő-hatásábráját úgy állítjuk elő, hogy először a k keresztmetszetnél megszüntetjük a tartó folytonosságát, majd ugyanoda beiktatunk egy egységnyi eltolódás-párt (1.30/f ábra). A tartó által felvett alak megegyezik az alakhelyes $\eta(T_k)$ hatásábrával (1.30/g ábra).

A k keresztmetszet alakhelyes nyomatéki hatásábrája úgy határozható meg, hogy a k keresztmetszetnél átvágott tartót egy egységnyi elfordulás-párral alakváltozásra kényszerítjük (1.30/h ábra). A tartó által felvett alak egyben az $\eta(M_k)$ hatásábra alakja (1.30/i ábra).

Az alakhelyes $\eta(M_B)$ támasznyomatéki hatásábra a B támasz felett beiktatott egységnyi elfordulás-pár (1.30/j ábra) segítségével állítható elő (1.30/k ábra).

1.4.10 Elmozdulási hatásábrák

Az elmozdulási (eltolódási/elfordulási) hatásábra olyan ábra, amelynek minden egyes ordinátája megmutatja, hogy a tartón mozgó és éppen az ordináta felett lévő egységnyi nagyságú teherből mekkora elmozdulás (eltolódás/elfordulás) keletkezik a vizsgált keresztmetszetben.

Az elmozdulási hatásábrák megszerkesztését két felcserélhetőségi tétel jelentősen megkönnyíti. Segítségükkel az eltolódási és elfordulási hatásábrák meghatározása visszavezethető az álló koncentrált erővel, illetve nyomatékkal terhelt tartó lehajlásábrájának megszerkesztésére.

I. Felcserélhetőségi tétel

A mozgó koncentrált erővel terhelt tartó i keresztmetszetének eltolódási hatásábrája megegyezik a tartó lehajlásábrájával az i keresztmetszetben ható egységnyi koncentrált erő hatására.

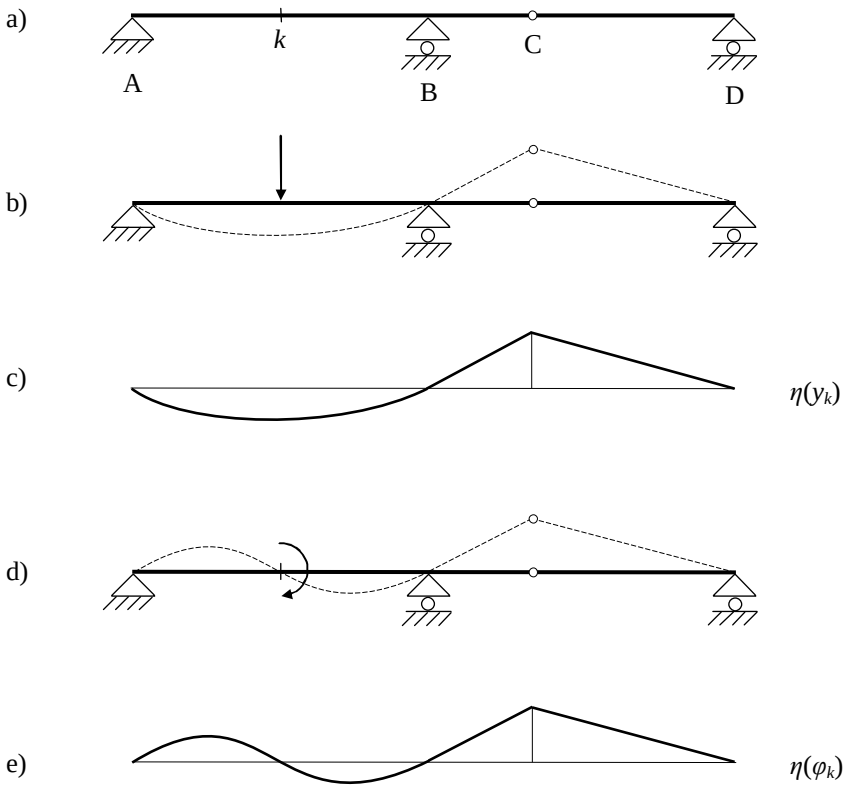
II. Felcserélhetőségi tétel

A mozgó koncentrált erővel terhelt tartó i keresztmetszetének elfordulási hatásábrája megegyezik a tartó lehajlásábrájával az i keresztmetszetben működő egységnyi koncentrált nyomaték hatására.

Határozzuk meg az 1.31/a ábrán feltüntetett háromtámaszú, belső csuklós (Gerber-) tartó k keresztmetszetének eltolódási és elfordulási hatásábráját.

Az 1. felcserélhetőségi tétel értelmében a k keresztmetszet eltolódási hatásábrája megegyezik a k keresztmetszetnél álló koncentrált erő által okozott lehajlások ábrájával (1.31/b ábra). Az alakhelyes $\eta(y_k)$ hatásábrát az 1.31/c ábra mutatja.

A k keresztmetszet elfordulási hatásábrája a 2. felcserélhetőségi tétel segítségével igen egyszerűen állítható elő: a k keresztmetszetnél ható koncentrált nyomaték okozta eltolódások ábráját kell megszerkeszteni (1.31/d ábra). Az alakhelyes hatásábrát az 1.31/e ábrán adjuk meg.



1.31 ábra. Gerber-tartó eltolódási és elfordulási hatásábrája.

2

Gyakorló feladatok mozgó erőkkel terhelt tartók vizsgálatához

2.1 Kéttámaszú tartó hatásábrái

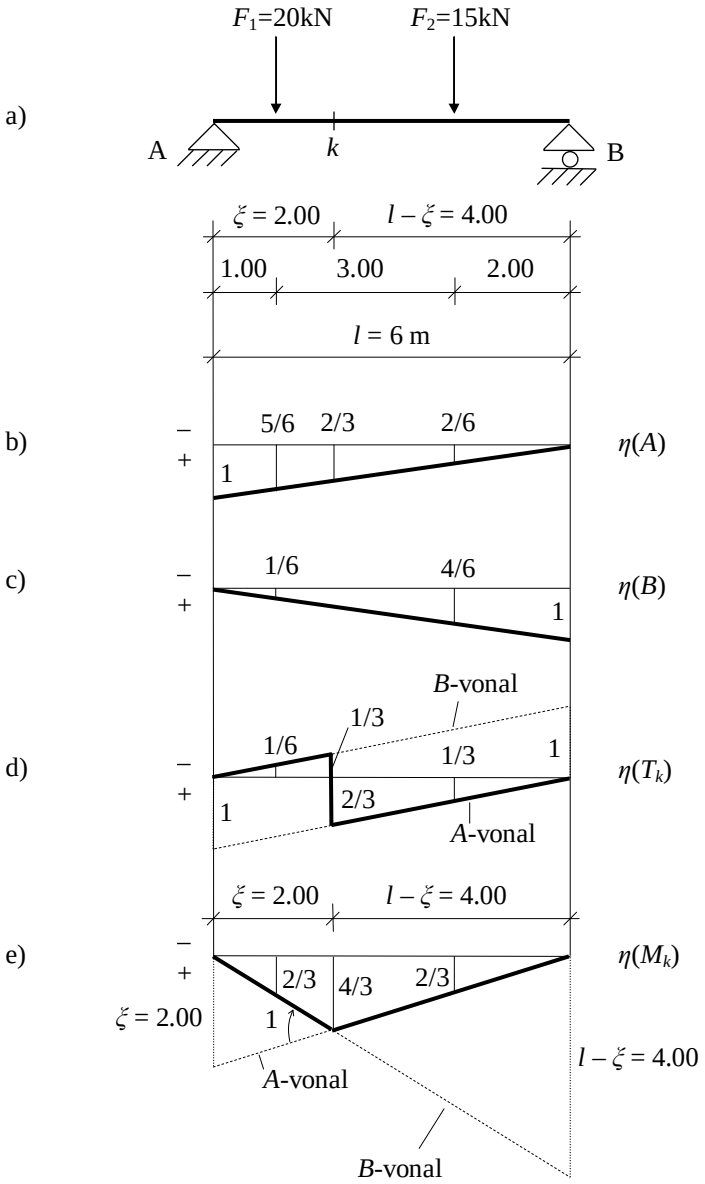
Szerkesszük meg a 2.1/a ábrán vázolt kéttámaszú tartó támaszerő hatásábráit, valamint az „*A*” támasztól két méterre lévő „*k*” keresztmetszet nyíróerő- és nyomatéki hatásábráját. Határozzuk meg az adott erőrendszer (F_1 = 20 kN és F_2 = 15 kN) hatására keletkező támaszerőket és a „*k*” keresztmetszetben keletkező igénybevételeket is. Az F_1 és F_2 erők nem felcserélhetők, vagyis az egymáshoz viszonyított helyzetük mindig az ábra szerinti.

Az $\eta(A)$ hatásábra az „*A*” támaszerő változását mutatja a tartón végighaladó $F = 1$ egységerő hatására. A hatásábrának két jellemző pontja van. Ha az $F = 1$ erő az “*A*” pontban áll, akkor $A = 1$ és ha a “*B*” ponton áll, akkor $A = 0$. Közben a hatásváltozás lineáris (2.1/b ábra).

Az $\eta(B)$ hatásábra a „*B*” támaszerő változását mutatja a tartón végighaladó $F = 1$ egységerő hatására. Amikor az $F = 1$ erő a “*B*” pontban áll, akkor $B = 1$ és amikor az “*A*” ponton áll, akkor $B = 0$. Közben a hatásváltozás lineáris (2.1/c ábra).

Az $\eta(T_k)$ nyíróerő-hatásábra előállításához felhasználjuk az $\eta(A)$ és az $\eta(B)$ hatásábrákat. Amíg az egységteher a *k*–*B* szakaszon jár, a balról vett nyíróerők összege az *A* reakcióerő, tehát ezen a szakaszon az $\eta(A)$ érvényes. Ez az „*A*–vonal”. Ha az egységerő az *A*–*k* szakaszon mozog, akkor a jobbról vett eredő erre a keresztmetszetre a „-*B*”. Ez a „*B*–vonal”. Meg kell tehát rajzolni az $\eta(A)$ és az $\eta(-B)$ hatásábrákat és ezekből az előbb leírt érvényes szakaszok adják a keresett hatásábrát (2.1/d ábra).

Az $\eta(M_k)$ nyomatéki hatásábra megszerkesztéséhez is felhasználjuk az $\eta(A)$ és az $\eta(B)$ hatásábrákat és ez a hatásábra is két vonalból fog állni. Amikor az egységerő a *k*–*B* szakaszon mozog, a „*k*” keresztmetszetben a nyomatékot balról, az „*A*” reakcióerő segítségével célszerű meghatározni: $\eta(M_k) = \xi \cdot \eta(A)$. Ez az „*A*–vonal”, amelynek az „*A*” támasznál lévő értéke $M_k(x=0) = 2 \cdot 1 = 2$, a „*B*” támasznál levő értéke $M_k(x=6) = 2 \cdot 0 = 0$, de csak a *k*–*B* szakaszon érvényes. Amikor az egységerő az *A*–*k* szakaszon mozog, a „*k*” keresztmetszetben a nyomatékot jobbról, a „*B*” reakcióerő segítségével tudjuk egyszerűen meghatározni: $\eta(M_k) = (l-\xi)\eta(B)$. Ez a „*B*–vonal”, amelynek az „*A*” támasznál lévő értéke $M_k(x=0) = (6-2) \cdot 0 = 0$, a „*B*” támasznál levő értéke $M_k(x=6) = (6-2) \cdot 1 = 4$, de ez csak az *A*–*k* szakaszon érvényes (2.1/e ábra). Amikor a mozgó egységteher éppen a „*k*” keresztmetszetnél áll, a nyomaték értéke (balról számítva az $\eta(A)$ „*k*”-nál lévő 2/3 értékével): $\eta(M_k) = \xi \cdot \eta(A) = 2 \cdot (2/3) = 4/3$.



2.1 ábra. Kéttámaszú tartó.

A hatásábrák előállítása után most már meghatározhatjuk az F_1–F_2 erőrendszer hatására keletkező reakcióerőket és a „*k*” keresztmetszetben keletkező nyíróerőt és nyomatékot (2.1/b,c,d,e ábra):

$$A = 20\eta(A) + 15\eta(A) = 20\frac{5}{6} + 15\frac{2}{6} = 21.67 \text{ kN}$$

$$B = 20\eta(B) + 15\eta(B) = 20\frac{1}{6} + 15\frac{4}{6} = 13.33 \text{ kN}$$

$$T_k = 20\eta(T_k) + 15\eta(T_k) = -20\frac{1}{6} + 15\frac{1}{3} = 1.67 \text{ kN}$$

$$M_k = 20\eta(M_k) + 15\eta(M_k) = 20\frac{2}{3} + 15\frac{2}{3} = 23.33 \text{ kNm}$$

Gyakorlásként nézzük meg, hogy az egymástól rögzített távolságra (3 méterre) lévő erőket hová helyezzük a tartón, hogy:

a) az „*A*” támaszerő maximum legyen,

b) a „*B*” támaszerő maximum legyen,

c) az M_k nyomaték maximum legyen.

Mivel az F_1 és F_2 erők nem felcserélhetők, az egymáshoz viszonyított helyzetük mindig a 2.1/a ábra szerinti.

a) A legnagyobb „*A*” támaszerőt akkor kapjuk, ha az F_1 = 20 kN erő pont az „*A*” támasz fölött áll és tőle jobbra 3 m-re helyezkedik el az F_2 = 15 kN-os erő. Ebben az esetben:

$$A = 20 \cdot 1 + 15 \cdot 0.5 = 27.5 \text{ kN}$$

b) A legnagyobb „*B*” támaszerőt akkor kapjuk, ha az F_2 = 15 kN-os erőt a „*B*” támasz fölé tesszük és tőle balra van 3 méterre az F_1 = 20 kN erő:

$$B = 15 \cdot 1 + 20 \cdot 0.5 = 25 \text{ kN}$$

c) Az „*A*” támasztól 2.0 méterre lévő „*k*” keresztmetszetben a legnagyobb nyomaték akkor keletkezik, ha az F_1 = 20 kN erő pont keresztmetszet felett van és tőle 3 méterre jobbra van az F_2 = 15 kN erő:

$$M_k = 20\frac{4}{3} + 15\frac{1}{4}\frac{4}{3} = 31.67 \text{ kNm}$$

2.2 Törtvonalú kéttámaszú tartó hatásábrái

Meghatározandók a 2.2 ábrán vázolt törtvonalú kéttámaszú tartó kijelölt keresztmetszeteinek igénybevételi hatásábrái.

Az $\eta(A)$, $\eta(B)$, $\eta(M_{k1})$, $\eta(M_{k2})$ és $\eta(M_{k3})$ hatásábrák ugyanolyanok, mintha a tartó egyenestengelyű lenne (2.2/a/b/c/d/e ábra). Ennek az az oka, hogy nincs külső vízszintes erő, ami módosítaná az erőjátékot.

Amíg az egységerő a „k_1” keresztmetszettől jobbra mozog, a baloldali eredő (R_b) az „*A*” támaszerővel egyenlő és a nyíróerő így a rúdtengelyre merőleges vetületként (2.2/k ábra):

$$T_{k,1} = R_b \cos\alpha = A\cos\alpha = 0.6A$$

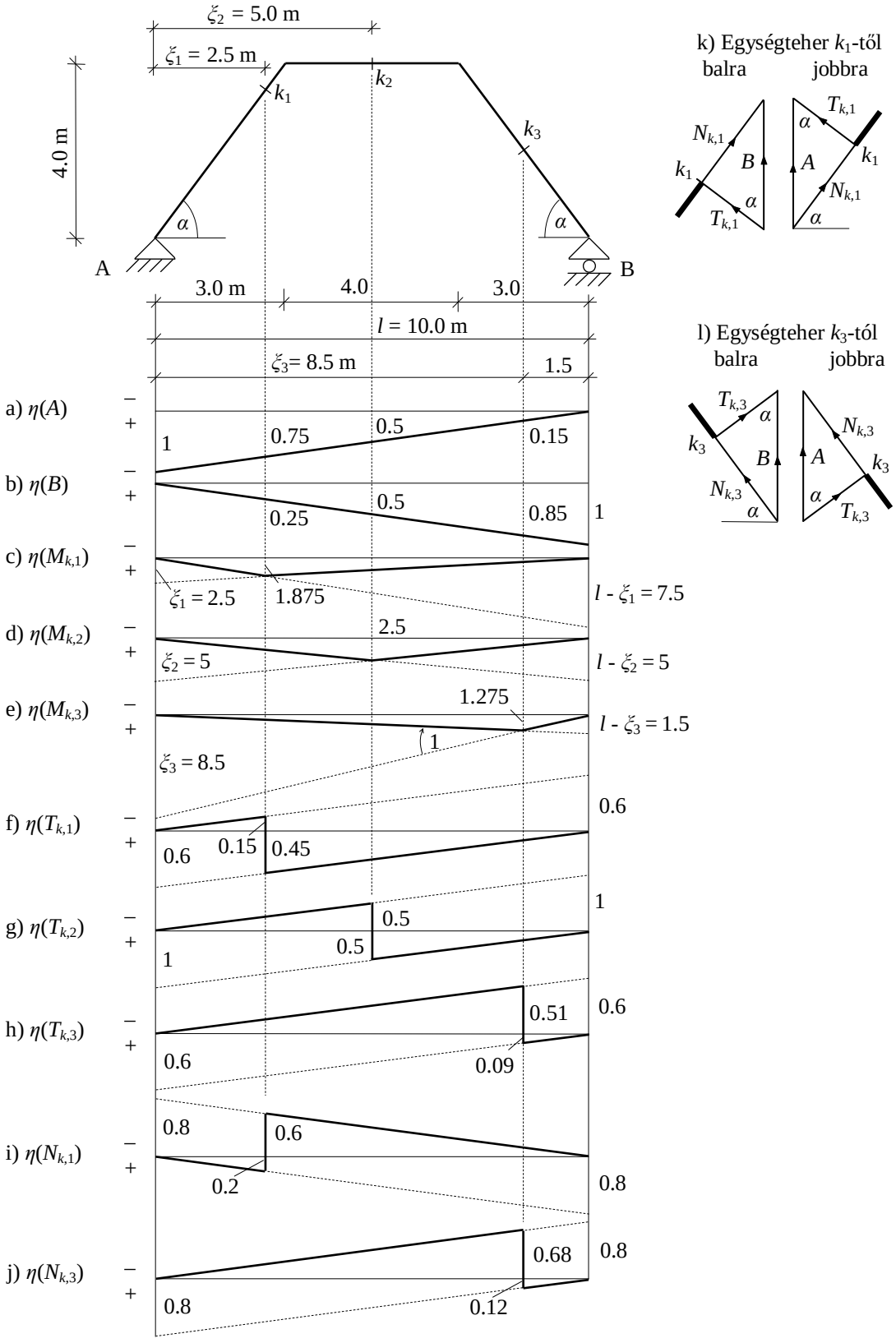
vagyis

$$\eta(T_{k,1}) = \cos\alpha\eta(A) = 0.6\eta(A)$$

Hasonlóképpen kapható meg az $\eta(T_{k,1})$ azon ága, melynél az egységerő a „k_1” keresztmetszettől balra áll, de ekkor a „*B*” reakcióerő a jobboldali eredő, amely negatív nyíróerőt jelent:

$$\eta(T_{k,1}) = -\cos\alpha\eta(B) = -0.6\eta(B)$$

Az $\eta(T_{k1})$ hatásábrát a 2.2/f ábra mutatja.



2.2 ábra. Kéttámaszú törttengelyű tartó.

Hasonló módon kapjuk meg a „k_2” keresztmetszet nyíróerő hatásábráját (2.2/g ábra), de ekkor a rúdtengelyre merőleges „*A*” és „*B*” támaszerő közvetlenül a nyíróerőt jelenti. Amíg a mozgó egységteher a „k_2” keresztmetszettől jobbra jár

$$\eta(T_{k,2}) = \eta(A)$$

és amikor a keresztmetszettől balra jár:

$$\eta(T_{k,2}) = -\eta(B)$$

A „k_3” keresztmetszet esetében a „k_1” keresztmetszetnél leírt módon járunk el. A keresztmetszettől jobbra járó egységteher (2.2/*l* ábra) esetében

$$\eta(T_{k,3}) = \cos\alpha\eta(A) = 0.6\eta(A)$$

a keresztmetszettől balra járó egységteher esetében pedig

$$\eta(T_{k,3}) = -\cos\alpha\eta(B) = -0.6\eta(B)$$

a hatásfüggvény (2.2/h ábra).

A „k_2” keresztmetszetben nem ébred normálerő, mert mind a mozgó egységerő, mind pedig a reakcióerők merőlegesek a rúdtengelyre:

$$\eta(N_{k,2}) = 0$$

A „k_1” és „k_3” keresztmetszet normálerő-hatásábráit a 2.2/k és 2.2/l ábrákon látható vázlatok segítségével állíthatjuk elő (2.2/i és 2.2/j ábra). Amíg az egységerő a „k_1” keresztmetszettől jobbra mozog:

$$\eta(N_{k,1}) = -\sin\alpha\eta(A) = -0.8\eta(A)$$

Hasonlóképpen kapható meg az $\eta(N_{k,1})$ azon ága, melynél az egységerő a „k_1” keresztmetszettől balra áll, de ekkor a „*B*” reakcióerő a jobboldali eredő:

$$\eta(N_{k,1}) = \sin\alpha\eta(B) = 0.8\eta(B)$$

Amikor az egységerő a „k_3” keresztmetszettől jobbra mozog:

$$\eta(N_{k,3}) = \sin\alpha\eta(A) = 0.8\eta(A)$$

Amikor az egységerő a „k_3” keresztmetszettől balra áll:

$$\eta(N_{k,3}) = -\sin\alpha\eta(B) = -0.8\eta(B)$$

A hatásábrák ismeretében határozzuk meg a támaszerőket, illetve a k_1, k_2 és k_3 keresztmetszetekben keletkező igénybevételeket a 2.3 ábrán adott terhelésből:

$$A = 10\eta(A) + 20\eta(A) = 10\frac{8.5}{10} + 20\frac{3}{10} = 14.5 \text{ kN}$$

$$B = 10\eta(B) + 20\eta(B) = 10\frac{1.5}{10} + 20\frac{7}{10} = 15.5 \text{ kN}$$

$$T_{k,1} = 10\eta(T_{k,1}) + 20\eta(T_{k,1}) = -10 \cdot 0.15\frac{1.5}{2.5} + 20 \cdot 0.45\frac{3}{7.5} = -0.9 + 3.6 = 2.7 \text{ kN}$$

$$T_{k,2} = 10\eta(T_{k,2}) + 20\eta(T_{k,2}) = -10 \cdot 0.5\frac{1.5}{5} + 20 \cdot 0.5\frac{3}{5} = -1.5 + 6 = 4.5 \text{ kN}$$

$$T_{k,3} = 10\eta(T_{k,3}) + 20\eta(T_{k,3}) = -10 \cdot 0.51\frac{1.5}{8.5} - 20 \cdot 0.51\frac{7}{8.5} = -0.9 - 8.4 = -9.3 \text{ kN}$$

$$N_{k,1} = 10\eta(N_{k,1}) + 20\eta(N_{k,1}) = 10 \cdot 0.2\frac{1.5}{2.5} - 20 \cdot 0.6\frac{3}{7.5} = 1.2 - 4.8 = -3.6 \text{ kN}$$

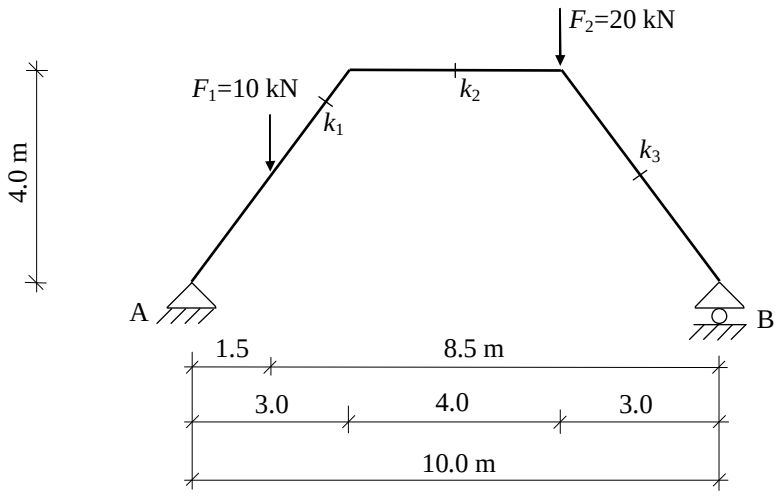
$$N_{k,2} = 0$$

$$N_{k,3} = 10\eta(N_{k,3}) + 20\eta(N_{k,3}) = -10 \cdot 0.68\frac{1.5}{8.5} - 20 \cdot 0.68\frac{7}{8.5} = -1.2 - 11.2 = -12.4 \text{ kN}$$

$$M_{k,1} = 10\eta(M_{k,1}) + 20\eta(M_{k,1}) = 10 \cdot 1.875\frac{1.5}{2.5} + 20 \cdot 1.875\frac{3}{7.5} = 11.25 + 15 = 26.25 \text{ kNm}$$

$$M_{k,2} = 10\eta(M_{k,2}) + 20\eta(M_{k,2}) = 10 \cdot 2.5\frac{1.5}{5} + 20 \cdot 2.5\frac{3}{7.5} = 7.5 + 30 = 37.5 \text{ kNm}$$

$$M_{k,3} = 10\eta(M_{k,3}) + 20\eta(M_{k,3}) = 10 \cdot 1.275\frac{1.5}{8.5} + 20 \cdot 1.275\frac{7}{8.5} = 2.25 + 21 = 23.25 \text{ kNm}$$



2.3 ábra. Kéttámaszú törttengelyű tartó F_1 és F_2 terheléssel.

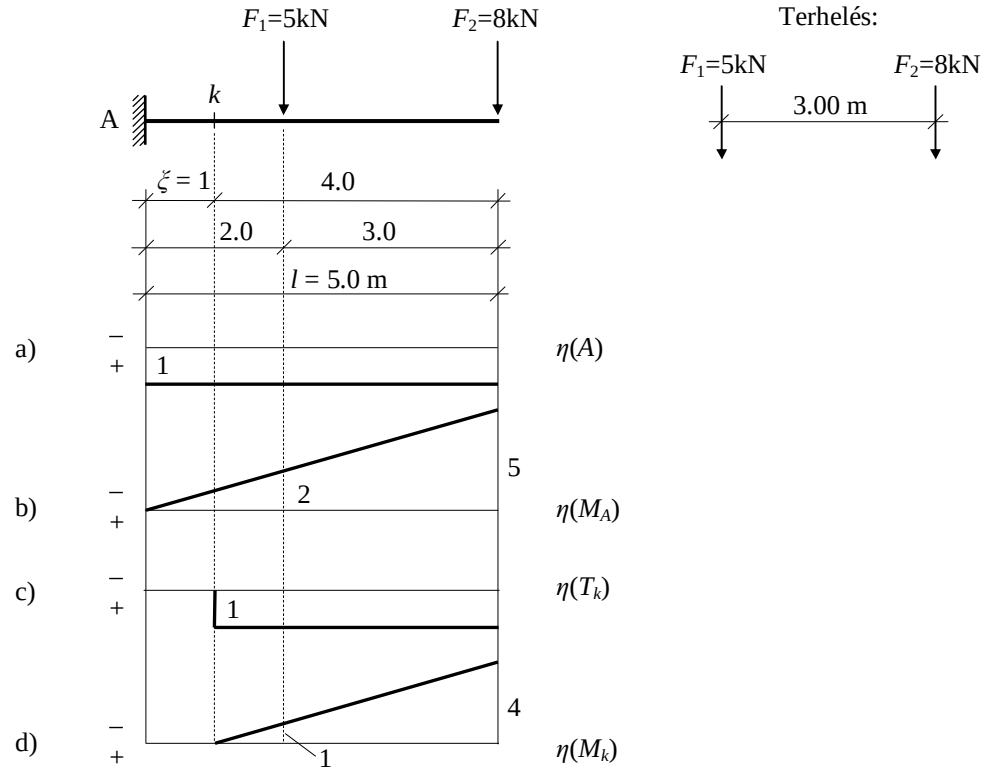
2.3 Konzoltartó hatásábrái

Szerkesszük meg a 2.4 ábrán látható konzoltartó jellemző hatásábráit. Számítsuk ki a támaszerő, a támasznyomaték és a „*k*” keresztmetszetben ébredő igénybevételek értékét, ha a tartóra az ábra jobboldalán vázolt F_1-F_2 erőkettős hat.

A 2.4/a-d ábrákon előállítottuk az „*A*” támaszerő, az „M_A” támasznyomaték és a „*k*” keresztmetszet igénybevételi hatásábráit. Ezek segítségével meghatározhatjuk a támaszerő és támasznyomaték értékeit és a „*k*” keresztmetszet igénybevételeit.

Amennyiben a támaszerők, illetve a „*k*” keresztmetszetben keletkező igénybevételek maximumát keressük, a hatásábrák szemrevételezésével könnyen megállapíthatjuk a következőket:

- Az „*A*” támaszerő szempontjából mindegy, hogy hol van a két erő,
- A többi igénybevétel szempontjából a maximális értékeket az ábrán rajzolt teherállásból kapjuk.



2.4 ábra. Konzoltartó.

A keresett értékek rendre:

$$A = 5\eta(A) + 8\eta(A) = 5 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 13 \text{ kN}$$

$$M_A = 5\eta(M_A) + 8\eta(M_A) = -5 \cdot 2 - 8 \cdot 5 = -50 \text{ kNm}$$

$$T_k = 5\eta(T_k) + 8\eta(T_k) = 5 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 13 \text{ kN}$$

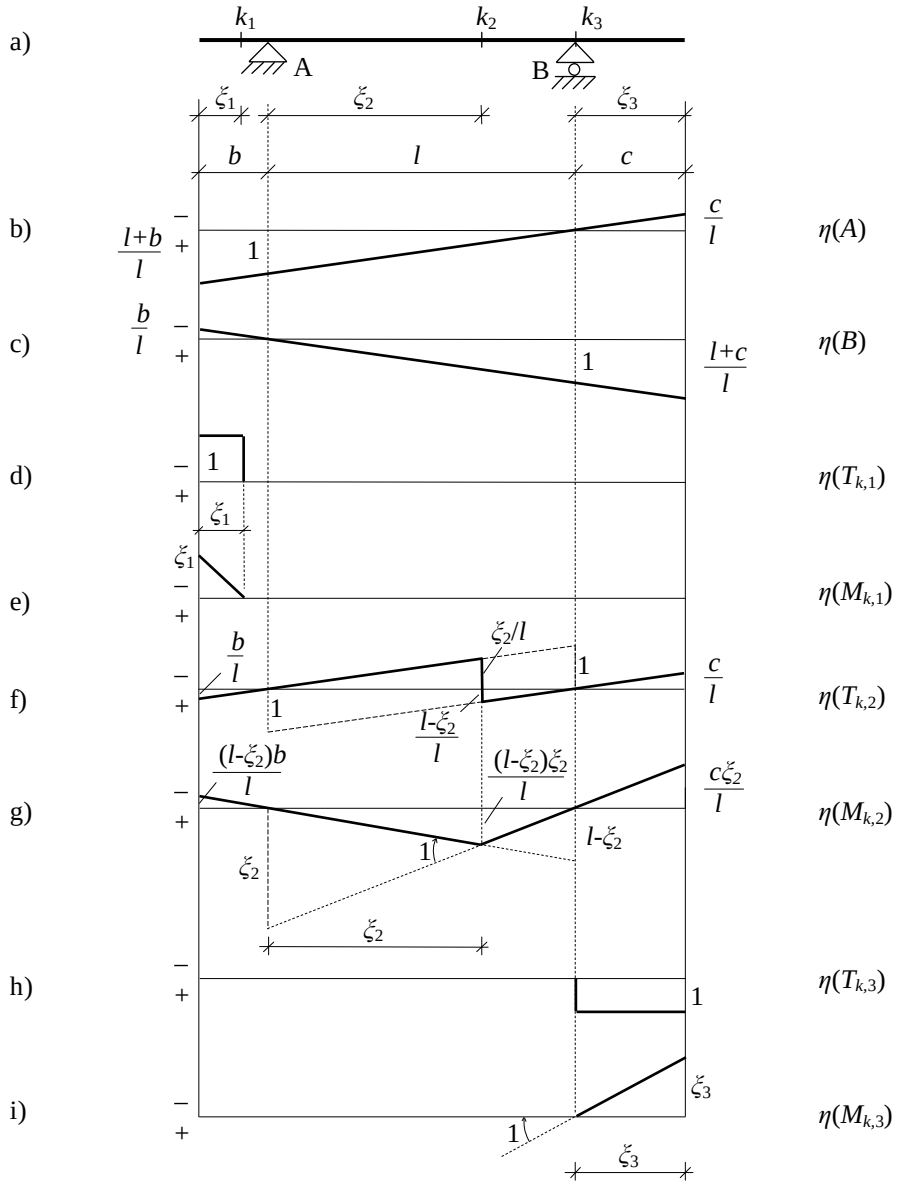
$$M_k = 5\eta(M_k) + 8\eta(M_k) = -5 \cdot 1 - 8 \cdot 4 = -37 \text{ kNm}$$

2.4 Két oldalon konzolos kéttámaszú tartó hatásábrái

Határozzuk meg a 2.5/a ábrán vázolt két végén konzolos kéttámaszú gerendának a támaszerő hatásábráit és a „k_1”, „k_2” és „k_3” keresztmetszetek igénybevételi hatásábráit. A „k_3” keresztmetszet a *B* támasztól végtelen közel jobbra van.

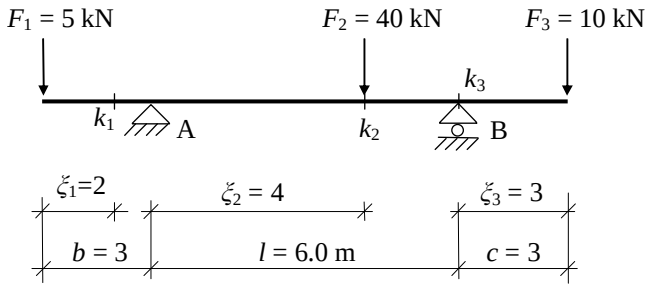
A támaszerők hatásábráit az *AB* kéttámaszú tartó támaszerő-hatásábráinak konzolok alatti meghosszabbításával kapjuk (2.5/b és 2.5/c ábra). A kéttámaszú részen lévő „k_2” keresztmetszet igénybevételi hatásábráinál is egyszerűen csak a két támasz közötti hatásábra érvényes vonalát kell a konzolokon meghosszabbítani (2.5/f és 2.5/g ábra).

A baloldali konzol „k_1” keresztmetszetéhez tartozó $\eta(T_{k,1})$ és $\eta(M_{k,1})$ teljesen olyanok mint egy jobb oldalt befogott konzoltartó hatásábrái (2.5/d és 2.5/e ábra). Hasonló a helyzet a „k_3” keresztmetszet esetén is (2.5/h és 2.5/i ábra).



2.5 ábra. Két oldalon konzolos kéttámaszú tartó.

Számoljuk ki az „*A*” és „*B*” támaszerőket és a „k_1”, „k_2” és „k_3” keresztmetszetben keletkező nyomatékokat a hatásábrák felhasználásával a 2.6 ábrán megadott adatok és vázolt teherelrendezés esetén.



2.6 ábra. Két oldalon konzolos kéttámaszú tartó terhelése.

$$A = 5\eta(A) + 40\eta(A) + 10\eta(A) = 5\frac{6+3}{6} + 40\frac{2}{6} - 10\frac{3}{6} = 7.5 + 13.33 - 5 = 15.83\ \text{kN}$$

$$B = -5\cdot\frac{3}{6} + 40\frac{4}{6} + 10\frac{6+3}{6} = -2.5 + 26.66 + 15 = 39.16\ \text{kN}$$

$$T_{k,1} = 5\cdot(-1) = -5\ \text{kN}$$

$$M_{k,1} = 5\cdot(-\xi_1) = -5\cdot 2 = -10\ \text{kNm}$$

$$T_{k,2}^{\text{bal}} = 5\frac{3}{6} + 40\frac{2}{6} - 10\frac{3}{6} = 2.5 + 13.33 - 5 = 10.83\ \text{kN}$$

$$T_{k,2}^{\text{jobb}} = 5\frac{3}{6} - 40\frac{4}{6} - 10\frac{3}{6} = 2.5 - 26.66 - 5 = -29.16\ \text{kN}$$

$$M_{k,2} = -5\frac{3}{6}(6-4) + 40\frac{6-4}{6}4 - 10\frac{3}{6}4 = -5 + 53.33 - 20 = 28.33\ \text{kNm}$$

$$T_{k,3} = 10\cdot 1 = 10\ \text{kN}$$

$$M_{k,3} = 10(-\xi_3) = -10\cdot 3 = -30\ \text{kNm}$$

2.5 Csuklós többtámaszú tartó (Gerber-tartó) hatásábrái

Állítsuk elő a 2.7/a ábrán látható Gerber-tartó támaszerő-hatásábráit és a „k_1”, „k_2”, „k_3” és „k_4” keresztmetszeteinek nyíróerő- és nyomatéki hatásábráit.

A hatásábrák alakját legegyszerűbben a „virtuális elmozdulás mechanizmus” tétel segítségével határozhatjuk meg. A támaszerő-hatásábrák esetében a kérdéses támasz helyén beiktatott egységnyi, függőleges lefelé mutató eltolódás hatására a tartó egy egy-szabadságfokú láncolattá alakul át. A láncolat alakja megadja a keresett hatásfüggvény alakját (2.7/b/c/d ábrák).

A nyomatéki és nyíróerő hatásábrák vagy egyensúlyi megfontolásokból vagy pedig szerkesztéssel határozhatók meg.

Állítsuk elő először a nyomatéki hatásábrákat.

A „k_1” keresztmetszet az „A” támasztól végtelen közel balra van; hatás csak akkor keletkezik benne, ha a mozgó egységteher tőle balra van. Ha az erő a konzol végén van,

$$\eta(M_{k,1}) = -1 \cdot 2 = -2$$

ha a „k_1”-ben van,

$$\eta(M_{k,1}) = -1 \cdot 0 = 0$$

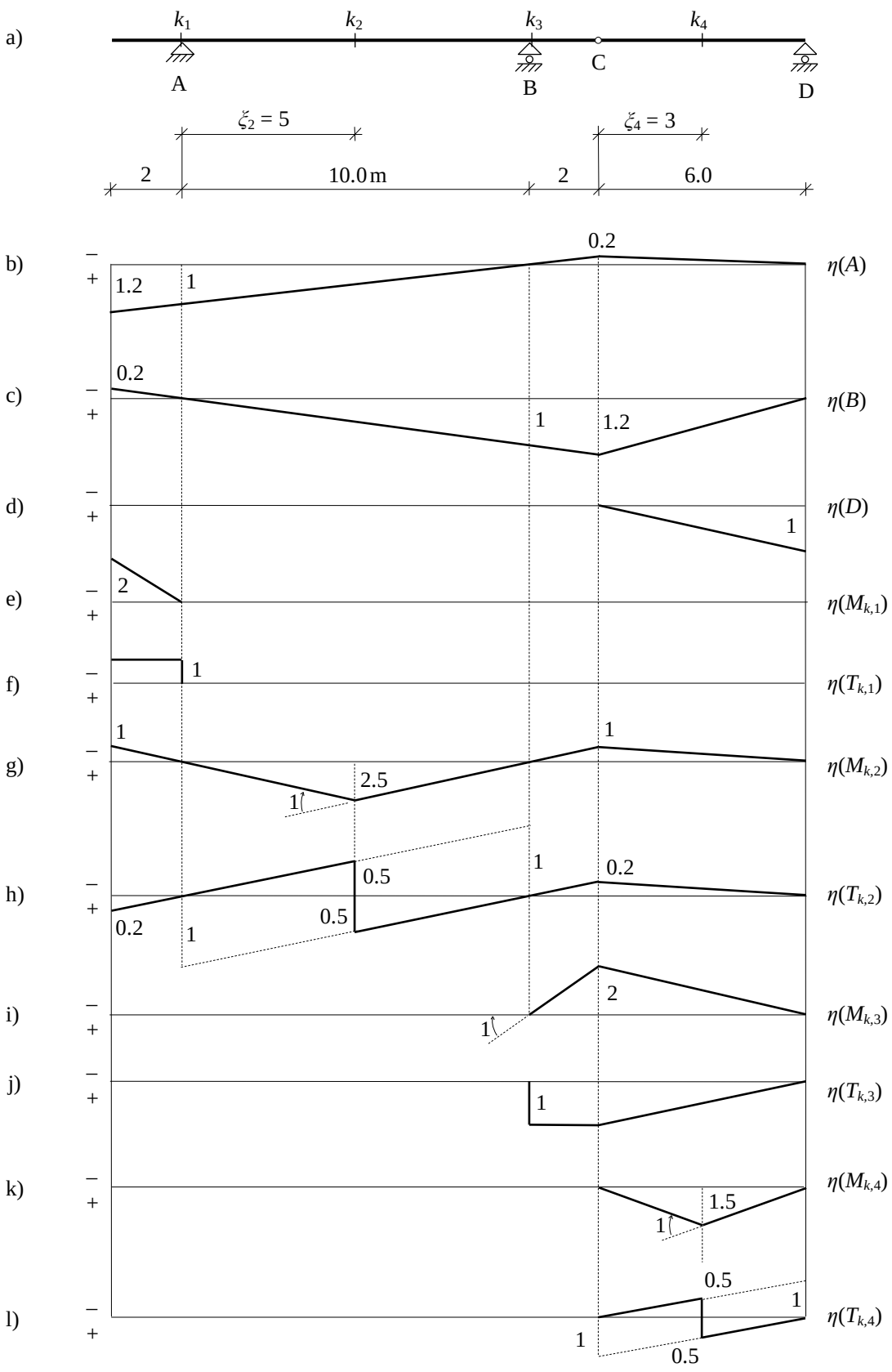
A hatás közben lineárisan változik (2.7/e ábra).

Szerkesztés esetén a „k” keresztmetszetnél átvágott tartót egy egységnyi elfordulás-párral alakváltozásra kényszerítjük. Az így kapott láncolat alakja megadja a hatásfüggvényt. A „k_2” keresztmetszet esetében a tartó bal vége és a „C” csukló közötti szakaszon a kialakuló láncolat éppen olyan, mint egy kétoldali konzollal rendelkező kéttámaszú tartó esetében: a „k_2” keresztmetszet „leesik”, hogy ott létrejöhessen az egységnyi szögelfordulás. Az „A” és „B” támaszok helyben maradnak, a túlnyúló részeken pedig az egyenes vonalak meg vannak hosszabbítva. A „C” csukló így felemelkedik, majd az ott kialakulható szögelfordulás lehetővé teszi, hogy a hatásfüggvény a „D” támasznál már zérus értéket vehessen fel (2.7/g ábra).

A „k_3” keresztmetszet a „B” támaszhoz végtelen közel jobbra van. Itt hatás (nyomaték) csak akkor keletkezik, ha az egységerő a „k_3”-tól jobbra jár. Ez derül ki a szerkesztésből is: a beiktatott egységnyi szögelfordulás csak úgy tud létrejönni, hogy a tartó „k_3”-tól jobbra lévő része elfordul és felemelkedik, de a balra lévő szakasz mozdulatlan marad (hiszen az „A” és „B” támaszok nem teszik lehetővé a mozgást). A hatásábra B-C szakasza olyan, mint egy közönséges konzolon (a befüggesztett tartó terheletlen), majd a „k_3”-ra jutó hatás a „C”-től a „D” felé haladva lineárisan csökken (2.7/i ábra).

A „k_4” hatásábrája olyan mint egy közönséges (C–D támaszokkal rendelkező) kéttámaszú tartó hatásábrája, hiszen a „C”-től balra járó egységteher esetében a „k_4”-ben nincs hatás (2.7/k ábra).

A nyíróerő-hatásábrák előállításához a k keresztmetszetnél a tartót elvágjuk, majd beiktatunk egy egységnyi eltolódás-párt. A tartó által felvett alak a keresett hatásfüggvényt szolgáltatja (2.7/f/h/j/l ábra).



2.7 ábra. Gerber-tartó.

2.6 Háromcsuklós tartó hatásábrái

Állítsuk elő a 2.8/a ábrán vázolt háromcsuklós tartó „*k*” keresztmetszetének hatásábráit.

Az első lépés a támaszerők hatásábráinak meghatározása, figyelembe véve, hogy mind függőleges, mind pedig vízszintes komponensekkel kell számolni. A támaszerők függőleges komponenseinek hatásábrái azonosak az *A*-*B* támaszú kéttámaszú tartó függőleges reakció-hatásábráival (2.8/b és 2.8/c ábra).

A vízszintes támaszerő hatásábrája a „*C*” pontra felírt nyomatéki egyenletből:

$$\eta(A_x) = \frac{8}{5}\eta(A_y)$$

illetve

$$\eta(B_x) = \frac{8}{5}\eta(B_y)$$

attól függően, hogy a mozgó egységteher a „*C*”-től jobbra, illetve balra jár. A vízszintes vetületi egyenlet értelmében a két vízszintes reakcióerő azonos nagyságú:

$$\eta(H) = \eta(A_x) = \eta(B_x)$$

Előjelét befelé mutató esetben tekintjük pozitívnak (2.8/d ábra). Az ábra középső ordinátája:

$$\eta(H) = 1.6\frac{8}{16} = 0.8$$

A hatásábra „*k*” alatti ordinátája:

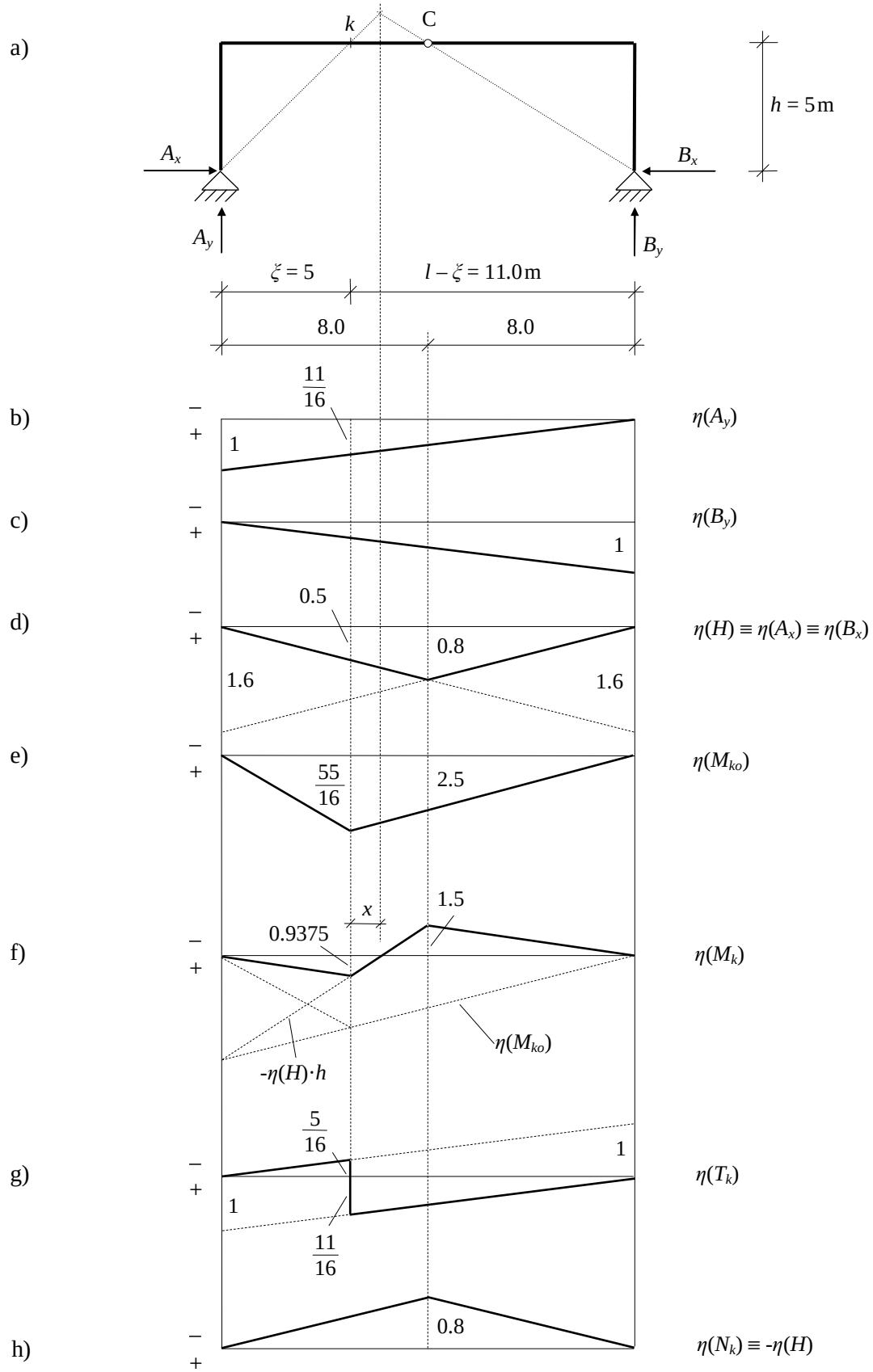
$$\eta(H) = 1.6\frac{5}{16} = 0.5$$

A „*k*” keresztmetszet nyomatéki hatásábrájának előállításához szükség lesz majd az $\eta(M_{k0})$ hatásábrára. Az $\eta(M_{k0})$ hatásábra az *A*-*B* kéttámaszúnak képzelt tartó „*k*” keresztmetszetre vonatkozó nyomatéki hatásábrája (2.8/e ábra). Ennek középső ordinátája balról, az $\eta(A_y)$ segítségével számítva:

$$\eta(M_{k0}) = 5\eta(A_y) = 5 \cdot 0.5 = 2.5$$

A hatásábra „*k*” alatti ordinátája:

$$\eta(M_{k0}) = 5\eta(A_y) = 11\frac{5}{16} = \frac{55}{16} = 3.4375$$



2.8 ábra. Háromcsuklós tartó.

A „*k*” keresztmetszet nyomatéki hatásábrája a fenti értékek segítségével most már meghatározható az

$$\eta(M_k) = \eta(M_{k0}) - h\eta(H) = \eta(M_{k0}) - 5\eta(H)$$

összefüggés segítségével (2.8/f ábra).

A hatásábra ordinátája a „*k*” alatt:

$$\eta(M_k)_k = \eta(M_{k0}) - h\eta(H) = 3.4375 - 5 \cdot 0.5 = 0.9375$$

A hatásábra ordinátája a „*C*” alatt:

$$\eta(M_k)_C = \eta(M_{k0}) - h\eta(H) = 2.5 - 5 \cdot 0.8 = -1.5$$

A hatásábra zérushelye a tartót támadó három erő (egységteher, *A* és *B* reakció) egyensúlya alapján könnyen megszerkeszthető: a három erő közös metszéspontú hatásvonala a 2.8 ábrán szaggatottan látható. A zérushely a hatásábra hasonló háromszögei segítségével ki is számítható (figyelembe véve, hogy a *k*–*C* távolság 3 méter):

$$\frac{x}{0.9375} = \frac{3}{0.9375 + 1.5} \qquad \rightarrow \qquad x = 1.154\,\text{m}$$

A „*k*” keresztmetszet nyíróerő-hatásábrája $\eta(A_y)$ és $\eta(B_y)$ segítségével a kéttámaszú tartónál ismertetett módon határozható meg (2.8/g).

A vízszintes reakcióerők következtében a „*k*” keresztmetszetben normálerő is ébred. Amíg a mozgó egységteher a keresztmetszettől jobbra jár, az A_x nyomja a keresztmetszetet, amikor pedig a mozgó egységteher a keresztmetszet baloldalára kerül, a B_x nyomja a keresztmetszetet. A normálerő-hatásábra így az $\eta(H)$ ellentettjeként kapható meg (2.8/h ábra).

2.7 Párhuzamos övű rácsos tartó hatásábrái

Állítsuk elő a 2.9/a ábrán vázolt párhuzamos övű, alsópályás rácsos tartó $S_{0\text{-}1}$, $S_{0\text{-}2}$, $S_{1\text{-}3}$, $S_{2\text{-}4}$, $S_{1\text{-}2}$, $S_{1\text{-}4}$, $S_{4\text{-}1'}$ és $S_{3\text{-}4}$ hatásábráit. A támaszerők (és támaszerő-hatásábrák) ismeretében a rúderő hatásábrák meghatározása visszavezethető (vetületi és nyomatéki) egyensúlyi egyenletek megoldására. A megoldás részleteit az alábbiakban ismertetjük.

Mivel a rúderők meghatározása során szükség van a reakciók ismeretére, az első lépés a reakcióerő-hatásábrák előállítása. Ezeket a már ismert módon határozzuk meg. Az $\eta(A)$ és $\eta(B)$ hatásábrákat a 2.9/b és 2.9/c ábrán találjuk.

$\eta(S_{0\text{-}1})$ hatásábra (2.9/d ábra)

A 0-1 és 0-2 jelű rudak átvágásával a feladatot visszavezetjük a „0” csomópont egyensúlyának vizsgálatára. A függőleges vetületi egyensúlyi egyenletből azt kapjuk, hogy

$$A - S_{0-1}\sin\alpha = 0 \qquad \rightarrow \qquad S_{0-1} = \frac{A}{\sin\alpha} \quad [-]$$

és innen

$$\eta(S_{0-1}) = \frac{1}{\sin\alpha}\eta(A) = 1.667\eta(A) \quad [-]$$

Ez érvényes akkor, amikor az egységerő a 2–*B* szakaszon jár. Amikor az egységerő az „*A*” támasz fölött áll, akkor az $S_{0\text{-}1}$ rúderő értéke zérus. A hatásábra „2” pont alatti értékét tehát az „*A*”-nál lévő zérus értékkel kell összekötni. Máshogyan megfogalmazva, a „0-2” szakasz az átviteli szakasz, ahol a hatásábra értékeit a pontok levetítésével és összekötésével kapjuk meg.

$\eta(S_{0\text{-}2})$ hatásábra (2.9/e ábra)

Az $S_{0\text{-}2}$ rúderőt szintén a „0” csomópont egyensúlyának vizsgálatával határozzuk meg. A vízszintes vetületi egyensúlyi egyenlet szerint

$$S_{0-1}\cos\alpha - S_{0-2} = 0$$

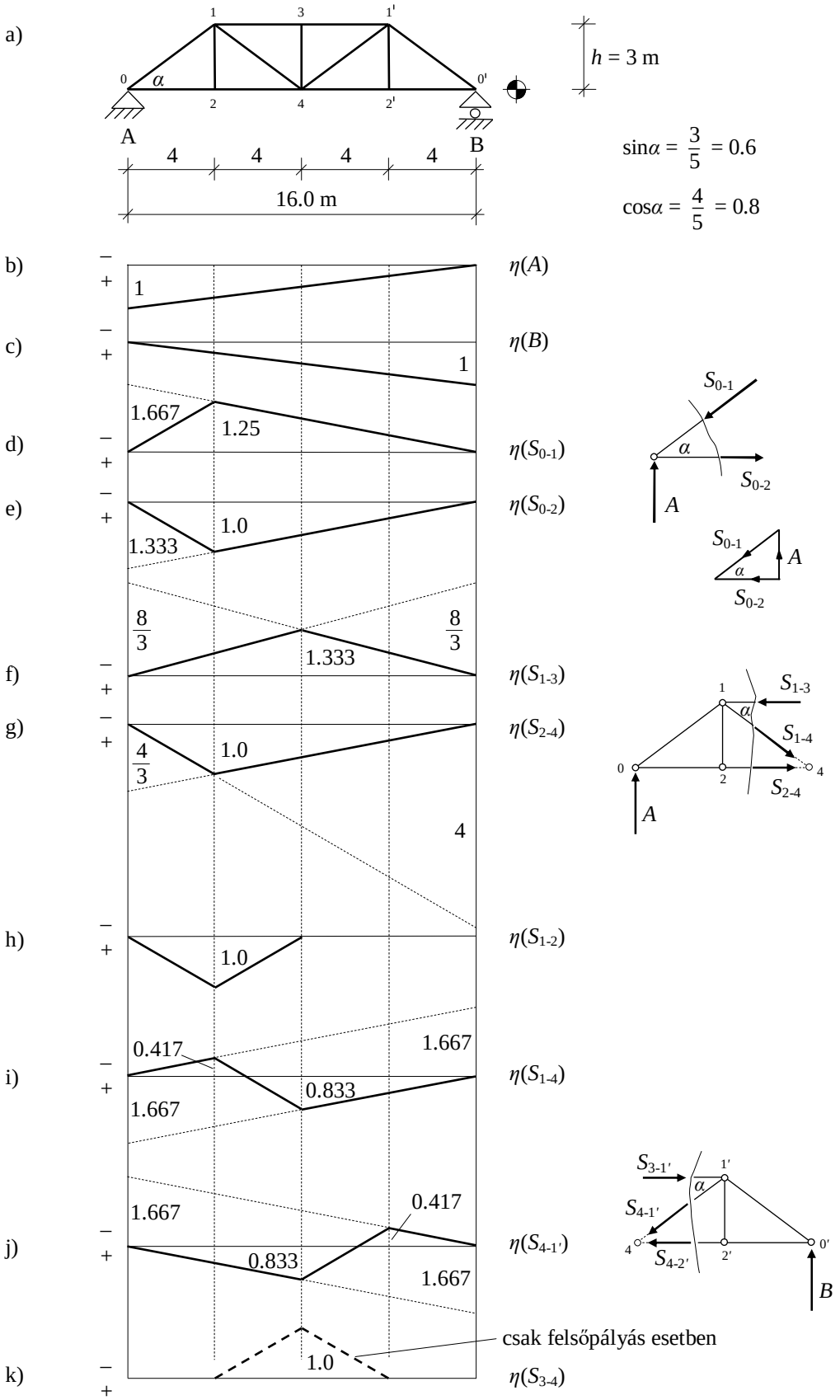
Innen, figyelembe véve hogy $S_{0\text{-}1} = A/\sin\alpha$,

$$S_{0-2} = S_{0-1}\cos\alpha = A\text{ctg}\alpha \qquad [+]$$

és

$$\eta(S_{0-2}) = \eta(A)\text{ctg}\alpha = 1.333\eta(A) \qquad [+]$$

Ez érvényes akkor, amikor az egységerő a 2–*B* szakaszon jár. Amikor az egységerő az „*A*” támasz fölött áll, akkor az $S_{0\text{-}2}$ rúderő értéke zérus. A hatásábra „2” pont alatti értékét tehát az „*A*”-nál lévő zérus értékkel kell összekötni.



2.9 ábra. Párhuzamos övű rácsos tartó.

$\eta(S_{1\text{-}3})$ hatásábra (2.9/f ábra)

Az 1-3-2-4 szakaszon hármas átmetszést hajtunk végre. Az $S_{1\text{-}3}$ jelű rúd számításához a nyomatéki főpont a 4. pont. Amíg a mozgóteher a főponttól jobbra jár, a nyomatéki főpontra felírt nyomatéki egyenletből:

$$-3S_{1-3} + 8A = 0 \qquad \rightarrow \qquad S_{1-3} = \frac{8}{3}A \quad [-]$$

és

$$\eta(S_{1-3}) = 2.667\eta(A) \quad [-]$$

Hasonlóképpen, amikor a mozgóteher a főponttól balra jár,

$$\eta(S_{1-3}) = 2.667\eta(B) \quad [-]$$

Az érvényes szakaszok figyelembevételével megkapjuk a hatásábrát, amelynek csúcsponti értéke 1.333.

$\eta(S_{2\text{-}4})$ hatásábra (2.9/g ábra)

Ismét az előbb végrehajtott 1-3-2-4 hármas átmetszést használjuk fel. Az $S_{2\text{-}4}$ jelű rúd számításához a nyomatéki főpont az 1. pont. Amíg a mozgóteher a főponttól jobbra jár, a nyomatéki főpontra felírt nyomatéki egyenletből:

$$-3S_{2-4} + 4A = 0 \qquad \rightarrow \qquad S_{2-4} = \frac{4}{3}A \quad [+]$$

és

$$\eta(S_{2-4}) = 1.333\eta(A) \quad [+]$$

Hasonlóképpen, amikor a mozgóteher a főponttól balra jár,

$$\eta(S_{2-4}) = 4\eta(B) \quad [+]$$

Az érvényes szakaszok figyelembevételével megkapjuk a hatásábrát, amelynek csúcsponti értéke 1.0.

$\eta(S_{1\text{-}2})$ hatásábra (2.9/h ábra)

Az $S_{1\text{-}2}$ rúd vakrúd, amikor a mozgó egységteher az „A” támasz fölött áll és amíg a 4-*B* szakaszon jár. Értéke 1.0 (húzás), amikor az egységteher éppen a 2. ponton áll. A két közbenső szakaszon a hatás változása lineáris.

$\eta(S_{1\text{-}4})$ hatásábra (2.9/i ábra)

Ismét az 1-3-2-4 hármas átmetszést használjuk fel. Amennyiben az egységerő az átmetszéstől jobbra jár:

$$A - S_{1-4}\sin\alpha = 0 \qquad \rightarrow \qquad S_{1-4} = \frac{A}{\sin\alpha} \quad [+]$$

és innen

$$\eta(S_{1-4}) = \frac{1}{\sin\alpha}\eta(A) = 1.667\eta(A) \quad [+]$$

Amennyiben az egységerő az átmetszéstől balra jár, az előbbiekhez hasonlóan:

$$\eta(S_{1-4}) = \frac{1}{\sin\alpha}\eta(B) = 1.667\eta(B) \quad [-]$$

Szerkesztéskor mindkét ábrát megrajzoljuk, a 2. és 4. átviteli pontokat levetítjük és az érvényes szakaszokat kihúzzuk. A 2. és 4. pontokhoz tartozó értékeket hasonló háromszögek segítségével számítjuk ki (0.417 és 0.833).

$\eta(S_{4\text{-}1'})$ hatásábra (2.9/j ábra)

A hatásábra az előző elvek alapján készül, de a hármas átmetszés a 3-1′-4-2′ szakaszon történik. Amennyiben az egységerő az átmetszéstől jobbra jár:

$$A - S_{4-1'}\sin\alpha = 0 \qquad \rightarrow \qquad S_{4-1'} = \frac{A}{\sin\alpha} \quad [-]$$

és innen

$$\eta(S_{4-1'}) = \frac{1}{\sin\alpha}\eta(A) = 1.667\eta(A) \quad [-]$$

Amennyiben az egységerő az átmetszéstől balra jár, az előbbiekhez hasonlóan:

$$\eta(S_{4-1'}) = \frac{1}{\sin\alpha}\eta(B) = 1.667\eta(B) \quad [+]$$

Szerkesztéskor mindkét ábrát megrajzoljuk, a 4. és 2′. átviteli pontokat levetítjük és az érvényes szakaszokat kihúzzuk.

Gyakorlásként nézzük meg, hogy hová kell állítani a tartón végighaladó 10 kN nagyságú erőt, hogy az $S_{1\text{-}4}$ rúdban a legnagyobb húzóerő, illetve a legnagyobb nyomóerő keletkezzen, és határozzuk meg a maximális rúderők értékét.

A rúdban akkor keletkezik a legnagyobb húzóerő, ha a mozgó teher a “4” pontban van. Ekkor a rúdban keletkező erő:

$$S_{1-4} = 0.833 \cdot 10 = 8.33\,\text{kN} \quad [+]$$

A legnagyobb nyomóerő akkor keletkezik a rúdban, ha az erő a “2” pontban áll. Ekkor a rúdban keletkező erő:

$$S_{1-4} = 0.417 \cdot 10 = 4.17 \text{ kN} \quad [-]$$

A hatásábrákat szemlélve még a következőket állapíthatjuk meg:
- az alsó övrudak mindig húzottak,
- a felső övrudak mindig nyomottak,
- a rácsrudakban az erő helyzetétől függően változó az igénybevétel,
- az „1-2” és „1′-2′”oszlopokban csak akkor keletkezik erő, ha a teher a szomszédos (vízszintes) rudak felett van,
- a „3-4” rúd alsópályás esetben vakrúd.

Nézzük meg végül, hogy mely hatásábrák változnak meg, ha a tartó felsőpályás.
- az „1-2” és „1′-2′” rúd ebben az esetben vakrúd,
- a „3-4” rúd ebben az esetben a „3” pontban lévő teherből kap közvetlen terhelést. Ha az egységerő a „3” pontban áll, akkor a rúdban egységnyi nyomóerő keletkezik (2.9/k ábra).

2.8 Két végén befogott tartó alakhelyes hatásábrái

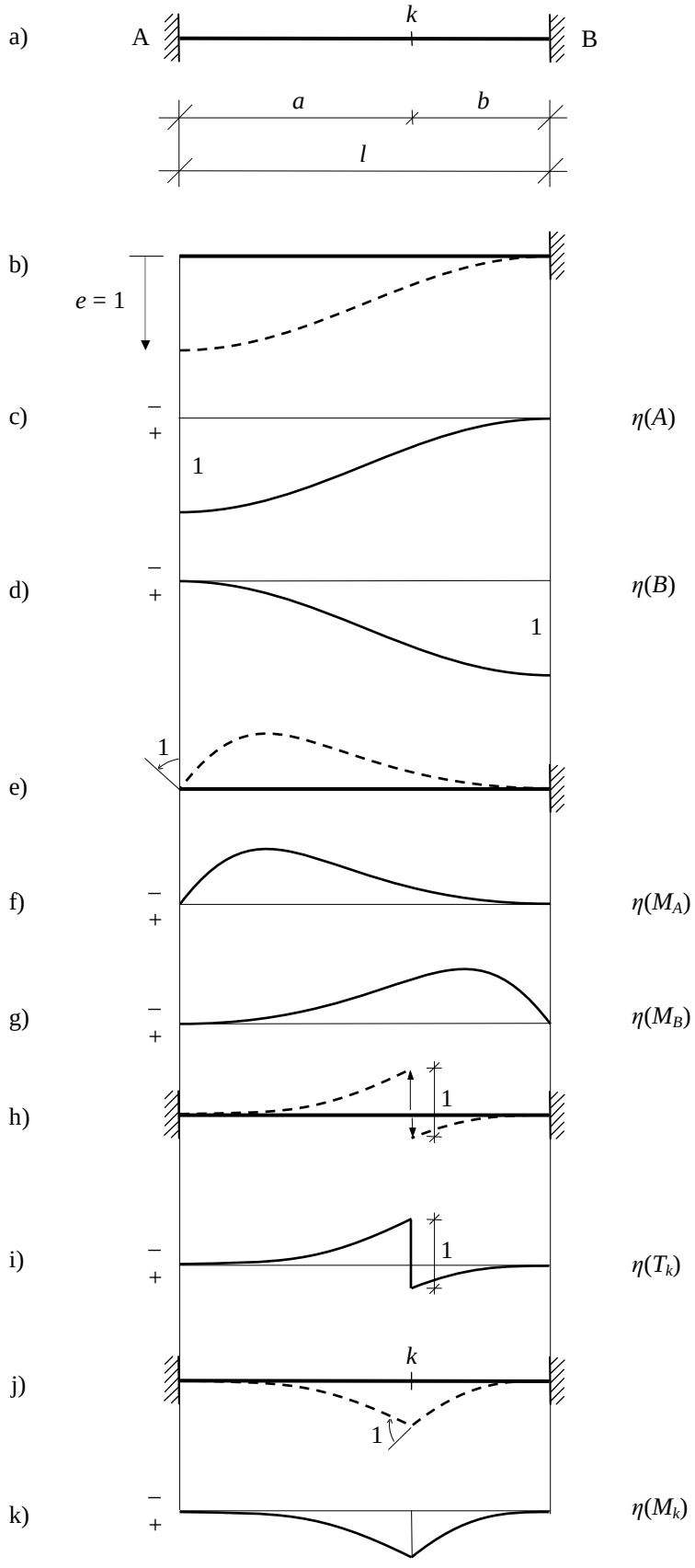
Készítsük el a 2.10/a ábrán vázolt két végén befogott tartó alakhelyes $\eta(A)$, $\eta(B)$, $\eta(M_A)$, $\eta(M_B)$, $\eta(T_k)$ és $\eta(M_k)$ hatásfüggvényeit. *EI*: állandó.

Az $\eta(A)$ támaszerő-hatásábra előállításához az „*A*” támasz függőleges eltolódását meggátló kényszert kell eltávolítani és helyére be kell iktatni egy egységnyi, függőleges, lefelé mutató eltolódást (2.10/b ábra). A meggörbült tartó alakja az alakhelyes $\eta(A)$ hatásábrát adja (2.10/c ábra). Hasonló módon kapjuk meg az $\eta(B)$ hatásábrát (2.10/d ábra).

Az M_A támasznyomaték hatásábrájának megszerkesztése úgy történik, hogy megszüntetjük a támasz elfordulását meggátló kényszert és beiktatunk egy egységnyi elfordulást (2.10/e ábra). A meggörbült tartóalak az alakhelyes $\eta(M_A)$ hatásábrát adja (2.10/f ábra). Az $\eta(M_B)$ ugyanígy határozható meg (2.10/g ábra).

A „*k*” keresztmetszet alakhelyes nyíróerő-hatásábráját úgy állítjuk elő, hogy először a „*k*” keresztmetszetnél átvágjuk a tartót, majd ugyanoda beiktatunk egy egységnyi eltolódáspárt (2.10/h ábra). A tartó által felvett alak megegyezik az alakhelyes $\eta(T_k)$ hatásábrával (2.10/i ábra).

A „*k*” keresztmetszet alakhelyes nyomatéki hatásábrája úgy határozható meg, hogy a „*k*” keresztmetszetnél átvágott tartót egy egységnyi elforduláspárral alakváltozásra kényszerítjük (2.10/j ábra). A tartó által felvett alak egyben az $\eta(M_k)$ hatásábra alakja (2.10/k ábra).

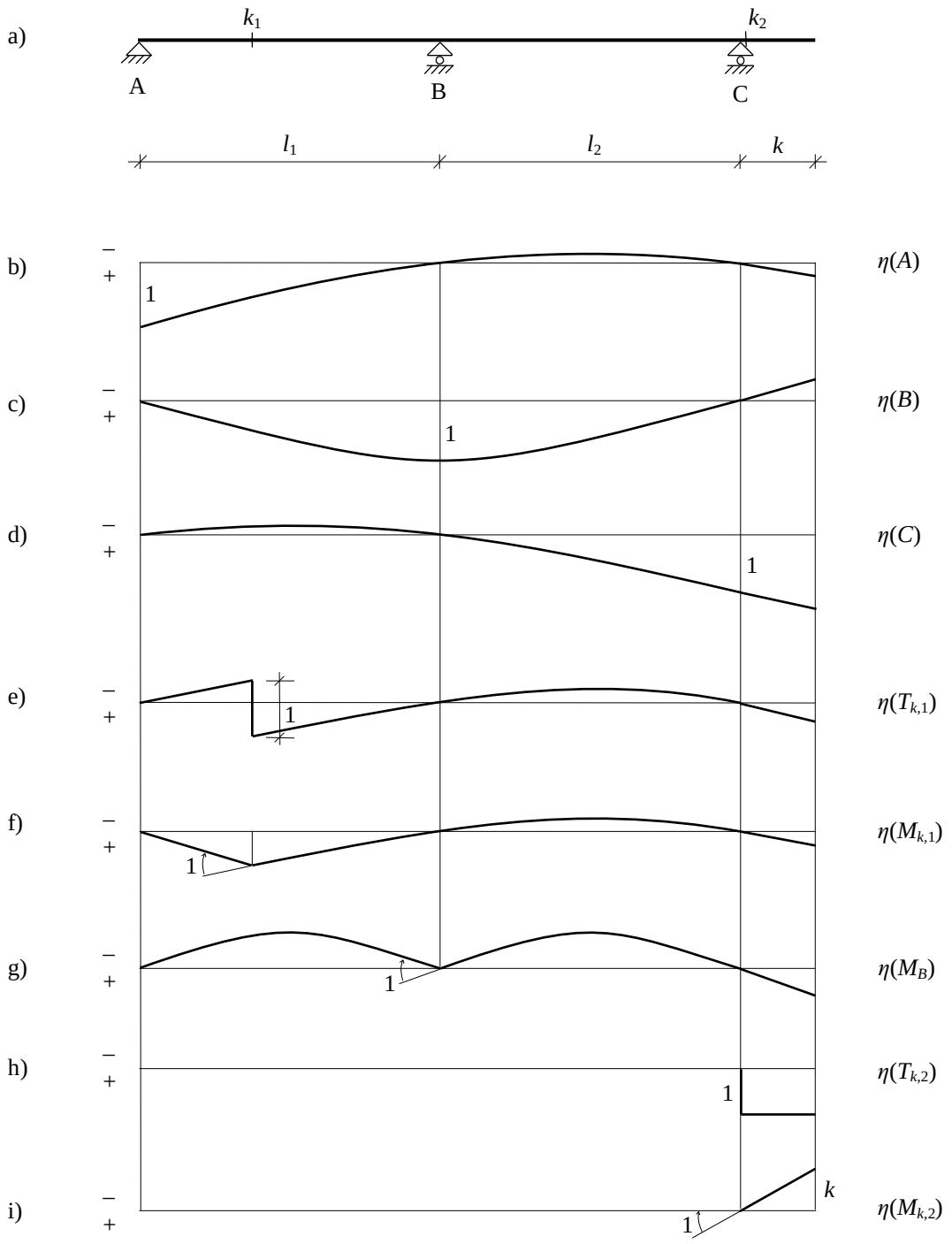


2.10 ábra. Két végén befogott tartó alakhelyes hatásábrái.

2.9 Háromtámaszú tartó alakhelyes hatásábrái

Készítsük el a 2.11/a ábrán vázolt háromtámaszú tartó alakhelyes $\eta(A)$, $\eta(B)$, $\eta(C)$, $\eta(T_{k,1})$, $\eta(M_{k,1})$, $\eta(T_{k,2})$ és $\eta(M_{k,2})$ hatásfüggvényeit. *EI*: állandó.

Az előző feladatnál ismertetett elvek szerint előállított hatásábrák a 2.11/b-i ábrákon láthatók.

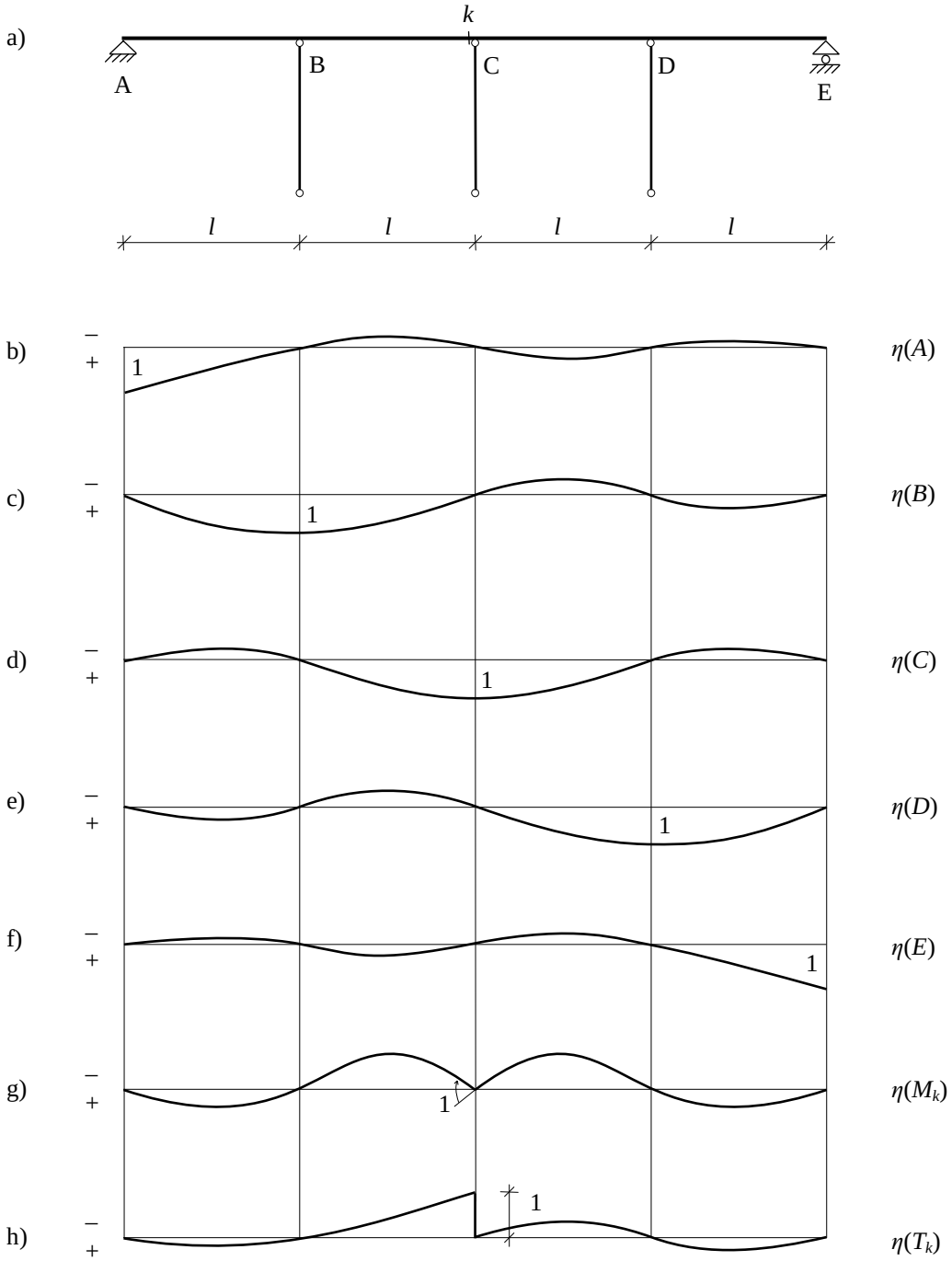


2.11 ábra. Háromtámaszú tartó alakhelyes hatásábrái.

2.10 Négynyílású folytatólagos tartó alakhelyes hatásábrái

Készítsük el a 2.12/a ábrán vázolt három ingaoszloppal megtámasztott négynyílású folytatólagos tartó alakhelyes $\eta(A)$, $\eta(B)$, $\eta(C)$, $\eta(D)$, $\eta(E)$, $\eta(T_k)$ és $\eta(M_k)$ hatásfüggvényeit. *EI*: állandó. A „*k*” keresztmetszet a „*C*” támasztórúdtól végtelen közel balra van.

Állapítsuk meg, hogy merre járhat a mozgó egységteher akkor, ha a „*D*” támasztórúdban húzás nem ébredhet!



2.12 ábra. Négynyílású tartó alakhelyes hatásábrái.

A 2.8 feladatnál ismertetett elvek szerint megszerkesztett hatásábrák a 2.12 ábrán találhatók.

A 2.12/e ábrán látható $\eta(D)$ hatásábra azt mutatja, hogy a mozgó egységteher az *A-B*, *C-D* és *D-E* szakaszokon járhat, ha azt akarjuk, hogy a „*D*” támasztórúdban ne ébredjen húzás.

2.11 Erőrendszerrel terhelt kéttámaszú tartó: mértékadó teherhelyzet

Határozzuk meg a 2.13/a ábrán ábrázolt, 25 méter fesztávolságú, kéttámaszú tartó „*k*” keresztmetszetének maximális nyomatékát a vázolt tíz koncentrált erőből álló teherrendszer és a $g = 4$ kN/m intenzitású totális egyenletesen megoszló teher hatására. A koncentrált erők sorrendje nem cserélhető fel.

Az első lépés a „*k*” keresztmetszet nyomatéki hatásábrájának megszerkesztése (2.13/b ábra). A hatásábra alakjának ismeretében már el tudunk képzelni teherhelyzeteket, amelyek mértékadók lehetnek. Mivel a háromszög alakú hatásábra csúcsánál mindenképpen kell hogy legyen erő (és az erők három méterre vannak egymástól), ki kell számítani a csúcsponttól jobbra és balra három-három méterenként az ordinátákat. Ezek után olyan teherállásokat hozunk létre, amelyek esetében nagy hatást várhatunk. Ezeket a teherállásokat úgy kapjuk, hogy

a) minél több mozgó erőt próbálunk a tartón elhelyezni,
b) az erőrendszert úgy mozgatjuk, hogy lehetőleg a nagyobb erők kerüljenek a hatásábra csúcspontjának közelébe.

Három ilyen teherelrendezést mutat a 2.13/c, 2.13/d és 2.13/e ábra. A következő lépés az, hogy a viszonyított terhek szabálya segítségével megnézzük, hogy melyik teherállás *lehet* mértékadó. A viszonyított terhek szabálya alkalmazásához meg kell határozni a tartón elhelyezett erők eredőjét (összegét; R), a csúcsponttól balra lévő erők eredőjét (R_b) és meg kell adni a csúcspont fölött elhelyezett erő nagyságát (P_m). A következő táblázatban összefoglaljuk ezeket az adatokat az I., II. és III. teherállásra vonatkozóan.

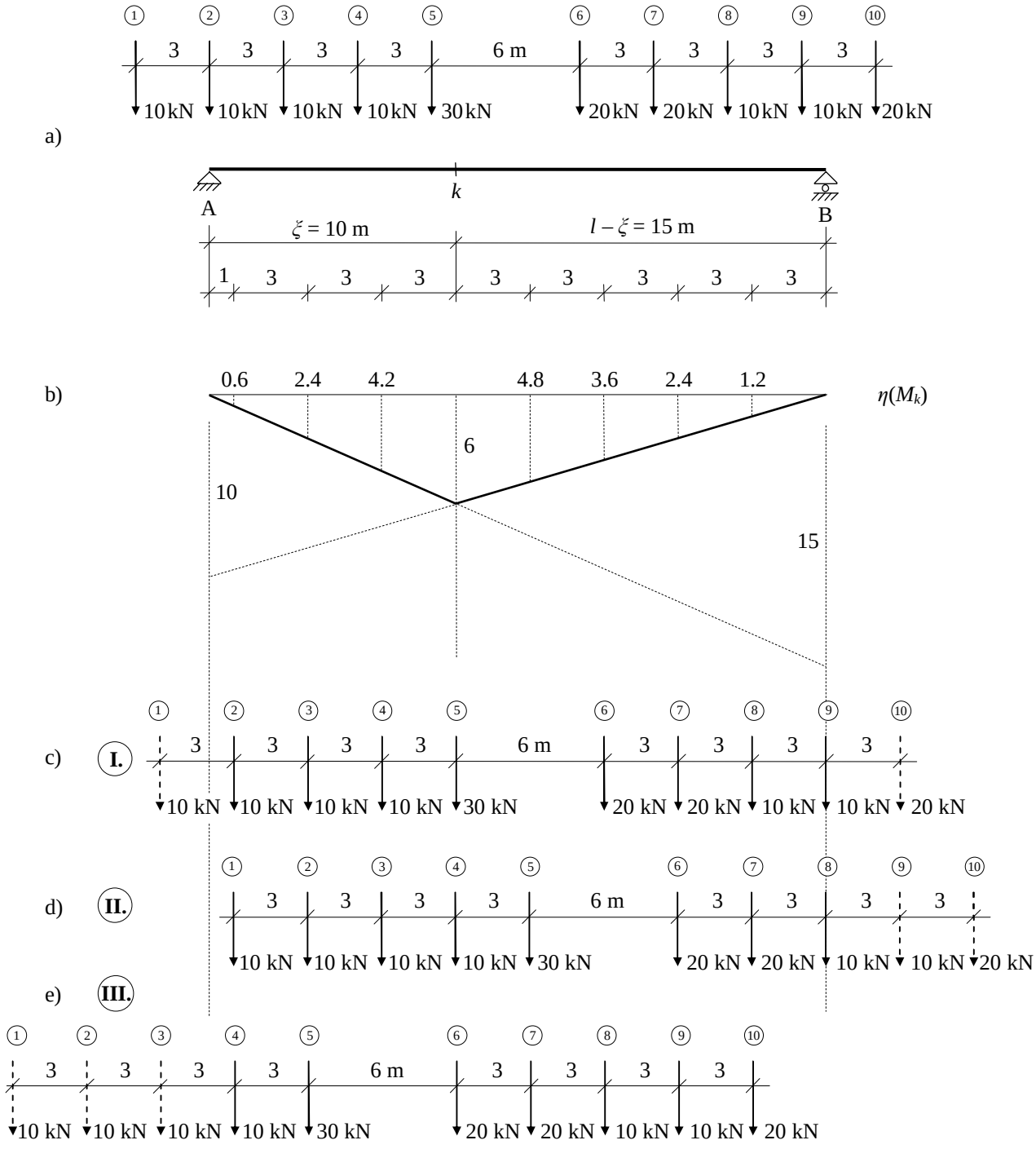
Teherállás	R	R_b	P_m
I. (2.13/c ábra)	110	30	30
II. (2.13/d ábra)	110	30	10
III. (2.13/e ábra)	120	40	20

Az R, R_b és P_m mennyiségek segítségével mindhárom teherállás esetében meg kell nézni, hogy teljesül-e a viszonyított terhek szabályában megfogalmazott

$$R_b \le R\frac{\xi}{l} \le R_b + P_m$$

kettős egyenlőtlenség:

Teherállás	Viszonyított terhek szabálya	teljesül?
I.	$30 \le 110\frac{10}{25} = 44 \le 60$	teljesül
II.	$30 \le 110\frac{10}{25} = 44 \le 40$	nem teljesül
III.	$40 \le 120\frac{10}{25} = 48 \le 60$	teljesül



2.13 ábra. Tíz erőből álló erőrendszerrel terhelt kéttámaszú tartó.

A viszonyított terhek szabálya alkalmazásával azt kaptuk, hogy az I. és a III. jelű teherállás is mértékadó *lehet*. A II. teherállással tehát a továbbiakban nem kell foglalkozni.

Mindkét teherállás esetében ki kell tehát számítani a „*k*” keresztmetszetben keletkező nyomatékot. Ezt úgy tesszük meg, hogy rendre összeszorozzuk a mozgó erők értékét a hozzájuk tartozó hatásábra-ordinátával majd a szorzatokat összegezzük.

I. teherállás:

$$M_k^{I.} = \sum_1^7 P_i \eta_i = 10(0.6 + 2.4 + 4.2 + 1.2) + 30 \cdot 6 + 20(3.6 + 2.4) = 384 \text{ kNm}$$

III. teherállás:

$$M_k^{III.} = \sum_1^7 P_i \eta_i = 10(0.6 + 3.6 + 2.4) + 30 \cdot 2.4 + 20(6 + 4.8 + 1.2) = 258 \text{ kNm}$$

Az I. teherállás tehát a mozgó koncentrált erőrendszer hatására keletkező maximális igénybevételt adó teherállás. A tartó maximális nyomatékát a „*k*” pontban úgy kapjuk meg, hogy koncentrált erők nyomatékához még hozzáadjuk a „*g*” totális megoszló teher által okozott nyomatékot:

$$M_k^g = gA_{M_k} = 4\frac{25 \cdot 6}{2} = 300 \text{ kNm}$$

ahol A_{M_k} a nyomatéki hatásábra területe. A tartó maximális nyomatéka tehát a „*k*” keresztmetszetben:

$$M_{k,\max} = M_k^{I.} + M_k^g = 384 + 300 = 684 \text{ kNm}$$

2.12 Kéttámaszú tartó eltolódási hatásábrája

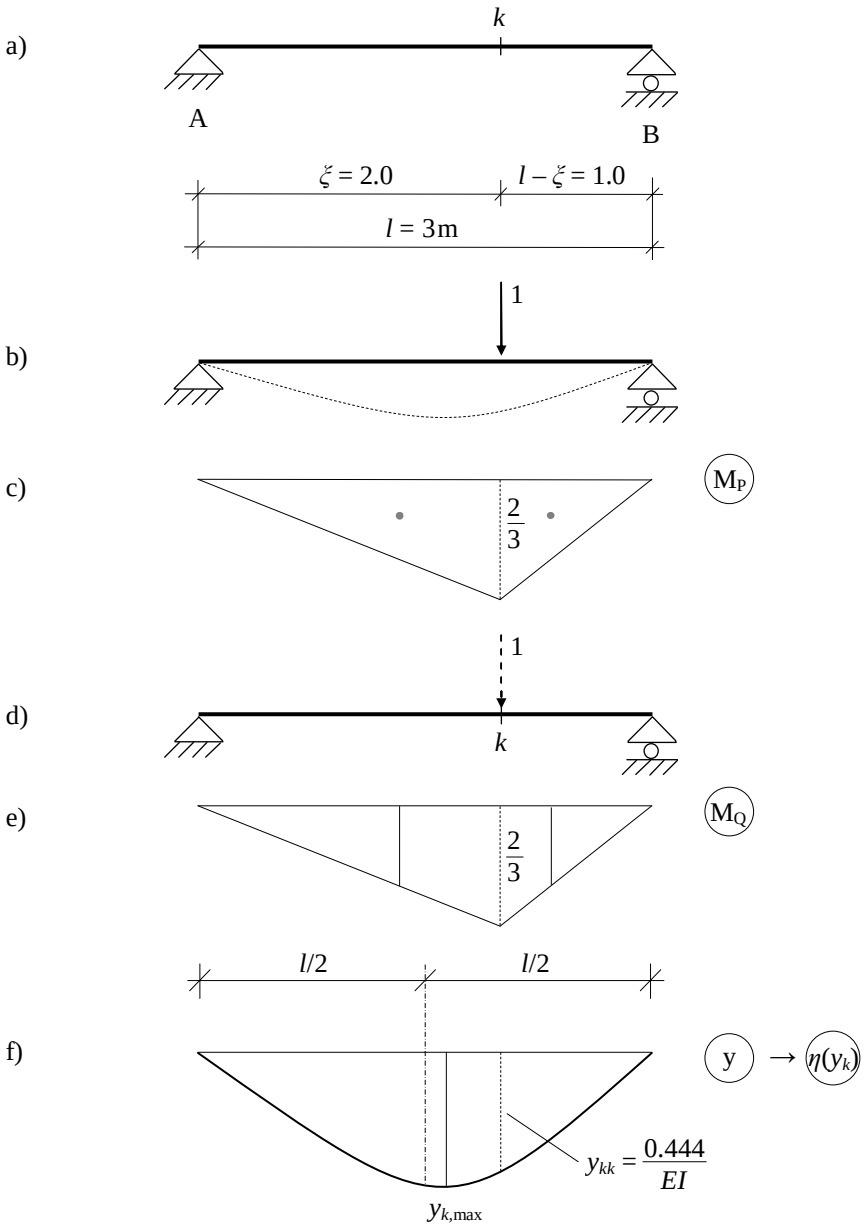
Határozzuk meg a 2.14/a ábrán vázolt kéttámaszú tartó „*k*” keresztmetszetének eltolódási hatásábráját. Az I. felcserélhetőségi tétel értelmében a mozgó koncentrált erővel terhelt tartó „*k*” keresztmetszetének eltolódási hatásábrája megegyezik a tartó lehajlásábrájával a „*k*” keresztmetszetben ható egységnyi koncentrált erő hatására. A feladat így visszavezethető a tartó alakváltozási ábrájának előállítására a „*k*” keresztmetszetben álló $F = 1$ koncentrált erő hatására (2.14/b).

Ha a feladatot munkatétellel oldjuk meg, akkor az első lépés az ehhez a teherhez tartozó nyomatékábra (M_P) előállítása (2.14/c). A lehajlásábra egy ordinátáját úgy határozhatjuk meg, hogy a kiválasztott helyre állítunk egy virtuális egységerőt és erre is meghatározzuk a nyomatékábrát, majd a két nyomatékábrát összeintegráljuk. Legyen ez a kiválasztott pont a „*k*” keresztmetszet (2.14/d ábra). Az ehhez tartozó nyomatékábra az M_Q (2.14/e ábra). A két nyomatékábra integrálása – figyelembe véve hogy mindkét ábra két lineáris szakaszból áll – visszavezethető egyszerűbb összegzésre: az egyik ábra részterületeit megszorozzuk a súlypontok alatti és a másik ábrán mért ordinátákkal majd a szorzatokat összegezzük. A kapott érték a hatásábra „*k*” keresztmetszetéhez tartozó ordinátája:

$$\eta(y_k)_k = y_{kk} = \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}\frac{2}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9EI} = \frac{0.444}{EI}$$

Az alakhelyes hatásábrát a 2.14/f ábra mutatja. A hatásábra szépséghibája az, hogy nem ismerjük az ábra maximális értékét és munkatétel segítségével nem is tudjuk

meghatározni, mert nem tudjuk hogy hol van. Az érezhető, hogy a lehajlás (és ezzel együtt a „*k*” keresztmetszet eltolódási hatásábrája) valahol a „*k*” keresztmetszet és a tartó szimmetriatengelye (szaggatottal jelölve a 2.14/f ábrán) között lesz maximum ($y_{k,\max}$), de a pontos helyet nem ismerjük.



2.14 ábra. Kéttámaszú tartó eltolódási hatásábrája munkatétellel.

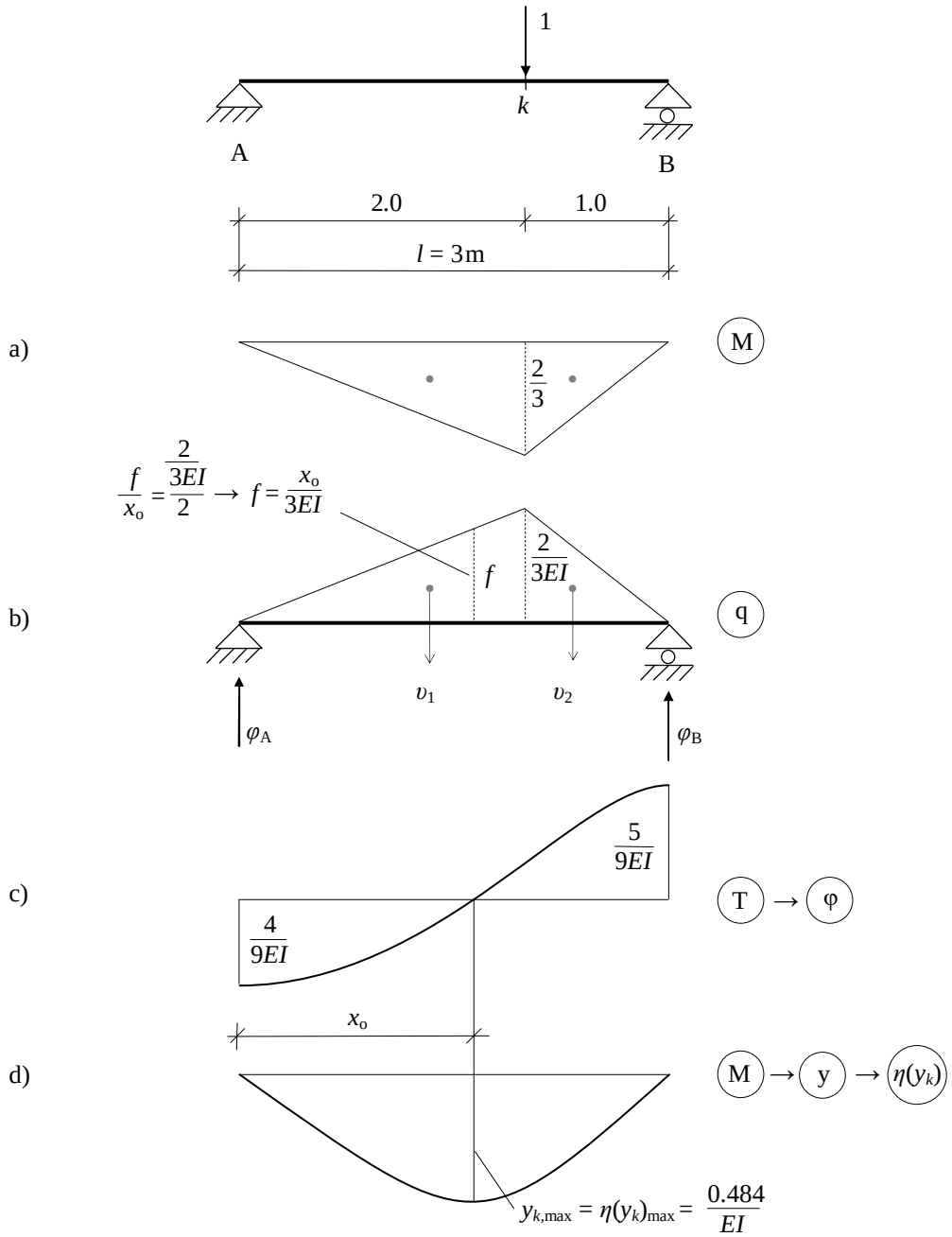
A maximum meghatározása a Mohr-módszer alkalmazásával lehetséges. A Mohr-módszer alkalmazásakor az első lépés az, hogy a tartó eredeti terhére rajzolt nyomatékábrát (2.15/a ábra) ellenkező előjellel rátesszük a tartóra (2.15/b ábra) és tehernek képzelve (és *EI*-vel osztva) nyíró- és nyomatékábrát rajzolunk hozzá. A nyíróerőábra megadja a tartó elfordulásábráját (2.15/c ábra), a nyomatékábra pedig szolgáltatja a lehajlásábrát (ami azonos a keresett eltolódási hatásábrával) (2.15/d ábra). Ennek az ábrának (a 2.15/c ábra segítségével) már meg tudjuk határozni a maximumát.

A számításhoz szükséges segédmennyiségek (a relatív elfordulások):

$$\vartheta_1 = \frac{1}{EI}\frac{2}{3}\frac{2}{2} = \frac{2}{3EI}, \qquad \vartheta_2 = \frac{1}{EI}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3EI}$$

A „*B*” pontra felírt nyomatéki egyenletből meghatározhatjuk az „*A*” reakcióerőt (az „*A*” támasz elfordulását):

$$\sum M_B = 3\varphi_A - \frac{2}{3EI}\left(1+\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3EI}\frac{2}{3} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \varphi_A = \frac{4}{9EI}$$



2.15 ábra. Kéttámaszú tartó eltolódási hatásábrája Mohr-módszerrel.

Hasonlóképpen eljárva, az „*A*” pontra felírt nyomatéki egyenletből meghatározhatjuk a „*B*” reakcióerőt (illetve a „*B*” támasz elfordulását):

$$\sum M_A = 3\varphi_B - \frac{2}{3EI}\frac{4}{3} - \frac{1}{3EI}\left(2+\frac{1}{3}\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \varphi_B = \frac{5}{9EI}$$

A támaszerők (támaszelfordulások) ismeretében megrajzolható a nyíróerő-ábra (illetve a tartó elfordulásábrája) (2.15/c ábra), majd előállítható a tartó nyomatékábrája (eltolódásábrája) (2.15/d). Ha meghatározzuk a nyíróerő-ábra (elfordulásábra) zérushelyét

$$\sum T(x_0) = \frac{4}{9EI} - \frac{x_0}{3EI}\frac{x_0}{2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_0 = \sqrt{\frac{8}{3}} = 1.63$$

akkor egyben megtudjuk azt is, hogy a nyomatékábrának (eltolódásábrának) hol van a maximuma. Az itt kiszámított nyomaték (eltolódás) megadja a keresett maximális eltolódást, ami egyben az eltolódási hatásábra keresett maximuma is:

$$M_{\max} = y_{\max} = \eta(y_k)_{\max} = \frac{1}{EI}\left(\frac{4}{9}\sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{\frac{8}{3}}\sqrt{\frac{8}{3}}\frac{1}{3}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{3}}\frac{1}{3}\right) = \frac{0.484}{EI}$$

2.13 Kéttámaszú tartó elfordulási hatásábrája

Határozzuk meg a 2.16/a ábrán vázolt kéttámaszú tartó „*k*” keresztmetszetének elfordulási hatásábráját. Az acél I-tartó merevsége legyen EI = 160 kNm^2.

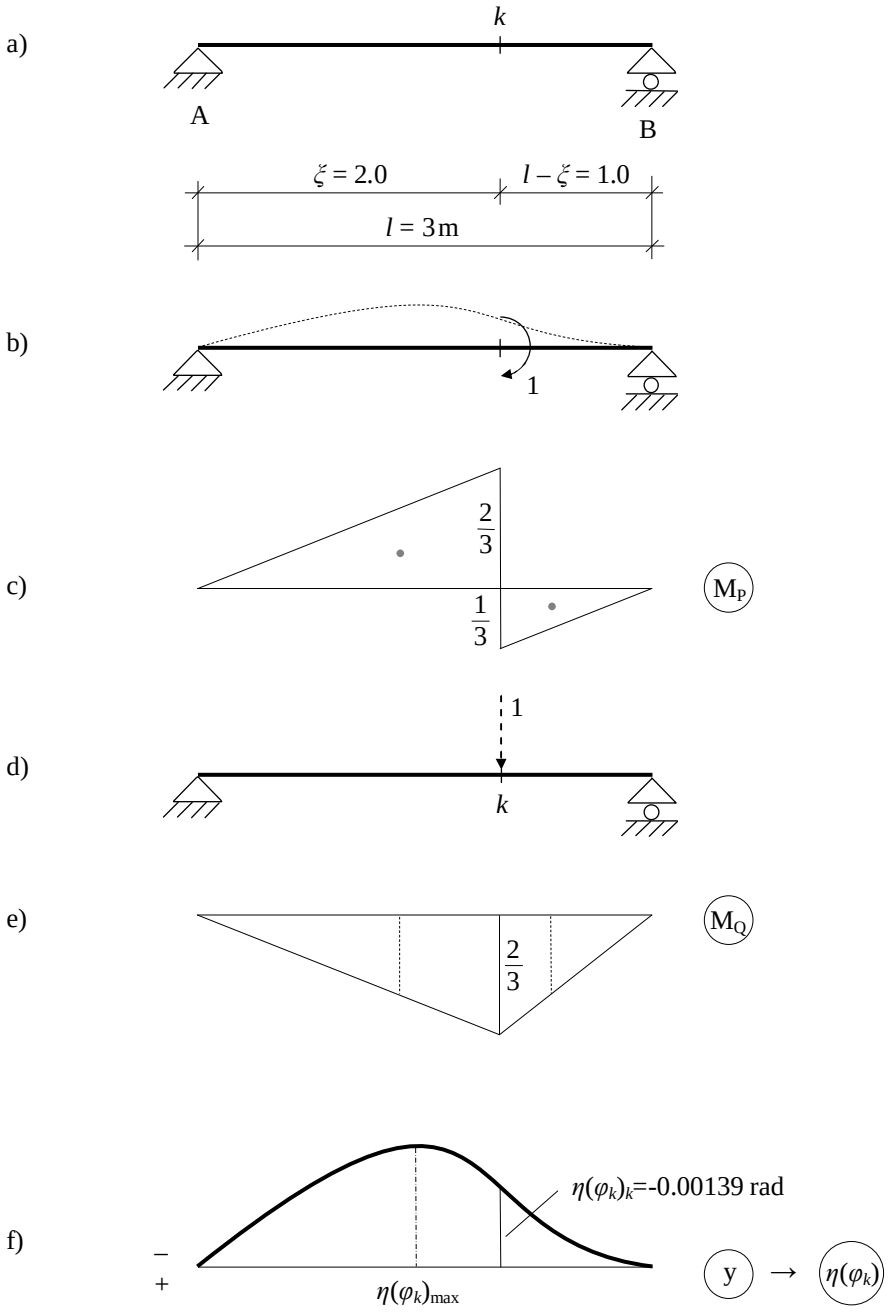
A II. felcserélhetőségi tétel értelmében a mozgó koncentrált erővel terhelt tartó „*k*” keresztmetszetének elfordulási hatásábrája megegyezik a tartó lehajlásábrájával a „*k*” keresztmetszetben ható egységnyi koncentrált nyomaték hatására. A feladat így visszavezethető a tartó eltolódásábrájának előállítására a „*k*” keresztmetszetben álló M = 1 koncentrált nyomaték hatására (2.16/b).

Ha a feladatot munkatétellel oldjuk meg, akkor az első lépés az ehhez a teherhez tartozó nyomatékábra (M_P) előállítása (2.16/c). A lehajlásábra egy ordinátáját úgy határozhatjuk meg, hogy a kiválasztott helyre állítunk egy virtuális egységerőt és ennek hatására is meghatározzuk a nyomatékábrát, majd a két nyomatékábrát összeintegráljuk. Legyen ez a kiválasztott pont a „*k*” keresztmetszet (2.16/d ábra). Az itt álló koncentrált erő hatására keletkező nyomatékábra az M_Q (2.16/e ábra). A két nyomatékábra összeintegrálása – figyelembe véve hogy minkét ábra két lineáris szakaszból áll – visszavezethető egyszerű összegzésre: az egyik ábra részterületeit megszorozzuk a súlypontok alatti és a másik ábrán mért ordinátákkal, majd a szorzatokat előjelhelyesen összegezzük. A kapott érték a hatásábra „*k*” keresztmetszetéhez tartozó ordinátája:

$$\eta(\varphi_k)_k = y_{kk} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{2}{3}\frac{2}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{9EI} = -\frac{0.222}{EI} \quad \Rightarrow \quad \text{-0.00139 rad}$$

Az alakhelyes hatásábrát a 2.16/f ábra mutatja. A hatásábra szépséghibája az, hogy nem ismerjük az ábra maximális értékét $\{\eta(\varphi_k)_{\max}\}$ és munkatétel segítségével nem is

tudjuk meghatározni, mert nem tudjuk hogy hol van.



2.16 ábra. Kéttámaszú tartó elfordulási hatásábrája munkatétellel.

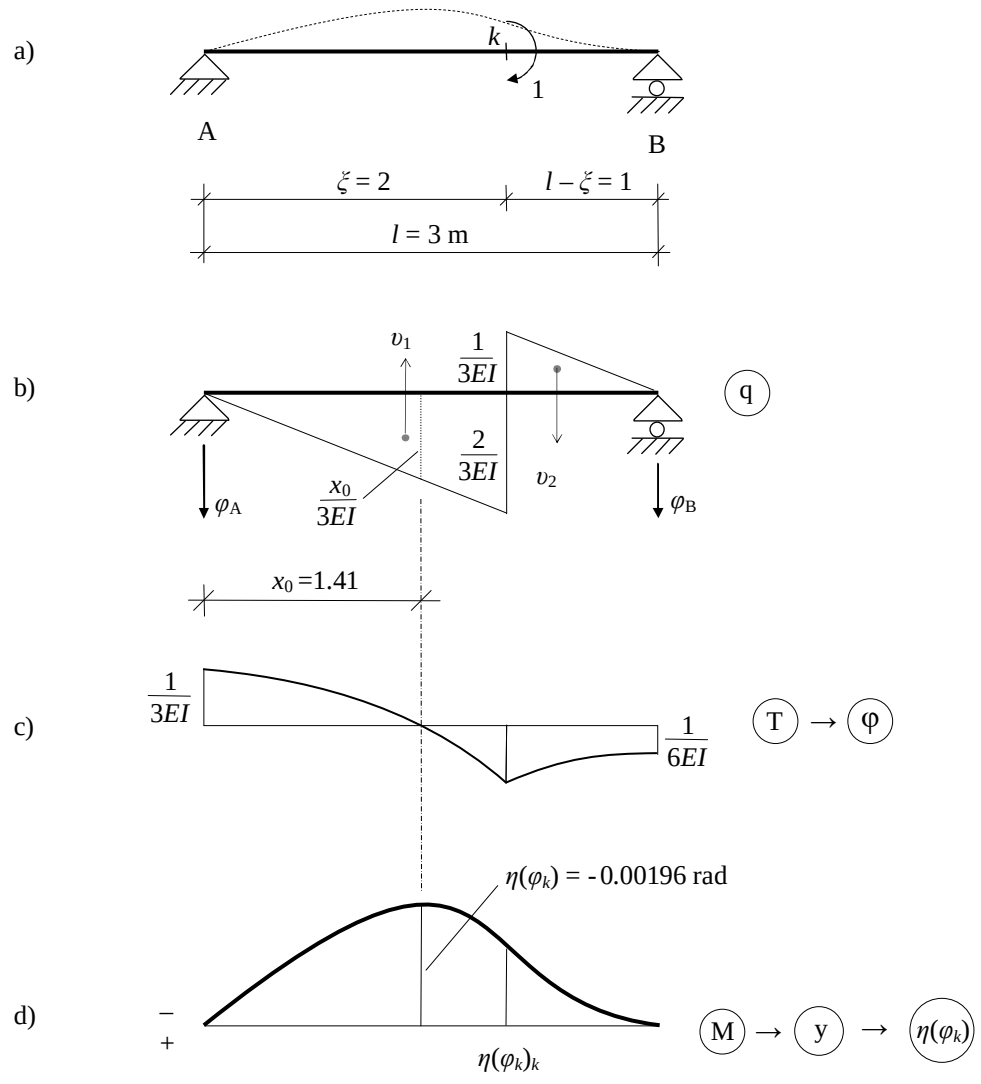
A maximum meghatározása a Mohr-módszer alkalmazásával lehetséges. A Mohr-módszer alkalmazásakor az első lépés az, hogy a tartó eredeti terhére rajzolt nyomatékábrát (2.16/c ábra) *EI*-vel osztjuk és fordított előjellel rátesszük a tartóra (2.17/b ábra). Ezután ezzel a teherrel nyíró- és nyomatékábrát szerkesztünk. A nyíróerőábra megadja a tartó elfordulásábráját (2.17/c ábra), a nyomatékábra pedig szolgáltatja a lehajlásábrát, ami azonos a keresett elfordulási hatásábrával (2.17/d ábra). Ennek az ábrának már meg tudjuk határozni a maximumát (a 2.17/c ábra segítségével).

A számításhoz szükséges segédmennyiségek (a relatív elfordulások):

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{EI}\frac{2}{3}\frac{2}{2} = -\frac{2}{3EI}, \qquad \vartheta_2 = \frac{1}{EI}\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6EI}$$

A „B” pontra felírt nyomatéki egyenletből meghatározhatjuk az „*A*” reakcióerőt (az „A” támasz elfordulását):

$$\sum M_B = -3\varphi_A + \frac{2}{3EI}\left(1+\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{6EI}\frac{2}{3} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \varphi_A = \frac{1}{3EI}$$



2.17 ábra. Kéttámaszú tartó elfordulási hatásábrája Mohr-módszerrel.

Hasonlóképpen eljárva, az „A” pontra felírt nyomatéki egyenletből meghatározhatjuk a „*B*” reakcióerőt illetve a „B” támasz elfordulását:

$$\sum M_A = 3\varphi_B - \frac{2}{3EI}\frac{4}{3} + \frac{1}{6EI}\left(2 + \frac{1}{3}\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \varphi_B = \frac{1}{6EI}$$

A támaszerők (támaszelfordulások) ismeretében megrajzolható a nyíróerő-ábra (illetve a tartó elfordulásábrája) (2.17/c ábra), majd előállítható a tartó nyomatékábrája (eltolódásábrája) (2.17/d ábra). Ha meghatározzuk a nyíróerő-ábra (elfordulásábra) zérushelyét

$$\sum T(x_0) = -\frac{1}{3EI} + \frac{x_0}{3EI}\frac{x_0}{2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_0 = \sqrt{2} = 1.41$$

akkor ezzel megtudjuk azt is, hogy a nyomatékábrának (eltolódásábrának) hol van a maximuma. Az itt kiszámított nyomaték (eltolódás) megadja a keresett maximális eltolódást, ami egyben az elfordulási hatásábra keresett maximuma is:

$$M_{\max} = y_{\max} = \eta(\varphi_k)_{\max} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2}\frac{1}{3}\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{1}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{9EI} \quad \Rightarrow \quad -0.00196 \text{ rad}$$

3

Felületszerkezetek

A korábbi mechanikai tanulmányaink során olyan tartószerkezetekkel – rúdszerkezetekkel – foglalkoztunk, amelyek fő mérete a másik két mérethez viszonyítva kicsiny. A mérnöki gyakorlatban alkalmazott tartószerkezetek között – különösen a vasbetonépítés területén – jelentős szerepet játszanak a felületszerkezetek, amelyeknél a két fő mérethez viszonyítva a harmadik méret kicsiny. Ez a fejezet ilyen szerkezetek vizsgálatának alapelveivel foglalkozik.

A felületszerkezetek geometriai jellemzése a vastagsági méret felezőpontjaival, a középfelülettel történik, amely sík- vagy görbefelület lehet. A középfelület valamely pontjának meghatározásához két koordinátát kell megadni. A két koordináta által meghatározott pontban általában térbeli – esetleg speciális esetekben síkbeli – feszültségállapot uralkodhat. A felületszerkezetek igénybevételeit általában parciális differenciálegyenletek megoldásaként kétváltozós függvények formájában kapjuk meg. Bár az igénybevételek meghatározására szolgáló parciális differenciálegyenleteket a szokványos felületszerkezetek esetében ismerjük, pontos megoldásuk általában olyan matematikai nehézségekbe ütközik, hogy ezekkel a jegyzet keretein belül nem foglalkozunk. Ehelyett inkább az elveket mutatjuk be és igyekszünk közelítő megoldások lehetőségeire rámutatni.

3.1 Bevezetés

A tartószerkezetek, különösen a vasbeton tartók fejlődése során a felületi tartók mind nagyobb szerephez jutottak. A legelső felületi tartószerkezet az ún. egyirányban teherviselő lemez, amelyet a kétirányban teherviselő vasbeton lemez követett. A síkjukban terhelt tárcsák és faltartók, ill. a lemezekből összeállított lemezművek alkalmazása további fejlődést jelentett. Ezekkel a szerkezetekkel egyidőben készültek az első, egyszerű héjszerkezetek, majd később a bonyolultabbak. A tömbök, illetve blokkok, mint alapozási szerkezetek régóta ismeretesek és használatosak. Üreges megoldások is gyakran készülnek. Ezekben a szerkezetekben térbeli feszültségi állapot uralkodik, amelynek pontos számítása legtöbb esetben komoly nehézségekbe ütközik.

A felületszerkezeteket osztályozhatjuk a szerkezet alakja, megtámasztási módja, rendeltetése, stb. szerint.

A felület alakja szerint a felületszerkezeteket két fő csoportba oszthatjuk. Az egyik csoportba a sík, a másikba a görbe felületű szerkezeteket soroljuk. A sík felületű tartók lehetnek tárcsák, lemezek és lemezművek. A görbe felületű tartók (héjak) lehetnek egyszergörbült vagy kétszergörbült felületszerkezetek. Az előbbire a henger, az utóbbira a gömb jellegzetes példa.

A felületszerkezetek megtámasztása többféleképpen történhet, mégpedig vonal mentén vagy pontszerűen. A felület széle lehet szabadon elfordulható vagy befogott

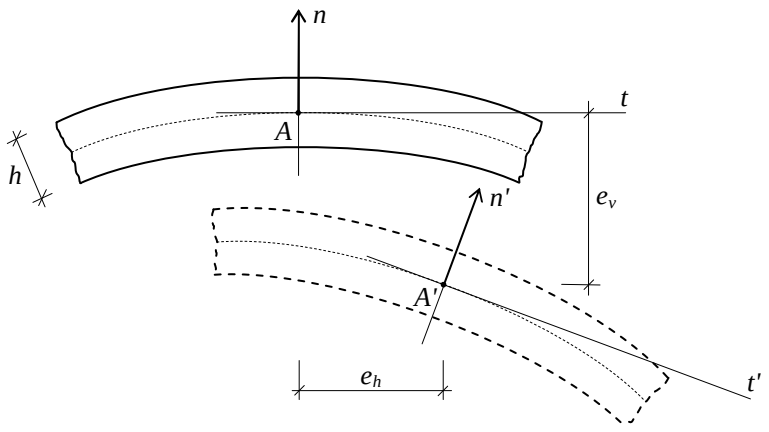
módon megtámasztva. Egyes oldalak megtámasztás nélkül is készülhetnek. Ezek a szabad szélek.

A rendeltetés szerinti osztályozás során a felületszerkezeteket két főbb csoportra oszthatjuk. A födémszerkezetek lemezeinek feladata az épületek belső vízszintes térelhatárolása. Ezek függőleges terhe önsúlyukon kívül a hasznos teher, vízszintes terhe pedig az épületek homlokzatáról esetleg rájuk háruló szélteher. A tetőszerkezetek céljára szolgáló lemezek, ill. héjszerkezetek feladata az építmények felső térelhatárolása. E szerkezetek függőleges terhe az önsúlyuk, szél- és hóteher, vízszintes terhe pedig a szélteher. A falszerkezetek szerepe a külső és belső térelhatárolás. A falak a födémek és a tető függőleges terhét továbbítják az épület alapjaira. Fontos szerepük ezen kívül a födémek szélből, illetve földrengésből származó vízszintes terheinek a felvétele is. A bunkerek darabos vagy porszerű anyagok átmeneti tárolására szolgálnak. Magasságuk szélességi méreteikhez viszonyítva kicsiny. A silók porszerű, illetve szemcsés anyagok huzamosabb idejű tárolására szolgálnak. Magasságuk az alaprajzi méreteik többszöröse. A folyadéktartályok feladata folyékony anyagok (pl. víz, benzin, stb.) tárolása. A támfalakat, gátakat, csővezetékeket és héjalapokat az egyéb kategóriába sorolhatjuk.

3.2 Számítási elvek

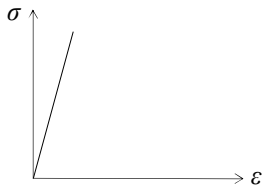
A felületszerkezetek pontjaiban általában térbeli feszültségállapot uralkodik, a gyakorlati számítások során azonban ezt sok esetben síkbeli problémára egyszerűsíthetjük. A számításra általában a rugalmas elméletet alkalmazzuk, melynek kiindulási feltevései a következők:

a) A felületszerkezet vastagsága (h) a másik két (szélességi) mérethez viszonyítva csekély, vagyis a $h << l_x \approx l_y$ egyenlőtlenség teljesül.
b) A felület normálisán lévő pont az alakváltozás után is a normálison marad. (A 3.1 ábra egy felületszerkezet-rész alakváltozás utáni helyzetét mutatja, ahol az alakváltozás – a jobb láthatóság érdekében – erősen nagyított mértékű.)



3.1 ábra. Felületszerkezet alakváltozása.

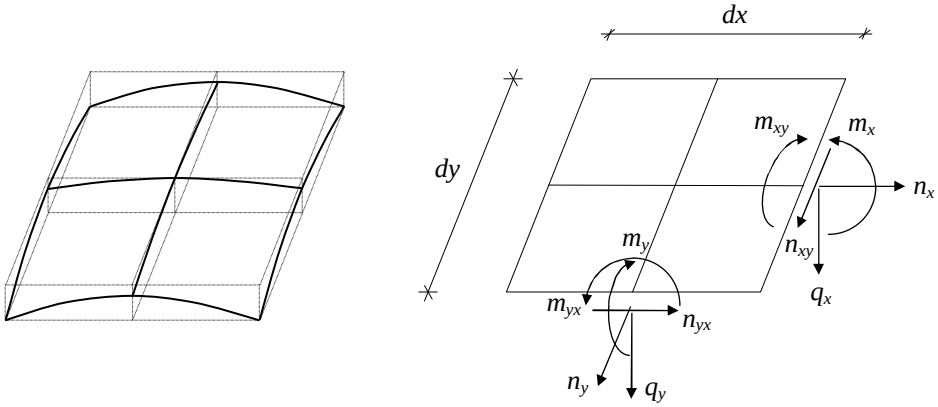
c) A felület elmozdulása a vastagsághoz képest csekély: $e < h$.
d) A szerkezet anyaga homogén és izotróp és követi a Hooke-féle törvényt – vagyis a szerkezet anyagának nyúlás-feszültség diagramja ferde egyenes (3.2. ábra).
e) A felületre merőleges feszültségek elhanyagolhatók, vagyis $\sigma_{\text{norm}} = 0$.



3.2 ábra. Ideálisan rugalmas anyag.

A fenti feltételek figyelembevételével felírhatók a térbeli szerkezetek vizsgálatához szükséges egyensúlyi és összeférhetőségi egyenletek. Az egyenletek megoldása szolgáltatja a középfelület érintősíkjában fellépő belső erőket és nyomatékokat (3.3 ábra). Ezek a következők:

$n_x(x,y)$	x irányú normálerő,
$n_y(x,y)$	y irányú normálerő,
$n_{xy}(x,y)$ és $n_{yx}(x,y)$	nyíróerő,
m_x	x normálisú nyomaték,
m_y	y normálisú nyomaték,
$m_{xy}(x,y)$ és $m_{yx}(x,y)$	csavarónyomaték,
$q_x(x,y)$	x normálisú nyíróerő,
$q_y(x,y)$	y normálisú nyíróerő.

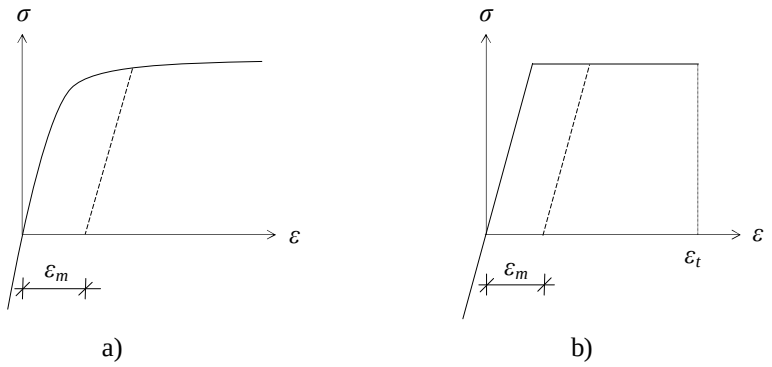


a) b)

3.3 ábra. a) Térbeli felületszerkezet, b) belső erők és nyomatékok a középfelület érintősíkjában.

A fenti belső erők és nyomatékok ismeretében megállapíthatjuk a belső feszültségeket és tervezhetjük vagy ellenőrizhetjük (azaz méretezhetjük) a vizsgált szerkezeteket.

A belső erők és nyomatékok meghatározásához hat egyensúlyi és három összeférhetőségi egyenletet írhatunk fel. Az így rendelkezésre álló kilenc egyenlet nem elegendő a tíz ismeretlen meghatározására, de a legtöbb esetben a felcserélhetőség folytán az $n_{xy} = n_{yx}$ és $m_{xy} = m_{yx}$ egyenletek is felhasználhatók. Ekkor a felületi normális körüli nyomatéki egyenlet azonossággá válik és rendelkezésre áll nyolc egyenlet a nyolc ismeretlen meghatározásához. Így az ismeretlen mennyiségek meghatározhatók.



a) b)

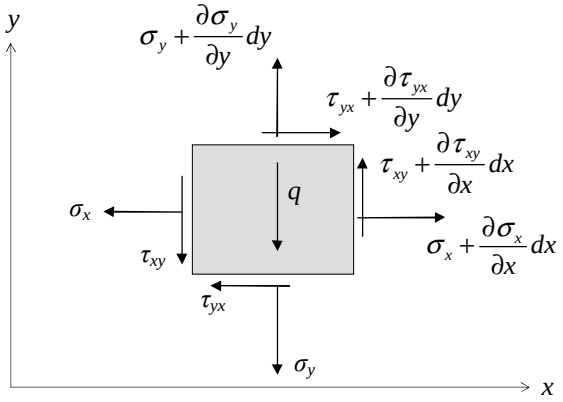
3.4 ábra. a) Képlékeny anyag, b) ideálisan rugalmas-képlékeny anyag.

Itt jegyezzük meg, hogy a felületszerkezetek számítására a törési elméletet is alkalmazható. Ha a terhek növelésével a szerkezet egyes pontjai képlékeny állapotba kerülhetnek, ekkor a rugalmasságtan feltevései már nem érvényesek. A részben vagy teljes egészében képlékeny állapotban lévő szerkezetek (3.4/a ábra) feszültségeinek és alakváltozásainak meghatározásával a képlékenységtan foglalkozik. A teherviselő szerkezetek statikai vizsgálatánál fontos szerepet játszik azoknak a terheknek a meghatározása, amelyek a szerkezet törését okozzák. E terhek meghatározására a törési határállapot vizsgálata szolgál. A vizsgálat a 3.4/b ábrán vázolt nyúlás-feszültség diagram alapján végezhető el. A közelítő diagram ideálisan rugalmas-képlékeny anyagot jellemez és segítségével a vizsgálat egyszerűbben hajtható végre.

A következőkben az építőmérnöki gyakorlatban fontos szerepet játszó tárcsák, lemezek és héjak rugalmas számításának alapelveit mutatjuk be.

3.3 Tárcsák

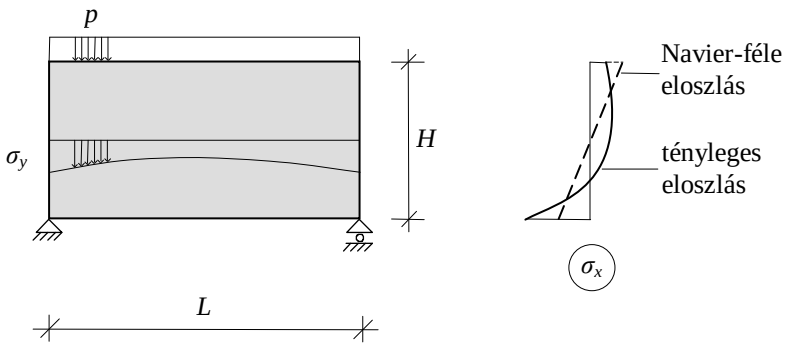
Azokat a sík lemezeket, amelyekre csak a tengelyfelület síkjába eső erők működnek, tárcsáknak nevezzük. A tárcsák leggyakrabban előforduló alkalmazási esetei a két- vagy többtámaszú faltartók. A faltartók gerendaként alátámasztott és terhelt téglalap alakú tárcsák, amelyek abban különböznek a gerendatartóktól, hogy a magasság és fesztávolság hányadosa 1/2-nél nagyobb. A tárcsák számítása során feltételezzük, hogy a tengelyfelület a teher hatására bekövetkező alakváltozás után is sík marad. Csak állandó falvastagságú tárcsákkal foglalkozunk. A feszültségek a vastagság mentén számottevően nem változnak ezért változásukat általában elhanyagolhatjuk. A külső teher hatására a tárcsák erőjátéka tehát síkbeli feszültségi állapottal jellemezhető (3.5 ábra): a külső terhet síkjukban működő belső erőkkel – ún. tárcsahatás révén – veszik fel. A mindkét irányban nagyméretű tárcsáknál a Bernoulli-féle feltevés nem érvényes, vagyis a keresztmetszetek az alakváltozás után nem maradnak síkok, ezért nem érvényes a normálfeszültségek lineáris megoszlására vonatkozó Navier-féle elmélet sem (3.6 ábra). Ilyen esetekben a feszültségkomponensek meghatározása statikailag határozatlan feladat – a rugalmasságtan általános összefüggéseit kell figyelembe venni.



3.5 ábra. Felületelem síkbeli feszültségállapotban.

3.3.1 A tárcsafeladat megoldása

A tárcsa egyensúlyát és alakváltozásait vizsgálva nyolc egyenlet írható fel összesen nyolc ismeretlennel. A peremfeltételek figyelembevételével ez a rendszer a megoldást szolgáltatja. A megoldás lényegében három úton található meg. Az erőmódszer alkalmazásával a feladat a σ_x, σ_y és τ_{xy} feszültségeket tartalmazó három egyenletre redukálható. A mozgásmódszert alkalmazva az u és v, x és y irányú eltolódásokat tartalmazó két egyenletre jutunk. A két módszer kombinációja egyetlen differenciálegyenletet, a tárcsaegyenletet eredményezi. A következő pontban a tárcsaegyenlettel ismerkedünk meg.



3.6 ábra. A normálfeszültségek megoszlása.

3.3.2 A tárcsaegyenlet

A σ_x, σ_y és τ_{xy} feszültségek meghatározása legegyszerűbben talán a

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \qquad (3.1)$$

negyedrendű, parciális, homogén, lineáris differenciálegyenlet segítségével történhet. A (3.1) biharmonikus differenciálegyenletben, amely a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{3.2}$$

Laplace-féle operátor segítségével a

$$\Delta\Delta F = 0 \tag{3.3}$$

tömörebb alakot ölti, $F(x,y)$ a feszültségfüggvény. A feszültségfüggvény – melyet első alkalmazójáról Airy-féle függvénynek neveznek – nagyon jól használható a tárcsafeladatok megoldásánál. Ha a feszültségfüggvény kielégíti a tárcsaegyenletet és a hozzá tartozó peremfeltételeket, akkor a többi egyenlet automatikusan kielégül, tehát vizsgálatukkal nem kell foglalkozni. Az $F(x,y)$ feszültségfüggvény ismeretében a keresett feszültségek igen egyszerűen, a feszültségfüggvény második deriváltjaiként állíthatók elő:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \tag{3.4}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \tag{3.5}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{3.6}$$

A $\Delta\Delta F = 0$ tárcsaegyenlet megoldása matematikailag zárt alakban – a kerületi feltételek teljes mértékű kielégítése mellett – csak néhány speciális esetben található meg. Megjegyezzük, hogy a teljes kerület mentén a kerületi feltételek tökéletes kielégítése nem mindig valósítható meg és ilyen esetekben a legfontosabb kerületi feltételek kielégítésére kell törekedni.

Az alábbiakban egy olyan példát mutatunk be egy derékszögű tárcsa esetére, amelynél a kerületi feltételeket is kielégítő megoldás zárt alakban felírható.

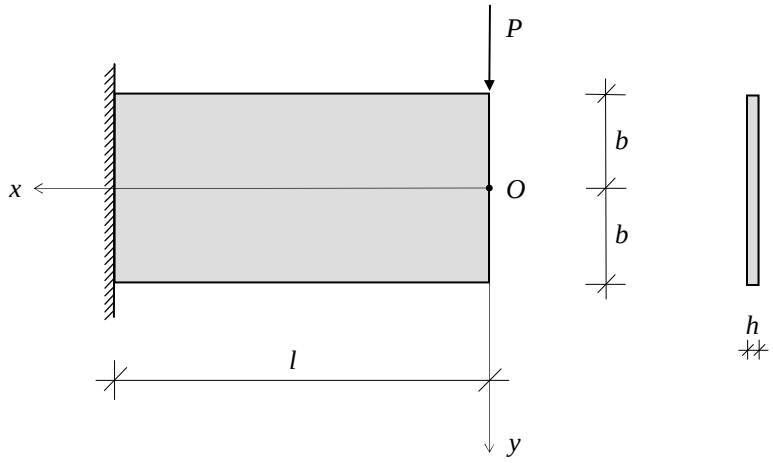
Tekintsük a 3.7 ábrán vázolt, a végén P koncentrált erővel terhelt konzolt. A feszültségfüggvény

$$F = cx(y^3 - 3b^2 y) \tag{3.7}$$

alakban írható fel, ahol

$$c = \frac{P}{4hb^3} \tag{3.8}$$

Ez a feszültségfüggvény kielégíti a (3.1) tárcsaegyenletet.



3.7 ábra. Egyik végén befogott, másik végén szabad tárcsa.

A feladat kerületi feltételeit az alábbiakban adjuk meg.

a) A nyírófeszültségek értéke a hosszanti élek mentén zérus:

$$\tau_{xy} = 0 \qquad \text{az } y = \pm b\text{-nél} \tag{3.9a-b}$$

b) A tartó végén a σ_x normálfeszültségek értéke zérus:

$$\sigma_x = 0 \qquad \text{az } x = 0\text{-nál} \tag{3.9c}$$

c) A tartó véglapján a nyírófeszültségek eredője megegyezik a külső teherrel:

$$h\int_{-b}^{b} \tau_{xy} dy = -P \tag{3.9d}$$

A (3.7) és (3.8) összefüggések felhasználásával a feszültségeket a (3.4), (3.5) és (3.6) képletek szolgáltatják:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_x = 6cxy = \frac{3P}{2hb^3} xy \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_y = 0 \tag{3.11}$$

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \tau_{xy} = -3c(y^2 - b^2) = \frac{3P}{4hb^3}(b^2 - y^2) \tag{3.12}$$

A (3.10), (3.11) és (3.12) feszültségek kielégítik a négy kerü1eti feltételt (3.9/a-b-c-d) is. Érdekes összehasonlításra ad lehetőséget az elemi szilárdságtan egyenleteivel nyert megoldások és az itt megadott (3.10), (3.11) és (3.12) megoldások összehasonlítása. A jól ismert

$$\sigma_x = \frac{M}{W} \rightarrow \frac{Px12}{h(2b)^3} y = \frac{3P}{2hb^3} xy$$

$$\tau_{xy} = \frac{TS}{Ib} \rightarrow \frac{P(b-y)h(y+\frac{b-y}{2})12}{h(2b)^3 h} = \frac{3P}{4hb^3}(b^2 - y^2)$$

összefüggések éppen a (3.10) és (3.12) megoldásokat szolgáltatják. A tárcsaegyenletet és kerületi feltételeket kielégítő feszültségfüggvény alkalmazásával sem kaptunk tehát az elemi úton nyerhető képleteknél pontosabbakat. Ennek két oka van. Az itt bemutatott megoldás csak akkor lehetne kifogástalan, ha a P erőt helyettesítő feszültségek eloszlása olyan mint a τ_{xy} ábra. A másik ok az, hogy a befogás nem teszi lehetővé hogy az x tengely irányában számított feszültségállapotnak megfelelő elmozdulások létrejöhessenek. A nyírófeszültségek miatt a keresztmetszet x = állandó helyen öblösödik. Ennek lehetőségét az $x = l$ helyen is biztosítani kellene. A fenti feltételek szigorúan nem teljesíthetők, ezért közelítő a bemutatott eljárás.

3.3.3 Faltartók

Faltartóknak azokat a két- vagy többtámaszú tárcsákat nevezzük, amelyek magassága nagyobb, mint a támaszköz fele. A σ_x normálfeszültségek eloszlása nem lineáris (3.6 ábra), hiszen a Bernoulli-Navier-féle feltevés szigorúan véve csak addig fogadható el, amíg a tartó magassága a támaszköz 1/5-ét nem haladja meg. A pontos – tárcsaelmélet szerinti – megoldás általában hosszadalmas számítási munkát igényel. A számítási munkát megkönnyítendő, táblázatos közelítő módszereket dolgoztak ki a gyakorlat számára. A részletesebb vizsgálatok egyébként azt mutatják, hogy a Navier-féle feltevés alapján (vagyis egyszerű gerendaelmélettel) számolhatunk folytatólagos faltartónál H/L=2/5, kéttámaszú faltartónál pedig H/L=4/5 arányig, ahol H a faltartó magassága és L a faltartó támaszköze. Ha a faltartó magasság/fesztáv hányadosa ezeket az arányokat meghaladja, akkor már szükséges a pontosabb tárcsaelméletet alkalmazni.

Példaként határozzuk meg a 3.8 ábrán vázolt kéttámaszú, $2l$ fesztávolságú, egyenletesen megoszló erőkkel terhelt faltartó feszültségeit. A megoldás zárt alakban előállítható. A tárcsa feszültségfüggvénye ez esetben

$$F = \frac{p}{4hb^3}\left(\frac{x^2}{2}(y^3 - 3yb^2 - 2b^3) - \frac{y^3}{10}(y^2 - 2b^2 + 5l^2)\right) \qquad (3.13)$$

alakban írható fel. Ez a függvény kielégíti a tárcsaegyenletet.

A feladat kerületi feltételei a következők.

a) A σ_x normálfeszültségek értéke zérus a megtámasztásoknál:

$$\sigma_x = 0 \qquad \text{az } x = \pm l\text{-nél} \qquad (3.14a\text{-}b)$$

b) A tárcsa alján és tetején csúsztató feszültségek nem lépnek fel:

$$\tau_{xy} = 0 \qquad \text{az } y = \pm b\text{-nél} \qquad (3.14c\text{-}d)$$

c) A tárcsa tetején a σ_y normálfeszültségek az egyenletesen megoszló teherből keletkező normálfeszültségekkel tartanak egyensúlyt:

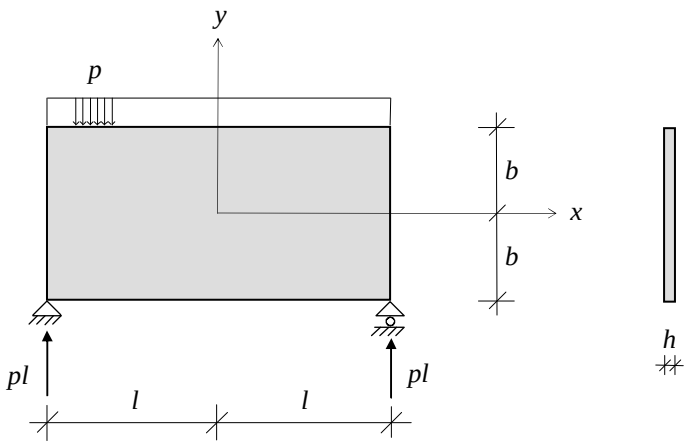
$$\sigma_y = -\frac{p}{h} \qquad \text{az } y = b\text{-nél} \tag{3.14e}$$

d) A tárcsa alján a σ_y normálfeszültségek értéke zérus:

$$\sigma_y = 0 \qquad \text{az } y = -b\text{-nél} \tag{3.14f}$$

e) A megtámasztásoknál a nyírófeszültségek eredője megegyezik a támaszerővel:

$$h\int_{-b}^{b} \tau_{xy} dy = \pm pl \qquad \text{az } x = \pm\, l\text{-nél} \tag{3.14g-h}$$



3.8 ábra. Kéttámaszú faltartó.

A feszültségfüggvény második differenciálhányadosaként – a (3.4), (3.5) és (3.6) alapján – számított

$$\sigma_x = \frac{p}{4hb^3}\left(3x^2y - 3yl^2 + \frac{6}{5}b^2y - 2y^3\right) \tag{3.15}$$

$$\sigma_y = \frac{p}{4hb^3}\left(y^3 - 3b^2y - 2b^3\right) \tag{3.16}$$

$$\tau_{xy} = \frac{3px}{4hb^3}(b^2 - y^2) \tag{3.17}$$

feszültségek kielégítik a fent rögzített (3.14/a…h) peremfeltételeket.

Megjegyezzük, hogy a feszültségfüggvény felvétele rendszerint csak hosszas próbálkozással sikerül. Gyakran alkalmazzák azt a módszert, hogy a rendelkezésre álló

közelítő (elemi) megoldást fejlesztik tovább harmonikus függvények [x^3, xy^2, x^2y, y^3, sin$x$, cos$x$, e^x, ln($x^2 + y^2$), stb.] hozzáadásával.

3.3.4 Közelítő eljárások

A gyakorlatban előforduló tárcsák erőjátékának vizsgálatát legtöbbször közelítő eljárásokkal kell végrehajtani. A tárcsaegyenlet megoldására hatványsorok, biharmonikus polinomok, trigonometrikus, hiperbolikus és logaritmikus függvények, ill. ezek kombinációi használhatók fel. A közelítő megoldás feszültségfüggvénye általában

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x,y) \tag{3.18}$$

alakú. Az a_i együtthatók és a $g_i(x,y)$ függvény megválasztására két eljárás alakult ki. Az elsőnél olyan $g_i(x,y)$ függvényt alkalmaznak, amely kielégíti a tárcsaegyenletet. Ha ez a függvény a kerületi feltételeket is kielégíti, akkor ez a megoldás. Ha nem, akkor az a_i együtthatókat úgy kell megválasztani, hogy a kerületi feltételek legjobban teljesítve legyenek. A második eljárásnál a $g_i(x,y)$ függvény a kerületi feltételeket pontosan kielégíti, de a differenciálegyenletnek általában nem tesz eleget. Az a_i együtthatókat úgy kell megválasztani, hogy a tárcsaegyenlet is ki legyen elégítve. Mindkét eljárásnál az a_i együtthatókat legcélszerűbb úgy meghatározni, hogy a hibanégyzetek összege minimum legyen.

A tárcsafeladatok megoldásához gyakran használják azt az eljárást, amikor a feszültségfüggvényt differenciaegyenletek határozzák meg. A tárcsaegyenlet pontos megoldását adó folytonos feszültségfüggvény helyett a feszültségfüggvény értékeit csak meghatározott pontokban számítjuk ki. A differenciaegyenletekkel való számítás természetesen csak közelítésnek tekinthető, azonban az anyagállandókban lévő bizonytalanságok miatt a valóságban a matematikailag pontos megoldás is közelítő marad. A módszer lényege az, hogy a tárcsát felosztjuk egy x és y irányú, Δx és Δy lyukbőségű hálózattal. Ezután a tárcsa differenciálegyenletét a hálózat minden pontjában helyettesítjük véges differenciák hányadosaival. Ehhez a feszültségfüggvényt ábrázoló felület és az x ill. y tengelyekkel párhuzamos síkok metszésénél keletkező síkgörbéket negyedfokú parabolákkal helyettesítjük. Így minden hálózati ponton felírható egy algebrai egyenlet. Ahány belső hálózati pont van, annyi egyenletből álló egyenletrendszert kapunk. Az egyenletrendszer megoldása a kerületi feltételek figyelembevételével szolgáltatja a feszültségfüggvény hálózati pontokhoz tartozó közelítő pontosságú értékeit.

3.4 Lemezek

Lemezeknek azokat a sík középfelületű tartószerkezeteket nevezzük, amelyek vastagsága a másik két méretéhez viszonyítva csekély és amelyekre a középfelületre merőleges teher működik.

A főleg a vasbetonépítés területén elterjedt lemezeknek sok erőtani és gazdasági előnye van a gerendaszerkezetekkel szemben. Ezek röviden a következők.

a) Nagy teherbírás. Ha a lemez legalább három oldalon megtámasztott és a hosszabbik támaszköze nem nagyobb a rövidebb támaszköz kétszeresénél, akkor a lemez mindkét irányban számottevő görbülettel rendelkezik. Ily módon a lemez a kétirányú teherviselés folytán viszonylag nagy terheket hordhat.

b) Kis szerkezeti vastagság. A magasépítésben alkalmazott lemezek vastagsága (az l támaszköz arányában) $l/20 \ldots l/40$, a hídszerkezetek esetében $l/12 \ldots l/20$ között változik.
c) Egyszerű kivitelezés. A vasbeton lemezek zsaluzása, vasalása és betonozása általában könnyen, gyorsan és egyszerűen végrehajtható.

A felsorolt előnyök indokolják azt, hogy a lemezek a vasbetonépítés területén mind szélesebb körben elterjedtek és számos helyen felváltották a korábban alkalmazott gerendaszerkezeteket. – Hátrányként említhető meg a lemezek viszonylagos érzékenysége helyi koncentrált terhelésre.

A lemezeket alakjuk szerint különböző csoportokba sorolhatjuk. Megkülönböztetünk háromszög, négyszög, kör, körgyűrű és tetszőleges alakú lemezeket. A több, azonos síkú lemezből összeállított tartószerkezetet lemezrendszernek nevezzük.

A lemezeket a megtámasztás módja szerint is osztályozhatjuk. E szempontból az egyes lemezmezők széle lehet vonal mentén és pontonként megtámasztott. A megtámasztás lehet szabadon elforduló (jele: ——————) és befogott (jele: ═══════). A megtámasztás nélküli lemezszél neve szabad perem (jele: ----------).

Az igénybevételek meghatározása – attól függően, hogy a szerkezet rugalmas vagy képlékeny módon viselkedik – történhet a rugalmasságtan vagy a képlékenységtan elvei szerint. A következő pontban a megoldást a klasszikus rugalmas elmélet alapján vázoljuk.

3.4.1 A rugalmas lemezelmélet alapjai

A 3.2 pontban felsorolt feltételezéseken túlmenően feltételezzük még, hogy
a) a lemez középfelületén lévő pont csak a középfelületre merőlegesen mozdul el,
b) a lemez síkjával párhuzamos elmozdulások elhanyagolhatók.

A fent említett feltételezések figyelembevételével felírhatók a rugalmas lemezelmélet egyensúlyi és összeférhetőségi egyenletei, amelyek segítségével előállítható a

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{K} \tag{3.19}$$

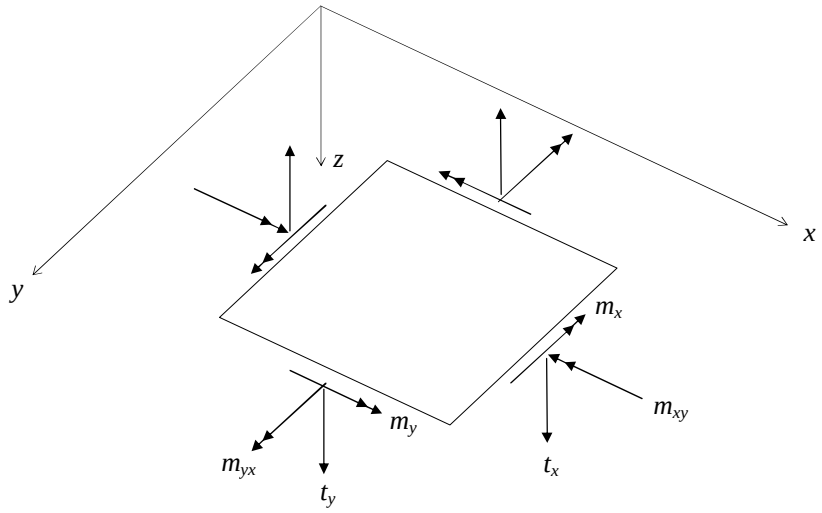
negyedrendű, parciális, inhomogén, lineáris differenciálegyenlet, az ún. lemezegyenlet. A (3.2) Laplace-féle operátor segítségével

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{K} \tag{3.20}$$

alakban írható lemezegyenletben $w(x,y)$ a lehajlásfüggvény, $q(x,y)$ a teherfüggvény és

$$K = \frac{Ebh^3}{12(1-\mu^2)} \tag{3.21}$$

a lemez hajlítási merevsége, ahol E a rugalmassági tényező, h a lemez vastagsága, $b = 1$ m a lemezsáv egységnyi szélessége és μ a Poisson-féle tényező.



3.9 ábra. Lemez belső erői.

A (3.19) lemezegyenletnek a tetszőleges $q(x,y)$ terhelés és adott kerületi feltételek melletti megoldása a lemez $w(x,y)$ rugalmas alakváltozását adja meg. A $w(x,y)$ függvény ismeretében a lemez igénybevételei (3.9 ábra) a $w(x,y)$ deriváltjaiként könnyen előállíthatók:

$$m_x = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{3.22}$$

$$m_y = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{3.23}$$

$$m_{xy} = -(1-\mu)K\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{3.24}$$

$$t_x = -K\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{3.25}$$

$$t_y = -K\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{3.26}$$

Az m_x, m_y hajlítónyomaték, m_{xy} csavarónyomaték és t_x, t_y nyíróerők a lemez egységnyi hosszára vonatkozó fajlagos értékeket jelölik.

Itt jegyezzük meg, hogy a lemezegyenlet az egyenestengelyű rudak differenciálegyenletét mint speciális esetet is magában foglalja. Ebben az esetben az egyik lemezméret – például az y irányú méret – igen kicsiny és $K = EI$. A (3.19) lemezegyenlet alakja ekkor

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q}{EI}$$

a megoldás pedig a lehajlás ismeretében a (3.22) összefüggésből

$$M = -EIw''$$

vagyis az egyenestengelyű rudak elméletéből jól ismert összefüggéseket kaptuk.

A negyedrendű lemezegyenlet megoldásához kerületi feltételekre van szükség. Egyértelmű megoldást akkor kapunk, ha a lemezt határoló zárt vonal mentén két mennyiséget megadunk. Ilyen mennyiségek lehetnek a lemez w elmozdulása, a középfelület érintőjének elfordulása ($\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$), a középfelület görbülete illetve a nyomaték ($\partial^2 w/\partial x^2$, $\partial w^2/\partial y^2$), stb.

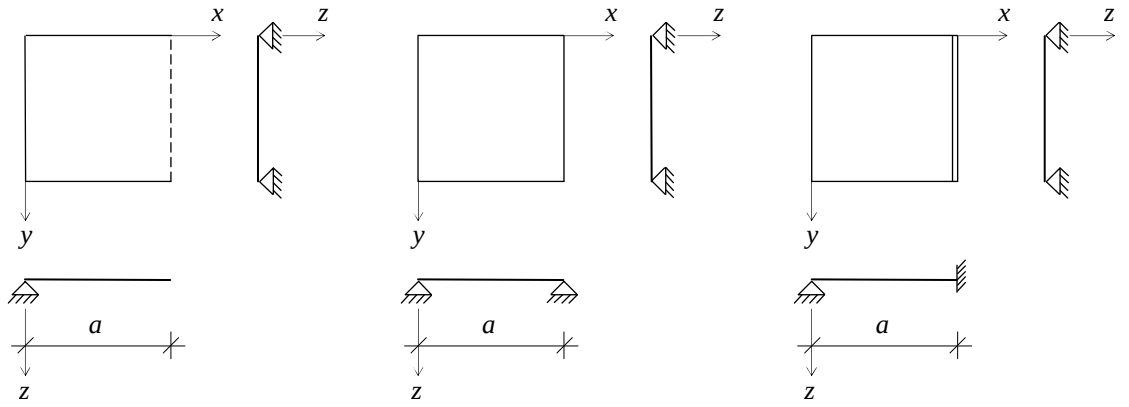
A kerületi feltételek általános érvényű tárgyalása túlmenne a jegyzet keretein, ezért csak a gyakorlatban sűrűn előforduló négyszöglemezek szokásos megtámasztásaihoz tartozó feltételeket ismertetjük.

Az $x = a$ = állandó helyen levő szabad szél (3.10/a. ábra) esetében az m_x nyomaték és t_x nyíróerő értéke csak zérus lehet, azaz

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \tag{3.28}$$

A (3.28) egyenlet a csavarónyomatékból keletkező nyíróerőt is tartalmazza.



a) szabad szél $x = a$-nál b) csuklós szél $x = a$-nál c) befogott szél $x = a$-nál

3.10 ábra. Lemezmegtámasztások.

Az $x = a$ = állandó helyen szabadon elforduló perem (3.10/b ábra) esetében a nyomaték és a lehajlás értéke zérus, azaz

$$w = 0 \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{3.30}$$

Az $x = a$ = állandó helyen befogott perem (3.10/c ábra) esetében a lehajlás és a tengelyfelület érintősíkjának x tengellyel bezárt szöge zérus, vagyis

$$w = 0 \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{3.32}$$

3.4.2 A lemezegyenlet megoldásáról

A

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{K} \tag{3.33}$$

lemezegyenlet integrálása az előírt kerületi feltételek teljesülése esetén a pontos megoldást adja meg. A megoldást

$$w = w_0 + w_1 \tag{3.34}$$

alakban keressük, ahol w_0 az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása, w_1 pedig a homogén egyenlet általános megoldása. A w_0 partikuláris megoldást a q felületi tehernek megfelelően választjuk meg, de a kerületi feltételek kielégítése rendszerint nem sikerül. A kerületi feltételek kielégítése rendszerint csak a w_1 megoldás segítségével lehetséges. A lemezegyenlet pontos megoldása inkább elméleti fontosságú, és a matematikai nehézségek miatt a gyakorlatban általában megelégszünk valamilyen közelítő megoldással.

A matematika közelítő megoldásainak során kétféle meggondolásból indulhatunk el. A lemez w rugalmas felületét a

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x, y) \tag{3.35}$$

végtelen sor alakjában keressük, és ennek megfelelően a terhet a

$$q(x, y) = \sum_{i=1}^{m} b_i g_i(x, y) \tag{3.36}$$

végtelen sorral közelítjük.

Az első módszernél abból indulunk ki, hogy a w függvénysorban az f_i függvények kielégítik a (3.33) lemezegyenletet, de (esetleg) nem elégítik ki a kerületi feltételeket. Az a_i együtthatók értékeit úgy választjuk meg, hogy a kerületi feltételek lehető legjobban teljesítve legyenek. A második módszernél abból indulunk ki, hogy az f_i függvények egyenként elégítsék ki a kerületi feltételeket és az a_i együtthatókat határozzuk meg oly módon, hogy a megoldás a lehető legjobban elégítse ki a

lemezegyenletet is. A sorfejtés alkalmával egyszeresen vagy kétszeresen végtelen sorokkal dolgozunk.

A lemezfeladatok megoldására szolgáló közelítő eljárások közül gyakran alkalmazzák a könnyen gépesíthető differenciamódszert. Ezt a 3.4.3 pontban mutatjuk be.

A gyakorlati számítások megkönnyítésére a jól alkalmazható közelítő módszerekre támaszkodva különböző táblázatokat állítottak össze. Ezek a kézikönyvekben és segédletekben található táblázatok tartalmazzák a legtöbb gyakorlati esetet és a megtámasztási viszonyok valamint a fesztávolság-arányok függvényében szolgáltatják azokat a c_i állandókat, amelyekkel a lemez igénybevételei – például a nyomatékok –

$$m = c_i q l^2$$

formában igen gyorsan meghatározhatók.

3.4.3 A lemezegyenlet megoldása differenciaegyenletekkel

A differenciamódszer 3.3.4 pont végén vázolt alapelve szerint a lehajlásfüggvény helyett kellően sűrű hálózat rácspontjaiban határozzuk meg a lemez lehajlásainak közelítő értékét úgy, hogy a differenciálegyenlet megfelelő differenciálhányadosait minden pontban helyettesítjük a véges differenciák hányadosaival. A differenciahányadosokat az adott és szomszédos pontok eltolódásai és a rácstávolság segítségével állítjuk elő. Ily módon eljárva egy lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk, melynek megoldása szolgáltatja a lehajlások közelítő értékeit a hálózat pontjaiban. Ezután a rácsponti elmozdulásokból – másodrendű differenciahányadosokkal közelítve a másodrendű parciális differenciahányadosokat – az igénybevételeket is ki lehet számítani.

Osszuk fel tehát a lemez középfelületét x és y irányban Δx és Δy osztásközű hálózatra (3.11 ábra). Ezzel a lemez középfelületét tulajdonképpen egy rugalmas hálóval helyettesítjük. A differenciálhányadosokat helyettesítsük véges differenciák hányadosaival a lemez valamely vizsgált k pontjában:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\Delta x} \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \approx \frac{w_l - w_i}{2\Delta y} \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \approx \frac{w_{l+1} - w_{l-1} - (w_{i+1} - w_{i-1})}{2\Delta x 2\Delta y} = \frac{w_{l+1} - w_{l-1} - w_{i+1} + w_{i-1}}{4\Delta x \Delta y} \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx \frac{\dfrac{w_{k+1} - w_k}{\Delta x} - \dfrac{w_k - w_{k-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1}}{\Delta x^2} \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx \frac{w_l - 2w_k + w_i}{\Delta y^2} \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \approx \frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{w_{k+2} - w_k - 2w_{k+1} + 2w_{k-1} + w_k - w_{k-2}}{2\Delta x}\right) = \frac{w_{k+2} - 2w_{k+1} + 2w_{k-1} - w_{k-2}}{2\Delta x^3} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \approx \frac{w_{m+2} - 2w_l + 2w_i - w_n}{2\Delta y^3} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \frac{4w_k - 2(w_{k-1} + 2w_{k+1} + w_l + w_i) + (w_{i-1} + w_{i+1} + w_{l-1} + w_{l+1})}{\Delta x^2 \Delta y^2} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \approx \frac{w_{k-2} - 4w_{k-1} + 6w_k - 4w_{k+1} + w_{k+2}}{\Delta x^4} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \approx \frac{w_n - 4w_i + 6w_k - 4w_l + w_m}{\Delta y^4} \quad (3.46)$$

A (3.44), (3.45) és (3.46) differenciahányadosokat a (3.19) lemezegyenletbe behelyettesítve és a

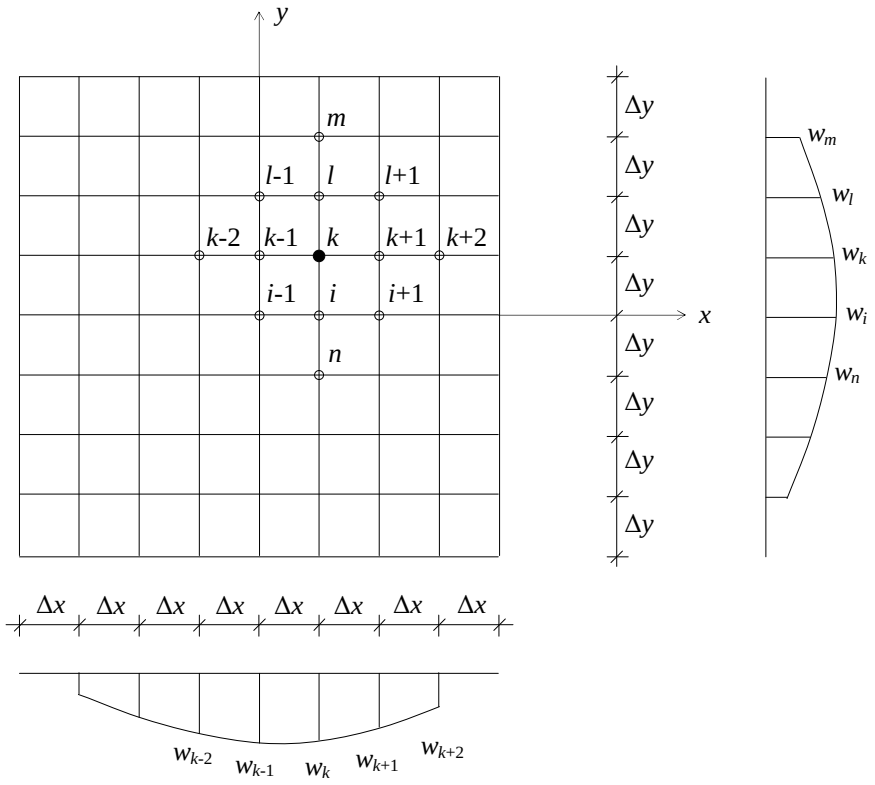
$$\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (3.47)$$

jelölést bevezetve, a

$$\begin{aligned} &w_k(6 + 8\beta^2 + 6\beta^4) - (w_{k-1} + w_{k+1})(4 + 4\beta^2) - (w_i + w_l)(4\beta^2 + 4\beta^4) + \\ &+ 2\beta^2(w_{i-1} + w_{i+1} + w_{l-1} + w_{l+1}) + \beta^4(w_n + w_m) + (w_{k-2} + w_{k+2}) = p_k \frac{\Delta x^4}{K} \end{aligned} \quad (3.48)$$

k pontra vonatkozó differenciaegyenletet kapjuk. Abban a speciális esetben, amikor $\Delta x = \Delta y = s$, a (3.48) egyenlet egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} &20w_k - 8(w_{k-1} + w_{k+1} + w_i + w_l) + 2(w_{i-1} + w_{i+1} + w_{l-1} + w_{l+1}) + (w_{k-2} + w_{k+2} + w_n + w_m) = \\ &= p_k \frac{s^4}{K} \end{aligned} \quad (3.49)$$



3.11 ábra. Lemez felosztása a differencia módszer alkalmazásához.

A (3.48) – vagy négyzet alakú lemeznél a (3.49) – egyenletet belső rácspontokra alkalmazva egy lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk, amelynek megoldása szolgáltatja a lemez lehajlásait. A lehajlások ismeretében a (3.22), (3.23) és (3.24) egyenletek és a (3.39), (3.40) és (3.41) differenciahányadosok segítségével a fajlagos nyomatékok már előállíthatók:

$$m_{x,k} = \frac{K}{\Delta x^2}\left[w_k(2+2\mu\beta^2) - w_{k-1} - w_{k+1} - \mu\beta^2(w_l + w_i)\right] \tag{3.50}$$

$$m_{y,k} = \frac{K}{\Delta y^2}\left[w_k(2\beta^2+2\mu) - \beta^2(w_l + w_i) - \mu(w_{k-1} + w_{k+1})\right] \tag{3.51}$$

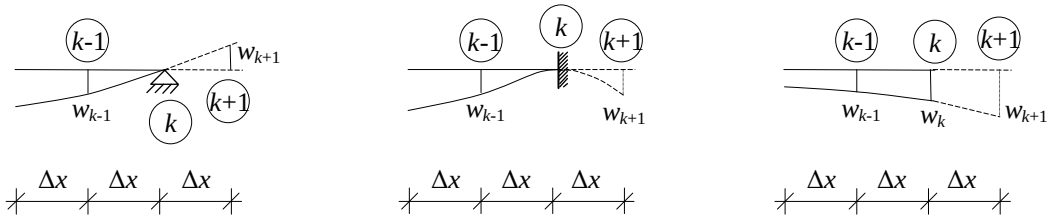
$$m_{xy,k} = \frac{K(1-\mu)}{4\Delta x\Delta y}\left[w_{l+1} - w_{l-1} + w_{i+1} - w_{i-1}\right] \tag{3.52}$$

A fajlagos nyomatékok ismeretében a fajlagos nyíróerők már elemi úton is meghatározhatók:

$$t_{x,k} = \frac{\Delta m_k}{\Delta x} = \frac{m_{k+1} - m_{k-1}}{2\Delta x} \tag{3.53a}$$

$$t_{y,k} = \frac{\Delta m_k}{\Delta y} = \frac{m_l - m_i}{2\Delta y} \tag{3.53b}$$

Annak érdekében, hogy a lemez $w(x,y)$ rugalmas felülete és a külső teher közötti összefüggéseket a lemez kerületén is le tudjuk írni, továbbá a fajlagos erőket és nyomatékokat a fent levezetett képletekkel meg tudjuk határozni, a rugalmas hálózatot és a $q(x,y)$ külső terhet a támaszokon túl is folytatva képzeljük el (3.12 ábra). Így a kerületi feltételek segítségével úgy tudjuk a kerületen kívül lévő pontokban a w eltolódásokat meghatározni, hogy nem kell újabb ismeretleneket bevezetni. Ezek az eltolódások ugyanis a kerületen belül lévő pontok eltolódásaival is kifejezhetők.



a) csuklós perem b) befogott perem c) szabad perem

3.12 ábra. Peremen kívüli pontok.

Szabadon elforduló lemezszél esetén (3.12/a. ábra) a

$$w_{k+1} = -w_{k-1} \tag{3.54}$$

befogott lemezszél esetén (3.12/b ábra) a

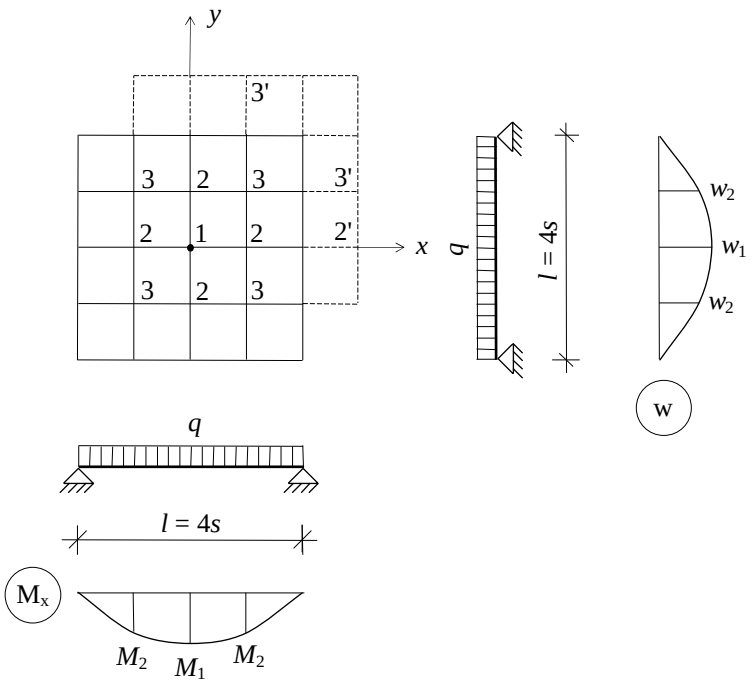
$$w_{k+1} = w_{k-1} \tag{3.55}$$

és szabad perem esetén (3.12/c. ábra) a

$$w_{k+1} = 2w_k - w_{k-1} \tag{3.56}$$

összefüggéseket alkalmazhatjuk.

Az ismertetett eljárás bemutatására határozzuk meg a 3.13 ábrán vázolt q egyenletesen megoszló teherrel terhelt, szabadon elfordulhatóan megtámasztott négyszöglemez lehajlásait és a legnagyobb nyomatékát.



3.13 ábra. Négyszög alakú lemez a számpéldához.

Osszuk fel a lemezt mindkét irányban négy részre. A csomópontok számozását a kétszeres szimmetria figyelembevételével végezzük el. A kerület mentén a lehajlások és a nyomatékok értéke zérus, így összesen három pontban (az 1., 2. és 3. jelű csomópontokban) kell eltolódást és igénybevételeket számítani.

A $\Delta x = \Delta y = s$ feltétel teljesül, így a (3.49) differenciaegyenletet használhatjuk. Az egyenletet az 1., 2. és 3. csomópontra alkalmazva egy három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kapunk:

$$20w_1 - 32w_2 + 8w_3 = q\frac{s^4}{K}$$

$$20w_2 - 8(w_1 + 2w_3) + 4w_2 = q\frac{s^4}{K}$$

$$20w_3 - 16w_2 + 2w_1 = q\frac{s^4}{K}$$

Az egyenletrendszer megoldása a keresett lehajlásokat szolgáltatja:

$$w_1 = 1.03125q\frac{s^4}{K} = 4.028\cdot 10^{-3} q\frac{l^4}{K}$$

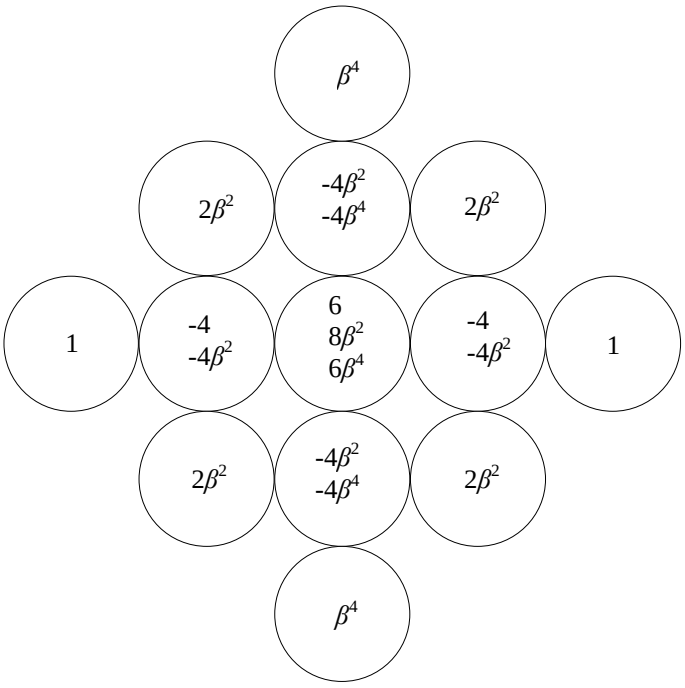
$$w_2 = 0.75q\frac{s^4}{K} = 2.93\cdot 10^{-3} q\frac{l^4}{K}$$

$$w_3 = 0.546875q\frac{s^4}{K} = 2.136\cdot 10^{-3} q\frac{l^4}{K}$$

Az egyes pontokban keletkező fajlagos nyomatékokat a lehajlások ismeretében a (3.50), (3.51) és (3.52) összefüggésekből már közvetlenül meghatározhatjuk. Számítsuk ki μ = 1/6 felvételével a lemez legnagyobb nyomatékát (3.50):

$$m_{x,1} = \frac{K}{s^2}\left[1.03125(2+2\frac{1}{6}) - 2\cdot 0.75 - \frac{1}{6}2\cdot 0.75\right] = 0.6562qs^2 = 0.041ql^2$$

A lemezfeladatok differenciaegyenletekkel történő megoldásáról általában elmondhatjuk, hogy a lehajlásokra aránylag ritka háló felvételével is jó eredményeket kapunk. Különösen jól használható az eljárás abban a gyakorlati esetben, amikor a lemez négy oldalon szabadon felfekvő, és a teher egyenletesen megoszló. Az eljárás akkor is használható, ha a teher kis felületen hat, vagy koncentrált erő működik. Ilyen esetekben célszerű a számítást két lépésben elvégezni és a hálózatot csak a koncentrált erő környezetében sűríteni. Először tehát megoldjuk a feladatot az egész lemezre ritkább hálózattal, majd második lépésben már csak az erő környezetében sűrített hálózatú lemezrészt vizsgáljuk.



3.14 ábra. Differencia-csillag.

Megjegyezzük még, hogy a differenciamódszer gyakorlati végrehajtása során szokás a (3.48) vagy a (3.49) differenciaegyenlet együtthatóit ún. differenciacsillag formájában összefoglalni. A 3.14. ábrán vázoltuk a (3.48) egyenlethez tartozó csillagot. Hasonló csillagokat készíthetünk el a peremek környezetében is. Így a számítás nagymértékben

gépesíthető: csak a hálózat pontjaira kell sorban a megfelelő csillagot ráhelyezni és a lemez differenciaegyenlet-rendszerét elő is állítottuk.

3.4.4 A Marcus-féle eljárás

Ha a biztonság javára elhanyagoljuk a lemezben ébredő csavarónyomatékokat ($m_{xy} = m_{yx} = 0$) és feltételezzük hogy az egyenletesen megoszló terhet a lemez *x* és *y* irányú sávokban hordja, akkor a Marcus-féle eljárás egyszerű és szemléletes megoldást tesz lehetővé a lemez legnagyobb nyomatékainak meghatározására. Az eljárás arra az egyszerű tényre épül, hogy bár a feltételezés szerint a lemez a terhet egymásra merőleges sávokban hordja, a két sáv

$$f = c\frac{ql^4}{EI}$$

formában kifejezett lehajlása azonos kell hogy legyen. – A különböző megtámasztású lemezekhez tartozó c értékeket a 3.1 táblázatban adjuk meg.

A módszert a 3.15 ábrán vázolt három oldalon csuklósan megtámasztott és a negyedik oldalon befogott lemez számításával mutatjuk be. A Marcus-féle feltétel szerint a lemez a *q* egyenletesen megoszló terhelést *x* és *y* irányú sávokban hordja:

$$q = q_x + q_y$$

Az *x* irányú lemezsávot vizsgálva a tartó maximális lehajlása

$$f_x = c_x\frac{q_x l_x^4}{EI}$$

Az *y* irányú lemezsávot vizsgálva a tartó maximális lehajlása

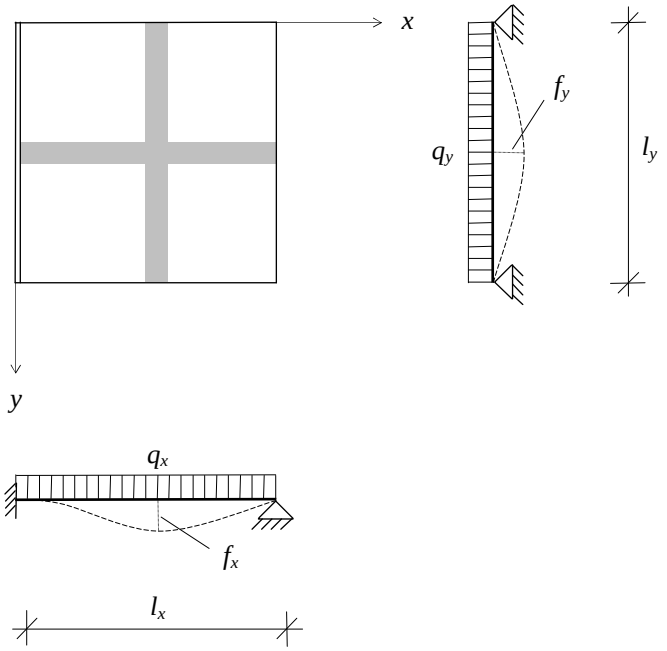
$$f_y = c_y\frac{q_y l_y^4}{EI}$$

Mivel valójában egyetlen szerkezetről van szó, a két lehajlás csak azonos lehet, vagyis

$$f_y = f_y, \qquad \text{innen} \qquad c_x\frac{q_x l_x^4}{EI} = c_y\frac{q_y l_y^4}{EI}$$

Az *x* irányú teher innen kifejezhető:

$$q_x = \frac{c_y}{c_x}\frac{l_y^4}{l_y^4}q_y$$



3.15 ábra. Lemez vizsgálata a Marcus-féle eljárással.

A terhekre vonatkozó első egyenlet alapján

$$q = q_x + q_y = \frac{c_y}{c_x}\frac{l_y^4}{l_x^4} q_y + q_y = q_y\left(1 + \frac{c_y}{c_x}\frac{l_y^4}{l_x^4}\right)$$

ahonnan

$$q_y = \frac{1}{1 + \frac{c_y}{c_x}\frac{l_y^4}{l_x^4}} q$$

Az *y* irányú teherintenzitás ismeretében az *x* irányú teherintenzitást a terhekre vonatkozó $q_x = q - q_y$ egyenlet szolgáltatja:

$$q_x = \frac{1}{1 + \frac{c_x}{c_y}\frac{l_x^4}{l_y^4}} q$$

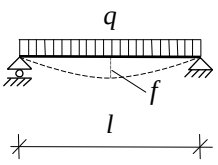
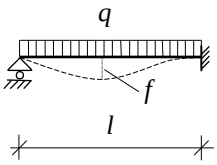
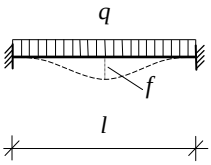
Az *x* és *y* irányú teherintenzitás ismeretében a lemez maximális nyomatékai már a gerendaelméletnél megismert képletek segítségével kiszámíthatók. A gerendákra vonatkozó képleteket, valamint a három alapesethez (csuklós-csuklós, csuklós-befogott és befogott-befogott megtámasztások) tartozó *c* értékeket a 3.1 táblázatban foglaltuk össze.

A 3.15 ábra vonatkozó értékei segítségével, és a q_x és q_y fent meghatározott értékeivel a lemezünk maximális nyomatékai a következők:

$$m_x^+ = \frac{9}{128} q_x l_x^2, \qquad m_x^- = \frac{1}{8} q_x l_x^2$$

$$m_y^+ = \frac{1}{8} q_y l_y^2, \qquad m_y^- = 0$$

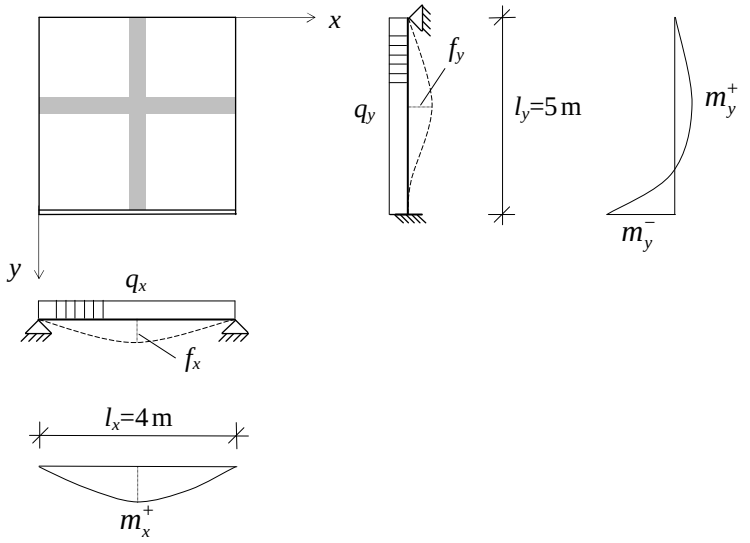
3.1 táblázat. Az alapesetek nyomatékai és *c* értékei a Marcus-féle eljáráshoz.

		
$M_{\max}^+ = \frac{1}{8} q l^2$	$M_{\max}^+ = \frac{9}{128} q l^2$	$M_{\max}^+ = \frac{1}{24} q l^2$
	$M_{\max}^- = \frac{1}{8} q l^2$	$M_{\max}^- = \frac{1}{12} q l^2$
$c = \frac{5}{384}$	$c = \frac{2}{384}$	$c = \frac{1}{384}$

A Marcus-féle eljárás illusztrálására határozzuk meg a 3.16 ábrán vázolt lemez legnagyobb nyomatékait. A lemez terhe q = 10 kN/m^2 egyenletesen megoszló teher.

A számításhoz előállítjuk a c_x/c_y, c_y/c_x, l_x/l_y és l_y/l_x segédmennyiségeket:

$$\frac{c_x}{c_y} = \frac{5}{2} = 2.5, \qquad \frac{c_y}{c_x} = \frac{2}{5} = 0.4, \qquad \frac{l_x}{l_y} = \frac{4}{5} = 0.8, \qquad \frac{l_y}{l_x} = \frac{5}{4} = 1.25$$



3.16 ábra. Számpélda adatai a Marcus-féle eljáráshoz.

Ezekkel a segédmennyiségekkel meghatározzuk az *x* és *y* irányú (fiktív) teherintenzitásokat:

$$q_x = \frac{1}{1+2.5\cdot 0.8^4}10 = 4.94 \text{ kN/m}^2$$

$$q_y = \frac{1}{1+0.4\cdot 1.25^4}10 = 5.06 \text{ kN/m}^2$$

A teherintenzitások ismeretében a lemez legnagyobb nyomatékai a 3.1 táblázat vonatkozó képleteivel már kiszámíthatók:

$$m_x^+ = \frac{1}{8}4.94\cdot 4^2 = 9.88 \text{ kNm/m}$$

$$m_y^- = \frac{1}{8}5.06\cdot 5^2 = 15.81 \text{ kNm/m}$$

$$m_y^+ = \frac{9}{128}5.06\cdot 5^2 = 8.89 \text{ kNm/m}$$

Összehasonlítás céljából a pontosnak tekinthető táblázatok [Korda-Ruzicska-Zentai: Gyűjtemény tartószerkezetek tervezéséhez, 1964] segítségével is meghatároztuk a nyomatékok értékeit:

$$m_x^+ = 0.04548\cdot 10\cdot 4^2 = 7.28 \text{ kNm/m}$$

$$m_y^- = \frac{0.5059}{8}10\cdot 5^2 = 15.81 \text{ kNm/m}$$

$$m_y^+ = 0.02239\cdot 10\cdot 5^2 = 5.60 \text{ kNm/m}$$

Látható, hogy a legnagyobb negatív nyomaték esetében a Marcus-féle eljárás a pontos értéket adta, míg a legnagyobb pozitív nyomaték értékét a biztonság javára történő közelítéssel kaptuk meg.

A gerendaelmélettel számítható nyomatéki értékek

$$m_x^+ = \frac{ql_x^2}{8} = 0.125\cdot 10\cdot 4^2 = 20 \text{ kNm/m}$$

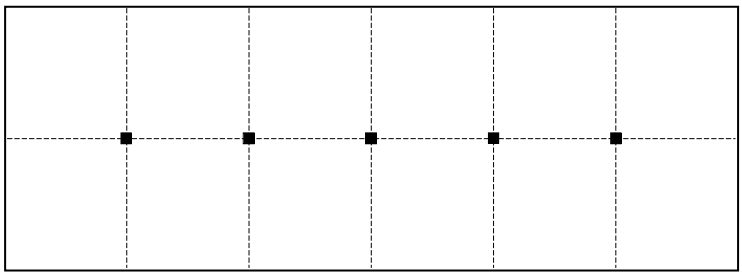
$$m_y^- = \frac{ql_y^2}{8} = 0.125\cdot 10\cdot 5^2 = 31.25 \text{ kNm/m}$$

$$m_y^+ = \frac{9ql_y^2}{128} = 0.07\cdot 10\cdot 5^2 = 17.6 \text{ kNm/m}$$

jelentős – 2-3-szoros – mértékben túlbecsülik a lemez igénybevételeit.

3.4.5 Lemezegyüttes

A lemezek önállóan is tartószerkezeteket képezhetnek, de gyakran több lemezből összeállított tartószerkezetet alkotnak, amelyeket lemezegyüttesnek nevezünk (3.17 ábra). Ezek matematikailag pontos megoldása már nem praktikus és mindenképpen valami közelítő módszert (pl. a differenciamódszert vagy táblázatos módszert), illetve számítógépes eljárást célszerű alkalmazni.



3.17 ábra. Lemezegyüttes.

3.5 Lemezművek

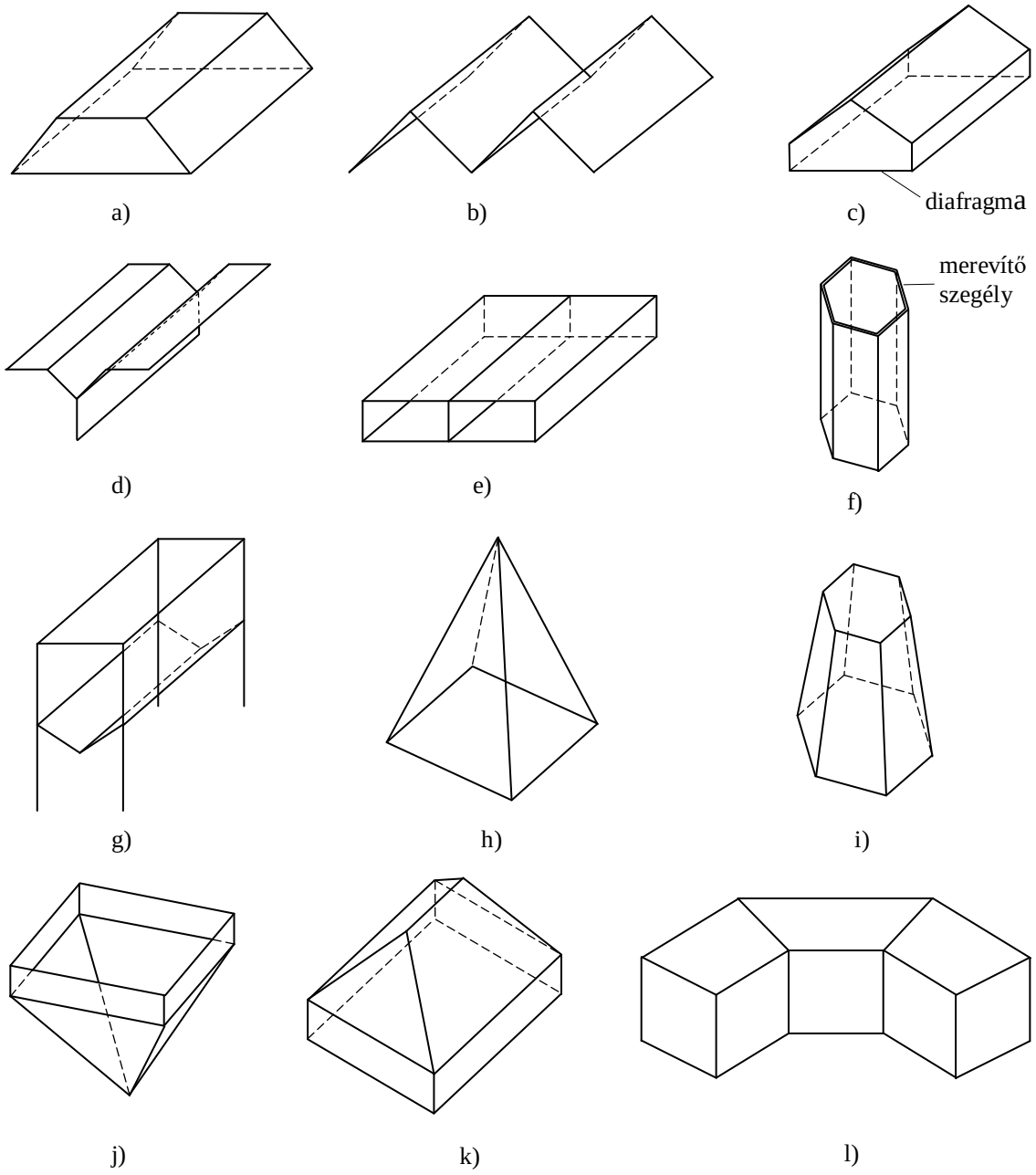
A sík tartóelemekből – lemezekből és tárcsákból – összeállított térbeli tartószerkezeteket lemezműveknek nevezzük. A lemezművek a rájuk ható terheket részben lemezhatás, részben tárcsahatás révén veszik fel és hárítják át az alátámasztó szerkezetekre. Jellegzetes alkalmazási területük: bunkerek, silók, tetők.

A lemezmű szinte minden eleme szerkezetileg is ki van használva, mivel a térelhatároló szerkezetek a térbeli erőjátékban is részt vesznek. A különböző síkú elemek az összeépítés folytán rendszerint igen merev szerkezetet eredményeznek. A monolit építés előnyei jól kihasználhatók. A lemezművek anyagfelhasználása általában kedvező, mivel a fajlagos beton illetve betonacél szükségletük kicsi.

Hátrányos tulajdonságaik is vannak: gondos és pontos kivitelezést igényelnek, az előregyártás nehezen valósítható meg, és a viszonylag vékony lemezek miatt a lemezművek horpadásra érzékenyek. A horpadásveszély megfelelő sűrűn elhelyezett diafragmák beépítésével csökkenthető.

A lemezművek a legkülönbözőbb alakban épülhetnek. A legegyszerűbb talán a prizmatikus lemezmű (3.18/a-g ábra) és gyakran alkalmaznak gúla illetve csonkagúla alakot (3.18/h-j ábra). Piramisszerű, illetve tört alaprajzú lemezművet mutat a 3.18/k-l ábra.

A lemezművek a keresztmetszet irányában lehetnek egy-, ill. többmezősek, az alkotó irányában pedig egy-, ill. többnyílásúak. A többnyílású lemezműveket többtámaszú lemezműveknek is nevezik. A lemezmű egyes lemezei lehetnek azonos, illetve különböző megtámasztásúak (3.19 ábra). Az egyszerű lemezműveknél egy élben csak két lemez találkozik, míg az összetett lemezművekre az jellemző, hogy egy élben három vagy több lemez csatlakozik (3.20 ábra).

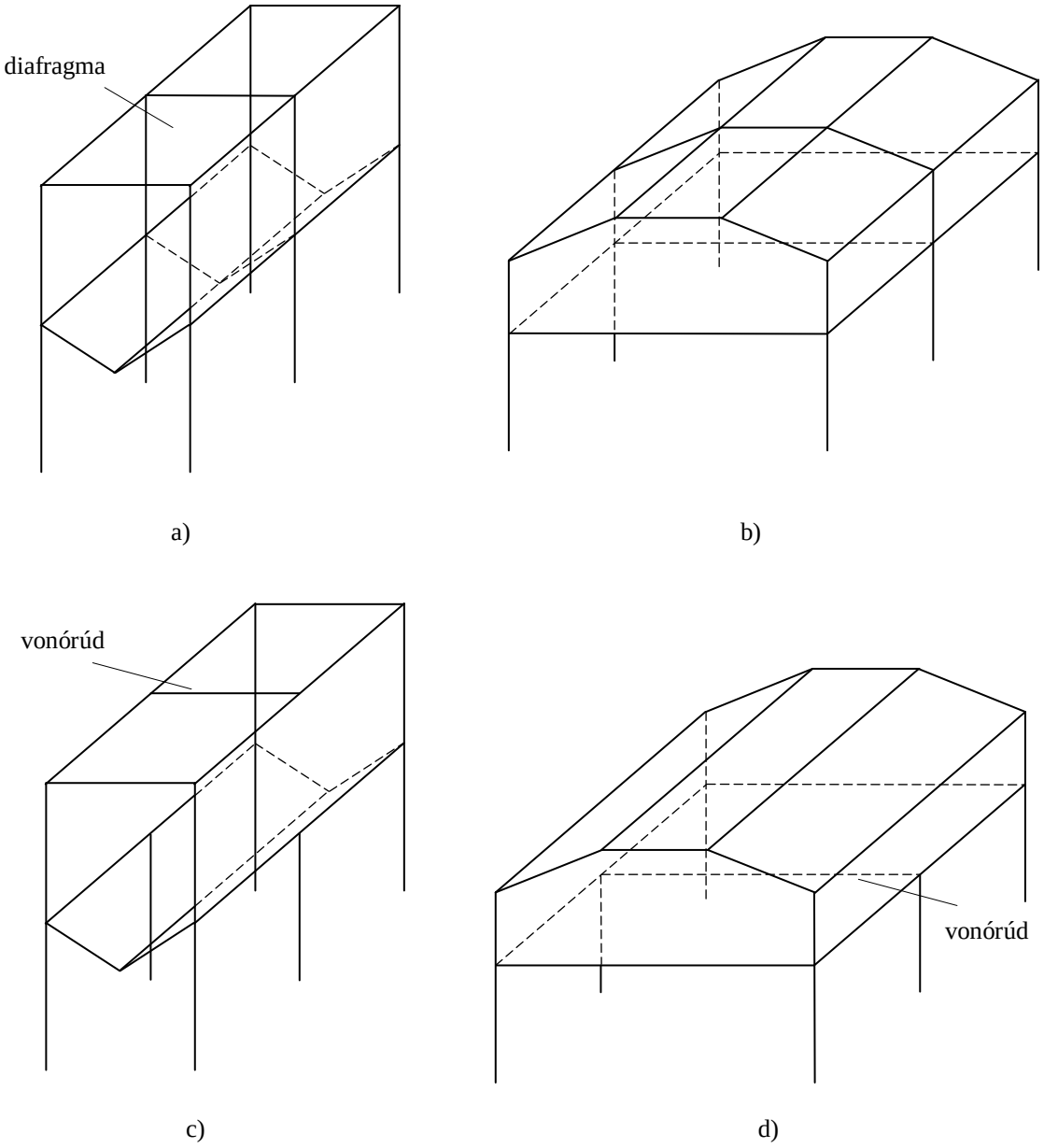


3.18 ábra. Lemezművek.

A lemezművek nagy előnye az, hogy az egyes síklemezek találkozásánál kialakított él igen merev lehet és így gerendát helyettesíthet. Ilyenkor külön alátámasztó gerenda építése felesleges. Ha viszont a csatlakozó lemezek hajlásszöge túl nagy (180 fok felé közeledik), akkor ez az előny elvész.

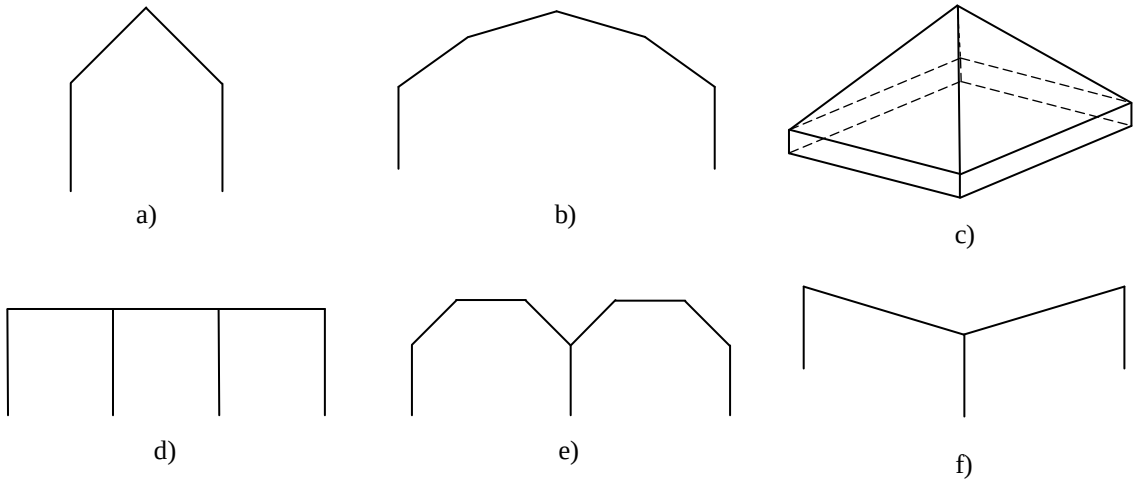
A lemezművek statikai viselkedésük szerint három nagy csoportba oszthatók. A merevtárcsás lemezműnél a lemezhatásból származó lehajlás nagyon kicsi és az egyes elemek önmagukban is mereveknek tekinthetők (3.21/a ábra). A mozdulatlan élű lemezműnél az élek lehajlása a lemezhatásból származó lehajláshoz képest kicsi (3.21/b

ábra) és így elhanyagolható. Az elmozduló élű lemezműnél a lemezhatásból keletkező lehajlás és az élek lehajlása azonos nagyságrendű (3.21/c ábra).

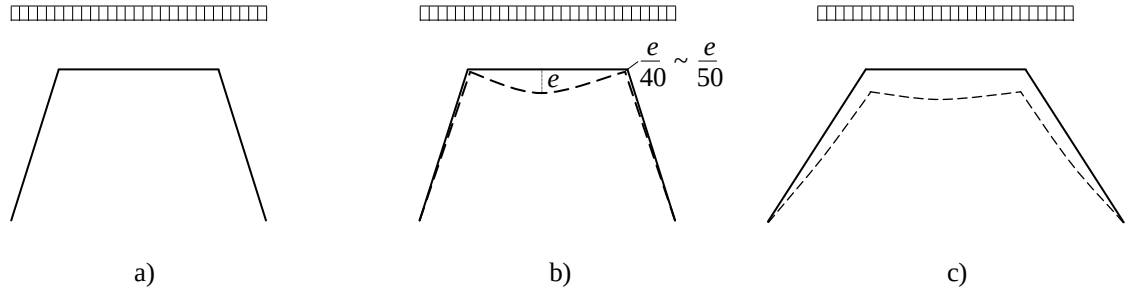


3.19 ábra. Lemezművek. a-b) Azonos, c-d) különböző megtámasztású lemezekkel.

A lemezművek jó geometriai kialakítás esetén egyesítik a lemezek és a tárcsák statikai előnyeit. Sajnos a lemezek és tárcsák statikai számításánál jelentkező nehézségeket is „összegzik”, így általános esetben a statikai számítás igen bonyolulttá válik. Néhány speciális esetben – például a periodicitás, szimmetria kihasználásával – lehetséges a számítás egyszerűsítése azzal, hogy a szerkezetet analóg síkbeli tartóra vezetjük vissza. A síkbeli tartó többnyire hajlított elem, pl. két- vagy többtámaszú gerenda, két- vagy többtámaszú keret, esetleg ívtartó. Általános esetben azonban célszerű az erőjáték vizsgálatához és az igénybevételek megállapításához számítógépes programot használni.



3.20 ábra. a-b-c) Egyszerű lemezmű, d-e-f) összetett lemezmű.



3.21 ábra. a) Merevtárcsás, b) mozdulatlan élű, c) elmozduló élű lemezmű.

3.6 Héjszerkezetek

Héjaknak nevezzük azokat a görbe felületű tartókat, amelyek a rájuk háruló terheket térbeli szerkezetként középfelületi és hajlítási erőkkel viselik és adják át az alátámasztó szerkezetek közvetítésével a talajra.

Héjszerkezeteket az építés számos területén alkalmaznak. Csarnokok tetőszerkezete, folyadéktartályok, támfalak, alapozási szerkezetek készülhetnek vasbeton héjakból. Ezeknek a szerkezeteknek a közös jellemzője az, hogy alakjuk szinte tetszés szerinti térbeli forma lehet és terhelésük megoszló jellegű.

3.6.1 Bevezetés

A héj alakja elvileg tetszés szerinti görbefelület, amelyet a vastagság felezőpontjai által meghatározott középfelülettel jellemzünk, rendszerint a

$$z = f(x, y) \tag{3.57}$$

alakú kétváltozós függvény segítségével.

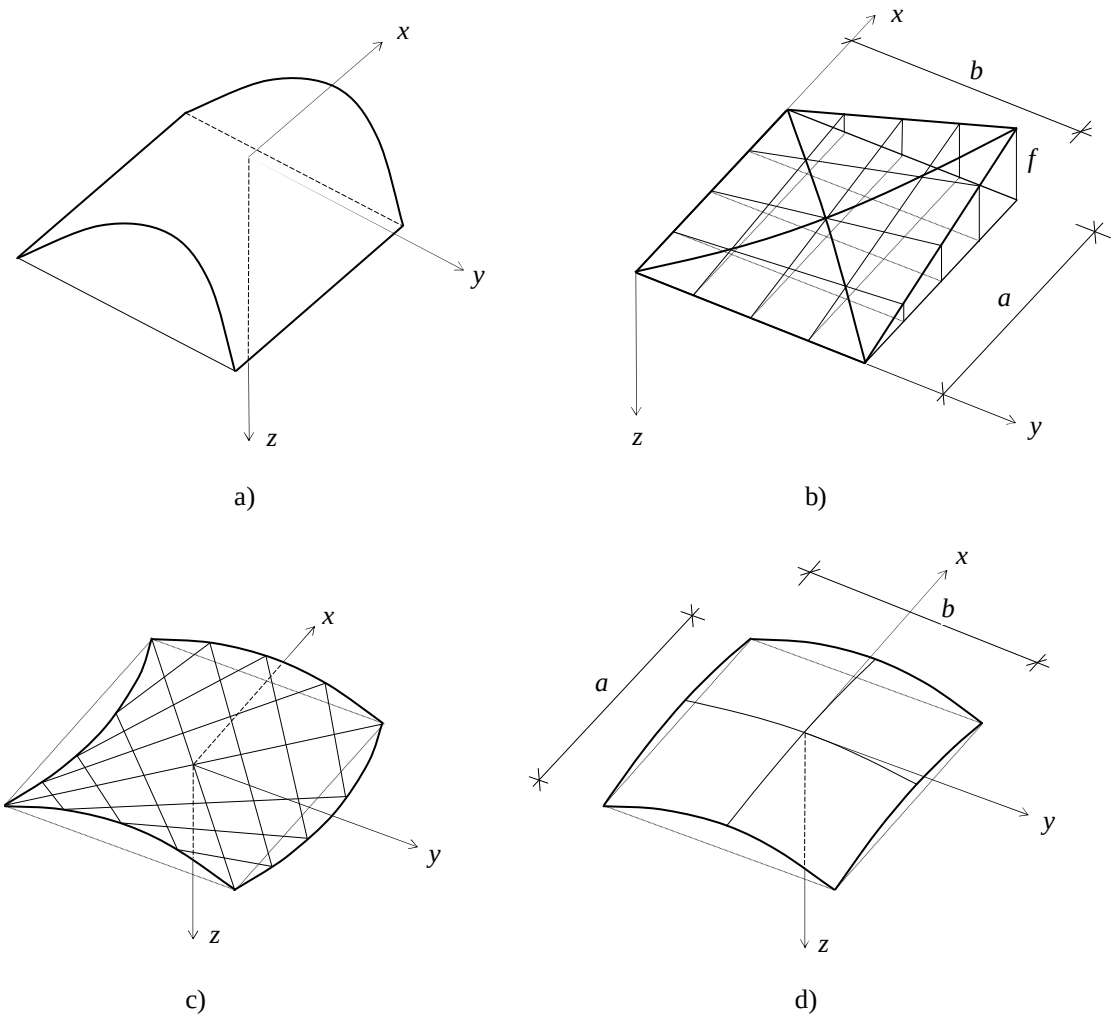
A héj szélein a középfelületre merőleges felület a peremfelület, amelyet röviden a héj peremének nevezünk. A héjakat a peremen rendszerint tartókkal támasztjuk meg; ezeket a héj peremtartóinak nevezzük. A héj megtámasztása lehet görgős, csuklós és befogott. Egyes szélek megtámasztás nélkül is épülhetnek. Ezek a szabad peremek.

A héjszerkezetek viszonylag rövid múlttal rendelkeznek, ennek ellenére széles körben elterjedtek. Ez a szerkezettípus előnyeivel magyarázható. Nagy terek lefedésére alkalmazhatók, alakjuk tetszőleges, anyagszükségletük csekély, súlyuk kicsi. Szép és érdekes felületek alakíthatók ki. Az alapozásuk általában viszonylag egyszerű. Az előnyök sajnos bizonyos hátrányokkal társulnak. A héjak állvány- és zsaluzatigénye nagy, gondos és szakszerű kivitelezést igényelnek, a hó- és vízszigetelés megoldása gyakran nehézkes. A héjszerkezet koncentrált erőt nehezen visel el. Viszonylag bonyolult erőtani számítást igényelnek. Esetenként a szerkezet stabilitásának vizsgálatára is szükség van, ami rendszerint igen bonyolult feladat.

Az egyszer- vagy kétszergörbült felületek viszonylag kis

$$h \approx \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{500} \right) R$$

szerkezeti vastagsággal megépíthetők (R: görbületi sugár), de a 6-7 centiméternél vékonyabb szerkezetek alkalmazása stabilitási problémák és technológiai nehézségek miatt kerülendő. Medencék esetében a vastagság akár $R/20$ … $R/50$ is lehet.



3.23 ábra. Héjszerkezetek. a) Dongahéj, b) torznégyszög, c) nyeregfelület, d) elliptikus paraboloid.

Héjszerkezetek céljaira leggyakrabban transzlációs és forgásfelületeket alkalmaznak.

A transzlációs felületek úgy származtathatók, hogy egy tetszés szerinti síkgörbe mentén önmagával párhuzamosan mozgatunk egy másik síkgörbét. A felület egyenlete általános esetben

$$z = g(x) + h(y) \tag{3.58}$$

alakú.

A dongahéj (3.23/a ábra) az egyik leggyakrabban alkalmazott transzlációs héj. Jellemzője, hogy csak egy irányban – a vezérgörbe irányában – görbült, míg az erre merőleges irányban egyenes alkotója van. A felület úgy származtatható, hogy a vezérgörbe (kör, parabola, ellipszis, szinuszgörbe) mentén mozgatjuk önmagával párhuzamosan az egyenes alkotót, vagy az alkotó mentén mozgatjuk önmagával párhuzamosan a vezérgörbét. Egyenlete

$$z = f(y) \tag{3.59}$$

ahol az $f(y)$ görbe a z-y síkban fekvő vezérgörbe.

A transzlációs héjak csoportjába tartozik a hiperbolikus paraboloid héj. A felület kétszer görbült, de mindig található rajta két egymást keresztező egyenes-sereg. Ennek megfelelően kétféleképpen származtatható. A 3.23/b ábra a torznégyszöget mutatja, amit úgy kapunk, hogy az ábra szerinti a–b oldalhosszúságú négyszögnek a koordinátarendszer kezdőpontjával szemben fekvő sarkát f értékkel elmozdítjuk. A 3.23/c ábrán vázolt nyeregfelület úgy származtatható, hogy egy alulról nézve homorú parabolán egy alulról nézve domború parabolát mozgatunk. A torznégyszög egyenlete:

$$z = cxy = \frac{f}{ab}xy \tag{3.60}$$

a nyeregfelületé pedig

$$z = c(\xi^2 - \eta^2) \tag{3.61}$$

A (3.60) egyenletből a (3.61) egyenletet az x,y koordinátatengelyek 45º-ka1 történő elforgatásával kapjuk.

Az elliptikus paraboloid héjak képezik a transzlációs héjat harmadik csoportját. A felületet úgy származtatjuk, hogy egy alulról homorú parabolán egy másik, alulról homorú parabolát mozgatunk. Az eredmény egy olyan

$$z = ax^2 + by^2 \tag{3.62}$$

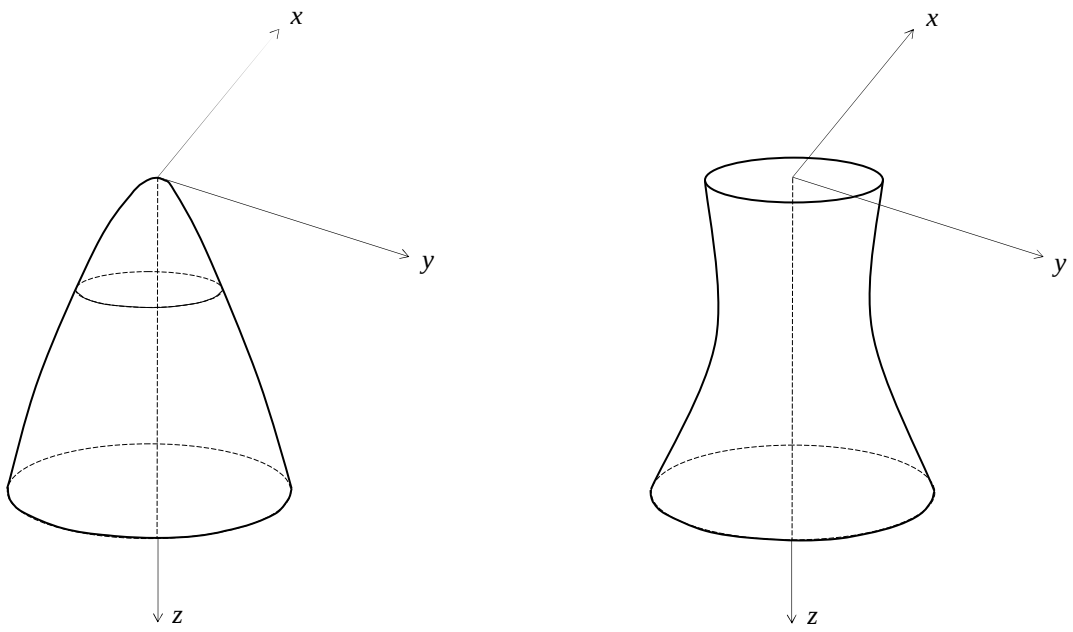
felület (3.23/d ábra), amelynek bármely a z tengellyel párhuzamos síkmetszete parabola. Ha a felületet a z = állandó síkokkal elmetsszük, ellipsziseket kapunk.

A héjszerkezetek másik nagy csoportját a forgásfelületű héjak alkotják. Forgásfelületnek nevezzük azt a felületet, amely valamely síkgörbének – a vezérgörbének – saját síkjába eső tengely körül történő forgatása révén keletkezik. Ha a vezérgörbe metszi a forgástengelyt, akkor zárt, ha nem, akkor nyitott felület keletkezik.

Az egyik legegyszerűbb forgásfelület a zárt felületű forgási paraboloid (3.24/a ábra):

$$z = c(z^2 + y^2) \tag{3.63}$$

amelynek a z tengelyre merőleges metszetei körök. Nyitott forgásfelületet mutat a 3.24/b ábra.



a) zárt b) nyitott

3.24 ábra. Forgási paraboloid.

3.6.2. A héjszerkezetek erőtani számításáról

A 3.2 pontban részletezett feltételezések figyelembevételével felírhatók a héj térbeli viselkedését jellemző térbeli feszültségi állapot egyensúlyi és alakváltozási egyenletei. Az általános héjelmélet az

n_x, n_y, n_{xy} és n_{yx}	normálerők és nyíróerők,
m_x, m_y, m_{xy} és m_{yx}	hajlító- és csavarónyomatékok,
q_x, q_y	keresztirányú nyíróerők

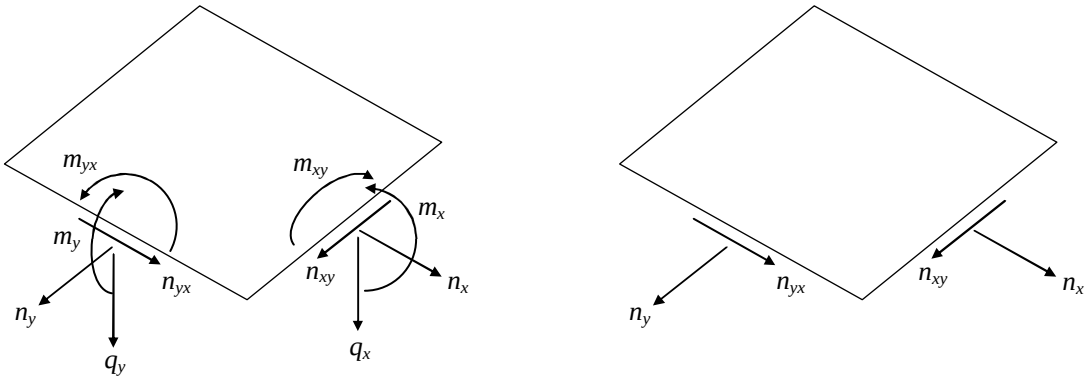
meghatározását tűzi ki céljául (3.25/a ábra). A tíz ismeretlen között található hajlítónyomatékokról az általános héjelméletet hajlítási elméletnek is nevezik. A hajlításelmélet kereteiben tárgyalt problémák bonyolult magasabbrendű parciális differenciaegyenlet-rendszerekre vezetnek, amelyek különleges esetekben egyetlen nyolcadrendű parciális differenciálegyenletben foglalhatók össze. Egyes egyszerűen jellemezhető felületeknél (hengerhéjak, gömbkupolák) a hajlításelmélet viszonylag könnyen kezelhető összefüggésekre vezet, de még ezek is túlságosan bonyolultak gyakorlati számítások végrehajtására. Valószínűleg ezért is különböző közelítő módszerek láttak napvilágot. Ezek közül egyet – merev fenéklemezzel rendelkező körhengerhéj esetére – a következő pontban mi is bemutatunk.

A fent vázolt nehézségek miatt, és azért is mert bizonyos héjtípusoknál hajlítónyomatékok nem, vagy csak elhanyagolható mértékben keletkeznek, egy másik megközelítés, illetve számítási módszer is kialakult. Ez a módszer a membránelmélet.

A membránelméletet az jellemzi, hogy feltevései szerint a héjfelület bármely metszetében csak a középfelület síkjában lévő normál- illetve nyíróerők lépnek fel. Ezek az

$$n_x,\ n_y \text{ és } n_{xy} = n_{yx}$$

erők (3.25/b ábra).



a) b)

3.25 ábra. Belső erők. a) Hajlításelméletnél, b) membránelméletnél.

A héj feszültségállapotának jellemzéséhez így három ismeretlen belső erő meghatározása szükséges. Ez – megfelelő kerületi feltételek mellett – a három egyensúlyi egyenlet segítségével megtehető. A héj erőjátékát jellemző három egyensúlyi egyenletnek ki kell elégíteni a megtámasztás statikai kerületi feltételeit is. A héj peremén ugyanis csak olyan erők keletkezhetnek, amelyeket a megtámasztások fel tudnak venni. A bevezetőben említett feltételeken kívül a membránállapotban lévő héj esetében azt is feltételezzük, hogy a feszültségek megoszlása a héj vastagsága mentén állandó.

A megépített héjszerkezetek esetében a membránelmélet feltételei általában nem teljesülnek. A gyakorlatban azonban a membránelméletet széles körben alkalmazzák, mivel az általánosabb hajlításelmélethez viszonyítva lényegesen egyszerűbb. Az egész héj erőjátékára vonatkozóan a membránelmélet általában kellő tájékoztatást nyújt, és gyakran elegendő a hajlítónyomatékokat utólag, esetleg valamilyen közelítő módszerrel figyelembe venni. A membránállapotban vizsgált héj statikailag határozott szerkezetnek tekinthető, és mint ilyet gyakran törzstartónak választják a hajlításelmélet szerint határozatlan tartónak tekinthető szerkezet vizsgálata során.

A három egyensúlyi egyenlet felhasználásával a membránhéjakra a

$$\frac{\partial^2 z \partial^2 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z \partial^2 F}{\partial x \partial y \partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z \partial^2 F}{\partial y^2 \partial x^2} = -Z(x, y) \qquad (3.64)$$

parciális differenciálegyenlet írható fel az *x*, *y*, *z* derékszögű koordinátarendszerben, ahol

$z(x, y)$	a felület függvénye,
$Z(x, y)$	a teherfüggvény,
$F(x, y)$	a feszültségfüggvény.

A (3.64) egyenlet a

$$z_{xx}F_{yy} - 2z_{xy}F_{xy} + z_{yy}F_{xx} = -Z \tag{3.65}$$

alakban is ismert. Az egyenletet először Pucher írta fel 1934-ben és ezért Pucher-féle egyenletnek is nevezzük. Az egyenlet egyértelmű kapcsolatot fejez ki a felület, a rá ható teher és a benne ébredő feszültség között. Akármelyik két függvény ismeretében a harmadik függvény meghatározható. A felület és feszültségfüggvény felcserélhető, azaz adott felülethez, külső teherhez és kerületi feltételekhez keressük a feszültségfüggvényt (az erőjátékot), vagy felvesszük a feszültségfüggvényt (az erőjátékot) és keressük a hozzá tartozó felületet. Az egyenletnek ez a tulajdonsága igen érdekes és kreatív tervezésre/ellenőrzésre ad lehetőséget. Az *F* feszültségfüggvény ismeretében az N_x, N_y és N_{xy} fajlagos feszítőerők (belső erők) *x*-*y* síkra vetített vetületei, az n_x, n_y és n_{xy} redukált feszítőerők az alábbi összefüggésekből határozhatók meg:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = F_{yy} \tag{3.66}$$

$$n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = F_{xx} \tag{3.67}$$

$$n_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -F_{xy} \tag{3.68}$$

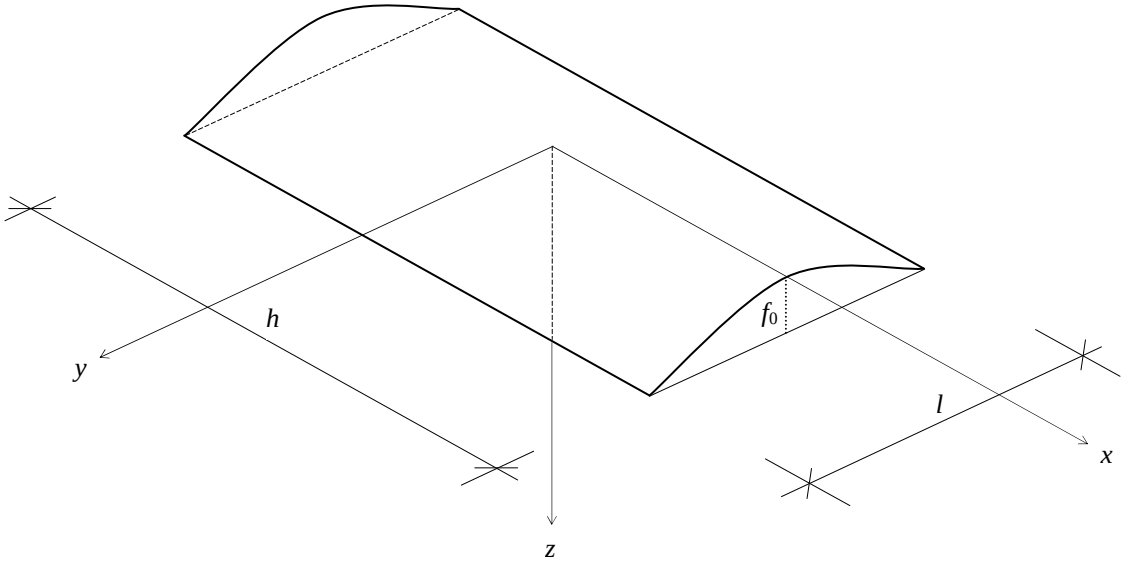
A következő pontban néhány igen egyszerű erőjátékú héjszerkezet vizsgálatát mutatjuk be.

3.6.3 Néhány egyszerű héjszerkezet vizsgálata

3.6.3.1 Dongahéj

Tekintsük a 3.26 ábrán vázolt, másodfokú parabola vezérgörbéjű dongahéjat. A héj íves peremtartói *x* irányú erőt nem tudnak felvenni – az ilyen tartókat oldalnyomásmentes peremtartóknak nevezzük. Határozzuk meg a fajlagos feszítőerők értékét. A héjat *g* intenzitású, egyenletesen megoszló, függőleges hóteher terheli:

$$Z(x, y) = g(y) = g \tag{3.69}$$



3.26 ábra. Dongahéj.

A felület egyenlete

$$z(x,y) = f(y) = \frac{4f_0}{l^2} y^2 = \frac{a}{2} y^2 \tag{3.70}$$

ahol bevezettük az $a = 8f_0/l^2$ jelölést.

Mivel $z_{xx} = 0$, $z_{xy} = 0$ és $z_{yy} = a$, a Pucher-féle egyenlet

$$aF_{xx} = -g \tag{3.71}$$

alakú. Innen az y irányú redukált fajlagos feszítőerő értéke a (3.67) összefüggés segítségével azonnal adódik:

$$n_y = F_{xx} = -\frac{g}{a} \tag{3.72}$$

A (3.71) összefüggésből az x szerint történő kétszeres integrálással a feszültségfüggvényt is megkapjuk:

$$F = \iint F_{xx} dx dx = \int \left[-\frac{g}{a} x + C_1(y) \right] dx = -\frac{g}{a} \frac{x^2}{2} + C_1(y)x + C_2(y) \tag{3.73}$$

A feszültségfüggvény fenti képletében a C_1 és C_2 az y változónak tetszés szerinti függvényei lehetnek. Az általános megoldás tehát kétszeresen végtelen sok feszültségfüggvényt ad.

A másik két feszítőerőt a (3.66) és (3.68) összefüggések segítségével állíthatjuk elő:

$$n_x = F_{yy} = C_1''(y)x + C_2''(y) \tag{3.74}$$

$$n_{xy} = -F_{xy} = -C_1'(y) \tag{3.75}$$

Az egyenletekben szereplő C_1 és C_2 integrálási állandókat a peremfeltételekből határozhatjuk meg. Az oldalnyomásmentes íves peremek miatt az n_x feszítőerő az $x = h/2$ és az $x = -h/2$ helyen zérus

$$C_1''(y)\frac{h}{2} + C_2''(y) = 0 \tag{3.76}$$

$$-C_1''(y)\frac{h}{2} + C_2''(y) = 0 \tag{3.77}$$

A két ismeretlen második differenciálhányadosa innen:

$$C_1''(y) = C_2''(y) = 0 \tag{3.78}$$

A (3.74) összefüggésből az n_x feszítőerő értéke már adódik:

$$n_x = 0 \tag{3.79}$$

Az n_{xy} feszítőerő meghatározásához szükség van a $C_1(y)$ értékére. A (3.78) összefüggés figyelembevételével:

$$C_1'(y) = \int C_1''(y)dy = \int 0dy = \text{konstans} \tag{3.80}$$

Az n_{xy} feszítőerő a (3.75) és a (3.80) összefüggések szerint állandó. Ez azonban – a szimmetriavonalakon szükségszerűen zérus értékű nyíróerő miatt – csak úgy lehetséges, ha

$$n_{xy} = 0 \tag{3.81}$$

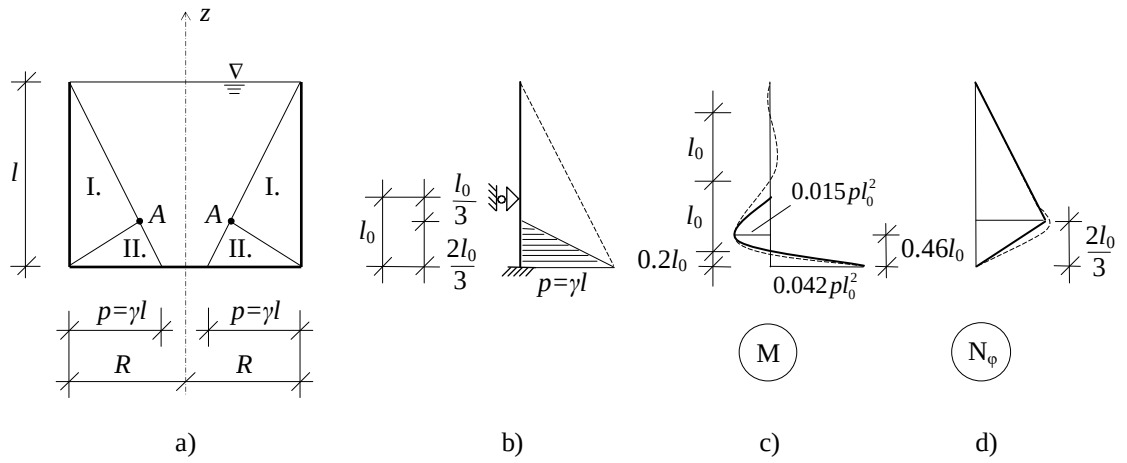
A másodfokú parabola vezérgörbéjű dongahéjban egyenletesen megoszló hóteher hatására tehát csak n_y erők lépnek fel. Ebből az következik, hogy a héj úgy viselkedik, mint egy ívtartókból álló sorozat, ahol a támaszvonal a szilárdsági tengellyel egybeesik. A reakciók a vízszintes peremen a héjról átadódó oldalnyomások. Ezek felvételéről megfelelő szerkezettel – például vonóvassal – kell gondoskodni. A homlok oldalon lévő íves peremtartókban igénybevétel – a membránelmélet szerint – nem keletkezik.

Az itt bemutatott és membránelmélettel számított dongahéj egyenes peremtartói tetemes erőket kapnak, melyeket csak igen merev szegélytartókkal – gazdaságtalanul – lehet felvenni. Az itt bemutatott eljárás tehát számítástechnikailag előnyös, a gyakorlatban viszont gazdaságtalan szerkezetet eredményezhet. Kedvezőbb erőjátékú szerkezetet kapunk, ha a terhek egy része nyírás útján a homlokívekre, másik része nyomás útján a hosszirányú szegélytartóra adódik át.

A gyakorlati héjtervezés során fontos szerepet játszanak közelítő módszerek. A jó közelítő eljárás megismertet az erőjáték jellemző tulajdonságaival és lehetővé teszi a szerkezet főbb méreteinek reális felvételét a pontos(abb) vizsgálathoz. A következő két pontban erre mutatunk be példákat.

3.6.3.2 Magasfalú körhengertartály közelítő vizsgálata

A hajlított körhengertartály általános megoldását úgy kaphatjuk meg, hogy a héjra hajlításelmélet segítségével levezethető negyedrendű, inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásához hozzáadjuk a homogén egyenlet általános megoldását. Ez egy viszonylag hosszadalmas eljárás, és helyette inkább egy igen egyszerű közelítő eljárást mutatunk be.



3.27 ábra. Körhengertartály közelítő számítása. a) Tartály, b) statikai modell, c) nyomatékábra, d) gyűrűerő-ábra.

A Palotás Lászlótól származó szellemes közelítő eljárás folyadékkal terhelt, alul befogott vagy a talajra felfekvő alaplemezbe befogott hengerre alkalmazható (3.27/a ábra). A henger átmérője $2R$. A számítás alapgondolata az, hogy a tartály a folyadék oldalnyomását részben membránerők, részben hajlítás révén veszi fel. A folyadéknyomást két részre kell bontani (3.27/a ábra). Az I. jelű rész gyűrűirányú erőket, a II. jelű rész pedig z irányú hajlítónyomatékokat idéz elő. Az „A” osztópont a fenéktől $2l_0/3$ távolságban van, ahol

$$l_0 = \frac{\pi}{\lambda} \tag{3.82}$$

és

$$\lambda = \frac{5.84}{R} \tag{3.83}$$

A hajlítónyomatékot közelítően egy alul befogott és l_0 magasságban megtámasztott helyettesítő tartón határozhatjuk meg (3.27/b ábra). A helyettesítő tartót a II. jelű, háromszög szerint megoszló teher terheli. Az egyszeresen határozatlan tartó megoldása a befogásnál

$$M^{-}_{\max} = 0.042\, pl_0^2 \tag{3.84}$$

a mezőben pedig

$$M^{+}_{\max} = 0.015\, p l_0^2 \tag{3.85}$$

nyomatékot ad, ahol

$$p = \gamma l \tag{3.86}$$

a γ fajsúlyú folyadék nyomása a fenéknél. A nyomatékábrát a 3.27/c ábrán vázoltuk.

A gyűrűerőket az I. jelű teherből, a kazánképlet segítségével határozzuk meg. A maximális gyűrűerő a fenéktől $2l_0/3$ távolságban ébred (3.27/d ábra):

$$N_\varphi = R\gamma\left(l - \frac{2}{3} l_0\right) \tag{3.87}$$

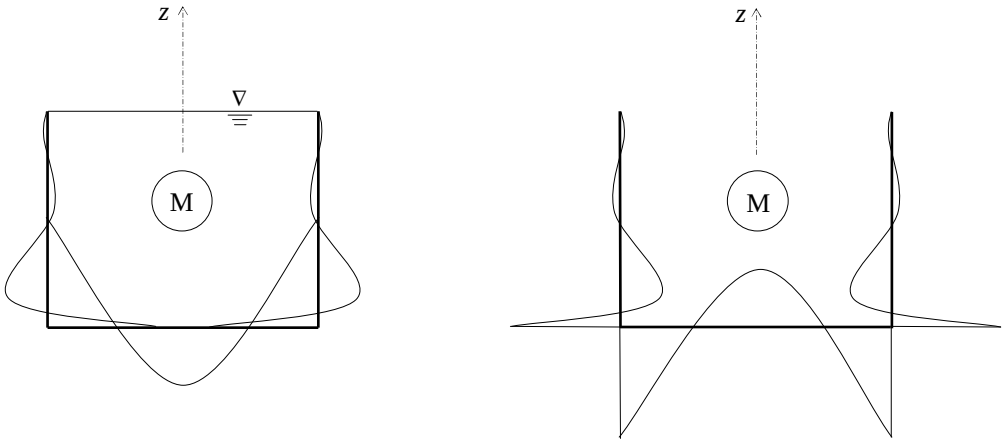
A (3.84), (3.85) és (3.87) összefüggésekkel megadott értékek jó egyezést mutatnak a hajlításelmélettel meghatározott értékekkel. A 3.27/c és 3.27/d ábrákon szaggatott vonal jelzi a pontos megoldást.

Tartályok esetében két szélső terhelési eset érdemel megkülönböztetett figyelmet:

a) A folyadékkal telt tartályra más teher nem működik.

b) A földbe süllyesztett és földnyomással terhelt tartály üres.

A két jellemző nyomatékábrát a 3.28 ábrán vázoltuk.



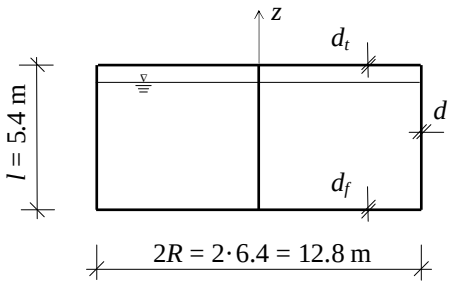
a) tele tartály b) üres tartály

3.28 ábra. Tartály nyomatékábrája.

3.6.3.3 Körszimmetrikus medence közelítő vizsgálata

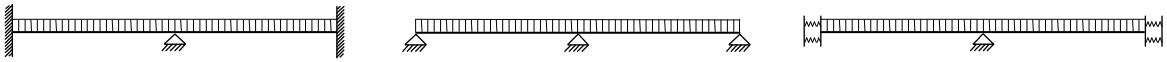
Vázlattervezéshez gyakran olyan közelítő számításokat alkalmaznak, amelyek az összetett erőjátékú szerkezetet alkotó elemekre bontják és az egyes elemeket külön-külön vizsgálják. Ez a módszer kiválóan alkalmas a főbb méretek megállapításához. A jó műszaki érzékkel kialakított egyszerűsítések és közelítések gyakran olyan „közelítő” méreteket eredményeznek, amelyeket az esetleges későbbi – jóval bonyolultabb – részletes vizsgálat is igazol. Felhasználva egy megépült körszimmetrikus medence közelítő számításának az eredményeit, a 3.29 ábrán erre mutatunk be egy példát.

a) metszet

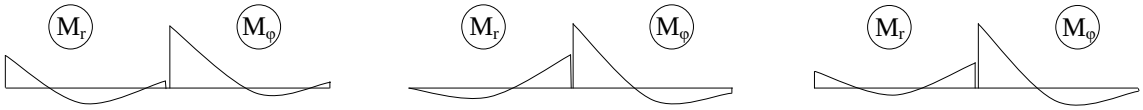


d = 0.25 m
d_f = 0.30 m
d_t = 0.15 - 0.25 m

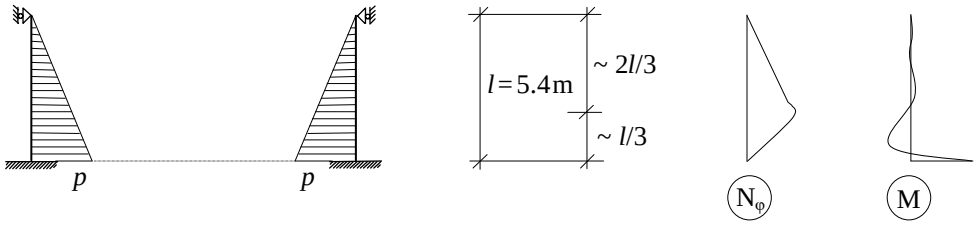
b) tetőlemez: befogott peremmel csuklós peremmel részlegesen befogott peremmel



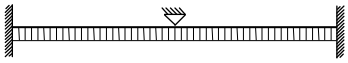
c) nyomatékábrák



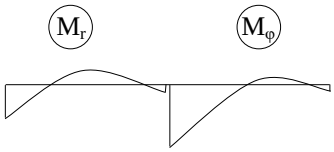
d) hengerhéj



e) fenéklemez



f) fenéklemez nyomatékábrái



3.29 ábra. Körszimmetrikus medence közelítő számítása. a) Medence adatai, b) tetőlemez, c) nyomaték-ábrák, d) hengerhéj, e) fenéklemez, f) fenéklemez nyomatékábrái.

A körszimmetrikus, középen egy oszloppa1 rendelkező medence víz tárolására szolgál (3.29/a ábra). Mind a közelítő, mind az itt nem részletezett pontosabb vizsgálathoz jól felhasználható Márkus Gyula: Körszimmetrikus szerkezetek elmélete és számítása c. könyve, amely táblázatos formában sok körszimmetrikus szerkezet jellemző igénybevételi értékeit tartalmazza.

A felső lemez statikai modellje egy egyenletesen megoszló teherrel terhelt, középen megtámasztott körlemez (3.29/b ábra). A hengerhéj rugalmasan befogó hatásának következtében a lemez kerülete mentén rugalmasan befogott. A két szélső eset – teljes befogás és szabadon elforduló csuklós perem – vizsgálata alsó és felső korlátot ad a gyűrűirányú (M_φ) és sugárirányú (M_r) nyomatékok értékeire. A befogás „rugalmasságának" ismeretében – vagy feltételezésével – jó közelítést kaphatunk a tényleges állapotról. A 3.29/c ábrán – helytakarékosság céljából – az ábrákon együtt ábrázoltuk a Márkus-féle táblázatokból kapott sugár- és gyűrűirányú nyomatékokat.

A hengerhéj közelítő számításához alkalmazható modell egy olyan henger, amely alul körben mereven befogott, fent pedig az eltolódások ellen meg van támasztva (3.29/d ábra). A terhelés a vízből származó háromszög szerint megoszló vízszintes teher. A táblázatok szolgáltatják a modell N_φ gyűrűerőit és az M_z alkotóirányú nyomatékokat (3.29/d ábra). A fenéklemez modellje egy olyan körben befogott körlemez, amelyet középen egy oszlop támaszt meg (3.29/e ábra). Feltételezzük, hogy a felső lemez súlya és esetleges terhe, valamint a hengerhéj súlya egyenletesen megoszló talajreakciót vált ki (3.29/e ábra). A Márkus-féle táblázatokból nyerhető gyűrűirányú (M_φ) és sugárirányú (M_r) nyomatékokat ismét egy ábrában adtuk meg (3.29/f ábra). Az ábrákon feltüntetett nyomatékok a lemezközép környékén az oszlop kerületén érvényes értékeket mutatják. (A lemezközépen – a koncentrált erő miatt – a nyomatékok a végtelenhez tartanak.)

A medencék tervezésénél a statikai követelmények kielégítése mellett fontos a folyadékzárási követelmény betartása is.

4

Épületek merevítőrendszerének szilárdsági vizsgálata vízszintes terhek hatására

Az épületek elsőrendű szerkezeti elemei a vízszintes és függőleges teherhordó szerkezetek. A vízszintes és függőleges teherhordó szerkezetek segítségével az épület függőleges és vízszintes terheket hord. A függőleges terhek (állandó és esetleges terhek) a vízszintes teherviselő elemek (gerendák, födémlemezek) segítségével adódnak át függőleges teherviselő elemekre (falakra, magokra, keretekre, oszlopokra). A szerkezet erőjátéka a függőleges terhek hatására viszonylag egyszerű. A mértékadó födémteher megoszlása a függőleges teherviselő elemek között általában minden nehézség nélkül (terhelő mezők kijelölésével) megállapítható.

A vízszintes terhek közül a szélteher a legjellegzetesebb teher. A szélteher az épületet határoló homlokzati szerkezetek közvetítésével először a födémekre adódik át, majd a födémek a vízszintes terheket továbbítják azokra a függőleges teherhordó szerkezetekre, amelyek képesek őket az alapokra átadni. (Hasonlóan viselkedik az épület a földrengés és az építési pontatlanság okozta vízszintes terhek esetében.) A vízszintes terhek továbbítására képes függőleges teherhordó elemek a keretek, merevítőfalak és merevítőmagok. A keretek, merevítőfalak és magok által alkotott rendszer az épület merevítőrendszere. A merevítőrendszer erőjátéka a közreműködő (rendszerint) nagy számú szerkezeti elem és a közöttük létrejövő kölcsönhatások és a térbeli viselkedés miatt általában összetett, ezért a pontos vizsgálat igen bonyolult. A számítás egyszerűsítése érdekében közelítő feltételezésekkel élünk, amelyeket úgy választunk meg, hogy az eredmények még az építőmérnöki számításoknál elfogadott pontossági határok között maradjanak.

Ebben a fejezetben feltételezzük hogy

1) a merevítőrendszer elemei homogén anyagúak, rugalmasan viselkednek és kis alakváltozásokat végeznek,
2) a merevítőrendszer elemei (keretek, falak és magok) alul befogottak,
3) a merevítőrendszer elemeinek alaprajzi elrendezése minden szinten azonos,
4) az épületek födémei saját síkjukban merev tárcsát alkotnak, síkjukra merőlegesen viszont hajlékonyak.

A merevítőrendszer vizsgálatánál igen fontos és egyben a legnehezebben megválaszolható kérdés az, hogy a merevítőrendszer elemei hogyan részesülnek a külső vízszintes teherből. Ez a fejezet ezzel a feladattal foglalkozik és zárt képleteket ad meg az épület alakváltozásának meghatározására is abban az esetben, amikor a vízszintes teher a függőleges mentén egyenletesen megoszló intenzitású.

4.1 Vízszintes terhek

A vízszintes terhek meghatározása szabványok által szabályozott feladat. Nem foglalkozunk részletesen a vízszintes terhek meghatározásával, de bemutatunk egy-egy egyszerű, közelítő módszert a szélteher, a földrengésteher és az építési pontatlanságból keletkező vízszintes teher meghatározására. Ezzel az a célunk, hogy megmutassuk a három legfontosabb vízszintes teherfajta jellegzetességeit, illetve képet alkossunk ezen terhek nagyságrendjéről és összehasonlíthassuk várható hatásaikat. Nyomatékosan hangsúlyozzuk azonban, hogy a vonatkozó szabványelőírások időről időre változhatnak és minden esetben a tervező felelőssége hogy ezeket a változásokat figyelemmel kísérje és figyelembe vegye a napi tervezés során és a terhek meghatározásánál mindig a pillanatnyilag érvényes szabványok előírásainak megfelelően járjon el.

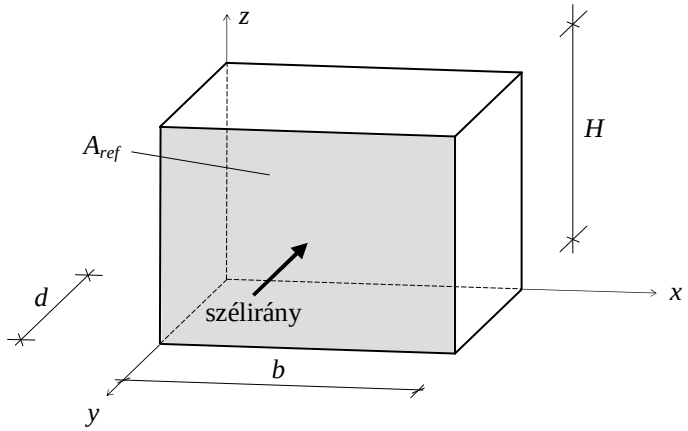
A merevítőrendszer vizsgálatánál természetesen a függőleges terhek hatását is figyelembe kell venni, de ezzel a feladattal ez a fejezet nem foglalkozik.

4.1.1 Szél

Többszintes épületek vízszintes terhei közül talán a szél a legfontosabb. Az alábbiakban bemutatott egyszerűsített eljárás a szél áramló, turbolens hatását egyenértékű nyomásokkal (és szívásokkal), illetve erőkkel modellezi. Feltételezzük, hogy az épület hasábszerű, síklapokkal határolt alakzat, amelynek a szélirányra merőleges szélességi mérete b, a szélirányban mért mélysége d és a magassága H (4.1 ábra). Feltételezzük továbbá, hogy teljesül a

$$d > \frac{H}{2.5} \qquad \text{és} \qquad d > \frac{b}{5}$$

két feltétel legalább egyike.



4.1 ábra. Hasábszerű, síklapokkal határolt épület *y* irányú szélteher megállapításához.

Az épület homlokzatán a felületre merőlegesen ható külső felületi szélnyomás alapértéke a

$$w_e = q_p(z)c \quad [\text{kN/m}^2]$$

összefüggésből határozható meg, ahol

$q_p(z)$ a torlónyomás [kN/m^2]
c az alaki tényező [-]

A torlónyomás értéke függ a terepszint feletti z magasságtól és a terep beépítési jellegétől.

A z magasságként a z_e referenciamagasságot kell használni, az alábbiak szerint:

- ha $H > b$, akkor $z_e = b$, b-ig,
  majd $z_e = H$, b-től H-ig
- ha $H < b$, akkor $z_e = H$

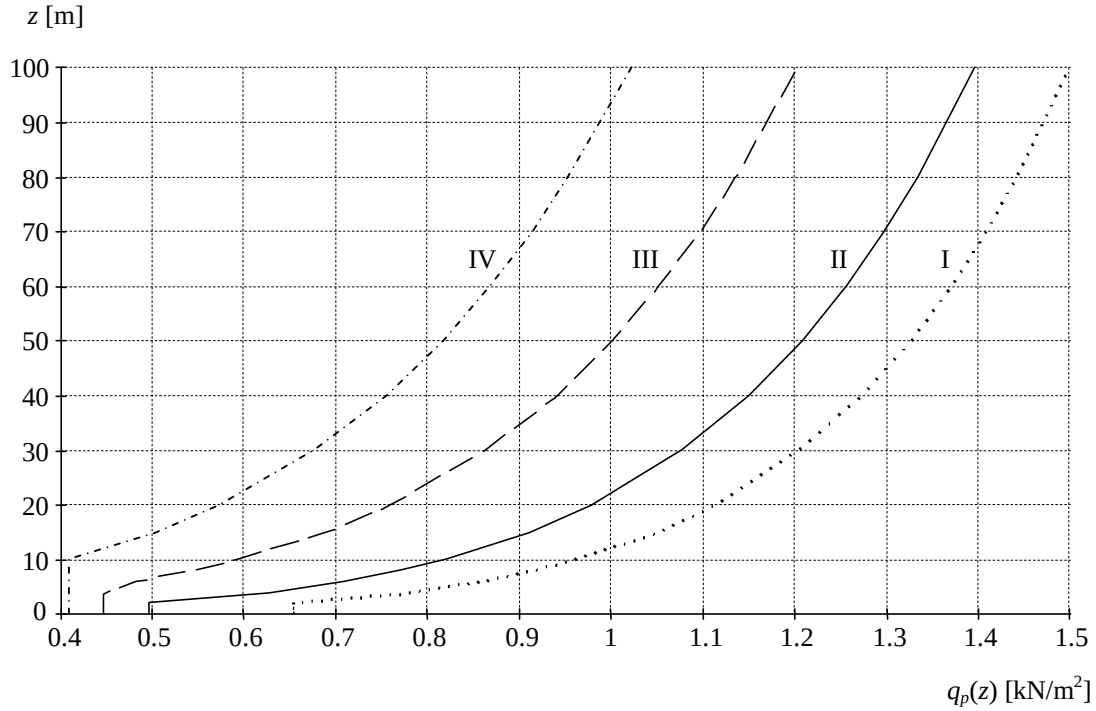
A terep beépítési jellege szintén befolyásolja a torlónyomás értékét. Négy beépítési kategóriát különböztetünk meg:

I: Nyílt terep
II: Mezőgazdasági terület (elszórtan építményekkel, házakkal és/vagy fákkal)
III: Alacsony beépítés: külvárosi vagy ipari övezet; erdők
IV: Intenzív beépítés: városi övezet: legalább 15% legalább 15m magas épületekkel

Fentiek figyelembevételével a $q_p(z)$ torlónyomás értékét a terepszint feletti magasság és a beépítési kategória függvényében a 4.1 táblázat, illetve a 4.2 ábra diagramjai segítségével kapjuk meg.

4.1 táblázat. A szél torlónyomásának értékei Magyarországon: $q_p(z)$ [kN/m^2].

Terepszint feletti magasság: z [m]	$q_p(z)$ értékei a terepszint feletti magasság és a beépítettségi kategória függvényében			
	I	II	III	IV
2	0.654	0.495	0.446	0.409
4	0.781	0.627	0.446	0.409
6	0.860	0.709	0.484	0.409
8	0.918	0.770	0.545	0.409
10	0.964	0.819	0.595	0.409
15	1.050	0.911	0.689	0.503
20	1.113	0.978	0.760	0.572
30	1.205	1.077	0.863	0.676
40	1.272	1.150	0.940	0.754
50	1.326	1.207	1.001	0.816
60	1.370	1.255	1.052	0.868
70	1.408	1.297	1.096	0.913
80	1.441	1.333	1.135	0.953
100	1.498	1.395	1.202	1.022



4.2 ábra. A $q_p(z)$ torlónyomás értékei a terepszint feletti z magasság és az I, II, III és IV beépítési jelleg függvényében. I: nyílt terep, II: mezőgazdasági terület, III: alacsony beépítés, IV: intenzív beépítés.

A c alaki tényező értéke az épület magasságának és a szélirányban mért mélységének arányától (a H/d aránytól) függ. Értékeit a széltámadta és a szélárnyékos oldalon a 4.2 táblázatban találjuk.

Az épületek egészének (= a merevítőrendszernek) globális vizsgálata során a c alaki tényező két részből áll. A globális alaki tényező értékének meghatározásához a széltámadta oldalon jelentkező c^+ nyomási értéket és a szélárnyékos oldalon jelentkező c^- szívási értéket előjelektől függetlenül össze kell adni, vagyis

$$c = \left|c^+\right| + \left|c^-\right|$$

Az alaki tényező értéke a globális vizsgálathoz ezek szerint a $c = 1.0$ és $c = 1.5$ között változhat. A maximális érték $H/d = 5$ aránnyal rendelkező épület esetén $c = 1.5$.

4.2 táblázat. A c alaki tényező értékei a H/d arány függvényében.

H/d	széltámadta oldalon (c^+)	szélárnyékos oldalon (c^-)
5	+ 0.8	− 0.7
1	+ 0.8	− 0.5
≤ 0.25	+ 0.7	− 0.3

A szélnyomás alapértékének ismeretében a szélsőértéket (=> a tervezési értéket) a szélteher γ biztonsági tényezője segítségével kapjuk meg:

$$w = \gamma w_e = \gamma q_p(z) c \quad [\mathrm{kN/m^2}]$$

A biztonsági tényező értékét a mindenkori nemzeti (illetve európai) szabványelőírások rögzítik. Az Eurocode által előírt érték (2015-ben) például $\gamma = 1.5$.

Szokás – például a globális vizsgálat esetében – az épületre ható teljes szélerővel számolni:

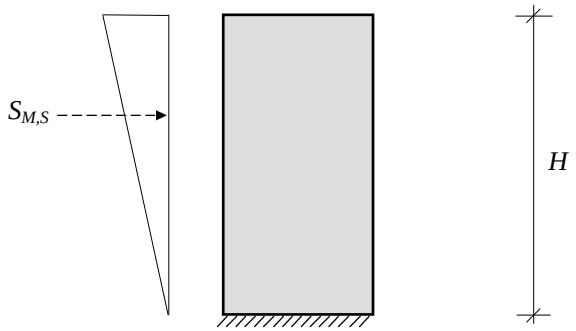
$$F_w = wA_{ref} \quad [\text{kN}]$$

A fenti képletben A_{ref} a széllel terhelt felület számításba veendő része, ami általában a teljes felület (4.1 ábra).

Ha az itt bemutatott egyszerűsített eljárás nem alkalmazható (mert nem teljesül a $d > H/2.5$ és $d > b/5$ feltételek egyike sem, vagy a H/d arány meghaladja az 5.0 értéket), vagy pontosabb eredményre van szükségünk, akkor rendelkezésre áll egy pontosabb – és bonyolultabb – módszer, amelynek részletes ismertetésével például „A méretezés alapjai” és az „Épületek komplex statikai vizsgálata” c. tantárgyak foglalkoznak.

4.1.2 Földrengés

Az Építési Törvény (1998 január 1) kötelezően előírja Magyarország területén az épületek földrengés elleni méretezését. A méretezés során figyelembe vehetjük például az Eurocode 8 előírásait. Az Eurocode 8 meglehetősen részletes és komplikált előírás és a pontos dinamikai vizsgálat végrehajtása elég bonyolult, ezért itt most – az Eurocode 8 előírásaival összhangban, Dulácska-Kollár alapján – egy egyszerűsített eljárást ismertetünk, amely bizonyos feltételek teljesülése esetén közvetlenül alkalmazható a tervezéshez, a feltételeket nem kielégítő esetekben pedig támpontokat adhat a hatékony szerkezeti rendszer kialakításához. Ez a módszer a helyettesítő statikai módszer (HSM).



4.3 ábra. Szeizmikus erő.

A helyettesítő statikai módszer a szélesség ötszörösénél nem magasabb, maximum fszt.+4 emeletes, szabályos épületekre alkalmazható, amelyeknél a tömegközéppont és a nyírásközéppont (csavarási középpont) közötti távolság nem nagyobb az épület vízszintes méretének 10 százalékánál. A dinamikus erőhatást ekkor helyettesíthetjük egy statikus $S_{M,S}$ vízszintes erővel (4.3 ábra), amelyre az egész épületet méretezzük, vagyis kielégítjük az

$$S_{M,S} \leq S_{H,S}$$

feltételt, ahol $S_{H,S}$ a határteher.

Ellentétben a szélerővel, az $S_{M,S}$ vízszintes szeizmikus erő bármely irányban ugyanazzal az értékkel működhet. Ha a szélteher nagyobb mint a földrengés-teher, akkor nem kell földrengésre méretezni. (A vízszintes erővel egyidejűleg fellépő szeizmikus függőleges erő számításához figyelembeveendő gyorsulás a vízszintes gyorsulás fele, amely felfelé és lefelé is működhet.)

A helyettesítő vízszintes erő értéke az

$$S_{M,S} = \beta Q k_g k_s k_t / q$$

összefüggésből határozható meg, ahol

- β dinamikus szorzó,
- Q épületteher (az épület súlya és a hasznos teher tartós részének összege biztonsági tényezők nélkül [kN]),
- k_g relatív tervezési gyorsulás,
- k_s épületfontossági tényező,
- k_t talajminőségi szorzó,
- q viselkedési tényező.

A Q épületterhet pontos súlyelemzés segítségével határozhatjuk meg. Igen gyors eredményt és – a legtöbb épület esetében – jó becslést kaphatunk, ha a födémszintre vonatkoztatott 7-12 kN/m^2 közötti átlagos födémteherrel számolunk.

A k_g relatív tervezési gyorsulás meghatározásánál két lehetőség áll rendelkezésre. A Magyarország Földrengési Információs Rendszere (FIR) településenként megadja a csúcsgyorsulást; ennek 70%-a a relatív tervezési gyorsulás. A másik lehetőség az, hogy vesszük az Eurocode 8 1. füzet NAD megyénkénti zónabeosztási értékét (4.3 táblázat). (Az 1. zónában nincs megye; Budapest a 3. zónában van.)

4.3 táblázat. A k_g relatív tervezési gyorsulás értékei.

Zónák	Megyék	k_g
1. zóna	–	0.04
2. zóna	Nógrád, Szabolcs-Szatmár-Bereg, Tolna, Békés, Borsod-Abaúj-Zemplén, Csongrád, Hajdú-Bihar, Jász-nagykun, Szolnok	0.06
3. zóna	Baranya, Bács-Kiskun, Fejér, Győr-Sopron, Heves, Somogy, Vas, Veszprém, Zala, Pest, és Budapest	0.08
4. zóna	Komárom	0.10

A k_s épületfontossági tényező értékeit a 4.4 táblázat tartalmazza.

4.4 táblázat. A k_s épületfontossági tényező értékei.

Fontossági kategória	k_s
1. Igen fontos létesítmény (pl. kórház, tűzoltóság)	1.4
2. Nagy forgalmú létesítmény (pl. pályaudvar, irodaház, színház)	1.2
3. Normál lakó- és középület	1.0
4. Alárendeltebb épületek (pl. mezőgazdasági és ideiglenes épületek)	0.8

A k_t talajminőségi szorzó értékeit a 4.5 táblázat adja meg.

4.5 táblázat. A k_t talajminőségi szorzó értékei.

Talaj	k_t
Szikla, tömör és száraz kavics	1.0
Száraz, szemcsés és kötött talajok	1.2
Víz alatti szemcsés és kötött talajok	1.4

A q viselkedési tényező az épületszerkezetek képlékeny viselkedését veszi figyelembe (4.6 táblázat).

4.6 táblázat. A q viselkedési tényező értékei.

Szerkezettípus	q	
	vízszintes irányban	függőleges irányban
Falazott épületek	1.5	1.5
Vasbeton épületek	2.0	
Faszerkezetek	1.5	
Hagyományos hengerelt acél szerkezetek	2.5	
Vékonyfalú acél szerkezetek	1.5	

A vízszintes erő meghatározására szolgáló képlet „lelke” a β dinamikus tényező. A β dinamikus tényező valójában az épület legkisebb sajátfrekvenciája, az első rezgésalak figyelembevételével meghatározott T_S periódusidő függvényében. A legkisebb saját-frekvencia pontos meghatározása gyakorlatilag lehetetlen. A rendelkezésre álló közelítő módszerek eredményei általában igen nagy – akár 50-100%-os – szórást mutatnak. Pontosabb számítás híján a dinamikus tényező a

$$\beta = \frac{1}{T_S} \leq 2.5$$

képletből számítható, ahol

$$T_S = \frac{n(1 \pm 0.5)}{25}$$

falazott épületeknél, és

$$T_S = \frac{n(1 \pm 0.5)}{8}$$

vasbeton vázas épületeknél a vízszintes irányú vizsgálathoz, ahol n a szintek száma.

A T_S periódusidő fenti képleteivel számolva gyakorlati esetekben, többszintes vasbeton vázas épületeknél általában az $1.5 \leq \beta \leq 2.5$, míg falazott épületeknél a $\beta = 2.5$

értékekhez jutunk. Ezek szerint a β = 2.5 érték mindig biztonságosan alkalmazható. Bizonyos esetekben meglepően jó értékeket kaphatunk az Eurocode 8 szabványba is bekerült igen egyszerű

$$\beta = \frac{46}{H}$$

tapasztalati képlet alkalmazásával, ahol H az épület magassága. Nyomatékosan felhívjuk azonban a figyelmet arra, hogy ez a képlet csak síkbeli rezgések fellépte esetén alkalmazható! Amennyiben az épület csavarási rezgéseket is végezhet, a képlet általában használhatatlan.

Befejezésül ismét hangsúlyozzuk, hogy a bemutatott módszer közelítő. Egy, a számtalan közelítő módszer közül. Olyan közelítő módszer, amely jól bemutatja a földrengésteher lényeges jellegzetességeit, de amelynek a „pontossága" nem ismert. Nem is lehet ismert, hiszen nincs két egyforma földrengés (két azonos tulajdonságokkal rendelkező épülettel) és nincsenek megbízható mérési adatok a földrengésnek kitett épületekre ható tényleges terhelésről. Vannak viszont mérési adatok épületek legkisebb sajátfrekvenciájáról. A Building Research Establishment dinamikai szakemberei számtalan esetben végeztek méréseket meglévő többszintes épületeken és a mért sajátfrekvenciákat összehasonlították különböző közelítő és „pontosnak" kikiáltott számítógépes eljárások által szolgáltatott eredményekkel. A vizsgálatok tanúsága szerint a tényleges (=mért) sajátfrekvenciák és a számított értékek gyakran jelentős mértékben eltértek egymástól. Az eltérések nagysága nemritkán az 50-100%-os tartományban volt.

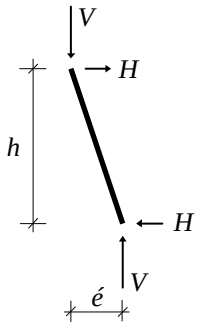
4.1.3 Építési pontatlanság

A függőleges teherviselő elemek pontatlan elhelyezése miatt ferdén álló oszlopok és falak vízszintes „póterőket" (H) adnak át a födémekre. (A jelenség főleg előregyártott rendszereknél eredményezhet számottevő vízszintes terhet.) Az alábbiakban vázolt eljárás alapján a keletkező vízszintes erő értékét egy egyszerű közelítő képletből határozhatjuk meg.

Egy fal esetében (4.4 ábra) ez az erő

$$H = V\frac{é}{h}$$

nagyságú, ahol V a fal függőleges terhe [kN/m], h az emeletmagasság [m] és $é$ az építési pontatlanság [m].



4.4 ábra. A pontatlan elhelyezés miatt keletkező vízszintes erő.

A ferde elhelyezésből származó teljes oldalerő függ az egy szinten a vizsgált irányra merőleges falak számától (n_h) és az egymás felett lévő falak számától, vagyis a szintek számától (n). A hibák halmozódása azonban n_h-val és n-nel nem egyenesen arányos, hiszen bizonyos mennyiségben ellentétes előjelű hibák is előfordulhatnak. Statisztikai valószínűség szerint ezt a $0.5(n_h n)^{0.5}$ tényező bevezetésével vehetjük közelítően figyelembe. Így a szintenkénti teljes vízszintes erőre az

$$F_m = V \frac{é}{h} \frac{1}{2} \sqrt{n_h n} \qquad \text{[kN/m]}$$

összefüggést kapjuk. A magasság mentén elosztott többletteher:

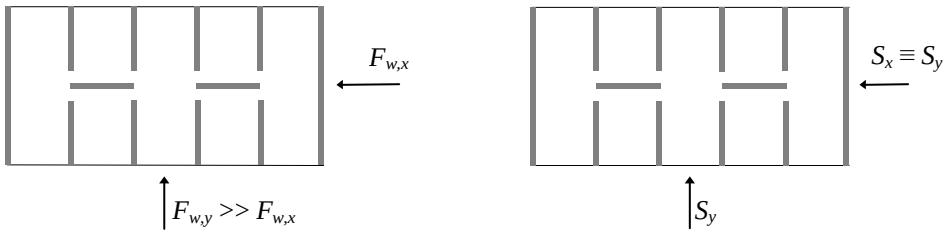
$$p_m = \frac{Vé}{2h^2} \sqrt{n_h n} \qquad \text{[kN/m}^2\text{]}$$

ahol V [kN/m] a vizsgált irányra merőleges falak átlagos szintenkénti mértékadó függőleges terhe. Ezt a terhet pontos súlyelemzés eredményeként kapjuk meg.

4.1.4 Összehasonlítás

Az előző pontokban tárgyalt három vízszintes teher jellegében jelentősen eltér egymástól. A leggyakrabban figyelembe vett szélteher nagysága legérzékenyebben az épület homlokzati felületének nagyságától függ; azzal egyenes arányban nő. Ez kedvező jelenség, hiszen a nagyobb homlokzati felületek mögött általában több merevítőfal, vagyis erősebb merevítőrendszer található. Ez a tény a gyakran alkalmazott harántfalas merevítőrendszereknél jól látható (4.5/a ábra).

Egészen más a helyzet a földrengés vízszintes terhénél. A szeizmikus erő nagyságát legérzékenyebben az befolyásolja, hogy az épület milyen földrengési zónában van, mekkora a tömege és mekkora a sajátfrekvenciája. Ebből az is következik, hogy a szeizmikus erő értéke az épület homlokzatainak nagyságától függetlenül minden irányban azonos (4.5/b ábra). Ezt a tényt földrengésveszélyes területen építendő szerkezetek merevítőrendszerének kialakításakor nem szabad figyelmen kívül hagyni.



a) F_w szélerők b) S szeizmikus erők

4.5 ábra. Harántfalas rendszer.

A különböző vízszintes terhek nagyságának összehasonlítása tanulságos eredményeket szolgáltat. Egy 4. földrengési zónában lévő épület esetében például a szeizmikus erő és a nagyobbik szélerő hányadosa akár 10 is lehet. A két erő a 2. zónában azonos nagyságrendű. Az építési pontatlanságból származó vízszintes erő a

szélerőnél általában jóval kisebb; *é* = 0.015 m feltételezett építési hiba esetében a szélerő 5-40 százaléka.

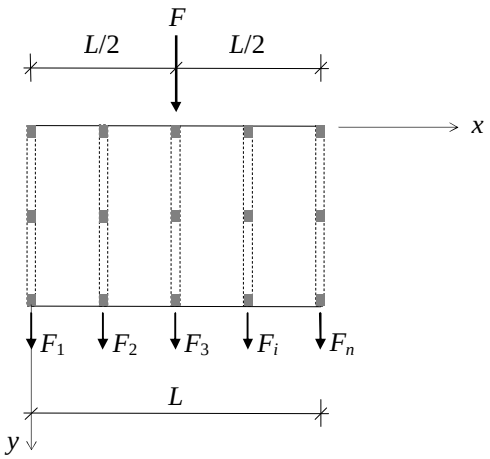
4.2 Merevítés keretekkel

Alacsony szintszámú épületeknél a vízszintes merevséget merev csomópontú keretszerkezetekkel is biztosíthatjuk. Ebben a pontban feltételezzük azt is, hogy a keretek azonos geometriai és merevségi jellemzőkkel rendelkeznek.

Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor a keretek elrendezése szimmetrikus.

4.2.1 Szimmetrikus elrendezés

Tekintsük a 4.6 ábrán alaprajzával jellemzett és az *y* irányban *n* darab kerettel merevített épületet. Az épületet támadó teljes vízszintes teher eredője *F*.



4.6 ábra. Szimmetrikus elrendezésű keretek.

A síkjukban végtelen merevnek feltételezett födémek az azonos kialakítású kereteket azonos vízszintes eltolódásra kényszerítik, és így az egyes keretekre jutó vízszintes teher is azonos:

$$F_i = \frac{F}{n} \tag{4.1}$$

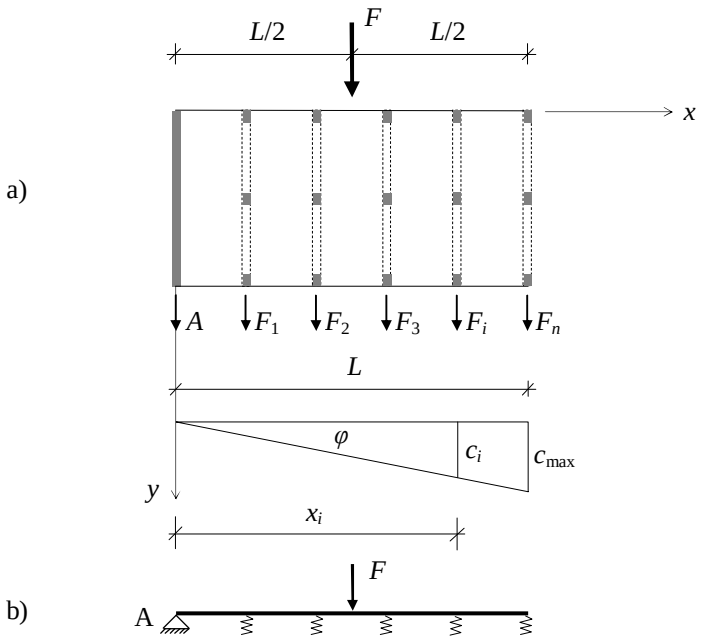
Mivel minden keret azonos alakváltozást végez, az épület maximális tetőponti eltolódása megegyezik a keretek maximális tetőponti eltolódásával. (Keretek maximális tetőponti eltolódásának közelítő meghatározásával a 4.2.3 pontban foglalkozunk.)

4.2.2 Aszimmetrikus elrendezés

Sűrűn előforduló gyakorlati esetet mutat a 4.7/a ábra. Az *L* szélességű harántvázas épületet azonos kialakítású keretek és az épület egyik végén elhelyezkedő fal merevíti. Feltételezzük, hogy a keretekhez képest a fal végtelen merev. Feladatunk az épület teljes vízszintes terhéből az egyes keretekre és a végfalra jutó teher meghatározása.

A merevítőrendszer statikai váza egy *L* hosszúságú, végtelen nagy hajlítási merevséggel rendelkező többtámaszú tartó, amelyet egy fix támasz (a fal) és több rugalmas

támasz (a keretek) támaszt meg (4.7/b ábra). Ez a többtámaszú tartó tulajdonképpen az épület merev födémeit modellezi. Mindegyik födém viselkedésére ugyanaz jellemző: merevtest-szerű, háromszög alakú diagrammal meghatározható eltolódás.



4.7 Keretekkel és végfallal merevített épület.

A födémek eltolódása úgy következik be, hogy a keretekhez képest végtelen merevnek feltételezett falnál az eltolódás zérus, a kereteknél pedig az eltolódás nagysága a faltól mért távolsággal arányos:

$$c_i = x_i \tan\varphi$$

Az *i*-edik keretre

$$F_i = kc_i \tag{4.2}$$

nagyságú, az eltolódással arányos erő jut, ahol *k* egy arányossági tényező, a keretek „merevsége”. A c_i eltolódás összefüggését a (4.2) képletbe behelyettesítve az *i*-edik keretre jutó erőre az

$$F_i = kx_i \tan\varphi \tag{4.3}$$

összefüggést kapjuk. A *k* arányossági tényezőn kívül itt még ismeretlen a födém φ elcsavarodása. Az elcsavarodás meghatározása céljából írjunk fel egy nyomatéki egyenletet az „A” jelű fix támaszra. A nyomatéki egyenlet azt fejezi ki, hogy az F_i belső erők nyomatéka megegyezik az *F* külső erő nyomatékával:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i x_i = F\frac{L}{2} \tag{4.4}$$

A (4.3) összefüggést ide behelyettesítve a

$$\sum_{i=1}^{n} k x_i^2 \tan\varphi = F\frac{L}{2}$$

egyenlethez jutunk, ahonnan az elcsavarodás szöge meghatározható:

$$\tan\varphi = \frac{FL}{2k\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Az elcsavarodás ismeretében az *i*-edik keretre jutó erőt a (4.3) összefüggés szolgáltatja:

$$F_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\frac{FL}{2} \tag{4.5}$$

Hiányzik még a falra jutó erő. Értékét egy *y* irányú vetületi egyenletből határozhatjuk meg:

$$A = F - \sum_{i=1}^{n} F_i \tag{4.6}$$

Egymástól azonos távolságban lévő keretek esetén a számítás egyszerűsíthető. Az első keretre jutó erő a (4.5) összefüggésből

$$F_1 = \frac{x_1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\frac{FL}{2} \tag{4.7}$$

és mivel a keretek távolsága a szélső faltól egyenes arányban nő, a többi falra jutó erő az első keretre jutó erő segítségével közvetlenül meghatározható:

$$F_i = iF_1 \tag{4.7a}$$

A (4.6) képlet így egyszerűsíthető:

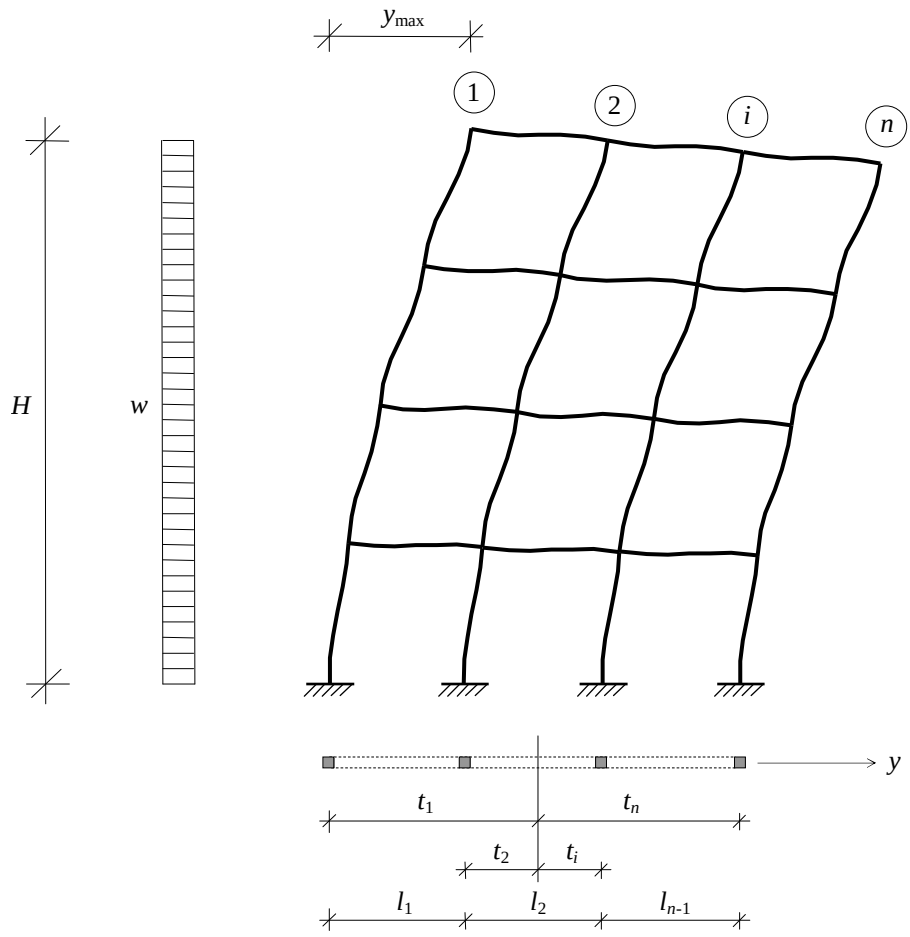
$$A = F - F_1(1 + 2 + ... + n) \tag{4.8}$$

Az épület maximális eltolódása a végfallal ellentétes másik oldalon jön létre (4.7 ábra). Az ott lévő keretre jutó erő ismeretében az épület maximális eltolódását a keret maximális tetőponti eltolódása adja meg.

4.2.3 Maximális tetőponti eltolódás

Kilendülő keretek esetében hagyományos módszerekkel már az igénybevételek meghatározása is meglehetősen hosszadalmas számításhoz vezet – amint ezt már korábbi tanulmányaink során tapasztalhattuk – és ez a helyzet az alakváltozások kiszámításánál is. Ha viszont figyelembe vesszük azt a tényt, hogy a keret vízszintes kilendülése során hajlítási és nyírási alakváltozást végez, akkor – a biztonság javára

való közelítéssel – egy igen egyszerű felső korlátot adhatunk meg a maximális tetőponti eltolódás értékére.



4.8 ábra. Keret maximális tetőponti eltolódása.

A maximális tetőponti eltolódás közelítő értéke az

$$y_{\max} = y(H) = \frac{wH^4}{8E(I_l + I_g)} + \frac{wH^2}{2K} \tag{4.8a}$$

összefüggés segítségével számítható ki, ahol w a szélteher intenzitása, I_l, I_g és K a keret lokális tehetetlenségi nyomatéka, globális tehetetlenségi nyomatéka és nyírási merevsége. Az I_l lokális tehetetlenségi nyomatékot úgy számítjuk ki, hogy egyszerűen összegezzük a keretoszlopok $I_{c,i}$ tehetetlenségi nyomatékait:

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} I_{c,i} = I_{c,1} + I_{c,2} + ... + I_{c,n}$$

ahol n a H magasságú keretoszlopok száma.

Az I_g globális tehetetlenségi nyomatékot az

$$I_g = \sum_{i=1}^{n} A_{c,i} t_i^2 = A_{c,1} t_1^2 + A_{c,2} t_2^2 + ... + A_{c,n} t_n^2$$

összefüggés segítségével határozzuk meg, ahol az $A_{c,i} t_i^2$ tagok a tehetetlenségi nyomatékok számításánál szokásos Steiner-tagok, $A_{c,i}$ az *i*-edik keretoszlop keresztmetszeti területe és t_i az *i*-edik oszlopkeresztmetszet távolsága az oszlopkeresztmetszetek közös súlypontjától (4.8 ábra).

A keret *K* nyírási merevsége függ a keretgerendáktól és a keretoszlopoktól és a

$$K = K_b \frac{K_c}{K_b + K_c}$$

képletből lehet kiszámítani. A keretgerendáktól függő részt a

$$K_b = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{6EI_{b,i}}{l_i h}$$

képletből számíthatjuk ki, a keretoszlopoktól függő részt pedig a

$$K_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{12EI_{c,i}}{h^2}$$

képlet adja meg, ahol

$I_{b,i}$ az *i*-edik gerenda tehetetlenségi nyomatéka,
l_i az *i*-edik keretállás fesztávja,
h az emeletmagasság.

Az „Épületek komplex statikai vizsgálata” c. tárgy részletesebben foglalkozik keretek maximális eltolódásának (pontosabb) meghatározásával.

4.2.4 Maximális oszlop- és gerendanyomatékok

Eddigi ismereteink segítségével már egyszintes kilendülő keretek esetében is elég hosszadalmas számítással tudjuk az igénybevételeket meghatározni, de többszintes szerkezetek esetében a feladat reménytelenül hosszadalmasnak látszik. Sokkal egyszerűbben – és eredményesen – alkalmazható viszont az alábbiakban ismertetendő módszer derékszögű hálózatú, legalább négyszintes keretszerkezetek esetén. Az eljárás akkor alkalmazható, ha az összes emelet azonos magasságú és az oszlopok az alsó befogástól felfelé azonos keresztmetszetűek. Az egymás feletti gerendák keresztmetszete azonos kell hogy legyen, de az egy szinten lévő gerendák keresztmetszete és hossza eltérő lehet. A kereteket egyenletesen megoszló *w* intenzitású vízszintes teherre vizsgáljuk (4.9 ábra).

A módszer nagy előnye az, hogy a keret legnagyobb oszlop- és gerendanyomatékai zárt képletekből határozhatók meg, anélkül hogy a többi nyomatékot ki kellene számolni.

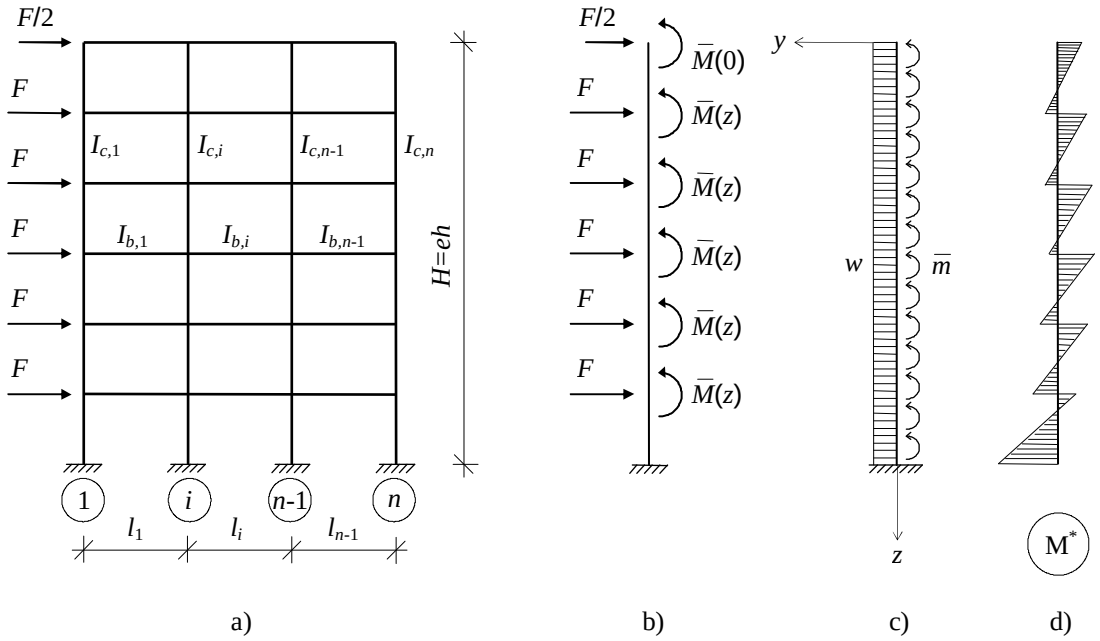
Az eljárást Csonka Pál arányos keretekre fejlesztette ki (amelyek oszlopainak és gerendáinak merevsége meghatározott arányban áll egymással), de a tapasztalatok

szerint a módszer jó közelítést ad a gyakorlatban előforduló, szokásos keresztmetszetekkel rendelkező keretek esetében.

A vázolt tulajdonságokkal rendelkező többszintes keretek oszlopai vízszintes terhelés hatására azonos alakban görbülnek meg és így a keretet helyettesíthetjük egyetlen olyan alul befogott konzollal amelynek tehetetlenségi nyomatéka egyenlő az egyes oszlopok tehetetlenségi nyomatékainak összegével. Ez a lokális tehetetlenségi nyomaték:

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} I_{c,i} = I_{c,1} + I_{c,2} + ... + I_{c,n}$$

ahol $I_{c,i}$ az i-edik oszlop tehetetlenségi nyomatéka és n a H magasságú keretoszlopok száma.



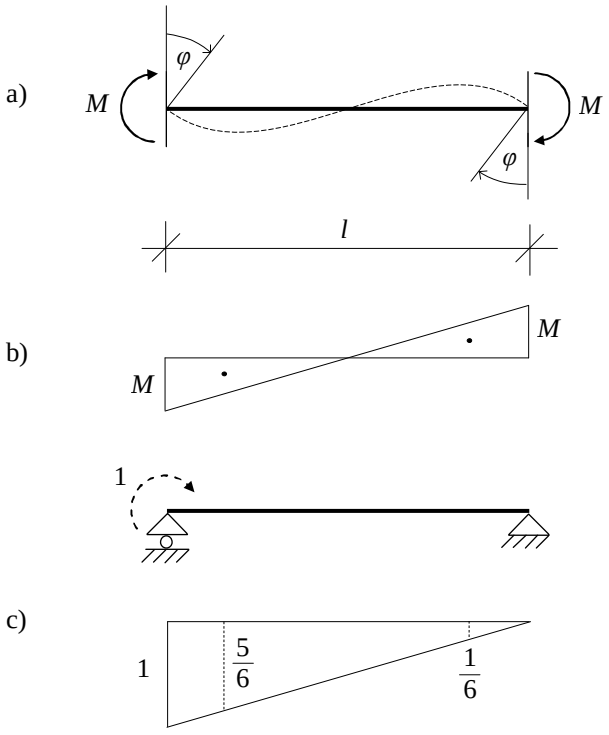
4.9 ábra. Vízszintes terhelésű keret. a) keret, b) helyettesítő tartó szintenkénti erőhatásokkal, c) folytonos modell, d) a helyettesítő tartó M^* nyomatékábrája.

Az ily módon keletkező tartó a helyettesítő tartó, amelyre a szintenkénti koncentrált erők mellett a gerendák meggörbülése következtében rugalmas megtámasztó nyomatékok is hatnak [$\bar{M}(z)$ a 4.9/b ábrán]. Ezek a nyomatékok a helyettesítő tartó alakváltozását gátolják és nagyságukat a $K_{b,i}$ gerendavég-merevség bevezetésével az alábbiak szerint határozzuk meg. A $K_{b,i}$ gerendavég-merevség az a nyomaték, ami a két oszlop közötti keretgerenda mindkét végének egységnyi aszimmetrikus elfordításához szükséges (4.10 ábra). Nagyságát munkatétellel számítjuk ki.
A szögelfordulás értéke:

$$\varphi = \frac{1}{EI_{b,i}} M \frac{l}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{Ml}{6EI_{b,i}}$$

ahol E a rugalmassági tényező és $I_{b,i}$ az i-edik oszlopot követő gerenda tehetetlenségi nyomatéka. Innen:

$$M = \frac{6EI_{b,i}}{l}\varphi$$



4.10 ábra. A $K_{b,i}$ gerendavég-merevség értelmezése.

Egységnyi elfordulás esetén ez a gerendavég-merevség:

$$\overline{K}_{b,i} = \frac{6EI_{b,i}}{l}$$

Ezeket a merevségeket egy szintre összegezve (és figyelembe véve, hogy eggyel kevesebb gerenda van mint oszlop és minden gerendának két vége van):

$$\overline{K}_b = 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{6EI_{b,i}}{l_i}$$

A helyettesítő tartóra a tartó tengelyvonalának elfordulási szögével arányos megtámasztó nyomaték hat (4.9/b ábra):

$$\overline{M}(z) = \overline{K}_b y'(z)$$

Ha a vizsgált szerkezet „megfelelő magasságú”, akkor a helyettesítő tartó koncentrált terhei jó közelítéssel megoszló terhekkel helyettesíthetők és előállítható a keret ún. kontinuum modellje. (A tapasztalatok szerint legalább négyszintes keretek esetén ez a kontinuum modell a gyakorlati számításoknál elfogadható pontosságú eredményekhez vezet.) Ennek az a nagy előnye, hogy a kontinuum modell (4.9/c ábra) viszonylag egyszerű számítást tesz lehetővé. A vízszintes koncentrált erőket a

$$w = \frac{F}{h}$$

összefüggés szerint megoszló teherré alakítjuk át és a szintén szintenként jelentkező megtámasztó nyomatékokat pedig az

$$\overline{m}(z) = \frac{\overline{M}(z)}{h} = K_b y'(z)$$

egyenletesen megoszló rugalmas megtámasztással helyettesítjük (4.9/c ábra), ahol

$$K_b = \frac{\overline{K}_b}{h} = 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{6EI_{b,i}}{l_i h}$$

a keretgerendák emeletmagasság mentén elosztott merevsége. Ez a merevség a keret nyírási merevségének gerendáktól függő része.

A helyettesítő tartót egy olyan derékszögű koordinátarendszerben vizsgáljuk, amelynek az origója a befogástól H távolságban van, az y tengely vízszintes és a z tengely függőlegesen lefelé mutat (4.9/c ábra). A tartó – most már egyenletesen megoszló – terhei figyelembevételével a tartó z koordinátával jellemzett helyén az

$$M(z) = \frac{wz^2}{2} - \int_0^z \overline{m}(z)dz$$

hajlítónyomaték keletkezik. Ha a fenti egyenlet mindkét oldalát z szerint deriváljuk, az

$$M'(z) = wz - \overline{m}(z)$$

összefüggést kapjuk, ami a rugalmas megtámasztó nyomatékok ismeretében az

$$M'(z) = wz - K_b y'(z)$$

alakot ölti. Egyszeri deriválás után és a korábbi tanulmányainkból már ismert

$$y'' = -\frac{M}{EI}$$

összefüggés felhasználásával innen az

$$M''(z) = w + K_b \frac{M(z)}{EI}$$

egyenlethez jutunk, ami rendezés után az

$$M''(z) - \kappa^2 M(z) = w$$

alakban írható, ahol bevezettük a

$$\kappa^2 = \frac{K_b}{EI}$$

jelölést.

Fenti másodrendű, inhomogén, állandó együtthatójú differenciálegyenlethez az

$$M(0) = 0$$
$$y'(H) = 0$$

peremfeltételek tartoznak.

A megoldást az

$$M(z) = A\sinh \kappa z + B\cosh \kappa z - \frac{w}{\kappa^2}$$

alakban keressük.

Az első peremfeltételből azt kapjuk, hogy

$$B = \frac{w}{\kappa^2}$$

A megoldás így az

$$M(z) = A\sinh \kappa z + \frac{w}{\kappa^2}\cosh \kappa z - \frac{w}{\kappa^2}$$

alakot ölti.

A második peremfeltétel szerint (felhasználva a fenti összefüggéseket):

$$y'(H) = 0 \quad \rightarrow \quad \overline{m}(H) = wH - M'(H) = k_b y'(H) = 0 \quad \rightarrow \quad M'(H) = wH$$

és mivel

$$M'(z) = A\kappa \cosh \kappa z + \frac{w}{\kappa}\sinh \kappa z$$

a második peremfeltétel az

$$M'(H) = A\kappa\cosh\kappa H + \frac{w}{\kappa}\sinh\kappa H = wH$$

alakot ölti, ahonnan

$$A = \frac{wH - \frac{w}{\kappa}\sinh\kappa H}{\kappa\cosh\kappa H} = \frac{wH\kappa - w\sinh\kappa H}{\kappa^2\cosh\kappa H}$$

A megoldás így:

$$M(z) = \frac{wH\kappa - w\sinh\kappa H}{\kappa^2\cosh\kappa H}\sinh\kappa z + \frac{w}{\kappa^2}\cosh\kappa z - \frac{w}{\kappa^2} =$$

$$= \frac{w}{\kappa^2}\left(\frac{H\kappa - \sinh\kappa H}{\cosh\kappa H}\sinh\kappa z + \cosh\kappa z - 1\right)$$

ami rendezés után az

$$M(z) = \frac{w}{\kappa^2}\left(\frac{H\kappa\sinh\kappa z + \cosh\kappa(H-z)}{\cosh\kappa H} - 1\right)$$

alakban írható.

Az

$$M'(z) = wz - \overline{m}(z)$$

összefüggés segítségével most már kifejezhető az egyenletesen megoszlóvá tett rugalmas megtámasztó nyomaték (4.9/c ábra) értéke:

$$\overline{m}(z) = wz - \frac{w}{\kappa}\left(\frac{\kappa H - \sinh\kappa H}{\cosh\kappa H}\cosh\kappa z + \sinh\kappa z\right) = wz - \frac{w}{\kappa}\frac{\kappa H\cosh\kappa z - \sinh\kappa(H-z)}{\cosh\kappa H}$$

Mivel a szerkezetünk tényleges terhe nem egyenletesen megoszló, hanem szintenként koncentrált hatásokként jelentkezik (4.9/b ábra), vissza kell térnünk a koncentrált hatások figyelembevételére. A legfelső szint koncentrált megtámasztó nyomatékának értékét az $\overline{m}(z)$ nyomaték fél-szintre vonatkozó integrálásából kapjuk meg:

$$\overline{M}(0) = \int_0^{h/2}\overline{m}(z)dz = \int_0^{h/2} wzdz - \frac{w}{\kappa\cosh\kappa H}\int_0^{h/2}\left(\kappa H\cosh\kappa z - \sinh\kappa(H-z)\right)dz =$$

$$= \frac{wh^2}{8} - \frac{w}{\kappa^2}\left(\frac{H\kappa\sinh\kappa\frac{h}{2} + \cosh\kappa(H-\frac{h}{2})}{\cosh\kappa H} - 1\right)$$

A közbenső szintek koncentrált megtámasztó nyomatékait az $\overline{m}(z)$ nyomaték egy teljes szintre vonatkozó integrálásából kapjuk meg:

$$\overline{M}(z)=\int_{z-\frac{h}{2}}^{z+\frac{h}{2}}\overline{m}(z)dz=w\int_{z-\frac{h}{2}}^{z+\frac{h}{2}}zdz-\frac{w(\kappa H-\sinh\kappa H)}{\kappa\cosh\kappa H}\int_{z-\frac{h}{2}}^{z+\frac{h}{2}}\cosh\kappa z dz-\frac{w}{\kappa}\int_{z-\frac{h}{2}}^{z+\frac{h}{2}}\sinh\kappa z dz=$$

$$=wzh-\frac{w(\kappa H-\sinh\kappa H)}{\kappa^2\cosh\kappa H}2\cosh\kappa z\sinh\kappa\frac{h}{2}-\frac{w}{\kappa^2}2\sinh\kappa z\sinh\kappa\frac{h}{2}=$$

$$=wzh-\frac{2w}{\kappa^2}\sinh\kappa\frac{h}{2}\left(\frac{\kappa H-\sinh\kappa H}{\cosh\kappa H}\cosh\kappa z+\sinh\kappa z\right)$$

A koncentrált megtámasztó nyomatékok (és az adott külső terhelés) ismeretében most már a konzoltartóknál szokásos módon meghatározhatjuk a helyettesítő tartó M^* nyomatékait (4.9/d ábra):

$$M^*(z)=\frac{wz^2}{2}-\left(\overline{M}(0)+\sum_0^z\overline{M}(z)\right)$$

A tervező gyakran csak a legnagyobb nyomatékok értékére kíváncsi, például ellenőrzéskor, vagy az előtervezés során, amikor arról kell dönteni, hogy a tervezett keresztmetszeti méret egyáltalán szóba jöhet-e vagy nem vezet-e aránytalanul gazdaságtalan szerkezethez. A maximális oszlopnyomaték a befogásnál keletkezik:

$$M^*_{\max}=M^*(H)=\frac{wH^2}{2}-\left(\overline{M}(0)+\sum_{e-1}^{1}\overline{M}(z)\right)$$

ahol *e* a szintek száma – tehát a zárójelek közötti második tag összegzése a felülről második (*e*-1) szinttől az első emeleti szintig terjed.

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha az ismert külső teher nyomatékához „hozzáintegráljuk” a rugalmas megtámasztó nyomatékokat:

$$M^*_{\max}=\frac{wH^2}{2}-\int_0^{H-\frac{h}{2}}\overline{m}(z)dz=\frac{wH^2}{2}-\int_0^{H-\frac{h}{2}}\left(wz-\frac{w}{\kappa}\frac{\kappa H-\sinh\kappa H}{\cosh\kappa H}\cosh\kappa z+\sinh\kappa z\right)dy=$$

$$=w\left(\frac{Hh}{2}-\frac{h^2}{8}\right)+\frac{w}{\kappa^2}\left[\frac{\kappa H-\sinh\kappa H}{\cosh\kappa H}\sinh\kappa(H-\frac{h}{2})+\cosh\kappa(H-\frac{h}{2})-1\right]$$

Fenti képletek segítségével egyszerűen meghatározhatjuk a legnagyobb oszlopnyomatékot, de további egyszerűsítés is lehetséges. A gyakorlati esetekben ugyanis a κH érték rendszerint 5-nél nagyobb szám és ilyenkor a sinh és cosh függvények jó közelítéssel egyszerűsíthetők a

$$\sinh \kappa H = \cosh \kappa H = \frac{1}{2} e^{\kappa H}$$

és

$$\sinh \kappa \left(H - \frac{h}{2} \right) = \cosh \kappa \left(H - \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{\kappa \left(H - \frac{h}{2} \right)}$$

összefüggések szerint. Ezen összefüggések figyelembevételével a legnagyobb oszlopnyomatékra vonatkozó képlet a következő egyszerűbb alakot ölti:

$$M^*_{\max} = w \left(\frac{Hh}{2} - \frac{h^2}{8} \right) + \frac{w}{\kappa^2} \left(\frac{\kappa H}{e^{\kappa h/2}} - 1 \right)$$

A helyettesítő tartó M^* nyomatékainak ismeretében az *i*-edik oszlopra jutó nyomatékot úgy kapjuk meg, hogy a teljes nyomatékból vesszük az illető oszlop tehetetlenségi nyomatékának arányában rá jutó részt:

$$M_{c,i} = \frac{I_{c,i}}{I_c} M^*$$

ahol $I_{c,i}$ az *i*-edik oszlop tehetetlenségi nyomatéka és I_c az oszlopok összegzett tehetetlenségi nyomatéka.

A keretgerendákra ható maximális nyomatékok meghatározása némileg bonyolultabb feladat, mert – ellentétben az oszlopok maximumának meghatározásával, ahol azonnal tudjuk, hogy a maximum a befogásnál keletkezik – először meg kell keresni a maximum helyét. A maximum helyét közelítően úgy határozzuk meg, hogy az

$$\overline{M}(z) = wzh - \frac{2w}{\kappa^2} \sinh \frac{\kappa h}{2} \left(\frac{\kappa H - \sinh \kappa H}{\cosh \kappa H} \cosh \kappa z + \sinh \kappa z \right)$$

függvényt az emeletek között is folytonosnak tekintjük és a szélsőérték számítás szabályai szerint járunk el.

Az első lépés a maximum helyének a meghatározása. A maximum ott van, ahol az első derivált értéke zérus:

$$\left[\overline{M}(z) \right]' = wh - \frac{2w}{\kappa} \sinh \frac{\kappa h}{2} \left(\frac{\kappa H - \sinh \kappa H}{\cosh \kappa H} \sinh \kappa z + \cosh \kappa z \right) = 0$$

Innen:

$$wh \left[1 - \frac{2}{\kappa h} \sinh \frac{\kappa h}{2} \left(\frac{\kappa H - \sinh \kappa H}{\cosh \kappa H} \sinh \kappa z_{\max} + \cosh \kappa z_{\max} \right) \right] = 0$$

ahol a maximum helyét z_{max}-al jelöltük.

A fenti kéttagú szorzat második, szögletes zárójelek között lévő része kell hogy zérussal legyen egyenlő. Innen:

$$\frac{2}{\kappa h}\sinh\frac{\kappa h}{2}\left(\frac{\kappa H-\sinh\kappa H}{\cosh\kappa H}\sinh\kappa z_{\max}+\cosh\kappa z_{\max}\right)=1$$

Mivel a gyakorlati esetekben általában teljesül a $\kappa H > 5$ egyenlőtlenség, felhasználhatók a

$$\sinh\kappa H=\cosh\kappa H=\frac{1}{2}e^{\kappa H}\qquad\text{és}\qquad\sinh\kappa z_{\max}=\cosh\kappa z_{\max}=\frac{1}{2}e^{\kappa z_{\max}}$$

összefüggések, amelyek segítségével:

$$\frac{2}{\kappa h}\sinh\frac{\kappa h}{2}\frac{1}{2}e^{\kappa z_{\max}}\left(\frac{\kappa H-\frac{1}{2}e^{\kappa H}}{\frac{1}{2}e^{\kappa H}}+1\right)=1$$

Innen, figyelembe véve hogy

$$\frac{\sinh\frac{\kappa h}{2}}{\frac{\kappa h}{2}}\approx 1$$

átrendezés és egyszerűsítés után az

$$\frac{e^{\kappa z_{\max}}}{e^{\kappa H}}=(\kappa H)^{-1}$$

egyenletet kapjuk. Ezt az egyenletet átírva a

$$\kappa(z_{\max}-H)=-\ln\kappa H$$

egyszerűbb alakra, megkapjuk a maximum helyét:

$$z_{\max}=H-\frac{1}{\kappa}\ln\kappa H$$

A maximum helyének ismeretében a maximum értékét az $\overline{M}$ fenti összefüggésébe visszahelyettesítve kapjuk:

$$\overline{M}_{\max}=whz_{\max}-\frac{wh}{\kappa}\frac{2}{\kappa h}\sinh\frac{\kappa h}{2}\left(\frac{\kappa H-\sinh\kappa H}{\cosh\kappa H}\cosh\kappa z_{\max}+\sinh\kappa z_{\max}\right)$$

Mivel ebben az összefüggésben a fentiek szerint

$$\frac{2}{\kappa h}\sinh\frac{\kappa h}{2}\left(\frac{\kappa H-\sinh\kappa H}{\cosh\kappa H}\cosh\kappa z_{\max}+\sinh\kappa z_{\max}\right)=1$$

a nyomaték maximumára az

$$\overline{M}_{\max}=wh\left(z_{\max}-\frac{1}{\kappa}\right)$$

vagy behelyettesítve a z_{max} fenti értékét az

$$\overline{M}_{\max}=wh\left[H-\frac{1}{\kappa}(1+\ln\kappa H)\right]$$

egyszerű összefüggés adható meg.

Az $\overline{M}$ nyomatékok ismeretében a gerendákban keletkező nyomatékok is igen egyszerűen meghatározhatók. Nem kell mást tenni, mint szétosztani az $\overline{M}$ nyomatékot a gerendavégek arányában. Az *i*-edik gerenda végein keletkező nyomaték így:

$$M_{b,i}=\frac{K_{b,i}}{K_b}\overline{M}$$

ahol $K_{b,i}$ az *i*-edik gerendavég-merevség és K_b a gerendavégek összegzett merevsége.

Nagyméretű keretszerkezetek tervezését természetesen nem az itt megadott képletekkel végezzük el. Rendelkezésre állnak olyan számítógépes programok, amelyek minden igénybevételt és alakváltozást gombnyomásra kiszámítanak. Mégis igen fontos a fenti – és hasonló – képletek ismerete (és használata), mert a számítógépes statikai vizsgálat során – részben az igen nagy számú adat miatt – nem elhanyagolható a hibalehetőség és célszerű a fontosabb eredményeket minden esetben egyszerű, kézi számítással is ellenőrizni.

4.3 Harántvázas épületek merevítése egyirányú falrendszerrel

Az épület szintszámának növekedésével keretekkel nem, vagy csak nagy elmozdulások árán és esetleg gazdaságtalanul lehet csak a szükséges vízszintes merevséget biztosítani. Széllel terhelt harántvázas épületeknél ekkor egyes keretállások helyén merevítőfalak beépítésére kerül sor. A merevítőfalak rendszerint jóval merevebbek a kereteknél és így a falak mellett a keretek hatását a biztonság javára történő közelítéssel el is lehet hanyagolni. Így lehetőség nyílik az egyes falakra jutó erőknek és az épület elmozdulásainak viszonylag egyszerű számítására. Ebben a pontban ezt mutatjuk be. Az egyirányú falak vizsgálatánál a falak másik irányban meglévő tehetetlenségi nyomatékát, valamint a falak csavarási tehetetlenségi nyomatékát a biztonság javára történő közelítéssel elhanyagoljuk.

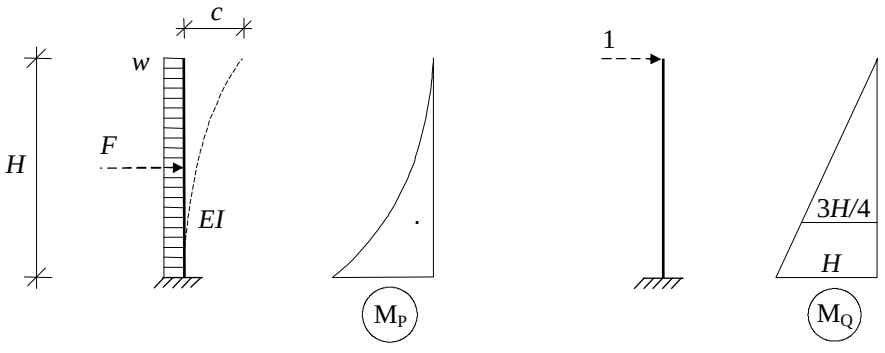
4.3.1 Alapfogalmak

Az egyirányú és kétirányú falrendszer tárgyalásához szükség lesz az eltolódási merevség és a nyírásközéppont fogalmára.

4.3.1.1 Eltolódási merevség

A korábbi tanulmányaink során bevezetett eltolódási merevséggel ellentétben itt az eltolódási merevség az a *w* egyenletesen megoszló intenzitással működő *F* eredőjű teher, amely egy alul mereven befogott, felül szabad végű, *H* hosszúságú és *EI* merevséggel rendelkező konzolon működve a szabad vég egységnyi eltolódását okozza. Az *EI* hajlítási merevséggel rendelkező konzoltartó *c* maximális tetőponti eltolódását legegyszerűbben munkatétellel határozhatjuk meg (4.11 ábra):

$$c = \frac{1}{EI}\int M_p M_Q \, dz = \frac{1}{EI}\frac{wH^2}{2}\frac{H}{3}\frac{3H}{4} = \frac{wH^4}{8EI} = \frac{FH^3}{8EI}$$



4.11 ábra. Konzoltartó hajlítási alakváltozása.

Ha ez az eltolódás egységnyi, akkor az eltolódási merevség értéke

$$k = \frac{8EI}{H^3} \tag{4.9}$$

Az eltolódási merevség segítségével a konzol maximális eltolódását a

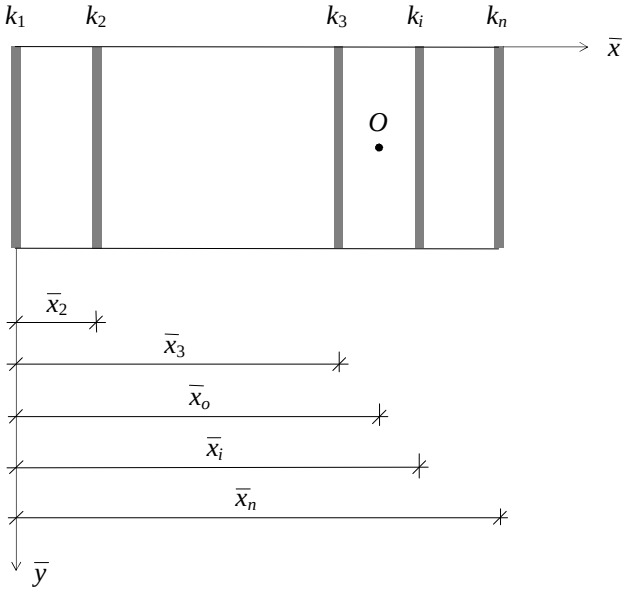
$$c = \frac{1}{k}F \tag{4.10}$$

összefüggés szolgáltatja.

4.3.1.2 Nyírásközéppont

A födémekre vonatkozó feltételezés – merevek a saját síkjukban és hajlékonyak a síkjukra merőlegesen – első része alapján az épületet egységes egésznek tekinthetjük, olyan értelemben, hogy a vízszintes terhek szétosztása során a födémek a merevítőrendszer elemeit együttdolgoztatják és az épület egységes egészként végez alakváltozást, vagyis eltolódik (és általában el is csavarodik). Az alakváltozás során az épület merevítőrendszerére jellemző pont a nyírásközéppont. A nyírásközéppont az a pont, amelyen áthaladó külső erő hatására az épület csak eltolódik, de nem csavarodik el.

A nyírásközéppont az eltolódási merevségek súlypontja, ezért merevségi középpontnak is nevezik. Helyének meghatározása a súlypontszámítás szabályainak felhasználásával történik. Egy tetszőleges tengelytől mért távolságát úgy kapjuk meg, hogy a merevségeknek a tengelyre vonatkozó „statikai nyomatékát” elosztjuk a merevségek összegével. (A gyakorlati számítások során célszerűen olyan koordinátarendszert veszünk föl, melynek $\bar{x}$ és $\bar{y}$ tengelyei közrefogják az épület alaprajzát, mert a távolságok – 4.12 ábrán vázolt esetben az x távolságok – előjelesek.)



4.12 Az egyirányú falrendszer O nyírásközéppontja.

A 4.12 ábrán vázolt egyirányú falrendszer esetében az O nyírásközéppont helyzetét

az $\bar{x} - \bar{y}$ koordinátarendszerben az

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i} \tag{4.11}$$

összefüggés adja meg, ahol $\bar{x}_i$ az *i*-edik fal távolsága a koordinátarendszer kezdőpontjától, k_i az *i*-edik merevítőfal eltolódási merevsége és *n* a falak száma.

Amikor az összes fal anyaga és magassága azonos, a képlet egyszerűsödik:

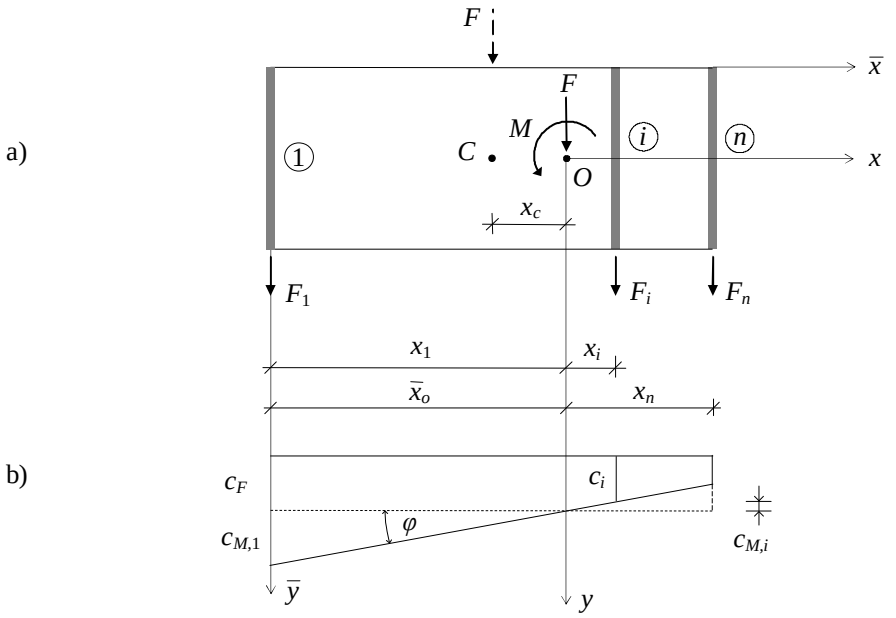
$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_i \bar{x}_i}{I} \tag{4.12}$$

ahol I_i az *i*-edik merevítőfal tehetetlenségi nyomatéka a saját súlyponti *x* tengelyére és $I = \Sigma I_i$ a tehetetlenségi nyomatékok összege.

4.3.2 A falakra jutó erők meghatározása

Tekintsük a 4.13/a ábrán alaprajzával megadott épületet. A vízszintes teher *F* eredője az alaprajz *C* geometriai középpontján megy át. Feladatunk az *F* erőből az egyes falakra jutó F_i erők meghatározása.

A nyírásközéppont helyét a geometriai és merevségi adatok birtokában a (4.11) összefüggés szolgáltatja. A falakra jutó erők meghatározásához vegyünk fel egy olyan *x-y* koordinátarendszert, amelynek az *O* nyírásközéppont az origója. Ebben a koordinátarendszerben az *i*-edik fal nyírásközépponttól mért távolságát x_i jelöli.



4.13 ábra. Egyirányú falrendszer. a) Alaprajz, b) eltolódási ábra.

Helyettesítsük a *C* ponton átmenő *F* erőt az *O* nyírásközéppontban működő *F* erővel és az $M = Fx_c$ nyomatékkal. A nyírásközéppontban működő erő hatására az épület nem csavarodik el, csak eltolódik. A minden falra jellemző eltolódást jelöljük c_F-el. Az *M* nyomaték az épület nyírásközéppont körüli elcsavarodását eredményezi, úgy, hogy az egyes falak $c_{M,i}$ eltolódást szenvednek. Az *i*-edik fal eltolódása (4.13/b ábra) ezek szerint

$$c_i = c_F - c_{M,i} \tag{4.13}$$

A (4.10) és (4.13) egyenletek felhasználásával az *i*-edik falra jutó erőt az

$$F_i = k_i(c_F - c_{M,i}) \tag{4.14}$$

összefüggés adja meg.

A 4.13/b ábrán vázolt eltolódási ábra alapján

$$c_{M,i} = x_i \tan\varphi \tag{4.15}$$

ahol φ az épület elcsavarodása. Az elcsavarodáshoz tartozó $c_{M,i}$ eltolódás (4.14) egyenletbe történő behelyettesítése után az *i*-edik falra jutó erő képlete az

$$F_i = k_i\,(c_F - x_i \tan\varphi) \tag{4.16}$$

alakot ölti. Ez az egyenlet három ismeretlent (F_i, c_F és φ) tartalmaz. A megoldáshoz még szükséges két egyenletet egyensúlyi megfontolások alapján írjuk fel.

Az *y* tengelyre vonatkozó

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

vetületi egyensúlyi egyenlet a (4.16) összefüggés behelyettesítésével a következő alakot ölti:

$$F = \sum_{i=1}^{n} k_i (c_F - x_i \tan\varphi) \tag{4.17}$$

Az állandókat kiemelve innen az

$$F = c_F \sum_{i=1}^{n} k_i - \tan\varphi \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \tag{4.18}$$

összefüggést kapjuk. Az egyenlet jobb oldalának második tagja zérus, hiszen a $\Sigma k_i x_i$ kifejezés a merevségek „statikai nyomatéka” a nyírásközéppontra (vagyis a súlypontjukra). Az *F* erő okozta eltolódásra így a (4.18) összefüggésből a

$$c_F = \frac{F}{\sum_{i=1}^{n} k_i} \tag{4.19}$$

képletet kapjuk.

A nyírásközéppontra vonatkozó

$$M = Fx_c = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i$$

nyomatéki egyenlet a (4.16) összefüggés behelyettesítésével az

$$M = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i (c_F - x_i \tan\varphi) \tag{4.20}$$

alakban írható. Az állandókat kiemelve innen az

$$M = c_F \sum_{i=1}^{n} k_i x_i - \tan\varphi \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^2 \tag{4.21}$$

egyenletet kapjuk. Az egyenlet jobboldalának első tagja zérus, mert a $\Sigma k_i x_i$ kifejezés („statikai nyomaték” a nyírásközéppontra) zérus. Az épület elcsavarodását így a (4.21) egyenletből a

$$\tan\varphi = \frac{-M}{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i^2} \tag{4.22}$$

összefüggés szolgáltatja.

Végül a c_F és tanφ összefüggéseit a (4.16) egyenletbe behelyettesítve megkapjuk az egyes falakra jutó erőket:

$$F_i = \frac{k_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i} F + \frac{k_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i^2} M \tag{4.23}$$

Az eltolódási merevség (4.9) képletében szereplő E rugalmassági modulus és H magasság azonos anyagú és magasságú falaknál a (4.23) képletben kiemelhető és kiesik. Az i-edik falra jutó erő ekkor az

$$F_i = \frac{I_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i} F + \frac{I_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i x_i^2} M \tag{4.24}$$

összefüggésből számítható ki.

A (4.24) összefüggés első tagja azt mutatja, hogy a nyírásközéppontban működő külső erőből az egyes falak tehetetlenségi nyomatékaik arányában részesülnek. Abban a speciális esetben amikor $x_c = 0$, vagyis amikor a külső teher átmegy a nyírás-középponton, csak az első tag marad (mivel az $M = Fx_c = 0$ miatt a második tag kiesik):

$$F_i = \frac{I_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i} F \tag{4.24a}$$

A második tag a külső teher nyírásközéppont körül forgató nyomatékának hatását fejezi ki. A nyomaték következtében keletkező „többleterők" nagysága a falak tehetetlenségi nyomatékán kívül jelentősen függ a falak és a nyírásközéppont közötti távolságtól is. A merevítőrendszer viselkedését jelentősen befolyásoló $\Sigma I_i x_i^2$ kifejezést öblösödési inercianyomatéknak nevezzük:

$$I_\omega = \sum_{i=1}^{n} I_i x_i^2 \qquad [\mathrm{m}^6] \tag{4.25}$$

A gyakorlati számítások során ügyelni kell arra, hogy a fenti képletekben szereplő x_i távolságok előjeles mennyiségek! A nyírásközéppont körül forgató $M = Fx_c$ nyomaték előjelét a szokásos előjelszabály szabályozza: a nyomaték előjele akkor pozitív, ha az óramutató járásával egyezően forgat.

4.3.3 Az elmozdulások meghatározása

Az egyes falak maximális tetőponti eltolódását a (4.10) és (4.9) összefüggések alapján a rájuk jutó erők ismeretében a

$$c_i = \frac{1}{k_i} F_i = \frac{H^3}{8EI_i} F_i \tag{4.26}$$

képletből számíthatjuk ki. A 4.13/b ábra tanúsága szerint az épület maximális eltolódása az épület valamelyik szélén jön létre. Ha a maximális eltolódás helyén van fal, akkor a (4.26) képlet segítségével meghatározhatjuk az épület maximális eltolódását. Ha a maximális eltolódás helyén nincs fal, akkor a (4.26) képlet nem alkalmazható. A maximális eltolódást ekkor a (4.13) összefüggés alapján a

$$c_{\max} = c_F + c_{M,\max} = c_F + x_{\max} \tan\varphi \tag{4.27}$$

képlet segítségével számíthatjuk ki, ahol $x_{\max}$ a maximális eltolódás helye és φ az épület elcsavarodása. A (4.27) képletet a (4.9), (4.19) és (4.22) összefüggések felhasználásával részletezve megkapjuk a maximális eltolódás kiszámítására szolgáló összefüggést:

$$c_{\max} = \frac{H^3}{8E} \left(\frac{F}{\sum_{i=1}^{n} I_i} + \frac{M}{\sum_{i=1}^{n} I_i x_i^2} x_{\max} \right) \tag{4.28}$$

Az épület elcsavarodása a kis szögeknél érvényes $\tan\varphi \approx \varphi$ közelítés, valamint a (4.22) és (4.9) összefüggések figyelembevételével:

$$\varphi = \frac{H^3}{8E} \frac{M}{\sum_{i=1}^{n} I_i x_i^2} \tag{4.29}$$

A fenti képlet az elcsavarodás szögét radiánban adja meg. Ha az elcsavarodást százalékban akarjuk megadni, akkor a radián értéket 100-zal kell szorozni:

$$\varphi\,[\%] = \varphi\,[\text{radián}] \cdot 100 \tag{4.29a}$$

Az átszámítás fokra a

$$\varphi\,[\text{fok}] = \varphi\,[\text{radián}] \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3 \varphi\,[\text{radián}] \tag{4.29b}$$

képlet szerint történik.

4.4 Kétirányú falrendszerrel merevített épületek

Szélerőkkel terhelt „zömök” alaprajzú épületeknél (ahol a két alaprajzi méret közel azonos) és földrengésveszélyes területen lévő épületeknél az épületet támadó külső vízszintes erő kétirányú merevítő falak elhelyezését teszi szükségessé. Jelentős térbeli merevséggel rendelkeznek azok az épületek, amelyek kétirányú falai az élek mentén össze vannak építve. Gyakori azonban az az eset is, amikor a kétirányú falak éleik mentén nincsenek összeépítve, vagy amikor az élek mentén a kapcsolati erők felvétele nincsen biztosítva. Ilyen szerkezetekkel foglalkozunk ebben a pontban. A megoldás elve és menete azonos az egyirányú falrendszer esetében bemutatottakkal.

4.4.1 A falakra jutó erők meghatározása

A vizsgálatot a 4.14 ábrán vázolt, kétirányú falakkal merevített épület esetében az *y* irányú F_y erőre hajtjuk végre. Feltételezzük, hogy a falak magassága (H) és anyaguk rugalmassági modulusa (E) azonos.

Az első lépés a nyírásközéppont meghatározása. Ez a 4.3.1.2 pontban tárgyalt módon történik, azzal a kiegészítéssel, hogy a két irányban elhelyezkedő falak miatt most a nyírásközéppont mindkét koordinátáját meg kell határozni:

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{x,i} \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} I_{x,i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{x,i} \bar{x}_i}{I_x}; \qquad \bar{y}_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{y,i} \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} I_{y,i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{y,i} \bar{y}_i}{I_y} \tag{4.30}$$

A fenti képletekben $I_{x,i}$ és $I_{y,i}$ az *i*-edik fal *x* és *y* (saját) súlyponti tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, $I_x = \Sigma I_{x,i}$ és $I_y = \Sigma I_{y,i}$ a tehetetlenségi nyomatékok összege és *n* a falak száma.

Koordinátarendszerünk kezdőpontját az *O* nyírásközéppont koordinátáinak ismeretében a nyírásközéppontba helyezzük el. Helyettesítsük az alaprajz *C* geometriai középpontján átmenő F_y erőt az *O* nyírásközéppontban működő F_y erővel és az $M = F_y x_c$ nyomatékkal. A nyírásközéppontban működő F_y erő hatására az épület *y* irányban

eltolódik, de nem csavarodik el. A minden falra jellemző eltolódást c_{yF}-el jelöljük. Az M nyomaték az épületet a nyírásközéppont körül φ szöggel elcsavarja. Az elcsavarodás során a falak eltolódnak; az x irányú eltolódást c_{xM}, az y irányú eltolódást pedig c_{yM} jelöli. Az i-edik fal y irányú

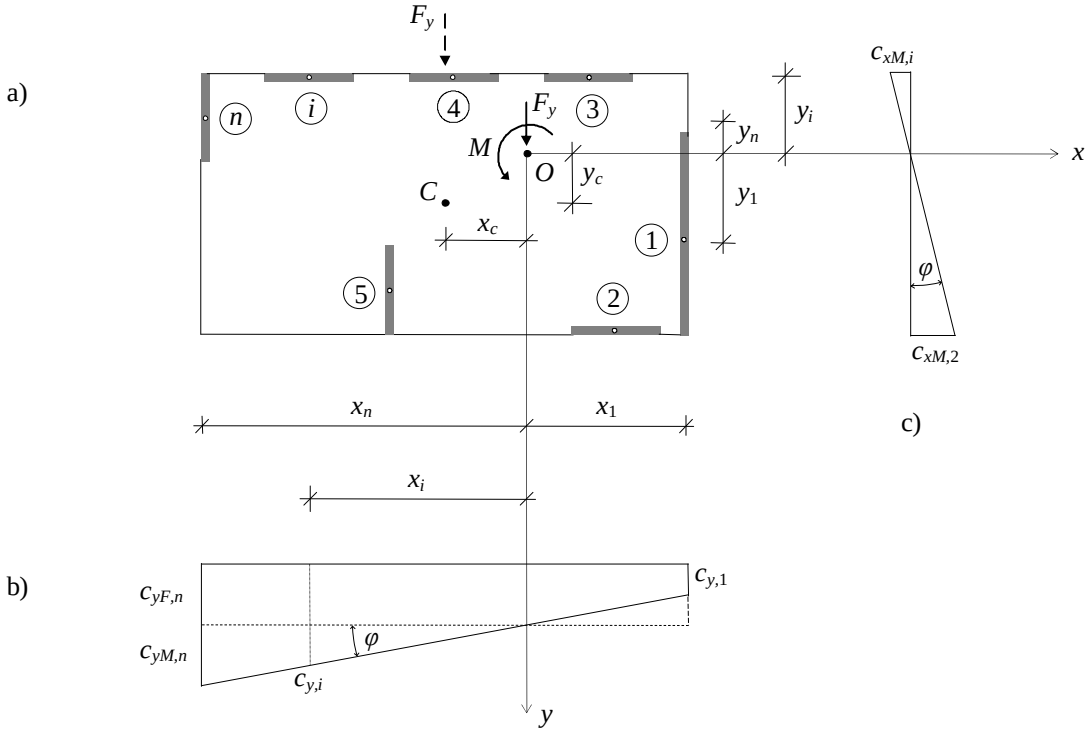
$$c_{y,i} = c_{yF} + c_{yM,i} \tag{4.31}$$

eltolódása két részből áll: az első tag a nyírásközéppontban működő erő, a második tag pedig a nyomaték hatását fejezi ki (4.14 ábra). A (4.10) és (4.31) egyenletek felhasználásával az i-edik falra jutó y irányú erőt az

$$F_{y,i} = k_{x,i}(c_{yF} + c_{yM,i}) \tag{4.32}$$

összefüggés adja meg, ahol

$$k_{x,i} = \frac{8EI_{x,i}}{H^3} \tag{4.33}$$



4.14 ábra. Kétirányú falrendszer. a) Alaprajz, b-c) eltolódási ábrák.

A 4.14/b ábrán vázolt y irányú eltolódások ábrája szerint

$$c_{yM,i} = x_i \tan\varphi \tag{4.34}$$

A fenti összefüggéssel a (4.32) képlet a következő alakban írható fel:

$$F_{y,i} = k_{x,i}\,(c_{yF} + x_i \tan\varphi) \tag{4.35}$$

A merevítőfalakra *x* irányú külső erők nem hatnak, de az *M* csavarónyomaték hatására az *x* irányú falak is „aktivizálódnak” és bennük *x* irányú „megtámasztó” erők ébrednek és *x* irányban is eltolódnak. Az eltolódások a nyírásközépponttól mért távolsággal arányosak (4.14/c ábra):

$$c_{xM,i} = -y_i \tan\varphi \tag{4.36}$$

A (4.10) képlet felhasználásával a fenti összefüggés az

$$\frac{1}{k_{y,i}} F_{x,i} = -y_i \tan\varphi \tag{4.37}$$

alakot ölti, ahonnan megkapjuk az elcsavarodás következtében az egyes falakra háruló *x* irányú erőket:

$$F_{x,i} = -k_{y,i} y_i \tan\varphi \tag{4.38}$$

ahol

$$k_{y,i} = \frac{8EI_{y,i}}{H^3} \tag{4.39}$$

A (4.35) és (4.38) egyenletekből még nem tudjuk az egyes falakra jutó *x* és *y* irányú erőket kiszámítani, mert az egyenletek a c_{yF} és φ – egyelőre ismeretlen – elmozdulásokat is tartalmazzák. Ezeket az ismeretleneket egyensúlyi megfontolások segítségével határozzuk meg.

Az *y* irányú

$$F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{y,i}$$

vetületi egyenlet a (4.35) összefüggés behelyettesítése után az

$$F_y = \sum_{i=1}^{n} k_{x,i}(c_{yF} + x_i \tan\varphi) \tag{4.40}$$

alakot ölti. Az állandókat kiemelve innen az

$$F_y = c_{yF} \sum_{i=1}^{n} k_{x,i} + \tan\varphi \sum_{i=1}^{n} k_{x,i} x_i \tag{4.41}$$

összefüggést kapjuk. Az egyenlet jobboldalának második tagja a $\Sigma k_i x_i = 0$ miatt zérus, így az *y* irányú eltolódásra a

$$c_{yF} = \frac{F_y}{\sum_{i=1}^{n} k_{x,i}} \tag{4.42}$$

összefüggést kapjuk.

A nyírásközéppontra vonatkozó és a külső és belső erők egyensúlyát kifejező

$$M = F_y x_c = \sum_{i=1}^{n} F_{y,i} x_i + \sum_{i=1}^{n} F_{x,i} y_i$$

nyomatéki egyenlet a belső erőkre vonatkozó (4.35) és (4.38) összefüggések behelyettesítése és az állandók kiemelése után az

$$M = c_{yF} \sum_{i=1}^{n} k_{x,i} x_i + \tan\varphi \left(\sum_{i=1}^{n} k_{x,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} k_{y,i} y_i^2 \right) \tag{4.43}$$

alakban írható. Most az egyenlet jobboldalának első tagja zérus, így az épület elcsavarodására a

$$\tan\varphi = \frac{M}{\sum_{i=1}^{n} k_{x,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} k_{y,i} y_i^2} \tag{4.44}$$

összefüggést kapjuk.

Az elmozdulásokat a (4.35) és (4.38) egyenletekbe behelyettesítve megkapjuk az egyes falakra jutó erőket. Az F_y erőből a falakra

$$F_{y,i} = \frac{k_{x,i}}{\sum_{i=1}^{n} k_{x,i}} F_y + \frac{k_{x,i} x_i}{\sum_{i=1}^{n} k_{x,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} k_{y,i} y_i^2} M \tag{4.45}$$

nagyságú *y* irányú, és

$$F_{x,i} = -\frac{k_{y,i} y_i}{\sum_{i=1}^{n} k_{x,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} k_{y,i} y_i^2} M \tag{4.46}$$

nagyságú *x* irányú erők jutnak.

Azonos anyagú és magasságú merevítőfalak esetében a fenti képletek egyszerűsíthetők:

$$F_{y,i} = \frac{I_{x,i}}{\sum_{i=1}^{n} I_{x,i}} F_y + \frac{I_{x,i} x_i}{I_\omega} M \tag{4.47}$$

és

$$F_{x,i} = -\frac{I_{y,i} y_i}{I_\omega} M \tag{4.48}$$

ahol

$$I_\omega = \sum_{i=1}^{n} I_{x,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} I_{y,i} y_i^2 \tag{4.49}$$

a merevítőfalak öblösödési inercianyomatéka.

A gyakorlati számítások során ügyelni kell arra, hogy a fenti képletekben szereplő x_i és y_i távolságok – csakúgy, mint a 4.3.2 pont hasonló képleteinél – előjeles mennyiségek! A nyírásközéppont körül forgató $M = F_y x_c$ nyomaték előjelét a szokásos előjelszabály szabályozza: a nyomaték előjele akkor pozitív, ha az óramutató járásával egyezően forgat.

4.4.2 Az elmozdulások meghatározása

A (4.10) összefüggés alapján akármelyik fal maximális tetőponti eltolódását kiszámíthatjuk, ha ismerjük a falra jutó erőt. Az *y* tengellyel párhuzamos erő esetén a

$$c_{y,i} = \frac{H^3}{8EI_{x,i}} F_{y,i} \tag{4.50}$$

az *x* tengellyel párhuzamos erő esetén pedig a

$$c_{x,i} = \frac{H^3}{8EI_{y,i}} F_{x,i} \tag{4.51}$$

képlet szolgáltatja az eltolódásokat. Ha az épület maximális eltolódása olyan helyen jön létre, ahol nincs fal, akkor a fenti képletek nem használhatók. Ekkor a keresett eltolódás értékét *y* irányban a (4.31) és (4.34) összefüggések alapján a

$$c_{y,\max} = c_{yF} + x_{\max} \tan\varphi \tag{4.52}$$

képlet segítségével számíthatjuk ki, ahol $x_{\max}$ a maximális eltolódás helye. A (4.52) összefüggés a (4.42), (4.44) valamint a (4.33), (4.39) összefüggések felhasználásával részletesen kiírva a

$$c_{y,\max} = \frac{H^3}{8E} \left(\frac{F_y}{\sum_{i=1}^{n} I_{x,i}} + \frac{M}{I_\omega} x_{\max} \right) \tag{4.53}$$

alakot ölti.

A 4.14/c ábra és a (4.36) összefüggés szerint az *y* irányú erőből – az elcsavarodás miatt – az *x* irányban is keletkezik eltolódás. Ha az *x* irányban a maximális eltolódás helyén – az épület valamelyik *x* tengellyel párhuzamos szélén – nincs merevítőfal, akkor

az x irányú maximális eltolódást a (4.36) összefüggés alapján a (4.44), (4.33), (4.39) segítségével a

$$c_{x,\max} = \frac{H^3}{8E}\frac{M}{I_\omega} y_{\max} \tag{4.54}$$

képletből számíthatjuk ki.

Az épület elcsavarodása a kis szögeknél érvényes $\tan\varphi \approx \varphi$ közelítés, valamint a (4.33) és (4.39) figyelembevételével a

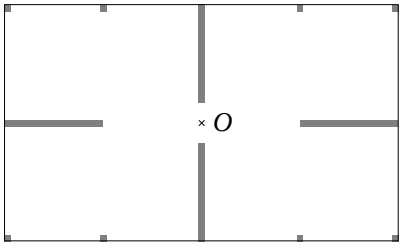
$$\varphi = \frac{H^3}{8E}\frac{M}{I_\omega} \tag{4.55}$$

összefüggésből számítható ki, ahol az I_ω értékét a (4.49) képlet adja meg.

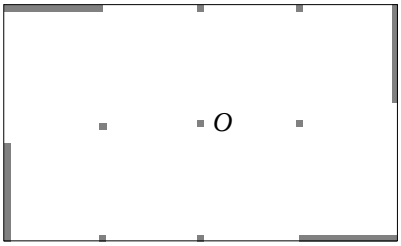
4.5 Kiegészítő megjegyzések

Egy épület viselkedését a merevítőrendszer eltolódása és elcsavarodása alapvetően meghatározza. Ezt a tényt szemléletesen mutatja a (4.24) és (4.47), valamint a (4.28) és (4.53) képletek első és második tagja. Ha a külső vízszintes teher átmegy a nyírásközépponton, akkor az épület nem csavarodik el, csak eltolódik (a vízszintes teher irányában). Ez a statikailag és gazdaságilag elképzelhető legkedvezőbb eset. Ez az eset gyakorlatilag kétszeresen szimmetrikus merevítőrendszert jelent. Ilyenkor az épület eltolódása a legkisebb, a merevítőfalak pedig merevségük arányában – az optimális mértékben – részesülnek a külső vízszintes teherből.

A fent vázolt optimális elrendezés sokszor (pl. funkcionális okokból) nem valósítható meg. Ilyenkor a geometriai középpont – ahol a külső vízszintes teher is átmegy – nem esik egybe a merevítőrendszer nyírásközéppontjával és ezért az épület el is csavarodik. Az elcsavarodás többleteltolódásokat okoz és módosítja az egyes elemekre jutó erőket is – bizonyos falakban nőnek, míg másokban csökkennek az erők. A megnövekvő eltolódásokat és erőket tehát az elcsavarodás okozza, ezért a kedvezőtlen hatás csökkentésének eszközei is az elcsavarodással kapcsolatosak. A jelenséget jellemző (4.24), (4.47), (4.28) és (4.53) összefüggések második (az elcsavarodással kapcsolatos) tagjainak vizsgálata két lehetőséget mutat. A nyírásközéppont és geometriai középpont távolságának csökkentésével magát a külső csavarónyomatékot csökkentjük vagy az öblösödési inercianyomaték növelésével a rendszer csavarással szembeni ellenállását növeljük. Az előbbi leghatékonyabban a fent már említett kétszeresen szimmetrikus merevítőrendszerrel érhető el, az utóbbi pedig úgy, hogy a nyírásközéppont és a merevítőfalak merőleges távolságát a lehető legnagyobbra választjuk. Erre a megoldásra igen egyszerű példát mutat a 4.15 ábra. A 4.15/a ábrán vázolt merevítőrendszer csavarási ellenállása igen-igen kicsiny. Ezzel szemben, a 4.15/b ábrán vázolt és ugyanazt a négy falat tartalmazó rendszer csavarással szembeni ellenállása jelentős mértékű.



a) kis csavarási ellenállás

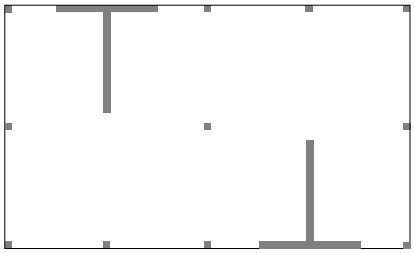


b) nagy csavarási ellenállás

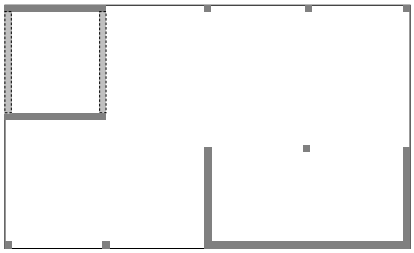
4.15 ábra. Csavarási ellenállás.

Kétirányú falakból álló merevítőrendszer térbeli merevsége úgy is növelhető, hogy bizonyos falakat éleik mentén kettesével összeépítünk (4.16/a ábra). Az összeépítés természetesen csak akkor jelent tényleges merevségnövelést, ha az összeépített falelemek az összeépített élek mentén fel tudják venni az ott fellépő erőket. Az ilyen módon kialakított rendszerek az x és y irányú I_y és I_x tehetetlenségi nyomatékon és a vizsgálataink során eddig elhanyagolt J csavarási tehetetlenségi nyomatékon kívül I_{xy} centrifugális tehetetlenségi nyomatékkal is rendelkezhetnek.

A térbeli merevség tovább növelhető, ha kettőnél több merevítő elemet építünk össze és zárt, vagy részben zárt, önmagukban is térbeli viselkedésű merevítő magokat hozunk létre (4.16/b ábra). Az ilyen elemek már maguk is rendelkezhetnek I_ω öblösödési tehetetlenségi nyomatékkal.



a) kettesével összeépített falak



b) magok

4.16 ábra. A térbeli merevség növelése összeépített falakkal.

A merevítőmagokat is tartalmazó rendszerek vizsgálata már nem lehetséges az itt bemutatott módszerrel, mert egyszerű egyensúlyi (és alakváltozási) egyenletek segítségével nem jutunk eredményre. Ilyenkor a teljes rendszer differenciálegyenlet-rendszerét kell felírni és megoldani. Ez az eljárás általában hosszadalmas és bonyolult, de a helyettesítő tartó bevezetésével viszonylag egyszerű vizsgálat válik lehetségessé. Az „Épületek komplex statikai vizsgálata” c. tantárgy ilyen módszerekkel foglalkozik. A legáltalánosabb esetben a merevítőrendszer a falak és magok mellett kereteket és nyílásokkal áttört falakat is tartalmaz. Az ilyen merevítőrendszerek tárgyalása a „Keretekkel, falakkal és magokkal merevített épületek globális statikai vizsgálata” c. jegyzetben található.

5

Gyakorló feladatok vízszintes erőkkel terhelt épületek vizsgálatához

A 4. fejezetben levezetett összefüggések használatát számpéldák segítségével illusztráljuk.

5.1 Merevítés keretekkel

Határozzuk meg az 5.1 ábrán látható 7-szintes épület kereteire és végfalára jutó erőket. A vízszintes teher eredőjének nagysága $F = 1000$ kN. A keretek geometriai és merevségi adatai azonosak. A keretek kiosztása egyenletes, így a (4.7) és (4.8) képletek alkalmazhatók. Az első keretre jutó erő értékét a (4.7) képletből kapjuk:

$$F_1 = \frac{x_1}{\sum_{i=1}^{6} x_i^2} \frac{FL}{2} = \frac{4}{1456} \frac{1000 \times 24}{2} = 32.97 \text{ kN}$$

ahol az összegzés értéke:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 4^2 + 8^2 + 12^2 + 16^2 + 20^2 + 24^2 = 1456 \text{ m}^2$$

A többi keretre jutó erő értékét a (4.7a) összefüggés szolgáltatja:

$$F_2 = 2F_1 = 2 \times 32.97 = 65.93 \text{ kN}$$

$$F_3 = 3F_1 = 3 \times 32.97 = 98.90 \text{ kN}$$

$$F_4 = 4F_1 = 4 \times 32.97 = 131.87 \text{ kN}$$

$$F_5 = 5F_1 = 5 \times 32.97 = 164.84 \text{ kN}$$

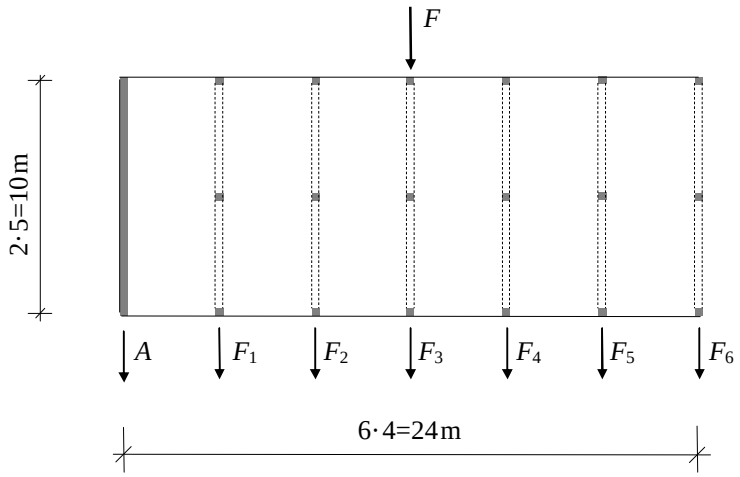
$$F_6 = 6F_1 = 6 \times 32.97 = 197.80 \text{ kN}$$

A falra jutó erő a (4.8) képletből számítható ki:

$$A = F - F_1(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1000 - 32.97(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 307.69 \text{ kN}$$

Az épület maximális tetőponti eltolódása az épület jobb sarkán (a 6. keretállásnál) jön létre, aminek nagysága – a keretre jutó terhelés ismeretében – a következő példában

részletesen bemutatott módon határozható meg.



5.1 ábra. Egy fallal és hat kerettel merevített épület.

5.2 Keret maximális tetőponti eltolódása

Határozzuk meg az 5.2 ábrán vázolt 34-szintes keret maximális tetőponti eltolódását. A $H = 34 \cdot 3 = 102$ méter magas keretet $w = 5$ kN/m intenzitású egyenletesen megoszló vízszintes teher terheli. A szükséges képleteket a 4.2.3 alfejezet tartalmazza.

A keret maximális tetőponti eltolódásának közelítő értékét a (4.8a) összefüggés segítségével határozzuk meg:

$$y_{\max} = y(H) = \frac{wH^4}{8E(I_l + I_g)} + \frac{wH^2}{2K}$$

ahol I_l, I_g és K a keret lokális tehetetlenségi nyomatéka, globális tehetetlenségi nyomatéka és nyírási merevsége.

Az első lépés az I_l lokális tehetetlenségi nyomaték kiszámítása:

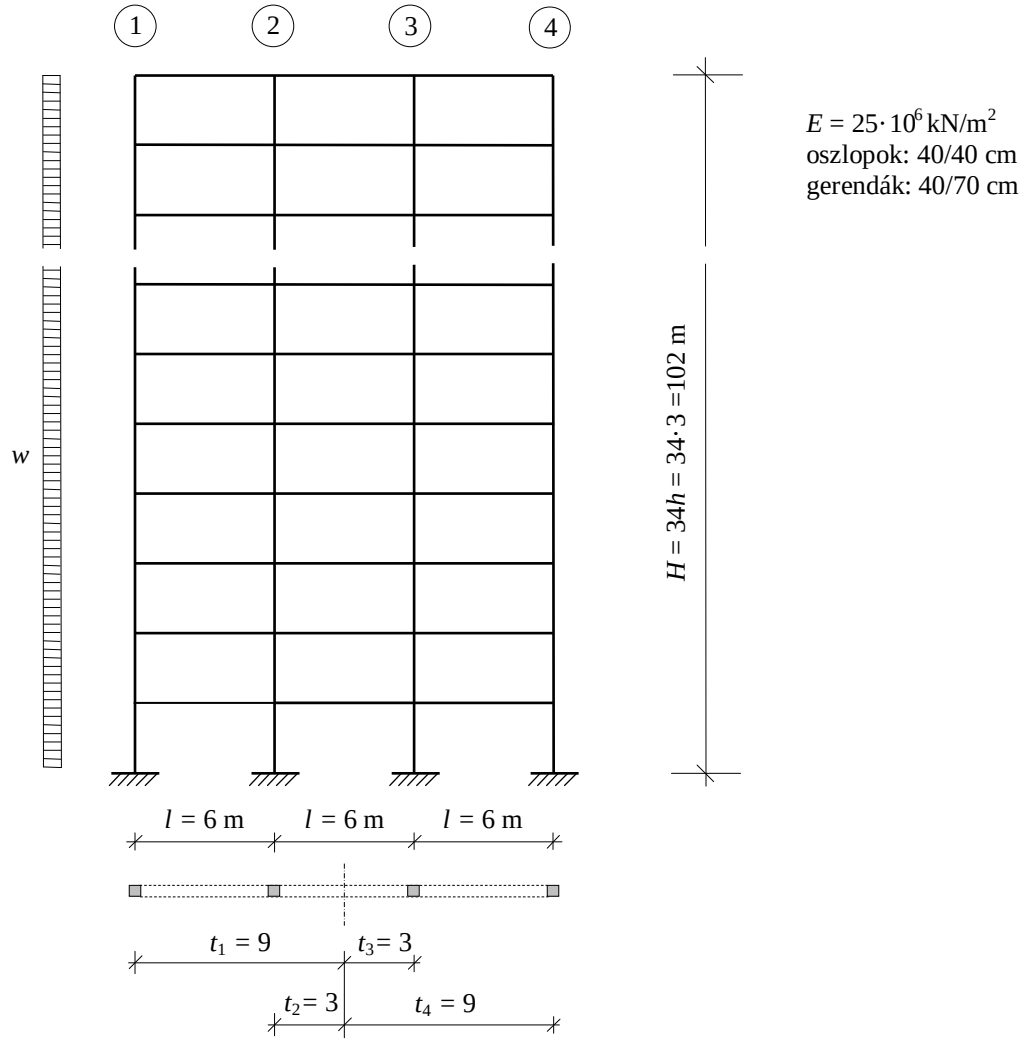
$$I_l = \sum_{i=1}^{n} I_{c,i} = 4\frac{0.4 \cdot 0.4^3}{12} = 0.008533\,\mathrm{m}^4$$

Az I_g globális tehetetlenségi nyomaték értéke:

$$I_g = \sum_{i=1}^{n} A_{c,i} t_i^2 = 0.4 \cdot 0.4(9^2 + 3^2 + 3^2 + 9^2) = 28.8\,\mathrm{m}^4$$

A nyírási merevség gerendáktól függő része:

$$K_b = 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{6EI_{b,i}}{l_i h} = 2\frac{6 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 0.4 \cdot 0.7^3}{12 \cdot 6 \cdot 3} 3 = 571667\ \mathrm{kN}$$



5.2 ábra. 34-szintes keret.

A nyírási merevség oszlopoktól függő része:

$$K_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{12EI_{c,i}}{h^2} = \frac{12 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 0.4 \cdot 0.4^3}{3^2 \cdot 12} 4 = 284444 \text{ kN}$$

A nyírási merevség értéke így:

$$K = K_b \frac{K_c}{K_b + K_c} = 571667 \frac{284444}{571667 + 284444} = 189937 \text{ kN}$$

A keret maximális tetőponti vízszintes eltolódásának közelítő értéke most már kiszámítható:

$$y_{\max} = y(H) = \frac{5 \cdot 102^4}{8 \cdot 25 \cdot 10^6 (0.0085 + 28.8)} + \frac{5 \cdot 102^2}{2 \cdot 189937} = 0.094 + 0.137 = 0.231 \text{ m}$$

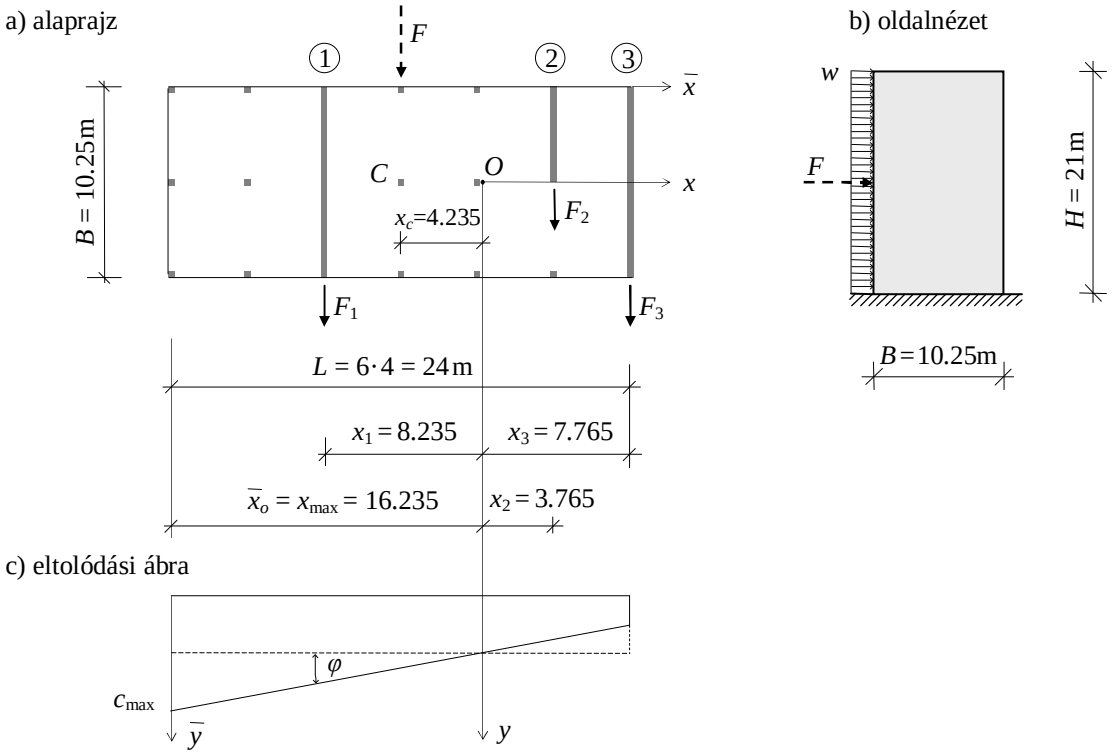
(A keret maximális eltolódásának pontos értéke: $y_{\max} = 0.238$ m.)

A keret ASCE ajánlás szerinti maximális megengedett tetőponti eltolódása:

$$y_H = \frac{H}{500} = \frac{102}{500} = 0.204 \text{ m}$$

5.3 Merevítés párhuzamos falakkal

Határozzuk meg az 5.3 ábrán alaprajzával és oldalnézetével megadott $n = 7$ szintes épület 1. jelű falára jutó erőt, az épület maximális tetőponti eltolódását és elcsavarodását. Az egyenletesen megoszló w intenzitású vízszintes teher eredőjének értéke $F = 1000$ kN és a falak anyagának rugalmassági modulusa $E = 23$ kN/mm^2. A falak vastagsága $v = 0.25$ m. Az emeletmagasság $h = 3$ m.



5.3 ábra. Egyirányú falakkal merevített épület.

Merevségi alapadatok

Az 1., 2. és 3. jelű fal tehetetlenségi nyomatéka:

$$I_1 = I_3 = \frac{0.25 \times 10.25^3}{12} = 22.435 \text{ m}^4, \qquad I_2 = \frac{0.25 \times 5.125^3}{12} = 2.804 \text{ m}^4$$

A falak tehetetlenségi nyomatékának összege:

$$\sum_{i=1}^{3} I_i = 47.675 \text{ m}^4$$

Nyírásközéppont

A nyírásközéppont helyét a (4.12) képletből határozzuk meg:

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{3} I_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{3} I_i} = \frac{22.435\times 8 + 2.804\times 20 + 22.435\times 24}{47.675} = 16.235\ \text{m}$$

A vízszintes teher eredőjének távolsága a nyírásközépponttól:

$$x_c = \bar{x}_o - \frac{L}{2} = 16.235 - \frac{24}{2} = 4.235\ \text{m}$$

Öblösödési tehetetlenségi nyomaték

Az öblösödési tehetetlenségi nyomatékot a (4.25) összefüggés szolgáltatja:

$$I_\omega = \sum_{i=1}^{3} I_i x_i^2 = 22.435(8.235^2 + 7.765^2) + 2.804\times 3.765^2 = 2913.9\ \text{m}^6$$

Az 1. jelű falra jutó erő

Az $F = 1000$ kN vízszintes erő hatására az egyes falakban keletkező erőket a (4.24) képlet szolgáltatja. Így:

$$F_1 = \frac{I_1}{\sum_{i=1}^{3} I_i} F + \frac{I_1 x_1}{\sum_{i=1}^{3} I_i x_i^2} M = \frac{22.435}{47.675}1000 + \frac{22.435\times 8.235}{2913.9}1000\times 4.235 =$$

$$= 470.59 + 268.51 = 739.1\ \text{kN}$$

Maximális eltolódás

Az épület maximális eltolódása az épület bal szélén jön létre (5.3/c ábra). Ott nincs merevítőfal, így a (4.28) képletet kell használni:

$$c_{\max} = \frac{H^3}{8E}\left(\frac{F}{\sum_{i=1}^{3} I_i} + \frac{M}{\sum_{i=1}^{3} I_i x_i^2} x_{\max} \right) = \frac{21^3}{8\times 23\times 10^6}\left(\frac{1000}{47.675} + \frac{1000\times 4.235}{2913.9}16.235 \right) =$$

$$= (1.05 + 1.19)10^{-3}\,\text{m} = 2.24\ \text{mm}$$

Elcsavarodás

Az épület elcsavarodását a (4.29) összefüggésből határozzuk meg:

$$\varphi = \frac{H^3}{8E}\frac{M}{\sum_{i=1}^{3} I_i x_i^2} = \frac{21^3 \times 1000 \times 4.235}{8 \times 23 \times 10^6 \times 2913.9} = 7.315 \times 10^{-5}\,\text{rad} = 0.0073\% = 0.0042°$$

5.4 Merevítés kétirányú falakkal

Határozzuk meg az 5.4 ábrán alaprajzával megadott $n = 7$ szintes épület 1. és 5. jelű merevítőfalára jutó erőket, az épület maximális tetőponti eltolódását és elcsavarodását. A vízszintes teher eredője $F_y = 1000$ kN. A falak anyagának rugalmassági modulusa $E = 23$ kN/mm^2. A falak vastagsága $v = 0.25$ m. Az emeletmagasság $h = 3$ m.

Ez az épület az előző pontban vizsgált és az 5.3 ábrán vázolt épülettől csak abban különbözik, hogy elhelyeztük a 4. és 5. jelű x irányú ($0.25\,\text{m} \times 10\,\text{m}$) falakat. Ez a tény a számítás elvégzése után érdekes összehasonlításra nyújt lehetőséget.

Merevségi és geometriai alapadatok

Az 1. és 3. jelű falak tehetetlenségi nyomatékai:

$$I_{x,1} = I_{x,3} = \frac{0.25 \times 10.25^3}{12} = 22.435\,\text{m}^4, \qquad I_{y,1} = I_{y,3} = \frac{10.25 \times 0.25^3}{12} = 0.0133\,\text{m}^4$$

A 2. jelű fal tehetetlenségi nyomatékai:

$$I_{x,2} = \frac{0.25 \times 5.125^3}{12} = 2.804\,\text{m}^4, \qquad I_{y,2} = \frac{5.125 \times 0.25^3}{12} = 0.0067\,\text{m}^4$$

A 4. és 5. jelű falak tehetetlenségi nyomatékai:

$$I_{x,4} = I_{x,5} = \frac{10 \times 0.25^3}{12} = 0.013\,\text{m}^4, \qquad I_{y,4} = I_{y,5} = \frac{0.25 \times 10^3}{12} = 20.833\,\text{m}^4$$

A tehetetlenségi nyomatékok összege:

$$\sum_{i=1}^{5} I_{x,i} = 47.701\ \text{m}^4, \qquad \sum_{i=1}^{5} I_{y,i} = 41.700\ \text{m}^4$$

Nyírásközéppont

A nyírásközéppont koordinátáit a (4.30) képletekből határozzuk meg:

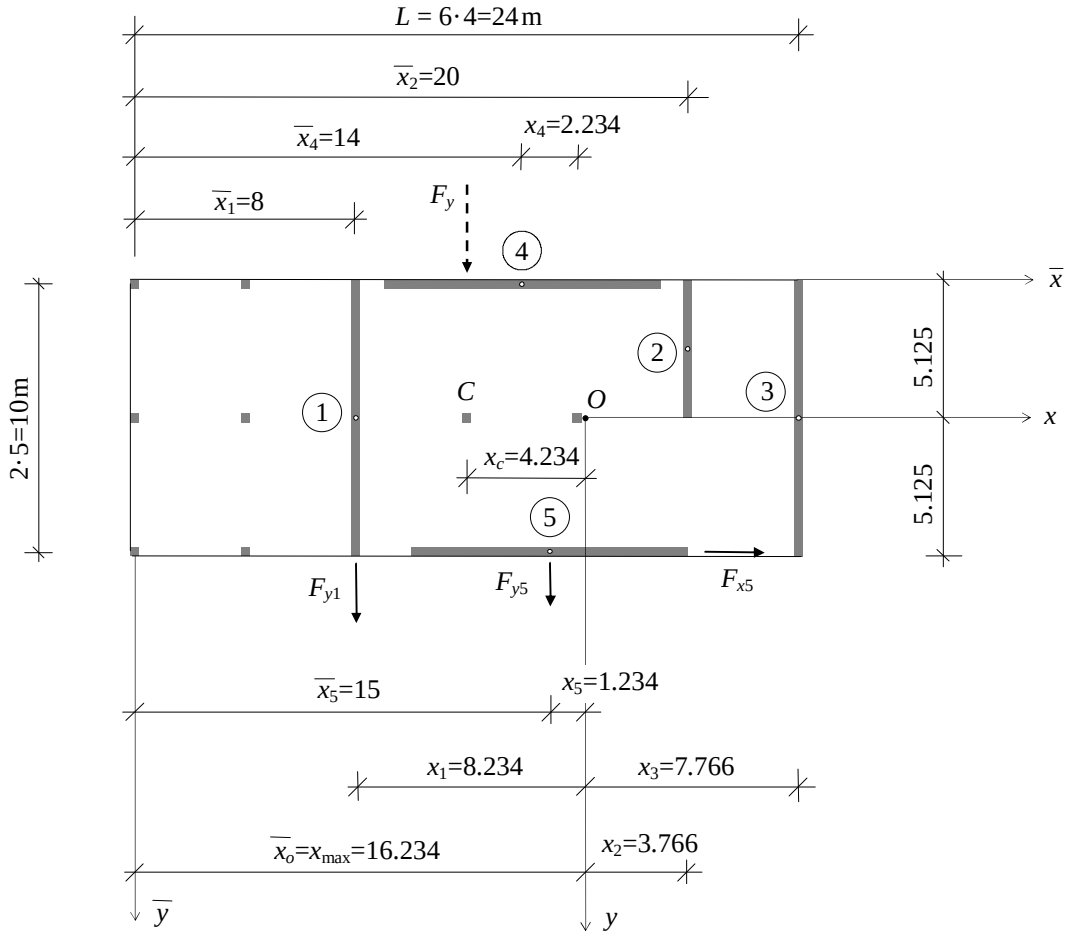
$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{5} I_{x,i}\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{5} I_{x,i}} = \frac{22.435(8+24) + 2.804 \times 20 + 0.013(14+15)}{47.701} = 16.234\,\text{m}$$

és

$$\bar{y}_o = \frac{\sum_{i=1}^{5} I_{y,i}\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{5} I_{y,i}} = \frac{2\times 0.013\times 5.125 + 0.0067\times 2.5625 + 20.833(10.125+0.125)}{41.700} = 5.125\,\text{m}$$

A vízszintes teher eredőjének távolsága a nyírásközépponttól:

$$x_c = \bar{x}_o - \frac{L}{2} = 16.234 - \frac{24}{2} = 4.234\,\text{m}$$



5.4 ábra. Kétirányú falrendszerrel merevített épület.

Öblösödési inercianyomaték

Az öblösödési inercianyomatékot a (4.49) összefüggés felhasználásával számítjuk ki:

$$I_\omega = \sum_{i=1}^{5} I_{x,i}x_i^2 + \sum_{i=1}^{5} I_{y,i}y_i^2 = 22.435(8.234^2 + 7.766^2) + 2.804\times 3.766^2 +$$

$$+ 0.0133(2.234^2 + 1.234^2) + 0.0067\times 2.5625^2 + 20.833(5^2 + 5^2) = 3955.7\,\text{m}^6$$

Az 1. és 5. jelű falakra jutó erőket *y* és *x* irányban a (4.47) és (4.48) képletek szolgáltatják:

$$F_{y,1} = \frac{I_{x,i}}{\sum_{i=1}^{5} I_{x,i}} F_y + \frac{I_{x,i} x_i}{I_\omega} M = \frac{22.435}{47.701} 1000 + \frac{22.435 \times 8.234}{3955.7} 1000 \times 4.234 =$$

$$= 470.3 + 197.7 = 668.0 \text{ kN}$$

$$F_{x,1} = 0$$

$$F_{y,5} = \frac{I_{x,i}}{\sum_{i=1}^{5} I_{x,i}} F_y + \frac{I_{x,i} x_i}{I_\omega} M = \frac{0.013}{47.701} 1000 + \frac{0.013 \times 1.234}{3955.7} 1000 \times 4.234 =$$

$$= 0.273 + 0.017 = 0.29 \text{ kN}$$

$$F_{x,5} = -\frac{I_{y,i} y_i}{I_\omega} M = \frac{20.833 \times 5}{3955.7} 1000 \times 4.234 = 111.5 \text{ kN}$$

A maximális eltolódás az épület bal szélén jön létre. Értékét a (4.53) összefüggésből számítjuk ki:

$$c_{y,\max} = \frac{H^3}{8E} \left(\frac{F_y}{\sum_{i=1}^{5} I_{x,i}} + \frac{M}{I_\omega} x_{\max} \right) = \frac{21^3}{8 \times 23 \times 10^6} \left(\frac{1000}{47.701} + \frac{1000 \times 4.234}{3955.7} 16.234 \right) =$$

$$= (1.05 + 0.88) 10^{-3} \text{m} = 1.93 \text{ mm}$$

Az épület elcsavarodását a (4.55) összefüggésből határozzuk meg:

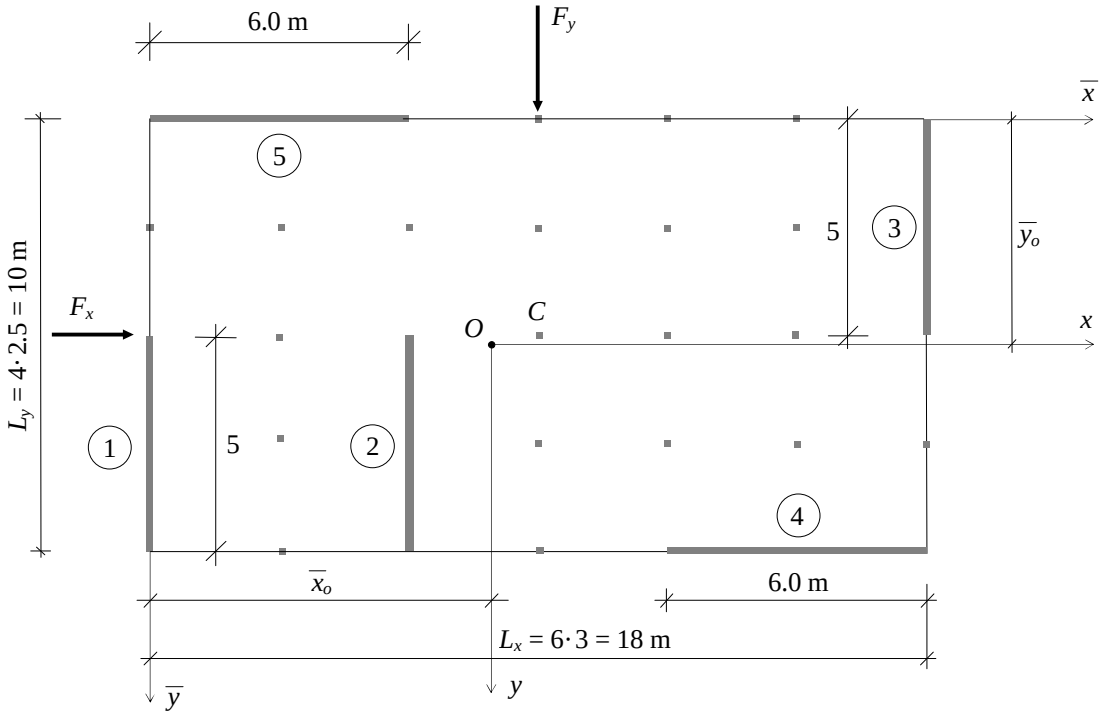
$$\varphi = \frac{H^3}{8E} \frac{M}{I_\omega} = \frac{21^3 \times 10^3 \times 4.234}{8 \times 23 \times 10^6 \times 3955.7} = 5.39 \times 10^{-5} \text{rad} = 0.0054\% = 0.0031°$$

Az 5.3 és 5.4 számpéldák összehasonlítása érdekes eredményt mutat. A vizsgált irányban (az $F_y = 1000$ kN külső teher irányában) elhanyagolható merevséggel rendelkező 4. és 5. jelű két fal beépítése az eredményeket jelentősen megváltoztatta: az F_{1y} erő 10.1%-al, az épület maximális eltolódása 14.9%-al, az épület elcsavarodása pedig 28.9%-al csökkent. Ennek az az oka, hogy a merevítőrendszer viselkedésében az elcsavarodásnak általában jelentős szerepe van – annál nagyobb, minél messzebb van az épület geometriai középpontja a nyírásközépponttól. A 4. és 5. jelű falaknak ugyan elhanyagolható a vizsgált irányban számított tehetetlenségi nyomatéka, a részesedésük az öblösödési inercianyomaték értékében viszont viszonylag nagy [ld. az I_ω (4.49) képletét és a fenti számítását]. Természetesen az épület elcsavarodása során játszott szerepe következtében a 4. és 5. jelű falakra x irányú erők is jutnak.

Végül a következő pontban megadjuk egy 15-szintes épület számításának végeredményeit.

5.5 Kétirányú falakkal merevített 15-szintes épület *x* és *y* irányú vízszintes teherrel

Meghatározandók az 5.5 ábrán alaprajzával megadott, 15 szintes, kétirányú falakkal merevített épület merevítőfalaira jutó erők, az épület maximális tetőponti eltolódása és elcsavarodása. A külső vízszintes (nem egyidejű) erők eredője: F_y = 1000 kN és F_x = 500 kN. A falak anyagának rugalmassági modulusa E = 23 kN/mm^2. Az épület magassága H = 45 m. Az 1., 3., 4. és 5. fal vastagsága v = 0.25 m, a 2. fal vastagsága pedig v = 0.30 m.



5.5 ábra. 15-szintes épület alaprajza.

Eredmények

Merevségi és geometriai alapadatok
A merevítőrendszer elemeinek összegzett tehetetlenségi nyomatékai:

$$\sum_{i=1}^{5} I_{x,i} = 8.349 \text{ m}^4, \qquad \sum_{i=1}^{5} I_{y,i} = 9.024 \text{ m}^4$$

A nyírásközéppont koordinátái:

$$\bar{x}_o = 7.877 \text{ m}, \qquad \bar{y}_o = 5.003 \text{ m}$$

Az épület öblösödési tehetetlenségi nyomatéka:

$$I_\omega = \sum_{i=1}^{5} I_{x,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{5} I_{y,i} y_i^2 = 665.2 \text{ m}^6$$

Vizsgálat az F_y = 1000 kN erő hatására

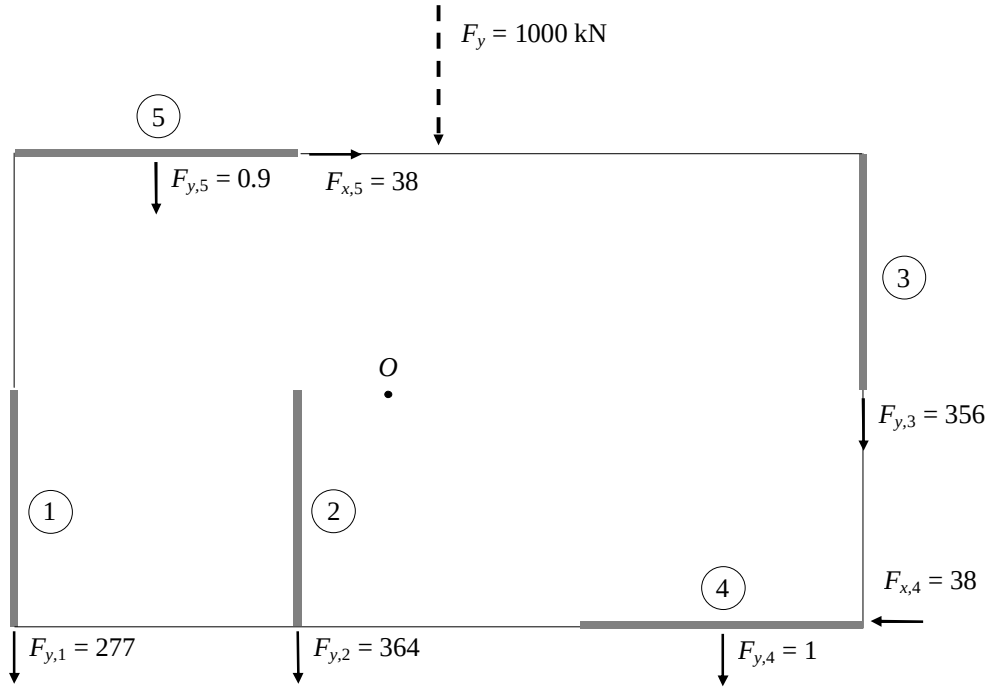
Az épület elcsavarodása:

$$\alpha = 7.64 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0.0438^{\circ}$$

Az épület maximális tetőponti eltolódása:

$$y_{\max} = 67.78 \text{ mm}$$

A falakra jutó erőket és az eltolódásokat az 5.6 ábrán és az 5.1 táblázatban adjuk meg.



5.6 ábra. A falakra jutó erők az F_y = 1000 kN teherből.

5.1 táblázat. Eredmények az F_y = 1000 kN erővel terhelt épület esetében.

Fal sorszáma	$F_{y,i}$ (y irányú erők) [kN]	$F_{x,i}$ (x irányú erők) [kN]	Eltolódások [mm]	
			y irányban	x irányban
1	277.3	-0.0	52.73	-2.1
2	364.4	-0.0	57.75	-2.1
3	356.4	0.0	67.78	2.1
4	1.0	-38.0	65.27	-4.2
5	0.9	38.0	55.24	4.2
	$\Sigma F_{y,i}$ = 1000	$\Sigma F_{x,i}$ = 0		

Vizsgálat az F_x = 500 kN erő hatására

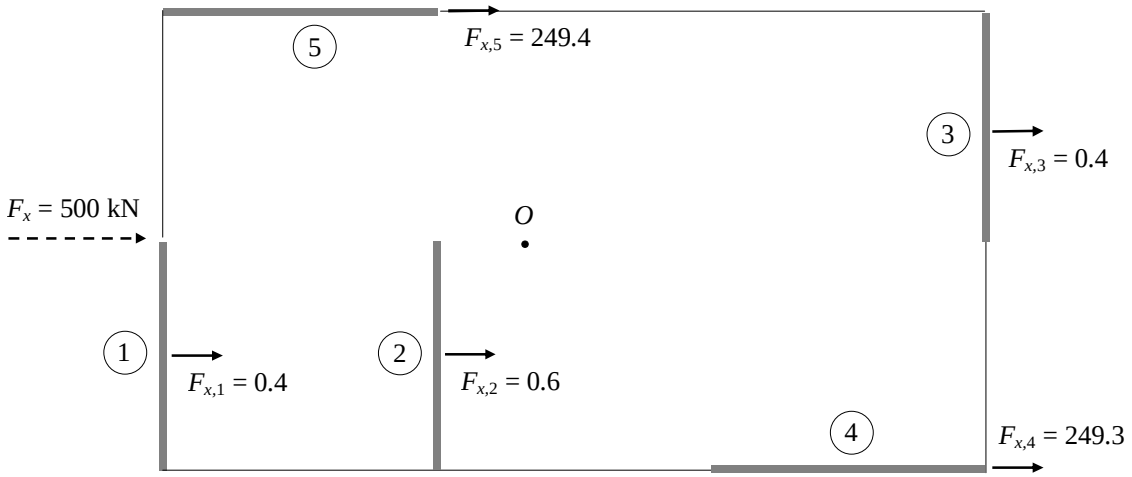
Az épület elcsavarodása:

$$\alpha = 1.065 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0.000061^{\circ}$$

Az épület maximális tetőponti eltolódása:

$$x_{\max} = 27.45 \text{ mm}$$

A falakra jutó erőket és az eltolódásokat az 5.7 ábrán és az 5.2 táblázatban adjuk meg.



5.7 ábra. A falakra jutó erők az F_x = 500 kN teherből.

5.2 táblázat: Eredmények az F_x = 500 kN erővel terhelt épület esetében.

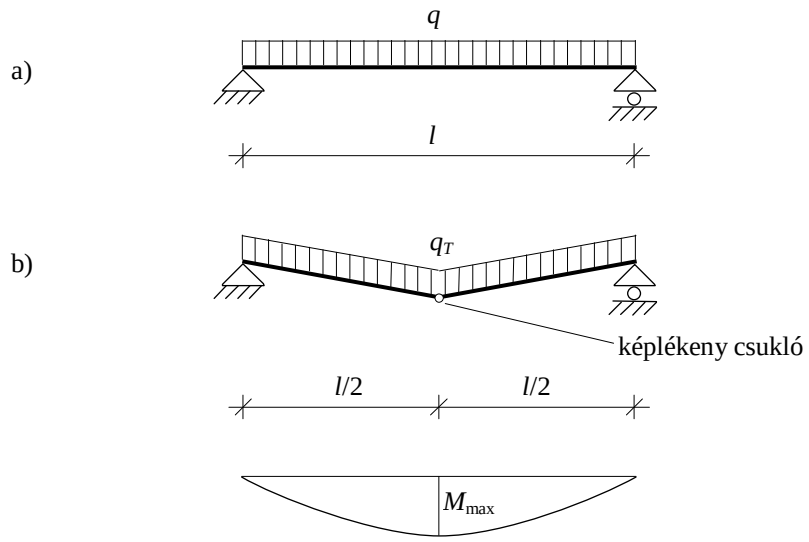
Fal sorszáma	$F_{x,i}$ (x irányú erők) [kN]	$F_{y,i}$ (y irányú erők) [kN]	Eltolódások [mm]	
			x irányban	y irányban
1	0.4	-0.0	27.44	-0.0
2	0.6	-0.0	27.44	-0.0
3	0.4	0.1	27.44	0.0
4	249.3	0.0	27.43	0.0
5	249.4	-0.0	27.45	-0.0
	$\Sigma F_{x,i} \approx 500$	$\Sigma F_{y,i} \approx 0$		

6

Többtámaszú tartók számítása a képlékenység elvei alapján

A Mechanika II c. tárgy keretében megismerkedtünk a rugalmas-képlékeny (elasztoplasztikus) anyagú, hajlított szerkezetek keresztmetszeteinek a képlékenységtan elvei szerinti vizsgálatával. Hajlítóigénybevétel esetén meghatároztuk a keresztmetszet rugalmas (M_R) illetve képlékeny (M_T) határnyomatékát. Ez utóbbit törőnyomatéknak is nevezzük. Az ott követett elvek alkalmazása útján a rugalmas-képlékeny anyagú szerkezetek teherbíró képességét is vizsgálat tárgyává tehetjük.

A statikai szempontból határozott szerkezetek viselkedése ebből a szempontból nem érdemel különösebb figyelmet; ezek tönkremeneteli folyamata néhány szóval leírható. Az ilyen tartók terhelése mindaddig növelhető, ameddig a legnagyobb hajlítónyomaték helyén levő keresztmetszet teljes egészében képlékeny állapotba nem kerül. Ekkor ugyanis e keresztmetszet szabad elfordulását semmi sem gátolja, s abban csukló – az ún. képlékeny csukló – alakul ki. Ezáltal a statikai szempontból határozott tartó labilis alakzattá válik és tönkremegy.



6.1 ábra. Kéttámaszú tartó képlékeny viselkedése.

Jelöljük a 6.1/a ábrán feltüntetett kéttámaszú tartó középső keresztmetszetének törőnyomatékát M_T-vel és határozzuk meg a q_T törőterhelést. Minthogy a legnagyobb nyomaték a középső keresztmetszetben működik (nagysága: $M_{max} = ql^2/8$), ezen a helyen alakul ki a képlékeny csukló is (6.1/b ábra) a törőterhelés hatására, ami a labilis

alakzat kialakulását s ezzel a tartó tönkremenetelét eredményezi. Ez akkor következik be, ha az $M_{\max} = M_T$-vel. Tehát

$$\frac{q_T l^2}{8} = M_T$$

ahonnan

$$q_T = \frac{8M_T}{l^2}$$

A statikai szempontból határozatlan két végén befogott tartók esetén a tönkremenetel folyamata az előzőhöz képest összetettebb. Ezeknél a tartóknál ugyanis ha el is éri a keresztmetszet a legnagyobb nyomaték helyén a képlékeny határhelyzetet, még nem következik be a tartó tönkremenetele, hanem a tartó bizonyos határig még tovább terhelhető. Ezt a jelenséget a 6.2/a ábra nézetrajzán feltüntetett mindkét végén befogott, egyenletesen megoszló teherrel terhelt kéttámaszú tartó vizsgálata útján világítjuk meg. A tartó állandó keresztmetszetű és rugalmas, ill. képlékeny határnyomatékát – mind pozitív, mind negatív nyomatékra – (+)M-el, ill. (–)M-el jelöljük.

Az egyenletesen megoszló teher nagyságát a vizsgálat során fokozatosan növeljük q_1, q_2 majd q_3 értékre.

A vizsgálat első fázisában amíg a q_1 teherhez tartozó legnagyobb nyomaték (6.2/a ábra) értéke

$$(-)M_1 = \frac{q_1 l^2}{12} < M_R$$

a tartó tökéletesen rugalmasan viselkedik.

A terhelés nagyságát növelve elérkezünk egy olyan q_2 határértékhez, amelynél

$$(-)M_2 = \frac{q_2 l^2}{12} = M_T \qquad \text{és} \qquad (+)M_2 = \frac{q_2 l^2}{24} < M_T$$

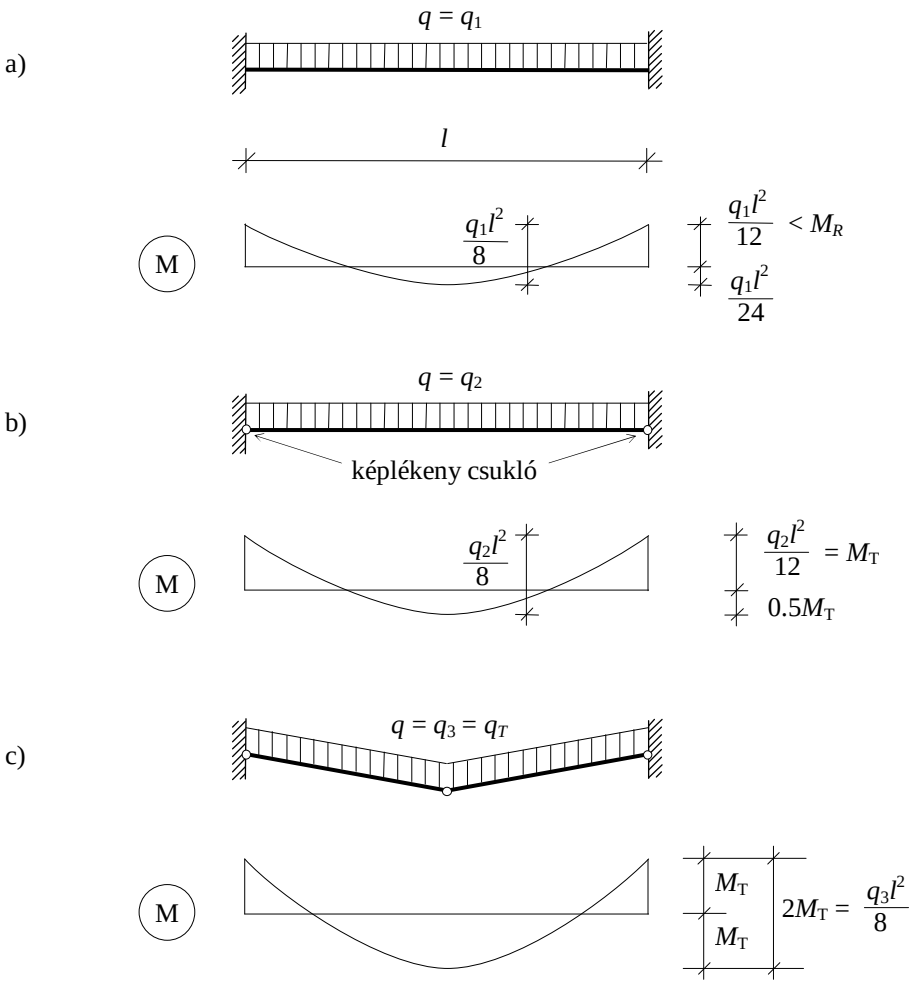
azaz a befogásoknál fellépő legnagyobb nyomatékok helyén levő két keresztmetszet képlékeny állapotba kerül. Ezek a keresztmetszetek ennél nagyobb nyomatékot nem képesek felvenni és így a befogásoknál képlékeny csukló alakul ki (6.2/b ábra). A két befogási keresztmetszetnél a tartó az M_T képlékeny határnyomatékot továbbra is elviseli, de a beállt folyási állapot miatt csuklószerűen (elfordulást engedve) működik. Az ehhez az esethez tartozó q_2 teher az előzőekben felírt $M_T = q_2 l^2/12$ egyenletből

$$q_2 = \frac{12M_T}{l^2}$$

További tehernövelés hatására ezek szerint a tartó úgy viselkedik, mint egy szabadon felfekvő kéttámaszú tartó, amelynek mindkét támaszánál M_T nagyságú negatív végnyomaték működik. Minthogy a q_2 teher hatására a tartó középső keresztmetszetében csupán $0.5M_T$ nagyságú nyomaték keletkezett, a teher nagyságát mindaddig növelhetjük, amíg (+)$M_{\max}$ értéke is eléri az M_T értékét. Ez esetben a

középső keresztmetszetben is képlékeny csukló alakul ki (6.2/c ábra) és ezért a szerkezet labilis alakzattá válik és tönkremegy. A tönkremenetelhez tartozó q_3 teher a tartó képlékeny határterhe, vagy törőterhe (q_T). Ennek nagysága a $2M_T = q_3 l^2/8$ egyenletből

$$q_T = q_3 = \frac{16M_T}{l^2}$$



6.2 ábra. Két végén befogott tartó képlékeny viselkedése.

Érdemes ezt összehasonlítani az első képlékeny csukló kialakulását előidéző

$$q_2 = \frac{12M_T}{l^2}$$

értékkel. Az összehasonlításból kitűnik, hogy a képlékeny csuklónak a támaszoknál történt kialakulása után, a tartó tönkremeneteléig, még

$$\frac{16}{12}100 - 100 = 33$$

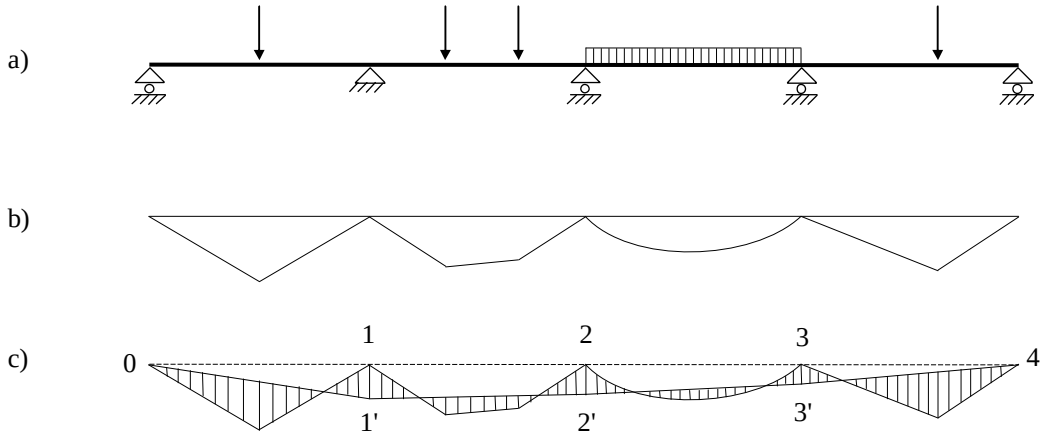
százalékkal növelhetjük a terhelést.

E példa kapcsán végzett vizsgálataink arra hívják fel a figyelmet, hogy a rugalmas-képlékeny anyagból készült statikai szempontból határozatlan szerkezetek ún. képlékeny teherbírási tartalékkal rendelkeznek. Ennek nagysága természetesen a tartó terhelés- és megtámasztásmódjától függően különböző. Megállapíthatjuk azt is, hogy e szerkezetek igénybevételei az első képlékeny csukló kialakulása és a tönkremenetel közti időszakban átrendeződnek.

Többtámaszú tartók esetén – minthogy statikai szempontból ezek is határozatlanok – az előzőekben bemutatott vizsgálat szintén elvégezhető. Ha egy többtámaszú tartó valamely keresztmetszetében a hajlítónyomaték eléri a törőnyomaték értékét, akkor ott képlékeny csukló alakul ki, mely a továbbiakban állandósul. Mindaddig veszélytelenül növelhető a tartó terhelése, amíg a kialakuló csuklók száma nem haladja meg a statikai határozatlanság fokszámát. Ez esetben ugyanis a tartó labilis alakzattá válik és tönkremegy.

A többtámaszú tartó törési folyamatának minden szakaszában – az utolsót kivéve – természetesen érvényesek az egyensúly feltételei.

Tetszőleges terhelésű többtámaszú tartók nyomatékábráját a képlékenységtan előzőekben vázolt törvényszerűségei alapján a következő módon állíthatjuk elő (6.3 ábra). A tartót a közbülső alátámasztások felett képzeletben átvágjuk és az így nyert törzstartók nyomatékábráit közös alapvonalra rajzoljuk (6.3/b ábra). Ezután a záróvonalat támaszvonaltól-támaszvonalig tetszőlegesen behúzzuk és csupán arra ügyelünk, hogy az egyensúly feltételei teljesüljenek.

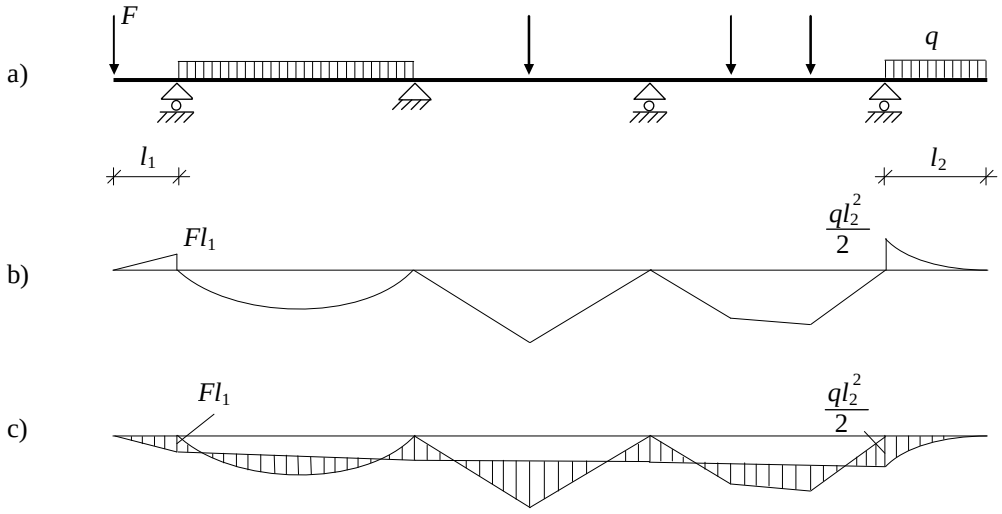


6.3 ábra. Többtámaszú tartó képlékeny viselkedése.

Ilyen egyensúlyi követelmény, hogy a szélső szabad támaszok felett a nyomaték értéke zérus, továbbá, hogy a közbülső támaszok felett a két oldalról csatlakozó tartóvégekre azonos nagyságú, de egymással ellentétes végnyomatékok működnek. E követelményeket a 6.3/c ábrán is betartottuk, mert a tartó két szélső nyílásának záróvonalát a 0. ill. 4. pontból indítottuk, továbbá biztosítottuk, hogy a záróvonalak a támaszvonalakon fekvő 1′, 2′ és 3′ pontokban metsződjenek.

Konzolos többtámaszú tartó esetén a szélső – konzolos – támaszok felett a nyomaték természetesen nem zérus, hanem a konzol kinyúlása és terhelése alapján meghatározható rögzített érték (6.4 ábra).

E követelményektől eltekintve a záróvonalak elvileg tetszőlegesen behúzhatók, hiszen ha a tartót e nyomatékábra figyelembevételével méretezzük, akkor az eredetileg rugalmas – tehát más nyomatékmegoszlású – tartón sorra kialakulnak a képlékeny csuklók és közvetlenül a tönkremenetel előtt a nyomatékmegoszlás az általunk felvett nyomatékábra szerinti lesz. Ezek szerint a nyomatékábra záróvonalainak behúzása során a gazdaságosság követelményeit messzemenően figyelembe vehetjük. Matematikai vizsgálatokkal kimutatták, hogy állandó keresztmetszetű homogén tartók esetén akkor járunk el a leggazdaságosabban, ha igyekszünk elérni, hogy a tartó pozitív és negatív nyomatékai megegyező nagyságúak legyenek. Állandó keresztmetszetű vasbeton tartók esetén pedig arra törekszünk, hogy a nyomatékábra pozitív és negatív előjelű tartományai egymással megegyező nagyságúak legyenek.



6.4 ábra. Konzolos többtámaszú tartó képlékeny viselkedése.

El kell kerülni, hogy a képlékeny csuklók a támaszközök közepe táján a pozitív nyomatéki maximumok helyén alakuljanak ki. Ez ugyanis nagy alakváltozásokkal, ill. repedésekkel jár és így esztétikai és lélektani okok miatt sem engedhető meg. Megjegyezzük még, hogy ha a szélső nyomatékábrát akarjuk a képlékenységtan elvei alapján elkészíteni, akkor először a rugalmasságtan elvei alapján készített és az előzőekben részletesen ismertetett szélső nyomatékábrát kell előállítanunk, majd a záróoldalakat támaszközönként módosíthatjuk aszerint, hogy a gazdaságosság mely követelményét kívánjuk teljesíteni.

Végül felhívjuk a figyelmet a rugalmasságtan és a képlékenységtan elvei szerinti számítás között lévő elvi különbségre.

A rugalmasságtan elvei szerinti méretezés során meghatározzuk az igénybevételeket és olyan tartókeresztmetszetet választunk, amely ezen igénybevételekre biztonsággal megfelel. Főként állandó keresztmetszetű tartók esetén számítanunk kell arra, hogy a tartó a kisebb igénybevételek helyén nem lesz kihasználva.

A képlékenységtan elvei szerinti méretezés során az előzőekben ismertetett elvek alapján „megtervezzük” az igénybevételeket és ezekhez igazítjuk hozzá a keresztmetszeteket. Tudjuk, hogy a tartó – bár képlékeny csuklók kialakulása árán – a tervezett igénybevételekhez igazodva fog működni.

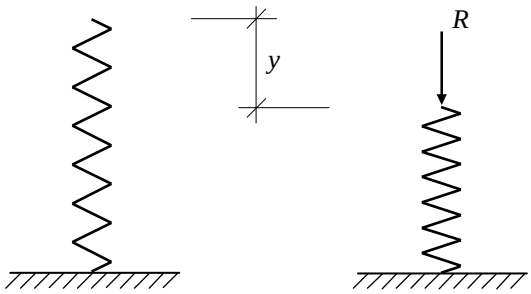
7

Rugalmas alátámasztású tartószerkezetek

Tartószerkezeteink támaszairól általában feltételezzük hogy tökéletesen merevek, azaz azokon a tartó csak meghatározott mozgásokat végezhet, míg a támasz által kifejtett statikai kényszereknek megfelelő elmozdulások értéke zérus, vagyis feltételezzük hogy:

– csúszó alátámasztáson az alátámasztó felület síkjára merőleges eltolódás zérus,
– fix csuklón semmilyen irányban nem keletkezhet eltolódás,
– befogáson sem eltolódás sem elfordulás nem keletkezhet.

Valójában a támasztó- és a hozzájuk csatlakozó szerkezetek rugalmas tulajdonságúak; a kényszererők hatására azokban a bennük működő erőhatásokkal arányos elmozdulások ébredhetnek. A rugalmas viselkedés vizsgálatához a támaszokat ezért rugókkal modellezzük.



7.1 ábra. Rugalmas megtámasztás.

A 7.1 ábrán a legegyszerűbb, a csúszó alátámasztásnak megfelelő rugalmas támaszt tüntettük fel, amely tehát csupán a rugó tengelyében működő erő felvételére alkalmas. Feltételezzük, hogy a rugóban működő erő (R) és az általa létrehozott eltolódás (y) között a kapcsolat lineáris, azaz

$$R = cy$$

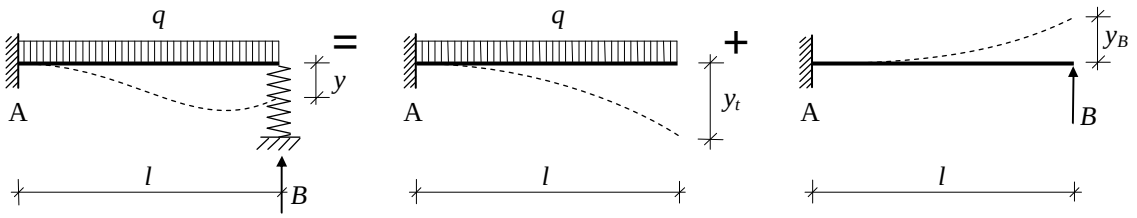
A c tényező az ún. rugóállandó, mely kísérleti úton a $c = R/y$ összefüggés alapján határozható meg. Mértékegysége a definícióból következően N/mm.

Megjegyezzük, hogy az $R = cy$ egyenletet Hooke-féle törvénynek nevezzük (vö. $\sigma = E\varepsilon$).

A következőkben három példán mutatjuk be a rugalmas alátámasztású szerkezetek erőtani viselkedésének sajátosságait.

7.1 Rugalmas alátámasztású befogott kéttámaszú tartó

A 7.2/a ábrán olyan egyenletesen megoszló teherrel terhelt tartót tüntettünk fel, amely egyik végén mereven befogott, másik végén pedig csupán függőleges erő felvételére alkalmas rugalmas támasszal van megtámasztva. A tartó q terhelését, anyagának E rugalmassági tényezőjét, a keresztmetszet a hajlítás síkjára merőleges főtengelyre vonatkozó I inercianyomatékát és a rugalmas támasz c rugóállandóját ismertnek tekintjük. Célunk annak vizsgálata, hogy a tartó geometriai (l, I) és fizikai (E, c) jellemzőinek változása milyen hatást gyakorol a támaszerők, ill. a legnagyobb nyomaték nagyságára.



a) b) c)

7.2 ábra. Rugalmas alátámasztású, másik végén befogott tartó.

A vizsgált tartó statikai szempontból határozatlan, ezért a vizsgálathoz alakváltozási összefüggéseket kell alkalmaznunk.

Ha a tartó rugalmas alátámasztását eltávolítva képzeljük, a 7.2/b ábra szerinti konzoltartóhoz jutunk, melynek eltolódása a tartó végén y_t. A rugalmas támaszban működő B támaszerő a konzoltartó végén y_B eltolódást eredményez (7.2/c ábra).

Az eredeti tartó rugalmas alátámasztásának y eltolódása és az előző elmozdulások között az

$$y = y_t - y_B$$

összefüggés írható fel.

Figyelembe véve, hogy

$$y_t = \frac{ql^4}{8EI}$$

és

$$y_B = \frac{Bl^3}{3EI}$$

továbbá $B = cy$, az alakváltozási egyenlet a következő alakot ölti:

$$y = \frac{ql^4}{8EI} - \frac{cl^3}{3EI} y$$

Ez utóbbi egyenletet átrendezve

$$\left(1+\frac{cl^3}{3EI}\right)y=\frac{ql^4}{8EI}$$

kifejezhetjük az *y* értékét:

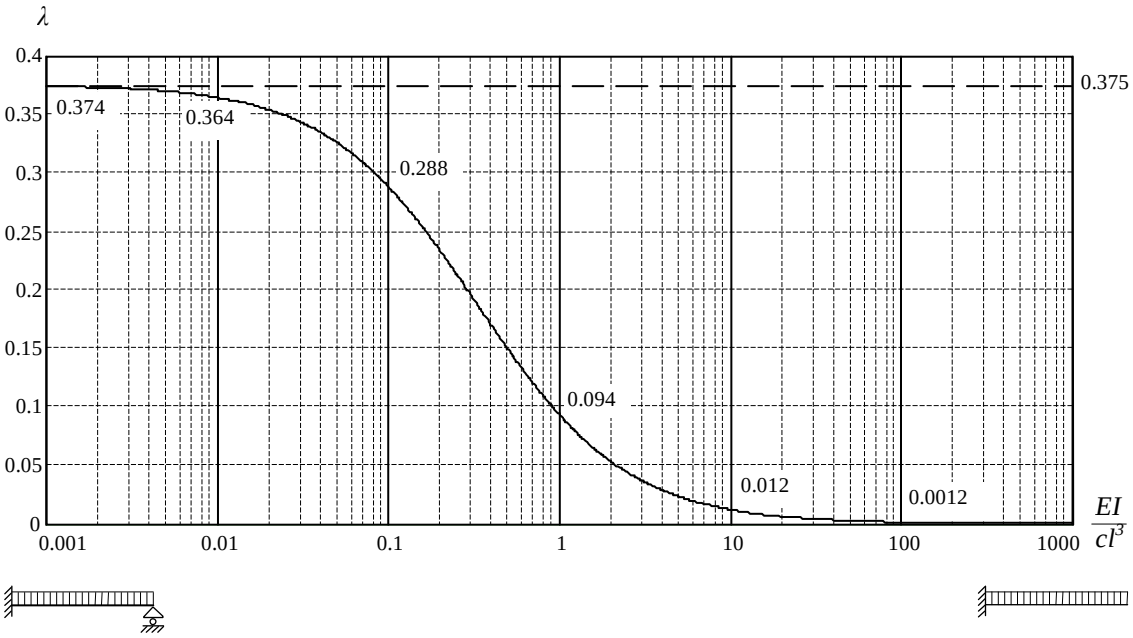
$$y=\frac{\frac{ql^4}{8EI}}{1+\frac{cl^3}{3EI}}$$

A *B* támaszerő ezzel

$$B=cy=\frac{\frac{cl^3}{EI}\frac{1}{8}ql}{1+\frac{cl^3}{EI}\frac{1}{3}}$$

illetve EI/cl^3-el egyszerűsítve:

$$B=\frac{0.125}{0.333+\frac{EI}{cl^3}}ql$$



7.3 ábra. A λ tényező értékei az EI/cl^3 függvényében.

Bevezetve a

$$\lambda = \frac{0.125}{0.333 + \frac{EI}{cl^3}}$$

jelölést, a támaszerő:

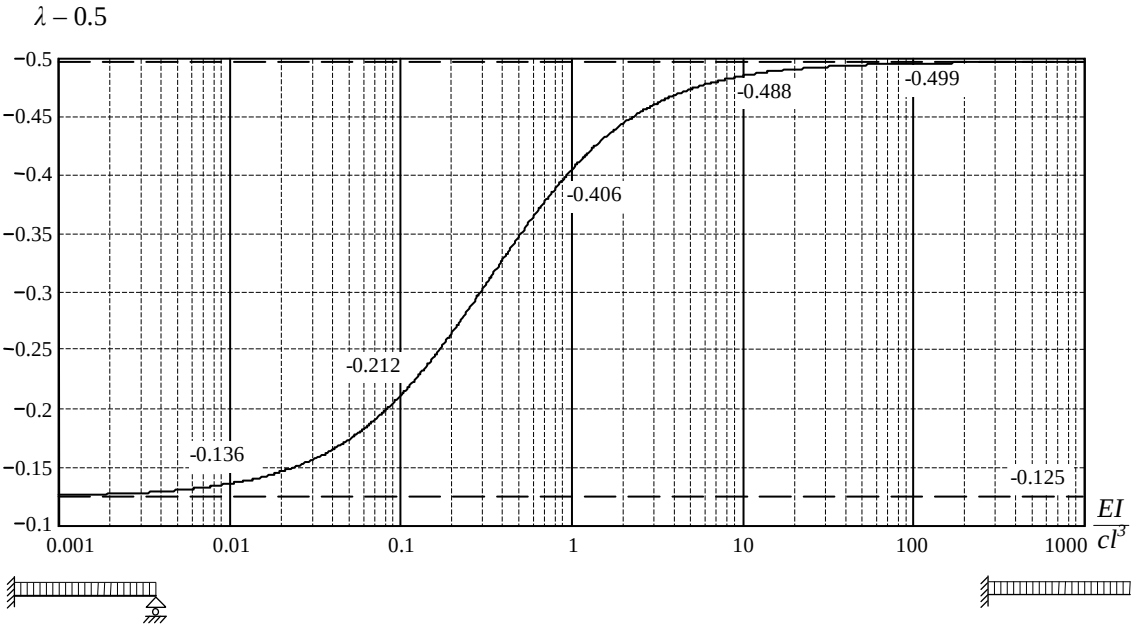
$$B = \lambda ql$$

A legnagyobb nyomaték a befogásnál keletkezik:

$$M_{\max} = Bl - \frac{ql^2}{2} = \lambda ql^2 - \frac{1}{2} ql^2$$

tehát

$$M_{\max} = (\lambda - 0.5) ql^2$$



7.4 ábra. A (λ – 0.5) szorzó értékei az EI/cl^3 függvényében.

Amint látjuk, mind a támaszerő, mind a legnagyobb nyomaték a λ-tól függ. A λ képletében a geometriai és fizikai jellemzők egyetlen tört tényezőit képezik. Az

$$\frac{EI}{cl^3}$$

törtet rendszermerevségnek szokták nevezni.

A 7.3 és 7.4 ábrán a λ és a (λ – 0.5) tényezők változásának diagramjait ábrázoltuk a

rendszermerevség függvényében. A két diagramból kitűnik, hogy ha az

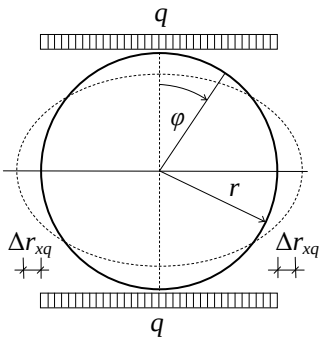
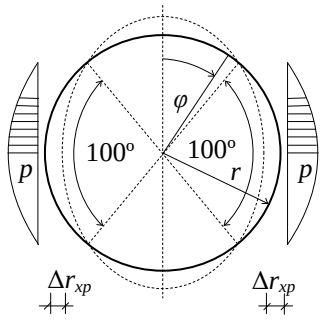
$$\frac{EI}{cl^3}$$

tört a nullához tart (mert a rugóállandó a végtelenhez tart), akkor a támaszerő és a legnagyobb nyomaték nagysága a merev alátámasztású, befogott kéttámaszú tartóra jellemző értékekhez, míg ha a tört a végtelenhez tart (mert a rugóállandó a nullához tart), akkor a támaszerő és a legnagyobb nyomaték nagysága az egyszerű konzoltartóra jellemző értékeket közelíti.

7.2 Rugalmas közegbe ágyazott körtartó

Az építési gyakorlatban olyan tartókkal is találkozunk, melyeknek tengelyvonala kör alakú. Ilyenek például a tengelyük mentén állandó terhekkel terhelt csővezetékekből képzeletben kivágott egységnyi hosszúságú darabok, melyek így rúdszerkezeteknek tekinthetők.

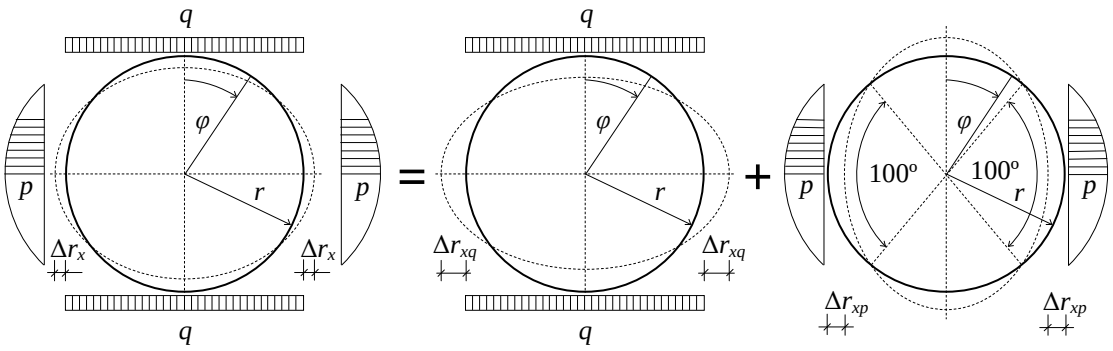
7.1 táblázat. Hajlítónyomatékok és sugárnövekmény.

Körtartó a teherrel	Nyomaték		Sugár növekmény Δr_x
	$\varphi = 0^o$ és $\varphi = 180^o$	$\varphi = 90^o$ és $\varphi = 270^o$	
	$M_1 = 0.25qr^2$	$M_2 = -0.25qr^2$	$0.0833\ qr^4/EI$
	$M_1 = -0.166pr^2$	$M_2 = 0.198pr^2$	$-0.0615\ pr^4/EI$

A csővezetékeket igen gyakran a talajba ágyazzuk. A talajt – bizonyos feltételek mellett – rugalmas közegnek tekinthetjük. A következőkben a rugalmas közegbe ágyazott körtartó vizsgálatának alapjaival foglalkozunk. Vizsgálataink során a

következő feltevéseket tekintjük érvényesnek:

1) A körtartóra az átmérő mentén egyenletesen megoszló *q* függőleges terhelés hat, amely a vele ellentétes oldalon azonos nagyságú és elrendezésű erőrendszert ébreszt.
2) A terhelésre merőleges irányban, a rugalmas közegben 100^0-os szöghöz tartozó húr mentén parabola szerint megoszló támaszerő-rendszer keletkezik, melyet a vízszintes eltolódás és az ismertnek tekintett *c* ágyazási tényező szorzataként definiálhatunk.
3) Az előzőekben rögzített módon terhelt körtartó jellemző keresztmetszeteiben keletkező hajlítónyomatékokat és a körtartó sugarának hosszváltozását ismerjük (7.1 táblázat).



7.5 ábra. Rugalmas közegbe ágyazott körtartó a terheléssel.

A 7.5/a ábrán feltüntetett körtartóra egyrészt a *q* terhek, másrészt a *p* maximális értékű támaszerő-rendszer működik. A tartó meggörbült tengelyvonalát szaggatott vonallal jelöltük. A körtartó sugarának növekménye a terhekre merőleges átmérő mentén Δr_x. Ez a növekmény a 7.5/b ábra szerinti teher okozta Δr_{xq} és a 7.5/c ábra szerinti támaszerő-rendszer okozta Δr_{xp} különbségeként írható fel:

$$\Delta r_x = \Delta r_{xq} - \Delta r_{xp}$$

Behelyettesítve a 7.1 táblázatban szereplő sugárnövekmény értékeket, a következő összefüggést kapjuk:

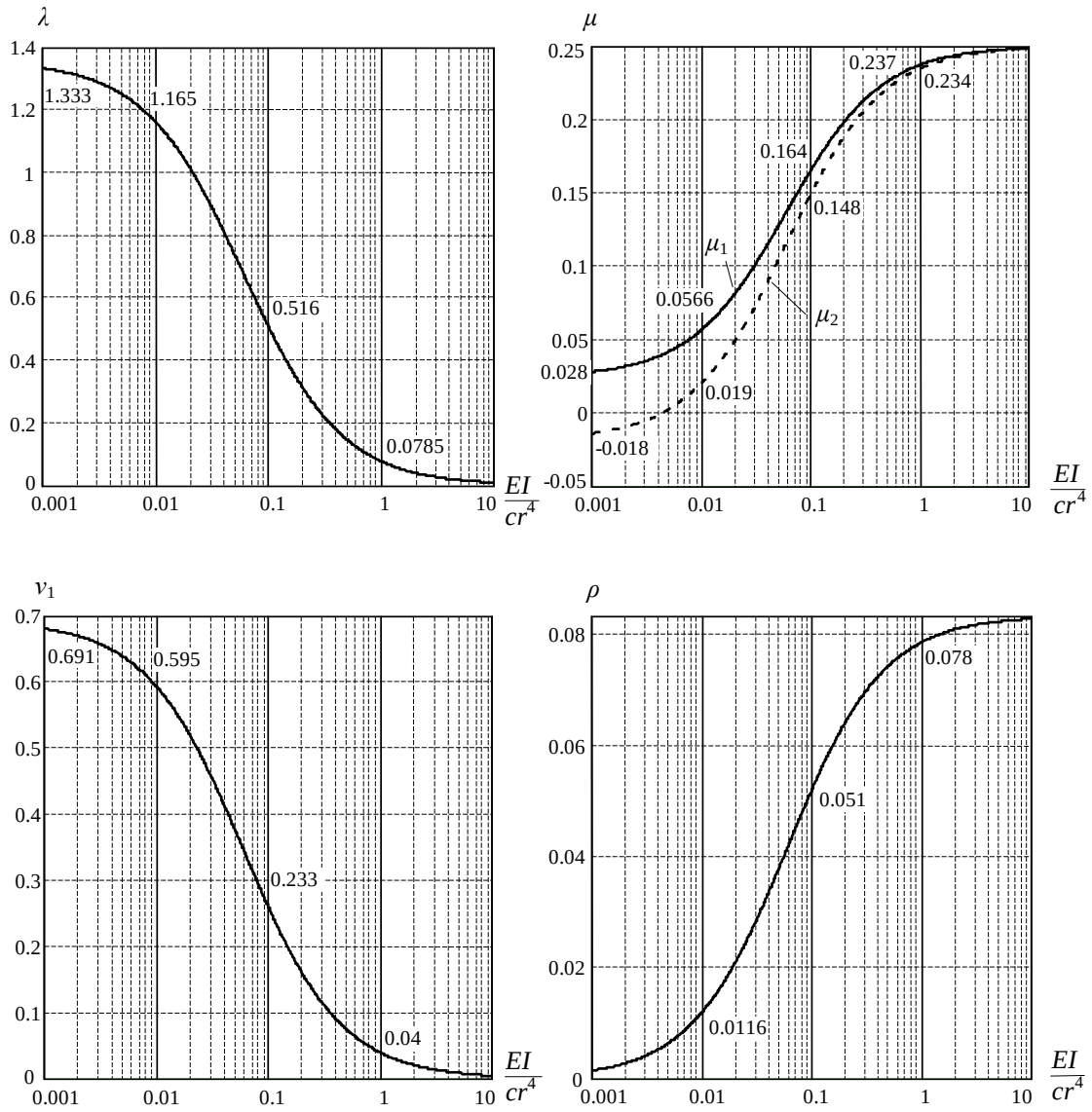
$$\Delta r_x = 0.0833\frac{qr^4}{EI} - 0.0615\frac{pr^4}{EI}$$

Figyelembe véve feltevéseink 2. pontjában foglaltakat, $p = c\Delta r_x$, ahol *c* az ágyazási tényező. Ezt az előző összefüggésbe helyettesítjük, majd rendezés után a következő egyenletet kapjuk:

$$\Delta r_x\left(1 + 0.0615\frac{cr^4}{EI}\right) = 0.0833\frac{qr^4}{EI}$$

Ez utóbbi egyenletből *EI*-vel való szorzás és rendezés után megkapjuk a Δr_x értékét:

$$\Delta r_x = \frac{0.0833 q r^4}{EI + 0.0615 c r^4}$$



7.6 ábra. A támaszerő-rendszer, nyomatékok és normálerők maximumának számításához szükséges λ, μ_1, μ_2, υ_1 és ρ állandók értékei.

A támaszerő-rendszer maximuma:

$$p = c\Delta r_x = \frac{0.0833 c r^4}{EI + 0.0615 c r^4} q$$

illetve cr^4-el történő egyszerűsítés után

$$p = \frac{0.0833}{0.0615 + \frac{EI}{cr^4}} q$$

Bevezetve a

$$\lambda = \frac{0.0833}{0.0615 + \frac{EI}{cr^4}}$$

jelölést, a támaszerő-rendszer maximuma

$$p = \lambda q$$

alakban írható.

A legnagyobb nyomatékok a 7.1 táblázatban feltüntetett összefüggések alapján:

$$M_1 = M(\varphi = 0) = M(\varphi = 180) = (0.25 - 0.1667\lambda) gr^2 = \mu_1 gr^2$$

$$M_2 = M(\varphi = 90) = M(\varphi = 270) = -(0.25 - 0.198\lambda) qr^2 = -\mu_2 qr^2$$

A legnagyobb normálerők:

$$N_1 = N(\varphi = 0) = N(\varphi = 180) = -\frac{2}{3}\lambda \sin 50 qr = \nu_1 qr$$

$$N_2 = N(\varphi = 90) = N(\varphi = 270) = qr$$

A vízszintes átmérő változása pedig:

$$\Delta r_x = \frac{p}{c} = \frac{\lambda}{c} q = \frac{0.0833}{1 + 0.0615 \frac{cr^4}{EI}} \frac{qr^4}{EI} = \rho \frac{qr^4}{EI}$$

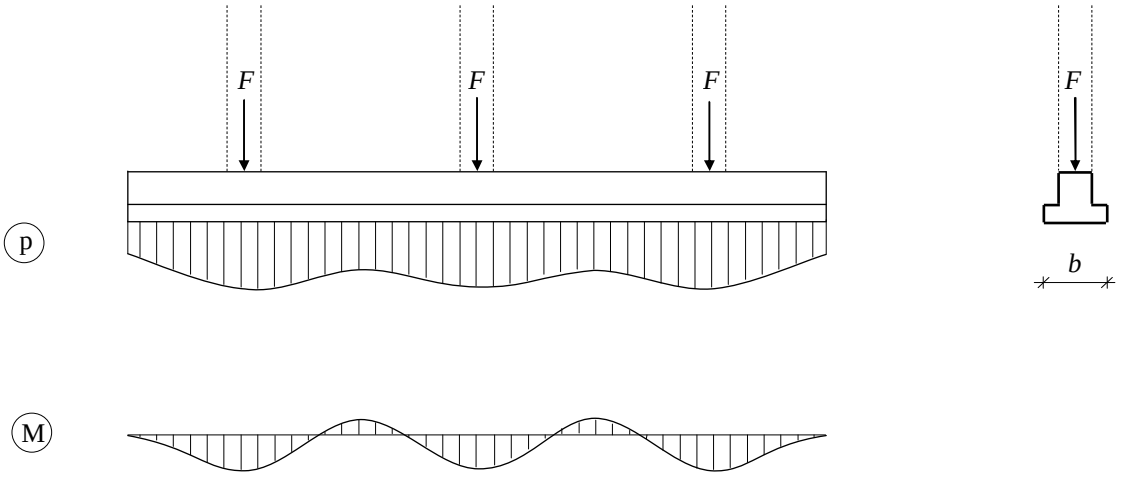
A támaszerő-rendszer maximumát jellemző λ, a legnagyobb nyomatékokat jellemző μ_1 és μ_2, az alsó és fölső keresztmetszetben ébredő normálerőt jellemző ν_1 valamint a vízszintes átmérőváltozást jellemző ρ diagramját az

$$\frac{EI}{cr^4}$$

rendszermerevség függvényében a 7.6 ábrán tüntettük fel. A diagramok alapján fontos megállapításokat tehetünk. Ha a cső fala merev (nagy az *EI* értéke), az oldalakra működő támaszerő-rendszer és a normálerő értéke kicsi, míg a hajlítónyomatékok és az átmérőváltozás értéke nagy. Hajlékony falú cső esetén nagy az oldalakon működő támaszerő-rendszer és a normálerő értéke, míg a hajlítónyomatékok és az átmérőváltozás értéke kicsi.

7.3 Rugalmas ágyazású egyenes tengelyű tartó

Az építési gyakorlatban gyakran alkalmazunk olyan rugalmas közegbe – pl. talajba – ágyazott egyenes tengelyű tartókat – pl. alapgerendákat – melyek terhelése hossztengelyük mentén változó. Ezek – szemben az egyszerű sávalapokkal – hossztengely irányú hajlításra is igénybe vannak véve. Erre láthatunk példát a 7.7 ábrán. A tartó a terhek hatására változó mértékben süllyed a talajba és változó nagyságú talajfeszültségek egyensúlyozzák a terhelő erőket.



7.7 ábra. Rugalmas ágyazású egyenes tengelyű tartó.

Feltételezzük, hogy a talajon felfekvő szerkezet valamely keresztmetszete alatt fellépő p talajfeszültség egyenesen arányos az e pontban fellépő y besüllyedéssel, vagyis érvényes a $p = cy$ összefüggés. Az arányossági tényező a c ágyazási együttható.

Ezt az ágyazási modellt Winkler-féle (rugalmas) ágyazásnak nevezzük. A rugalmas ágyazású, egyenes tengelyű tartók pontos vizsgálata egy negyedrendű differenciálegyenlet adott kerületi feltételek melletti megoldása útján lehetséges. Tekintettel arra, hogy ez viszonylag bonyolult és főként hosszadalmas számításokat tesz szükségessé, továbbá mert a gyakorlatban előforduló terhelési módok és méretviszonyok esetére méretezési diagramok készíthetők, a következőkben a KÖGLER-től származó diagramokat és azok használatát mutatjuk be.

A KÖGLER-féle diagramok felhasználásához először meg kell határozni a tartó ún. merevségi hosszát az

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{cb}}$$

képlet segítségével. Ebben a képletben

E a tartó anyagának rugalmassági tényezője [N/mm^2],

I a tartó keresztmetszetének inercianyomatéka a hajlítás síkjára merőleges főtengelyre [mm^4],

c a talaj ágyazási együtthatója, vagyis 1 mm süllyedés létrehozásához szükséges talpfeszültség [N/mm^3],

b a tartó szélessége [mm].

A tartó egyes keresztmetszeteiben fellépő hajlítónyomaték ezek után az

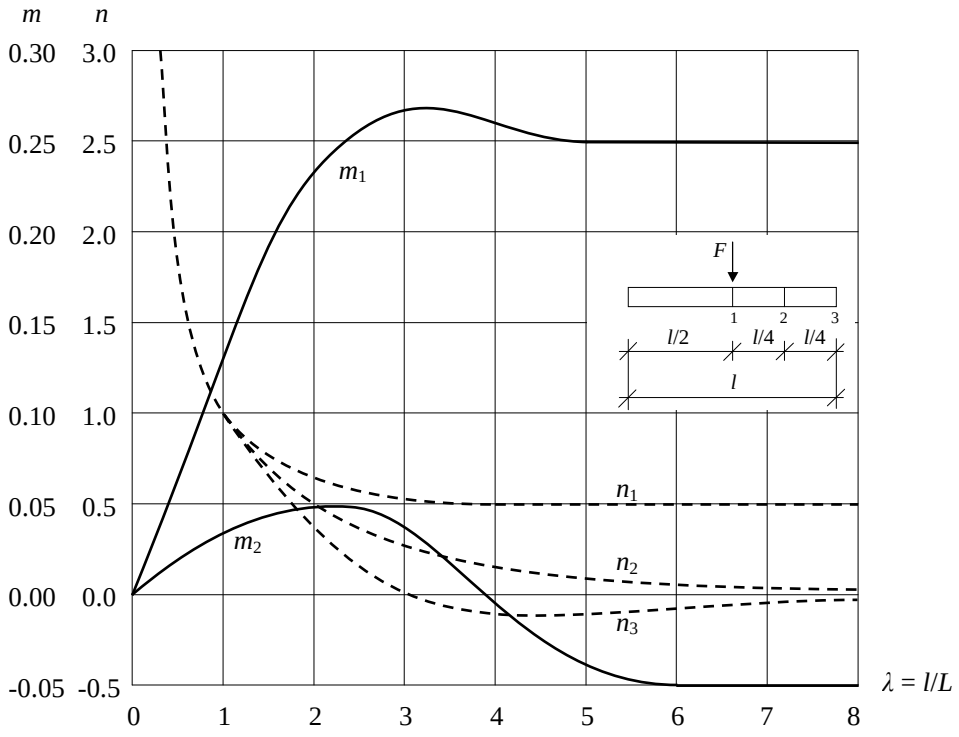
$$M = mFL$$

a keresztmetszet alatt keletkező talpfeszültség pedig a

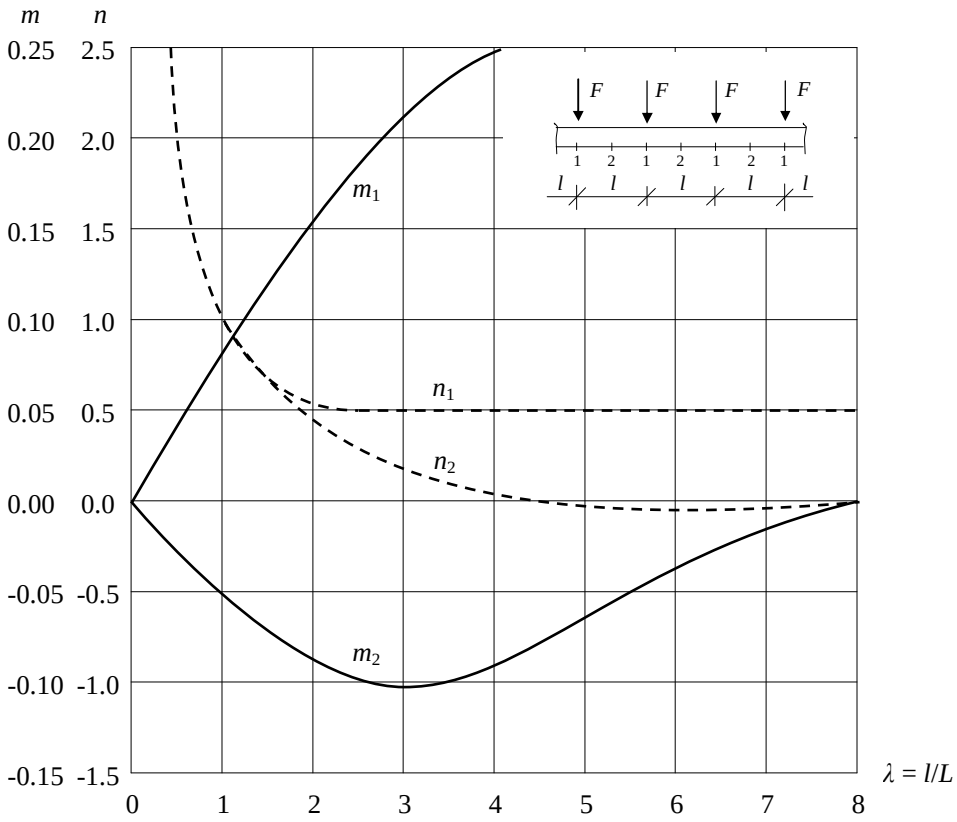
$$p = n\frac{F}{Lb}$$

képlet segítségével határozható meg.

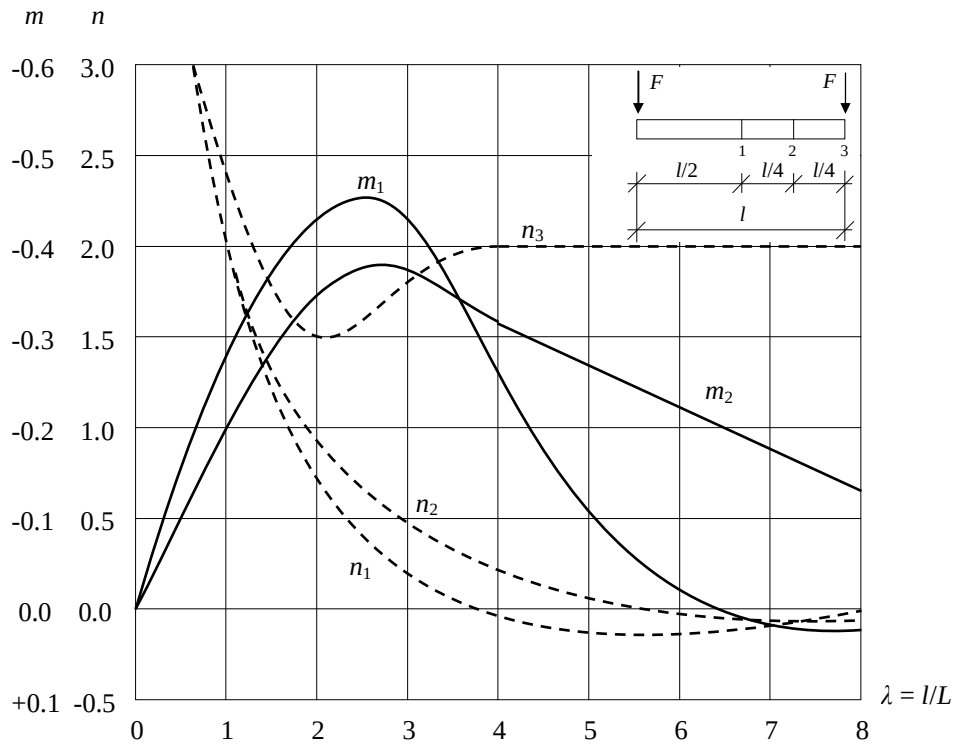
A *m* és *n* tényezőket a terhelési módtól, valamint a $\lambda = l/L$ hányadostól függően a 7.8, 7.9 és 7.10 ábrák diagramjaiból vehetjük.



7.8 ábra. Középen koncentrált erővel terhelt gerenda.



7.9 ábra. Egyenlő távolságokban ható koncentrált erőkkel terhelt végtelen hosszú gerenda.



7.10. Két végén koncentrált erővel terhelt gerenda.

Számpélda

A KÖGLER-féle diagramok segítségével határozzuk meg a 7.11 ábrán feltüntetett alapgerenda nyomatékábráját és a talpfeszültségek megoszlását, ha a gerenda hossza

a) l = 4.00 m (7.11/a ábra)

b) l = 12.0 m (7.11/b ábra)

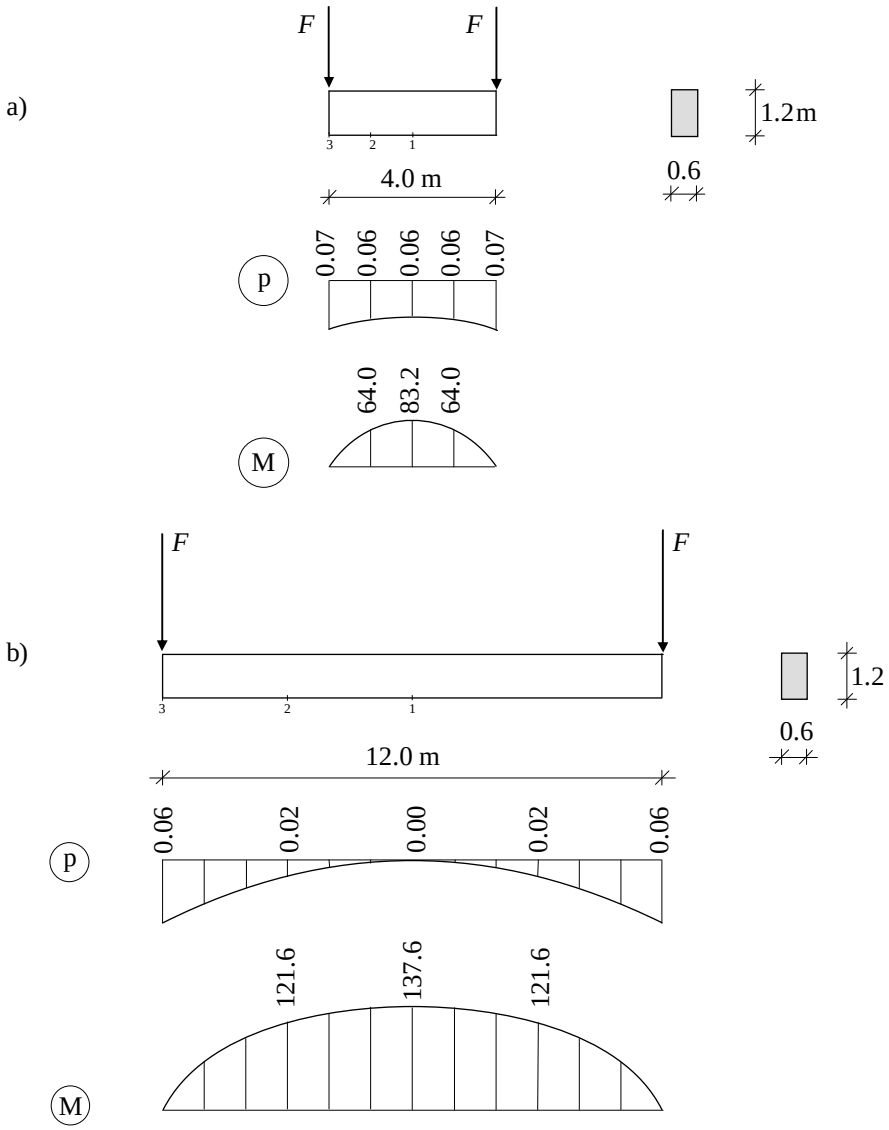
További adatok:

A tartó anyagának rugalmassági tényezője $E = 8.8 \cdot 10^3$ N/mm^2

A talaj ágyazási együtthatója $c = 2 \cdot 10^{-2}$ N/mm^3

A keresztmetszet inercianyomatéka:

$$I_x = \frac{0.6 \cdot 1.2^3}{12} = 0.0864 \text{ m}^4 = 8.64 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4$$



7.11 ábra. Számpélda adatai és eredményei. a) l = 4 m, b) l = 12 m.

A terhelő erő F = 80 kN.
A tartó merevségi hossza:

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{cb}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 8.8 \cdot 10^3 \cdot 8.64 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^2}} = 4 \cdot 10^3 \text{mm}$$

A nyomatékok és talpfeszültségek m és n szorzótényezőit a 7.10 ábra diagramjából olvastuk le. A tartó két változatának számítási eredményeit a 7.2 és 7.3 táblázatok tartalmazzák.

7.2 táblázat. A számításhoz szükséges állandók.

A tartó hossza l [m]	$\lambda = \frac{l}{L}$	m_1	m_2	n_1	n_2	n_3
4.00	1	-0.26	-0.20	1.85	1.85	2.30
12.00	3	-0.43	-0.38	0.10	0.50	1.78

7.3 táblázat. Eredmények: a talpfeszültségek és nyomatékok értékei.

A tartó hossza l [m]	Talpfeszültségek [N/mm^2]			Nyomatékok [kNm]		
	p_1	p_2	p_3	M_1	M_2	M_3
4.00	0.06	0.06	0.07	-83.2	-64.0	0
12.00	0.00	0.02	0.06	-137.6	-121.6	0

A vizsgált tartó két változatának nyomatékábráját és talpfeszültség eloszlását a 7.11 ábrán tüntettük fel.

A két különböző merevségű tartó nyomatéki és talpfeszültség ábráit összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a nagy merevségű tartó talpfeszültség eloszlása közel egyenletes, míg a hajlékony tartóé az egyenletes eloszlástól jelentősen eltérő. Ennek felelnek meg a hajlítónyomatékok változásai is.

8

Irodalomjegyzék

Csonka Pál: Szélerőkkel terhelt épületek födémeinek erőtani viselkedése. Magyar Építőipar. 1962, 66-68

Csonka Pál: Egyszerűsített eljárás szélerőkkel terhelt emeletes keretszerkezetek számítására. MTA Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei. **35**, 1965, 209-219

Csonka Pál: Szélerőkkel terhelt sokemeletes derékszögű keretek legnagyobb nyomatékai. MTA Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei. **35**, 1965, 271-275

Csonka Pál: Héjszerkezetek. Akadémia Kiadó, Budapest, 1981

Dulácska Endre – Kollár László: Méretezés földrengésre az európai elvek figyelembevételével. Tervezési Segédlet, TT-TS 4, 2003. Magyar Mérnöki Kamara, Tartószerkezeti Tagozat

Dulácska Endre: Kisokos statikusoknak. Segédlet tartószerkezetek tervezéséhez. 2. javított kiadás. Artifex Kiadó, Budapest, 2013

Jeary, A. P. and Ellis, B. R.: The accuracy of mathematical models of structural dynamics. Building Research Establishment. 1981, PD112/81

Kollár Lajos (szerk.): A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái. Második kiadás. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2006

Korda János – Ruzicska Béla – Zentai Zoltán: Gyűjtemény tartószerkezetek tervezéséhez. I-II-II kötet. Iparterv, Budapest, 1964

Márkus Gyula: Körszimmetrikus szerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964

Menyhárd István: Héjszerkezetek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966

MSZ EN 1991-1-4:2007 A tartószerkezeteket érő hatások. 1-4. rész: Szélhatás

Palotás László (szerk.): Mérnöki Kézikönyv. II. kötet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984

Rózsa László (szerk.): Az alapozás kézikönyve. Műszaki Könyvkiadó. Budapest, 1971

Szmodits Kázmér: Útmutató panelépületek statikai tervezéséhez. Építéstudományi Intézet. 1975

Timoshenko, S. – Woinowsky-Krieger, S.: Lemezek és héjak elmélete. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966

Zalka Károly Mechanika III. Határozatlan tartók. Budapest, 2010; 2024, e-kiadás

Zalka Károly Épületek komplex statikai vizsgálata. Budapest, 2008; 2025, e-kiadás

Zalka Károly Keretekkel, falakkal és magokkal merevített épületek globális statikai vizsgálata. Budapest, 2014; 2025, e-kiadás